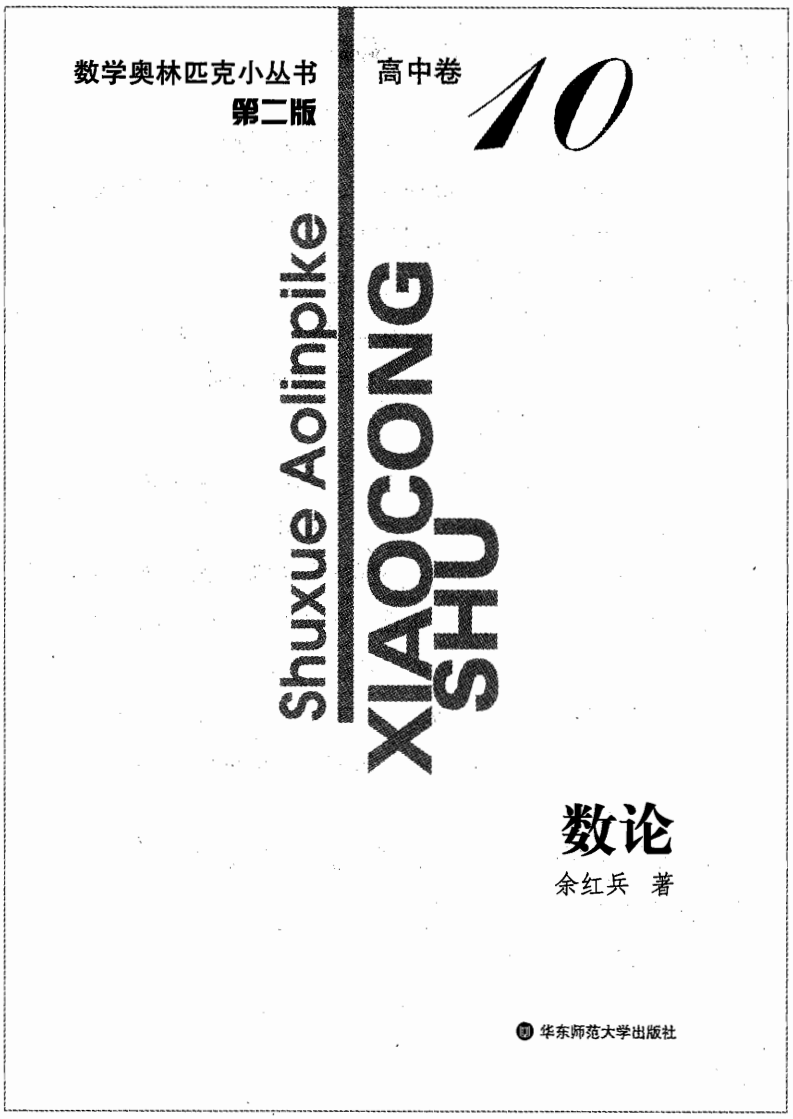

## 数学奥林匹克小丛书（第二版） 编委会

# 总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元



王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

# 目　录

# 1 整　除

本书中所涉及的数都是整数，所用的字母除特别申明外也都表示整数.

设 $a$、$b$ 是给定的数，$b\neq 0$. 若存在整数 $c$，使得 $a=bc$，则称 $b$ 整除 $a$，记作 $b\mid a$，并称 $b$ 是 $a$ 的一个约数(或因子)，而称 $a$ 为 $b$ 的一个倍数. 如果不存在上述的整数 $c$，则称 $b$ 不能整除 $a$，记作 $b\nmid a$.

由整除的定义，容易推出整除的几个简单性质(证明请读者自己完成)：

(1) 若 $b\mid c$，且 $c\mid a$，则 $b\mid a$，即整除性质具有传递性.

(2) 若 $b\mid a$，且 $b\mid c$，则 $b\mid(a\pm c)$，即为某一整数的倍数的整数之集关于加、减运算封闭.

反复应用这一性质，易知：若 $b\mid a$ 及 $b\mid c$，则对任意整数 $u$、$v$ 有 $b\mid(au+cv)$. 更一般地，若 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 都是 $b$ 的倍数，则 $b\mid(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

(3) 若 $b\mid a$，则或者 $a=0$，或者 $|a|\geqslant|b|$. 因此，若 $b\mid a$ 且 $a\mid b$，则 $|a|=|b|$.

对任意两个整数 $a$、$b$ $(b>0)$，$a$ 当然未必被 $b$ 整除，但我们有下面的结论——带余除法，这是初等数论中最为基本的一个结果.

(4) (带余除法)设 $a$、$b$ 为整数，$b>0$，则存在整数 $q$ 和 $r$，使得

$$a=bq+r,\text{其中 } 0\leqslant r<b,$$

并且 $q$ 和 $r$ 由上述条件唯一确定.

整数 $q$ 称为 $a$ 被 $b$ 除得的(不完全)商，数 $r$ 称为 $a$ 被 $b$ 除得的余数. 注意，$r$ 共有 $b$ 种可能的取值：0，1，…，$b-1$. 若 $r=0$，即为前面说的 $a$ 被 $b$ 整除的情形.

易知，带余除法中的商 $q$ 实际上为 $\left[\frac{a}{b}\right]$(不超过 $\frac{a}{b}$ 的最大整数)，而带余除法的核心是关于余数 $r$ 的不等式：$0\leqslant r<b$，我们在后面将看到这一点.

证明 $b\mid a$ 的基本手法是将 $a$ 分解为 $b$ 与一个整数之积. 在较初级的问题中，这种数的分解常通过在一些代数式的分解中取特殊值而产生. 下面两个分解式在这类论证中应用很多.

(5) 若 $n$ 是正整数，则

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

(6) 若 $n$ 是正奇数，则(在上式中用 $-y$ 代换 $y$)

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

**例 1**　证明：$1\underbrace{0\cdots0}_{200个0}1$ 被 1001 整除.

**证明**　由分解式(6)，我们有

$$\begin{aligned}1\underbrace{0\cdots0}_{200个0}1&=10^{201}+1=(10^3)^{67}+1\\&=(10^3+1)[(10^3)^{66}-(10^3)^{65}+\cdots-10^3+1],\end{aligned}$$

所以，$10^3+1(=1001)$ 整除 $1\underbrace{0\cdots0}_{200个0}1$.

**例 2**　设 $m>n\geqslant0$，证明：$(2^{2^n}+1)\mid(2^{2^m}-1)$.

**证明**　在分解式(5)中取 $x=2^{2^{n+1}}$，$y=1$，并以 $2^{m-n-1}$ 代替那里的 $n$，得出

$$2^{2^m}-1=(2^{2^{n+1}}-1)[(2^{2^{n+1}})^{2^{m-n-1}-1}+\cdots+2^{2^{n+1}}+1],$$

故
$$(2^{2^{n+1}}-1)\mid(2^{2^m}-1).$$

又
$$2^{2^{n+1}}-1=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1),$$

从而
$$(2^{2^n}+1)\mid(2^{2^{n+1}}-1).$$

于是由整除性质(1)知 $(2^{2^n}+1)\mid(2^{2^m}-1)$.

**注**　整除问题中，有时直接证明 $b\mid a$ 不易入手，我们可以尝试着选择适当的“中间量”$c$，来证明 $b\mid c$ 及 $c\mid a$，由此及整除性质(1)，便导出了结论.

**例 3**　对正整数 $n$，记 $S(n)$ 为 $n$ 的十进制表示中数码之和. 证明：$9\mid n$ 的充分必要条件是 $9\mid S(n)$.

**证明**　设 $n=a_k\times10^k+\cdots+a_1\times10+a_0$ (这里 $0\leqslant a_i\leqslant9$，且 $a_k\neq0$)，则 $S(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$. 我们有

$$n-S(n)=a_k(10^k-1)+\cdots+a_1(10-1).\qquad①$$

对 $1\leqslant i\leqslant k$，由分解式(5)知 $9\mid(10^i-1)$，故①式右端 $k$ 个加项中的每一个都是 9 的倍数，从而由整除性质(2)知，它们的和也被 9 整除，即 $9\mid(n-S(n))$. 由此易推出结论的两个方面.

**注 1**　整除性质(2)提供了证明 $b|(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的一种基本的想法，我们可尝试着证明更强的(也往往是更易于证明的)命题：

$$b \text{ 整除每个 } a_i(i=1,2,\cdots,n).$$

这一更强的命题当然并非一定成立，即使在它不成立时，上述想法仍有一种常常奏效的变通：将和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 适当地分组成为 $c_1+c_2+\cdots+c_k$，而 $b|c_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 读者将看到，为了证明 $b|a$，我们有时针对具体问题将 $a$ 表示为适当数之和，以应用上述想法论证.

**注 2**　例 3 的证明，实际上给出了更强的结论：对任意正整数 $n$，数 $n$ 与 $S(n)$ 之差总是 9 的倍数. 由此易知，$n$ 与 $S(n)$ 被 9 除得的余数相同(这可表述为 $n$ 与 $S(n)$ 模 9 同余，请看第 6 单元).

**注 3**　有些情形，我们能够由正整数十进制表示中的数码(字)的性质，推断这整数能否被另一个整数整除，这样的结论，常称为“整除的数字特征”. 被 2、5、10 整除的数的数字特征是显而易见的. 例 3 则给出了被 9 整除的数的数字特征. 这一结果，应用相当广泛而且灵活多样. 另外，习题 1 第 3 题给出了被 11 整除的数的数字特征，这也是一个应用较多的结论.

**例 4**　设 $k\geqslant 1$ 是一个奇数，证明：对任意正整数 $n$，数 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 不能被 $n+2$ 整除.

**证明**　$n=1$ 时结论显然成立. 设 $n\geqslant 2$，记所说的和为 $A$，则

$$2A=2+(2^k+n^k)+(3^k+(n-1)^k)+\cdots+(n^k+2^k).$$

因 $k$ 是正奇数，故由分解式(6)可知，对每个 $i\geqslant 2$，数 $i^k+(n+2-i)^k$ 被 $i+(n+2-i)=n+2$ 整除，故 $2A$ 被 $n+2$ 除得的余数是 2，从而 $A$ 不可能被 $n+2$ 整除(注意 $n+2>2$).

**注**　论证中我们应用了“配对法”，这是代数中变形和式的一种常用手法.

**例 5**　设 $m$、$n$ 为正整数，$m>2$，证明：$(2^m-1)\nmid(2^n+1)$.

**证明**　首先，当 $n\leqslant m$ 时，易知结论成立. 事实上，$m=n$ 时，结论平凡；$n<m$ 时，结果可由 $2^n+1\leqslant 2^{m-1}+1<2^m-1$ 推出来(注意 $m>2$，并参看整除性质(3)).

最后，$n>m$ 的情形可化为上述特殊情形：由带余除法，$n=mq+r$，$0\leqslant r<m$，而 $q>0$. 由于

$$2^n+1=(2^{mq}-1)2^r+2^r+1,$$

由分解式(5)知 $(2^m-1)\mid(2^{mq}-1)$；而 $0\leqslant r<m$，故由上面证明了的结论知 $(2^m-1)\nmid(2^r+1)$. (注意 $r=0$ 时，结论平凡.)从而当 $n>m$ 时也有 $(2^m-1)\nmid$

$(2^n+1)$. 这就证明了本题结论.

我们顺便提一下，例 5 中的条件 $m>2$ 是必要的. 因为当 $m=2$ 时，$2^m-1=3$，而由(6)知，对于所有奇数 $n\geqslant 1$，数 $2^n+1$ 均被 3 整除.

**例 6** 任给 $n>1$，证明：有正整数 $a$，使得 $a^a+1$，$a^{a^a}+1$，…中所有数均被 $n$ 整除.

**解** 我们注意，若 $a$ 是奇数，则 $a^a$，$a^{a^a}$，…均是奇数，从而由(6)知，$a^a+1$，$a^{a^a}+1=a^{(a^a)}+1$，… 均有因子 $a+1$. 因此取 $a=2n-1$ 则符合问题中的要求.

**例 7** 任给 $n\geqslant 2$，证明：存在 $n$ 个互不相同的正整数，其中任意两个的和，整除这 $n$ 个数的积.

**解** 我们任取 $n$ 个互不相同的正整数 $a_1$，…，$a_n$，并选取一个(正整数)参数 $K$，希望 $Ka_1$，…，$Ka_n$ 的积 $K^n a_1\cdots a_n$ 被任意两项的和 $Ka_i+Ka_j$ 整除 $(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$. 由于 $n\geqslant 2$，显然，取

$$K=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j)$$

即符合要求(注意 $Ka_1$，…，$Ka_n$ 互不相同).



## 习 题 1

**1** 设 $n$ 和 $k$ 都是正整数，则 1，2，…，$n$ 中恰有 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 个数被 $k$ 整除.

**2** 11 个女孩与 $n$ 个男孩去采蘑菇. 所有这些孩子共采到 $n^2+9n-2$ 个蘑菇，并且每个孩子采到的个数都相同. 试确定，采蘑菇的孩子中是女孩多还是男孩多.

**3** 设正整数 $n$ 的十进制表示为 $n=\overline{a_k\cdots a_1a_0}$ $(0\leqslant a_i\leqslant 9,a_k\neq 0)$，记 $T(n)=a_0-a_1+\cdots+(-1)^k a_k$ (由 $n$ 的个位起始的数码的正、负交错和). 证明 $n-T(n)$ 被 11 整除. 由此得出被 11 整除的数的数字特征：11 整除 $n$ 的充分必要条件是 11 整除 $T(n)$.

**4** 设 $n$ 个整数具有下述性质：其中任意 $n-1$ 个数之积与剩下那个数的差都能被 $n$ 整除. 证明：这 $n$ 个数的平方和也能被 $n$ 整除.

**5** 设整数 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足 $ad-bc>1$，证明：$a$、$b$、$c$、$d$ 中至少有一个数不被 $ad-bc$ 整除.

# 2 最大公约数与最小公倍数

最大公约数是数论中的一个重要概念.

设 $a$、$b$ 不全为零，同时整除 $a$、$b$ 的整数（如 $\pm 1$）称为它们的公约数. 因 $a$、$b$ 不全为零，故由第 1 单元中性质(3)推知，$a$、$b$ 的公约数只有有限多个，我们将其中最大的一个称为 $a$、$b$ 的最大公约数，用符号 $(a, b)$ 表示. 显然，最大公约数是一个正整数.

当 $(a, b) = 1$ 时（即 $a$，$b$ 的公约数只有 $\pm 1$），我们称 $a$ 与 $b$ 互素（互质）. 读者在后面将看到，这种情形特别重要.

对于多于两个的（不全为零的）整数 $a$，$b$，…，$c$，可类似地定义它们的最大公约数 $(a, b, \cdots, c)$. 若 $(a, b, \cdots, c) = 1$，则称 $a$，$b$，…，$c$ 互素. 请注意，此时并不能推出 $a$，$b$，…，$c$ 两两互素（即其中任意两个都互素）；但反过来，若 $a$，$b$，…，$c$ 两两互素，则显然有 $(a, b, \cdots, c) = 1$.

由定义不难得出最大公约数的一些简单性质：

任意改变 $a$、$b$ 的符号不改变 $(a, b)$ 的值，即有 $(\pm a, \pm b) = (a, b)$；

$(a, b)$ 关于 $a$、$b$ 对称，即有 $(a, b) = (b, a)$；

$(a, b)$ 作为 $b$ 的函数，以 $a$ 为周期，即对任意整数 $x$，有 $(a, b+ax) = (a, b)$.

下面(1)中的结论，是建立最大公约数的性质的基础，通常称为裴蜀等式.

(1) 设 $a$、$b$ 是不全为 0 的整数，则存在整数 $x$、$y$，使得

$$ax + by = (a, b).$$

顺便提及，若 $x = x_0$，$y = y_0$ 是满足上式的一对整数，则等式

$$a(x_0 + bu) + b(y_0 - au) = (a, b) \ (u \text{ 为任意整数})$$

表明，满足上式的 $x$、$y$ 有无穷多组；并且，在 $ab > 0$ 时，可选择 $x$ 为正（负）数，此时 $y$ 则相应地为负（正）数.

由(1)易于推出下面的

(2) 两个整数 $a$、$b$ 互素的充分必要条件是存在整数 $x$、$y$，使得

$$ax + by = 1.$$

事实上，条件的必要性是(1)的特例. 反过来，若有 $x$、$y$ 使等式成立，设 $(a, b) = d$，则 $d|a$ 且 $d|b$，故 $d|ax$ 及 $d|by$，于是 $d|(ax+by)$，即 $d|1$，从而 $d = 1$.

由(1)及(2)不难导出下面的几个基本结论：

(3) 若 $m|a$，$m|b$，则 $m|(a, b)$，即 $a$、$b$ 的任一个公约数都是它们的最大公约数的约数.

(4) 若 $m > 0$，则 $(ma, mb) = m(a, b)$.

(5) 若 $(a, b) = d$，则 $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. 因此，由两个不互素的整数，可自然地产生一对互素的整数.

(6) 若 $(a, m) = 1$，$(b, m) = 1$，则 $(ab, m) = 1$. 这表明，与一个固定整数互素的整数之集关于乘法封闭. 由此可推出：若 $(a, b) = 1$，则对任意 $k > 0$ 有 $(a^k, b) = 1$，进而对任意 $l > 0$ 有 $(a^k, b^l) = 1$.

(7) 设 $b|ac$. 若 $(b, c) = 1$，则 $b|a$.

(8) 设正整数 $a$、$b$ 之积是一个整数的 $k$ 次幂 $(k \geqslant 2)$. 若 $(a, b) = 1$，则 $a$、$b$ 都是整数的 $k$ 次幂. 一般地，设正整数 $a$，$b$，…，$c$ 之积是一个整数的 $k$ 次幂. 若 $a$，$b$，…，$c$ 两两互素，则 $a$，$b$，…，$c$ 都是整数的 $k$ 次幂.

(6)、(7)、(8)表现了互素的重要性，它们的应用也最为广泛.



现在，我们简单地谈谈最小公倍数.

设 $a$、$b$ 是两个非零整数，一个同时为 $a$、$b$ 倍数的数称为它们的一个公倍数. $a$、$b$ 的公倍数显然有无穷多个，这其中最小的正数称为 $a$、$b$ 的最小公倍数，记作 $[a, b]$. 对于多个非零整数 $a$，$b$，…，$c$，可类似地定义它们的最小公倍数 $[a, b, \cdots, c]$.

下面是最小公倍数的主要性质.

(9) $a$ 与 $b$ 的任一公倍数都是 $[a, b]$ 的倍数. 对于多于两个整数的情形，类似的结论也成立.

(10) 两个整数 $a$、$b$ 的最大公约数与最小公倍数满足

$$(a, b)[a, b] = |ab|.$$

但请注意，对于多于两个整数的情形，类似的结论不成立(请读者举出例子). 然而我们有下面的

(11) 若 $a$，$b$，…，$c$ 两两互素，则有

$$[a, b, \cdots, c] = |ab\cdots c|.$$

由此及(9)可知，若 $a|d$，$b|d$，…，$c|d$，且 $a$，$b$，…，$c$ 两两互素，则有 $ab\cdots c|d$.

互素，在数论中相当重要，往往是许多问题的关键或基础. 数学竞赛中，有一些问题要求证明两个整数互素（或求它们的最大公约数），下面几个例子表现了处理这些问题的一个基本方法.

**例 1**　对任意整数 $n$，证明分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约分数.

**证明**　问题即要证明 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素. 易知这两数适合裴蜀等式

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1,$$

因此所说的结论成立.

一般来说，互素整数 $a$、$b$ 适合的裴蜀等式不易导出，因此我们常采用下述的变通手法：制造一个与裴蜀等式类似的辅助等式

$$ax+by=r,$$

其中 $r$ 是一个适当的整数. 若设 $(a,b)=d$，则由上式知 $d\mid r$. 所谓适当的 $r$ 是指：由 $d\mid r$ 能够通过进一步的论证导出 $d=1$，或者 $r$ 的约数较少，可以由排除法证得结论.

此外，上述辅助等式等价于 $a\mid(by-r)$ 或 $b\mid(ax-r)$，有时，这些由整除更容易导出来.

**例 2**　设 $n$ 是正整数，证明 $(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

**证明**　我们有等式

$$(n!+1)(n+1)-((n+1)!+1)=n. \qquad ①$$

设 $d=(n!+1,(n+1)!+1)$，则由①知 $d\mid n$.

进一步，因 $d\mid n$ 故 $d\mid n!$，结合 $d\mid(n!+1)$ 可知 $d\mid 1$，故 $d=1$.

**例 3**　记 $F_k=2^{2^k}+1$，$k\geqslant 0$. 证明：若 $m\neq n$，则 $(F_m,F_n)=1$.

**证明**　不妨设 $m>n$. 论证的关键是利用 $F_n\mid(F_m-2)$（见第 1 单元例 2），即有一个整数 $x$，使得

$$F_m+xF_n=2.$$

设 $d=(F_m,F_n)$，则由上式推出 $d\mid 2$，所以 $d=1$ 或 2. 但 $F_n$ 显然是奇数，故必须 $d=1$.

**注**　$F_k$ $(k\geqslant 0)$ 称为费马（Fermat）数. 例 3 表明，费马数两两互素，这是费马数的一个有趣的基本性质.

下面例 4 的结论用处颇多，值得记住.

**例 4**　设 $a>1$，$m$，$n>0$，证明：

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1.$$

**证明** 设 $D=(a^m-1,\ a^n-1)$. 我们通过证明$(a^{(m,n)}-1)\mid D$及$D\mid(a^{(m,n)}-1)$来导出 $D=a^{(m,n)}-1$，这是数论中证明两数相等的常用手法.

因为$(m,n)\mid m$，$(m,n)\mid n$，由第1单元中分解公式(5)即知$(a^{(m,n)}-1)\mid(a^m-1)$，以及$(a^{(m,n)}-1)\mid(a^n-1)$. 故由本单元的性质(3)可知，$a^{(m,n)}-1$整除$(a^m-1,\ a^n-1)$，即$(a^{(m,n)}-1)\mid D$.

为了证明 $D\mid(a^{(m,n)}-1)$，我们设 $d=(m,n)$. 因 $m,n>0$，故可选择 $u,v>0$，使得(参见本单元(1)中的注释)

$$mu-nv=d. \tag{1}$$

因为 $D\mid(a^m-1)$，故更有 $D\mid(a^{mu}-1)$. 同样，$D\mid(a^{nv}-1)$. 故 $D\mid(a^{mu}-a^{nv})$，从而由①，得

$$D\mid a^{nv}(a^d-1). \tag{2}$$

此外，因 $a>1$，及$D\mid(a^m-1)$，故 $(D,a)=1$，进而 $(D,a^{nv})=1$. 于是，从②及性质(7)导出 $D\mid(a^d-1)$，即 $D\mid(a^{(m,n)}-1)$.

综合已证得的两方面的结果，可知 $D=a^{(m,n)}-1$.

**例5** 设 $m,n>0$，$mn\mid(m^2+n^2)$，则 $m=n$.

**证明** 设 $(m,n)=d$，则 $m=m_1d$，$n=n_1d$，其中 $(m_1,n_1)=1$.

于是，已知条件化为 $m_1n_1\mid(m_1^2+n_1^2)$，故更有 $m_1\mid(m_1^2+n_1^2)$，从而 $m_1\mid n_1^2$. 但 $(m_1,n_1)=1$，故 $(m_1,n_1^2)=1$. 结合 $m_1\mid n_1^2$，可知必须 $m_1=1$. 同理 $n_1=1$，因此 $m=n$.

**注1** 对两个给定的不全为零的整数，我们常借助它们的最大公约数，并应用性质(5)，产生两个互素的整数，以利用互素的性质作进一步论证(参见性质(6)、(7))．就本题而言，由于 $mn$ 为二次式，$m^2+n^2$ 为二次齐次式，上述手续的功效，实质上是将问题化归成 $m$、$n$ 互素这种特殊情形.

**注2** 在某些问题中，已知的条件(或已证得的结论)$c\mid a$ 并不适用，我们可试着选取 $c$ 的一个适当的约数 $b$，并从 $c\mid a$ 过渡到(较弱的结论)$b\mid a$，以期望后者提供适宜于进一步论证的信息. 例5中，我们便是由 $m_1n_1\mid(m_1^2+n_1^2)$产生了 $m_1\mid n_1^2$，进而导出 $m_1=1$.

**例6** 设正整数 $a$、$b$、$c$ 的最大公约数为1，并且

$$\frac{ab}{a-b}=c.$$

证明：$a-b$ 是一个完全平方数.

**证明** 设 $(a,b)=d$，则 $a=da_1$，$b=db_1$，其中 $(a_1,b_1)=1$. 由于 $(a,b,c)=1$，故有 $(d,c)=1$.

现在，问题中的等式可化为

$$da_1b_1 = ca_1 - cb_1, \qquad ①$$

由此可见 $a_1$ 整除 $cb_1$. 因 $(a_1, b_1) = 1$，故 $a_1 | c$. 同样得 $b_1 | c$. 再由 $(a_1, b_1) = 1$ 便推出 $a_1b_1 | c$（参考性质(9)与(10)）.

设 $c = a_1b_1k$，其中 $k$ 是一个正整数. 一方面，显然 $k$ 整除 $c$；另一方面，结合①式得 $d = k(a_1 - b_1)$，故 $k | d$. 从而 $k | (c, d)$（见性质(3)）. 但 $(c, d) = 1$，故 $k = 1$.

因此 $d = a_1 - b_1$. 故 $a - b = d(a_1 - b_1) = d^2$. 这就证明了 $a - b$ 是一个完全平方数.

**注** 借助素数，则可以给予本题一个更为直接的证明（参考第 3 单元例 4 的解法.）.

**例 7** 设 $k$ 为正奇数，证明：$1 + 2 + \cdots + n$ 整除 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

**证明** 因为 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，故问题等价于证明：$n(n+1)$ 整除 $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$. 因 $n$ 与 $n+1$ 互素，所以这又等价于证明

$$n \mid 2(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$$

及

$$(n+1) \mid 2(1^k + 2^k + \cdots + n^k).$$

事实上，由于 $k$ 为奇数，故由第 1 单元中分解公式(6)，可知

$$\begin{aligned} &2(1^k + 2^k + \cdots + n^k) \\ &= [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] + \cdots + [(n-1)^k + 1^k] + 2n^k \end{aligned}$$

是 $n$ 的倍数. 同理，

$$2(1^k + 2^k + \cdots + n^k) = [1^k + n^k] + [2^k + (n-1)^k] + \cdots + [n^k + 1^k]$$

是 $n+1$ 的倍数.

**注** 整除问题中，有时直接证明 $b | a$ 不易入手. 若 $b$ 可分解为 $b = b_1b_2$，其中 $(b_1, b_2) = 1$，则我们可将原命题 $b | a$ 分解为等价的两个命题 $b_1 | a$ 及 $b_2 | a$，后者可能更容易导出来. 例 7 应用了这一基本手法，例 6 中证明 $a_1b_1 | c$ 也是这样做的.

更一般地，为了证明 $b | a$，可将 $b$ 分解为若干个两两互素的整数 $b_1$，$b_2$，…，$b_n$ 之积，而证明等价的 $b_i | a$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$（参见性质(11)，并可比较第 1 单元例 3 的注 1 中说的想法）. 关于这种手法的一种标准应用，请参考

第 3 单元例 5.

## 习 题 2

**1** 设 $n$ 为整数，证明：$(12n+5,\ 9n+4)=1$.

**2** 设 $m$、$n$ 都是正整数，$m$ 是奇数，证明：$(2^m-1,\ 2^n+1)=1$.

**3** 设 $(a,\ b)=1$，证明：$(a^2+b^2,\ ab)=1$.

**4** 若一个有理数的 $k$ 次幂是整数 $(k\geqslant 1)$，则这有理数必是整数. 更一般地，证明：一个首项系数为 $\pm 1$ 的整系数多项式的有理数根，必定是一个整数.

**5** 设 $m$、$n$、$k$ 都是正整数，满足 $[m+k,\ m]=[n+k,\ n]$，证明：$m=n$.

# 3 素数及唯一分解定理

大于1的整数$n$总有两个不同的正约数：1和$n$. 若$n$仅有这两个正约数(称$n$没有真因子)，则称$n$为素数(或质数). 若$n$有真因子，即$n$可表示为$a\cdot b$的形式(这里$a$、$b$为大于1的整数)，则称$n$为合数. 于是，正整数被分成三类：数1单独作一类，素数类及合数类.

素数在正整数中特别重要，我们常用字母$p$表示素数. 由定义易得出下面的基本结论：

(1) 大于1的整数必有素约数.

这是因为，大于1的整数当然有大于1的正约数，这些约数中的最小数必然没有真因子，从而是素数.

(2) 设$p$是素数，$n$是任意一个整数，则或者$p$整除$n$，或者$p$与$n$互素.

事实上，$p$与$n$的最大公约数$(p, n)$必整除$p$，故由素数的定义推知，或者$(p, n)=1$，或者$(p, n)=p$，即或者$p$与$n$互素，或者$p|n$.

素数的最为锐利的性质是下面的

(3) 设$p$是素数，$a$、$b$为整数. 若$p|ab$，则$a$、$b$中至少有一个数被$p$整除.

实际上，若$p$不整除$a$和$b$，则由上述的(2)，$p$与$a$、$b$均互素，从而$p$与$ab$互素(见第2单元(6))，这与已知的$p|ab$相违！

由(3)特别地推出，若素数$p$整除$a^n$ $(n\geqslant 1)$，则$p|a$.

关于素数的最为经典的一个结果是公元前欧几里得证明的：

(4) 素数有无穷多个.

我们用反证法来证明这一事实. 假设素数只有有限多个，设全体素数为$p_1$，$p_2$，…，$p_k$. 考虑数$N=p_1p_2\cdots p_k+1$，显然$N>1$，故$N$有素因子$p$. 因$p_1$，$p_2$，…，$p_k$是全部素数，故$p$必等于某个$p_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$，从而$p$整除$N-p_1p_2\cdots p_k$，即$p$整除1，这不可能. 因此素数有无穷多个. (请注意，$p_1\cdots p_k+1$并不一定是素数.)

(4)中的断言，也可由第2单元例3推出来：设$F_k=2^{2^k}+1$ $(k\geqslant 0)$，则

$F_k>1$，故 $F_k$ 有素约数. 因已证明无穷数列$\{F_k\}$ $(k\geqslant 0)$ 中的项两两互素，故每个 $F_k$ 的素约数与这个数列中其他项的素约数不同，因此素数必有无穷多个.

现在我们转向初等数论中最为基本的一个结果，即正整数的唯一分解定理，也称为算术基本定理，它表现了素数在正整数集合中的真正分量.

(5)（唯一分解定理）每个大于 1 的正整数均可分解为有限个素数的积；并且，若不计素因数在乘积中的次序，这样的分解是唯一的.

换句话说，设 $n>1$，则 $n$ 必可表示为 $n=p_1p_2\cdots p_k$，其中 $p_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是素数；并且，若 $n$ 有两种素因数分解

$$n=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_l,$$

则必有 $k=l$，并且 $p_1$，$p_2$，…，$p_k$ 是 $q_1$，$q_2$，…，$q_l$ 的一个排列.

将 $n$ 的素因数分解中的相同的素因子收集在一起，可知每个大于 1 的正整数 $n$ 可唯一地表示为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1$，$p_2$，…，$p_k$ 是互不相同的素数，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_k$ 是正整数，这称为 $n$ 的标准分解.



若已知正整数 $n$ 的（如上所述的）标准分解，则由唯一分解定理，可确定其全部的正约数：

(6) $n$ 的全部正约数为 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$，其中 $\beta_i$ 是满足 $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$ $(i=1,\cdots,k)$ 的任意整数.

由此易知，若设 $\tau(n)$ 为 $n$ 的正约数的个数，$\sigma(n)$ 为 $n$ 的正约数之和，则有

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1),$$

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

虽然素数有无穷多，但它们在自然数中的分布却极不规则（参见习题 3 第 1 题）. 给定一个大整数，判定它是否为素数，通常是极其困难的，要作出其标准分解，则更为困难. 下面(7)中的结果相当有趣，它对任意 $n>1$，给出了 $n!$ 的标准分解.

(7) 对任意正整数 $m$ 及素数 $p$，记号 $p^\alpha\parallel m$ 表示 $p^\alpha\mid m$，但 $p^{\alpha+1}\nmid m$，即 $p^\alpha$ 是 $m$ 的标准分解中出现的 $p$ 的幂.

设 $n>1$，$p$ 为素数，$p^{\alpha_p}\parallel n!$，则

$$a_p=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^l}\right]\left(=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots\right).$$

这里$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数. 请注意，由于当$p^l>n$时，$\left[\frac{n}{p^l}\right]=0$，故上面和式中只有有限多个项非零.

证明某些特殊形式的数不是素数(或给出其为素数的必要条件)，是初等数论中较为基本的问题，在数学竞赛中尤为常见. 处理这类问题的基本方法是应用(各种)分解技术，指出所说数的一个真因子. 我们举几个这样的例子.

**例 1**　证明：无穷数列 10 001，100 010 001，…中没有素数.

**证明**　记$a_n=\underbrace{10001\cdots10001}_{n个1}$ $(n\geqslant 2)$，则

$$a_n=1+10^4+10^8+\cdots+10^{4(n-1)}=\frac{10^{4n}-1}{10^4-1}.$$

为了将上式右端的数分解为两个(大于 1 的)整数之积，我们区分两种情形：

$n$ 为偶数. 设$n=2k$，则

$$a_{2k}=\frac{10^{8k}-1}{10^4-1}=\frac{10^{8k}-1}{10^8-1}\cdot\frac{10^8-1}{10^4-1}.$$

易知，$\frac{10^8-1}{10^4-1}$是大于 1 的整数，而对$k\geqslant 2$，$\frac{10^{8k}-1}{10^8-1}$也是大于 1 的整数. 故$a_{2k}(k=2,3,\cdots)$都是合数. 又$a_2=10\,001=13\times137$是合数.

$n$ 为奇数. 设$n=2k+1$，则

$$a_{2k+1}=\frac{10^{4(2k+1)}-1}{10^4-1}=\frac{10^{2(2k+1)}-1}{10^2-1}\cdot\frac{10^{2(2k+1)}+1}{10^2+1}$$

是两个大于 1 的整数之积，故$a_{2k+1}$也均是合数. 因此，所有$a_n$是合数.

**注**　例 1 的论证中，数的符合要求的分解，是应用代数式的分解实现的(第 1 单元分解公式(5)和(6))，下面的例 2 也是这样做的.

**例 2**　证明：对任意整数$n>1$，数$n^4+4^n$不是素数.

**证明**　若$n$为偶数，则$n^4+4^n$大于 2 且均被 2 整除，因此都不是素数. 但对奇数$n$，易知$n^4+4^n$没有一个(大于 1 的)固定的约数，我们采用不同的处理：

设奇数$n=2k+1$，$k\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}n^4+4^n&=n^4+4\cdot4^{2k}=n^4+4\cdot(2^k)^4\\&=n^4+4n^2\cdot(2^k)^2+4\cdot(2^k)^4-4n^2\cdot(2^k)^2\\&=(n^2+2\cdot2^{2k})^2-(2\cdot n\cdot2^k)^2\\&=(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1})(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}).\end{aligned}$$

上式右边第一个因数显然不为1，而后一个因数为$(n-2^k)^2+2^{2k}$也不是1（因$k\geqslant 1$），故$n^4+4^n$对$n>1$都是合数.

例2看上去平平常常，但自己动手做却未必顺顺当当. 这一解法的关键，是在$n$为奇数时，将$4^n$看作单项式$4y^4$，以利用代数式的分解

$$x^4+4y^4=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy),$$

产生数的适用的分解.

**例3**　设正整数$a$、$b$、$c$、$d$满足$ab=cd$，证明：$a+b+c+d$不是素数.

**证明一**　本题不宜用代数式的分解来产生所需的分解. 我们的第一种解法是应用数的分解，指出$a+b+c+d$的一个真因子.

由$ab=cd$，可设$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}=\frac{m}{n}$，其中$m$和$n$是互素的正整数. 由$\frac{a}{c}=\frac{m}{n}$意味着有理数$\frac{a}{c}$的分子、分母约去了某个正整数$u$后，得到既约分数$\frac{m}{n}$，因此

$$a=mu,\ c=nu. \tag{①}$$

同理，有正整数$v$，使得

$$b=nv,\ d=mv. \tag{②}$$



因此，$a+b+c+d=(m+n)(u+v)$是两个大于1的整数之积，从而不是素数.

**注**　若正整数$a$、$b$、$c$、$d$适合$ab=cd$，则$a$、$b$、$c$、$d$可分解为①及②的形式. 这一结果，在某些问题中颇有用处.

**证明二**　由$ab=cd$，得　$b=\frac{cd}{a}$. 因此

$$a+b+c+d=a+\frac{cd}{a}+c+d=\frac{(a+c)(a+d)}{a}.$$

因$a+b+c+d$是整数，故$\frac{(a+c)(a+d)}{a}$也是整数. 若它是一个素数，设为$p$，则由

$$(a+c)(a+d)=ap \tag{③}$$

可见，$p$整除$(a+c)(a+d)$，从而素数$p$整除$a+c$或$a+d$. 不妨设$p\mid(a+c)$，则$a+c\geqslant p$，结合③推出$a+d\leqslant a$，而这不可能（因$d\geqslant 1$）.

证明二的论证，应用素数的性质（见(3)）并由反证法导出结果，这与前面的手法很不相同.

**例 4** 证明：若整数 $a$、$b$ 满足 $2a^2+a=3b^2+b$，则 $a-b$ 和 $2a+2b+1$ 都是完全平方数.

**证明** 已知关系式即为

$$(a-b)(2a+2b+1)=b^2. \qquad ①$$

论证的第一个要点是证明整数 $a-b$ 与 $2a+2b+1$ 互素. 记 $d=(a-b,2a+2b+1)$. 若 $d>1$，则 $d$ 有素因子 $p$，从而由①知 $p\mid b^2$. 因 $p$ 是素数，故 $p\mid b$. 结合 $p\mid(a-b)$ 知 $p\mid a$. 再由 $p\mid(2a+2b+1)$ 导出 $p\mid 1$，这不可能，故 $d=1$. 因此，由于①的右端为 $b^2$，是一个完全平方数，故 $|a-b|$ 与 $|2a+2b+1|$ 均是完全平方数(参见第 2 单元的(8)).

现在证明 $a-b\geqslant 0$，从而由①知 $2a+2b+1\geqslant 0$，于是 $a-b$ 及 $2a+2b+1$ 均是完全平方.

假设有整数 $a$，$b$ 满足问题中的等式，但 $a-b<0$. 因已证明 $|a-b|$ 是一个完全平方数，故有 $b-a=r^2$，这里 $r>0$；结合①推出 $r\mid b$，再由 $b-a=r^2$ 知 $r\mid a$. 设 $b=b_1r$，$a=a_1r$，代入问题中的等式可得到(注意 $r>0$ 及 $b_1=a_1+r$)

$$a_1^2+6a_1r+3r^2+1=0. \qquad ②$$

为了证明上式不可能成立，可采用下面的办法：

将②看作是关于 $a_1$ 的二次方程，由求根公式解得

$$a_1=-3r\pm\sqrt{6r^2-1}.$$

因 $a_1$ 为整数，故由上式知 $6r^2-1$ 为完全平方数. 但易知一个完全平方数被 3 除得的余数只能为 0 或 1；而 $6r^2-1$ 被 3 除得的余数为 2，产生矛盾.

或者更直接地：由于 $a_1^2$ 被 3 除得的余数为 0 或 1，故②左边被 3 除得的余数是 1 或 2；但②的右边为 0，被 3 整除. 矛盾. 即②对任何整数 $a_1$ 及 $r$ 均不成立，从而必须有 $a-b\geqslant 0$，这就证明了本题的结论.

**注 1** 许多数论问题需证明一个正整数为 1(例如，证明整数的最大公约数是 1)，本单元的(1)给出了整数是否为 1 的一个数论刻画. 由此，我们常假设所说的数有一个素因子，利用素数的锐利性质(3)作进一步论证，以导出矛盾. 例 4 便是这样的一个例子.

**注 2** 上述证明②不成立的论证，实质上应用了同余(比较余数)的想法，这是证明两个整数不等的一种基本的手法. 请参见第 6 单元.

**例 5** 设 $n$、$a$、$b$ 是整数，$n>0$ 且 $a\neq b$. 证明：若 $n\mid(a^n-b^n)$，则 $n\left|\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\right.$.

**证明**　设 $p$ 是一个素数，且 $p^\alpha \parallel n$. 我们来证明 $p^\alpha \left| \dfrac{a^n-b^n}{a-b} \right.$，由此即导出本题的结论(参见下面的注).

记 $t=a-b$，若 $p \nmid t$，则 $(p^\alpha, t)=1$. 因 $n \mid (a^n-b^n)$，故 $p^\alpha \mid (a^n-b^n)$. 又 $a^n-b^n=t \cdot \dfrac{a^n-b^n}{t}$，于是 $p^\alpha \left| \dfrac{a^n-b^n}{t} \right.$.

若 $p \mid t$，用二项式定理，得

$$\frac{a^n-b^n}{t}=\frac{(b+t)^n-b^n}{t}=\sum_{i=1}^{n} C_n^i b^{n-i} t^{i-1}. \qquad ①$$

设 $p^\beta \parallel i (i \geqslant 1)$，则 $2\beta \leqslant p^\beta \leqslant i$，由此易知 $\beta \leqslant i-1$. 因此 $C_n^i t^{i-1}=\dfrac{n}{i} C_{n-1}^{i-1} t^{i-1}$ 中所含的 $p$ 的幂次至少是 $\alpha-\beta+(i-1) \geqslant \alpha$，故①右边和中每一项均被 $p^\alpha$ 整除，故 $p^\alpha \left| \dfrac{a^n-b^n}{t} \right.$，即 $p^\alpha \left| \dfrac{a^n-b^n}{a-b} \right.$(参考第 1 单元例 3 的注 1).

**注**　为了证明 $b \mid a$，可将 $b$ 作标准分解 $b=p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_k^{q_k}$，进而将问题分解为证明 $p_i^{q_i} \mid a (i=1, 2, \cdots, k)$(参看第 2 单元中(11))，这样做的益处在于能够应用素数的锐利性质，例 5 的论证清楚地表现了这一点.

**例 6**　设 $m$、$n$ 是非负整数，证明：$\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ 是一个整数.



**证明**　我们只需证明，对每个素数 $p$，分母 $m!\,n!\,(m+n)!$ 的标准分解中 $p$ 的幂次，不超过分子 $(2m)!\,(2n)!$ 中 $p$ 的幂次. 由(7)中的公式可知，这等价于证明

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2m}{p^l}\right]+\left[\frac{2n}{p^l}\right]\right) \geqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{p^l}\right]+\left[\frac{n}{p^l}\right]+\left[\frac{m+n}{p^l}\right]\right). \qquad ①$$

事实上，我们能够证明下述更强的结果：

对任意实数 $x$、$y$，有

$$[2x]+[2y] \geqslant [x]+[y]+[x+y]. \qquad ②$$

为了证明②，我们注意，对任意整数 $k$ 及任意实数 $\alpha$，有 $[k+\alpha]=[\alpha]+k$. 由此易知，若 $x$ 或 $y$ 改变一个整数量，则不等式②两边改变一个相同的量. 因此只要对 $0 \leqslant x<1$，$0 \leqslant y<1$ 的情形证明②，于是问题化为证明不等式

$$[2x]+[2y] \geqslant [x+y].$$

注意现在 $0 \leqslant [x+y] \leqslant 1$. 若 $[x+y]=0$，则结论显然成立. 若 $[x+y]=1$，则 $x+y \geqslant 1$，从而 $x$、$y$ 中至少有一个大于或等于 $\dfrac{1}{2}$，不妨设 $x \geqslant \dfrac{1}{2}$，因此

$[2x]+[2y]\geqslant[2x]=1$，这就证明了②，从而更有①成立，这就证明了本题的结论.

**例 7**　设 $m$、$n$ 是互素的正整数，证明：$m!\,n!\mid(m+n-1)!$.

**证法一**　与例 6 的方法相同，我们证明，对每个素数 $p$，有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{m+n-1}{p^l}\right]\geqslant\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{p^l}\right]+\left[\frac{n}{p^l}\right]\right).\qquad①$$

为此，我们（与上例相同地）希望证明“单项不等式”：

$$\left[\frac{m+n-1}{p^l}\right]\geqslant\left[\frac{m}{p^l}\right]+\left[\frac{n}{p^l}\right]\qquad②$$

对任意素数 $p$ 及任意正整数 $l$ 成立，从而①得证.

然而，现在的情形下，我们不能指望建立像例 6 中②那样的对所有实数成立的结果来导出②，我们需要利用所说整数的特别性质：

由带余除法，$m=p^lq_1+r_1$，$n=p^lq_2+r_2$，这里 $0\leqslant r_1、r_2<q^l$，而 $q_1$、$q_2$ 均为非负整数，则有（参见第 1 单元的(4)）

$$\left[\frac{m}{p^l}\right]=q_1\text{ 及}\left[\frac{n}{p^l}\right]=q_2.$$

但 $(m,\ n)=1$，故 $r_1$ 与 $r_2$ 不能同时为零，从而 $r_1+r_2\geqslant1$，故

$$\left[\frac{m+n-1}{p^l}\right]=q_1+q_2+\left[\frac{r_1+r_2-1}{p^l}\right]\geqslant q_1+q_2.$$

这就证明了②. 证毕.

**证法二**　首先，与例 6 类似地不难证明，对任意正整数 $a$、$b$，数 $\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}$ 是一个整数.（这也可以利用 $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}=C_{a+b}^{a}$，而由后者的组合意义知，它必定为一个整数，下面的注中给出了一个更为直接的证明.）

由上述结果可知，$\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$ 与 $\dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$ 均是整数. 因此，若设 $A=\dfrac{(m+n-1)!}{m!n!}$，则 $mA$ 与 $nA$ 均是整数，故 $mnA=m\cdot nA$ 是 $m$ 的倍数. 又 $mnA=n\cdot mA$，而由 $m\mid n\cdot mA$ 及 $(m,\ n)=1$，可知 $m\mid mA$，而这表明，$A$ 本身是一个整数. 证毕.

**注**　这儿给出 $\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}$ 为整数的一个证明：

我们对 $a+b$ 归纳. 易知 $a+b=2$ 时结论成立. 设对所有满足 $a+b=n$ 的

正整数 $a$、$b$ 结论均已成立. 现在设 $a$、$b$ 满足 $a+b=n+1$. 若 $a$、$b$ 中有 1，则结论显然成立，故设 $a>1$，$b>1$. 由 $(a-1)+b=n$，$a+(b-1)=n$，及归纳假设可见

$$(a-1)!b! \mid (a+b-1)!,\ a!(b-1)! \mid (a+b-1)!, \qquad ③$$

我们又有

$$(a+b)!=(a+b-1)!\cdot(a+b)=(a+b-1)!\cdot a+(a+b-1)!\cdot b. \qquad ④$$

由③易知 $a!b!=a\cdot(a-1)!b!$ 整除 $(a+b-1)!\cdot a$. 同样 $a!b!$ 整除 $(a+b-1)!\cdot b$，故 $a!b!$ 整除④的右端，从而 $a!b! \mid (a+b)!$，即 $a+b=n+1$ 时结论也成立，这就完成了归纳证明.

## 习 题 3

**1** 证明：对任意给定的正整数 $n>1$，都存在连续 $n$ 个合数.

**2** 证明：形如 $4k-1$ 的素数有无穷多个，形如 $6k-1$ 的素数也有无穷多个（$k$ 为正整数）.

**3** 证明：有无穷多个奇数 $m$，使 $8^m+9m^2$ 是合数.

**4** 设整数 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足 $a>b>c>d>0$，且

$$a^2+ac-c^2=b^2+bd-d^2,$$

证明：$ab+cd$ 不是素数.

# 4 不定方程（一）

不定方程，是指未知数的个数多于方程的个数，而未知数的取值范围受某些限制（如整数、正整数、有理数等）的方程. 不定方程是数论的一个重要课题，数学竞赛中也常涉及这方面的问题.

初等范围内，处理不定方程主要有三种方法：分解方法，同余方法，以及（不等式）估计方法. 分解方法则是最为基本的方法.

分解方法的主要功效，大致地说，是通过“分解”将原方程分解为若干个易于处理的方程. 这里说的“分解”包含两个方面的手法：其一，是代数（整式）的分解；其二，是应用整数的某些性质（唯一分解定理，互素的性质等）导出适用的分解.

分解方法当然没有固定的程序可循. 有时，分解相当困难，或分解方式较多而难以选择；有时，进一步的论证则很不容易. 本节的一些例子就已表现了这些.

分解方法常和别的方法结合使用，请参考本单元及后面的一些例子.

**例 1**　一个正整数，加上 100，为一完全平方数，若加上 168，则为另一个完全平方数，求此数.

**解**　设所求的数为 $x$，由题意，有正整数 $y$、$z$，使得

$$\begin{cases} x+100=y^2, \\ x+168=z^2. \end{cases}$$

从上面两个方程中消去 $x$，得出

$$z^2-y^2=68.$$

将这个二元二次方程的左边分解因式，而将右边作标准分解，得

$$(z-y)(z+y)=2^2\times 17. \qquad ①$$

由于 $z-y$ 及 $z+y$ 都是正整数，且 $z-y<z+y$，故由①及唯一分解定理（第 3 单元(5)）推出，必有

$$\begin{cases}z-y=1,\\ z+y=2^2\times 17;\end{cases}\quad\begin{cases}z-y=2,\\ z+y=2\times 17;\end{cases}\quad\begin{cases}z-y=2^2,\\ z+y=17.\end{cases}\qquad②$$

逐一解这些二元一次方程组，可得出 $y=16$，$z=18$，故 $x=156$.

**例 2**　求不定方程：

$$x^4+y^4+z^4=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+24$$

的全部整数解.

**解**　关键的一步（也是本题的主要困难）是看出方程可分解为

$$(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)=-2^3\times 3.\qquad①$$

因上式左边四个因数都是整数，由唯一分解定理，可类似于例 1 那样，将①分解为若干个（四元一次）方程组来求解. 这虽然也能够解决问题，但却较为麻烦.

我们（基于①）采用下面的处理：因素数 2 整除①的右边，故①的左边四个因数中至少有一个被 2 整除. 另一方面，这四个数中任意两个的和显然是偶数，故它们的奇偶性相同，从而现在都是偶数，即①的左边被 $2^4$ 整除，但①的右边不是 $2^4$ 的倍数，因此方程无整数解.



顺便提一下，若在例 1 的解答中采用类似的考虑，可稍稍简化那儿的程序：因为 $z-y$ 与 $z+y$ 的奇偶性相同，因此例 1 的②中所列的方程组中，我们只需求解其中的第二个.

例 2 后一半的论证，以（第 6 单元讲的）同余的角度看则更为清楚：就是先对①模 2，然后再模 $2^4$. 同余方法处理不定方程将在第 9 单元中专门讨论.

**例 3**　证明：两个连续正整数之积不能是完全平方，也不能是完全立方.

**证明**　反证法，我们假设有正整数 $x$，$y$，使得

$$x(x+1)=y^2.$$

将方程两边乘以 4，变形为 $(2x+1)^2=4y^2+1$，这可分解为

$$(2x+1+2y)(2x+1-2y)=1.$$

因左边两个因数都是正整数，故有

$$\begin{cases}2x+1+2y=1,\\ 2x+1-2y=1.\end{cases}$$

解得 $x=y=0$，矛盾. 这就证明了问题中的第一个断言.

然而，对于方程

$$x(x+1)=y^3,$$

上面的分解方法不易奏效. 我们采用另一种(基于数的性质的)分解：设所说的方程有正整数解 $x$、$y$，则由于 $x$ 和 $x+1$ 互素，而它们的积是一个完全立方，故 $x$ 和 $x+1$ 都是正整数的立方，即

$$x=u^3,\ x+1=v^3,\ y=uv,$$

$u$，$v$ 都是正整数，由此产生 $v^3-u^3=1$，故

$$(v-u)(v^2+uv+u^2)=1,$$

这显然不可能. 不难看到，用类似的论证，可证明连续两个正整数之积不会是整数的 $k$ 次幂(这里 $k\geqslant 2$).

判明一个乘积中的各个因数互素往往非常重要，下面的例 4，例 5 均是如此.

**例 4**　证明：方程

$$y+y^2=x+x^2+x^3$$

没有 $x\neq 0$ 的整数解.

**证明**　设方程有 $x\neq 0$ 的整数解，将它分解为

$$(y-x)(y+x+1)=x^3. \qquad ①$$

我们先证明 $(y-x,\ y+x+1)=1$. 若这不正确，则有一个素数 $p$ 为 $y-x$ 与 $y+x+1$ 的一个公约数. 由①知 $p\mid x^3$，故素数 $p$ 整除 $x$，结合 $p\mid(y-x)$ 知 $p\mid y$，但 $p\mid(x+y+1)$，从而 $p\mid 1$，这不可能，故①的左边两因数互素. 因①的右边是一个完全立方，从而有整数 $a$、$b$，使得

$$y-x=a^3,\ y+x+1=b^3,\ x=ab.$$

消去 $x$，$y$ 得到

$$b^3-a^3=2ab+1. \qquad ②$$

现在证明方程②无整数解，由此便导出了矛盾. 我们将②分解为

$$(b-a)(b^2+ab+a^2)=2ab+1. \qquad ③$$

注意 $x=ab$ 而 $x\neq 0$，故 $ab\neq 0$. 若 $ab>0$，则由③易知 $b-a>0$，因 $a$、$b$ 为整数，故 $b-a\geqslant 1$，于是③的左边$\geqslant b^2+ab+a^2>3ab>$右边；若 $ab<0$，则 $|b-a|\geqslant 2$，故③的左边的绝对值$\geqslant 2(a^2+b^2-|ab|)>2|ab|$，而③的右边的绝对值$<2|ab|$，因此③不能成立，这就证明了问题中的方程没有 $x\neq 0$ 的整

数解.

方程③无解的论证，采用了不等式估计（左边的绝对值总大于右边的绝对值），这就是所谓的估计法.（数论中的）估计法往往需着眼于整数，利用整数的各种性质产生适用的不等式. 例如，上述论证应用了整数的最基本的性质：若整数 $x>0$，则 $x\geqslant 1$.

估计法，当然不限于不定方程，许多数论问题都可以用这方法解决，本书中有不少这样的例子.

**例 5**　设 $k$ 是给定的正整数，$k\geqslant 2$，证明：连续三个正整数的积不能是整数的 $k$ 次幂.

**证明**　假设有正整数 $x\geqslant 2$ 及 $y$，使得

$$(x-1)x(x+1)=y^k. \tag{①}$$

请注意上面左端的三个因数 $x-1$、$x$、$x+1$ 并非总两两互素，因此不能由①推出它们都是 $k$ 次方幂. 克服这个困难的一种方法是将①变形为

$$(x^2-1)x=y^k. \tag{②}$$

因 $x$ 和 $x^2-1$ 互素，故由②推出，有正整数 $a$、$b$，使得

$$x=a^k,\ x^2-1=b^k,\ ab=y,$$



由此我们有

$$\begin{aligned}1&=a^{2k}-b^k=(a^2)^k-b^k\\&=(a^2-b)(a^{2k-2}+a^{2k-4}b+\cdots+a^2b^{k-2}+b^{k-1}),\end{aligned}$$

由于 $x\geqslant 2$，故 $a\geqslant 2$，又 $k\geqslant 2$，故上式后一个因数必大于 1，导出矛盾.

**例 6**　求 $(x^2-y^2)^2=1+16y$ 的全部整数解.

**解**　因方程左边$\geqslant$0，故右边$\geqslant$0，从而 $y\geqslant 0$. 又显然 $x^2-y^2\neq 0$，而 $x_1y$ 为整数，故 $|x|\geqslant y+1$，或 $|x|\leqslant y-1$.

当 $|x|\geqslant y+1$ 时，方程左边$\geqslant((y+1)^2-y^2)^2=(2y+1)^2$.

当 $|x|\leqslant y-1$ 时，此时 $y-1\geqslant 0$，且 $y^2-x^2\geqslant y^2-(y-1)^2=2y-1>0$，故方程左边$\geqslant(2y-1)^2$.

因此由原方程产生

$$(2y-1)^2\leqslant 1+16y,$$

故有 $0\leqslant y\leqslant 5$. 逐一检验可求出全部整数解为 $(x_1y)=(\pm 1,0),(\pm 4,3),(\pm 4,5)$.

**例 7**　设正整数 $x$、$y$、$z$ 满足 $2x^x=y^y+z^z$，则 $x=y=z$.

**证明** 首先，将$(x+1)^{x+1}$展开即知

$$(x+1)^{x+1} > x^{x+1} + (x+1)x^x > 2x^x, \qquad ①$$

由此可知 $y$、$z$ 必须均$\leqslant x$：因若 $y$、$z$ 中有大于 $x$ 的，无妨设 $y>x$，因 $y$、$x$ 为整数，故 $y \geqslant x+1$，从而

$$y^y + z^z > y^y \geqslant (x+1)^y \geqslant (x+1)^{x+1} > 2x^x \text{(应用 ①)},$$

产生矛盾.

因此 $y \leqslant x$，$z \leqslant x$，故

$$y^y + z^z \leqslant x^x + x^x = 2x^x,$$

结合原方程知，必须有 $y = x$，且 $z = x$，故 $x = y = z$. 证毕.

例 6、例 7 的处理均依靠不等式，其要点是利用（前面提过的）整数的基本性质：若整数 $x > 0$，则 $x \geqslant 1$.

## 习 题 4

**1** 证明：连续四个正整数之积不能是一个完全平方数.

**2** 求出所有可以表示为两个整数平方差的整数.

**3** 求不定方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

的全部整数解.

**4** 求 $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$ 的全部整数解.

**5** 求所有正整数 $x$、$y$，使 $x^2+3y$，$y^2+3x$ 均是完全平方数.

# 5 竞赛问题选讲（一）

从前面几个单元的内容，可以看出初等数论的一个显著特点——灵活多样，数学竞赛中的数论问题尤其如此. 本单元再选取一些这样的例子.

**例 1** 设 $m \geqslant n \geqslant 1$，证明：$\dfrac{(m,n)}{m}\mathrm{C}_m^n$ 是整数.

**证明** 因 $\dfrac{x}{m}\mathrm{C}_m^n$ 在 $x=m$ 时为 $\mathrm{C}_m^n$，是一个整数；在 $x=n$ 时，它是 $\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{m}{n}\mathrm{C}_{m-1}^{n-1}=\mathrm{C}_{m-1}^{n-1}$，也是整数. 又由裴蜀等式知，存在整数 $u$、$v$，使得

$$(m,n)=mu+nv,$$

故 $\dfrac{(m,n)}{m}\mathrm{C}_m^n=u\mathrm{C}_m^n+v\dfrac{n}{m}\mathrm{C}_m^n$ 是整数.



**注** 由例 1 推出，若 $m$、$n$ 为互素的正整数，则 $m\mid\mathrm{C}_m^n$. 这一结论也可如下证明：因 $\mathrm{C}_m^n=\dfrac{m}{n}\mathrm{C}_{m-1}^{n-1}$，故 $n\mathrm{C}_m^n=m\mathrm{C}_{m-1}^{n-1}$. 由于 $\mathrm{C}_{m-1}^{n-1}$ 为整数，故 $m\mid n\mathrm{C}_m^n$，但 $(m,n)=1$，从而 $m\mid\mathrm{C}_m^n$.

特别地，设 $p$ 是一个素数，由于每个 $k=1,\cdots,p-1$ 均与 $p$ 互素，故我们有 $p\mid\mathrm{C}_p^k$，对 $k=1,\cdots,p-1$ 成立，这一结论，用处很多.

**例 2** 设 $a$、$b$ 是两个不同的正整数，$ab(a+b)$ 是 $a^2+ab+b^2$ 的倍数. 证明：$|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

**证明** 由于 $ab(a+b)$ 被 $a^2+ab+b^2$ 整除，我们首先用 $a^2+ab+b^2$ 除 $ab(a+b)$，得

$$ab(a+b)=(a^2+ab+b^2)a-a^3,$$

故 $(a^2+ab+b^2)\mid a^3$. 同样 $(a^2+ab+b^2)\mid b^3$，即 $a^2+ab+b^2$ 是 $a^3$ 与 $b^3$ 的一个公约数，故 $(a^2+ab+b^2)\mid(a^3,b^3)$.（见第 2 单元中的(3).）又 $(a^3,b^3)=(a,b)^3$（见下面的注），从而

$$(a^2+ab+b^2)\mid(a,b)^3. \qquad ①$$

记 $d=(a,b)$，$a=a_1d$，$b=b_1d$，则①成为$(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)\mid d$. 从而 $d\geqslant a_1^2+a_1b_1+b_1^2$，更有 $d>a_1b_1$. 因 $a\neq b$，故整数 $a_1\neq b_1$，因此 $|a_1-b_1|\geqslant 1$，进而我们得出

$$|a-b|^3=d^3|a_1-b_1|^3\geqslant d^3>d^2a_1b_1=ab,$$

即 $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

**注** 对任意整数 $k\geqslant 1$，有 $(a^k,b^k)=(a,b)^k$. 这可如下证明：当 $(a,b)=1$ 时，则 $(a^k,b^k)=1=(a,b)^k$（见第 2 单元(6)）. 当 $(a,b)=d>1$ 时，则有 $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$，从而由上述结果知，$\left(\left(\frac{a}{d}\right)^k,\left(\frac{b}{d}\right)^k\right)=1$，故 $d^k=d^k\left(\frac{a^k}{d^k},\frac{b^k}{d^k}\right)=\left(\frac{a^k}{d^k}\cdot d^k,\frac{b^k}{d^k}\cdot d^k\right)=(a^k,b^k)$，从而结论得证.（参见第 2 单元的(4)及(5).）这一论证，是将一般情形的问题，化为特殊情形来解决的一个简单例子.

例 2 的证明，先由整数的整除等性质导出整除关系①，再由此过渡到不等式（第 1 单元中(3)），这是处理涉及整数的不等式问题以及用估计法解决数论问题的一种基本手法，下面两个例子均是这样做的.

**例 3** 在两个相邻的完全平方数 $n^2$ 与 $(n+1)^2$ 之间任取若干个不同整数，证明它们中两两乘积互不相同.

**证明** 设整数 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足 $n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$，显然，我们只需证明 $ad\neq bc$. 采用反证法，设有上述 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足 $ad=bc$，则由第 3 单元例 3 的证明一可知，有正整数 $p$、$q$、$u$、$v$，使得

$$a=pu,\ b=qu,\ c=pv,\ d=qv.$$

由 $b>a$ 及 $c>a$，得出 $q>p$ 及 $v>u$. 因 $p$、$q$、$u$、$v$ 都是整数，故 $q\geqslant p+1$，$v\geqslant u+1$. 因此我们得出（注意 $a=pu>n^2$）

$$\begin{aligned}d=qv&\geqslant(p+1)(u+1)=pu+(p+u)+1\\&>n^2+2\sqrt{pu}+1>n^2+2n+1=(n+1)^2,\end{aligned}$$

矛盾.

**例 4** 求出不定方程

$$(n-1)!=n^k-1 \qquad ①$$

的全部正整数解.

**解** 当 $n=2$ 时，由①得解 $(n,k)=(2,1)$. 当 $n>2$ 时，①的左边是偶数，故其右边也是偶数，从而 $n$ 是奇数. 当 $n=3,5$ 时，由①解出 $(n,k)=(3,$

1)，(5，2).

以下设 $n>5$ 且 $n$ 为奇数. 此时 $\frac{n-1}{2}$ 是整数且 $\frac{n-1}{2}<n-3$，故 $2\cdot\frac{n-1}{2}\mid(n-2)!$，即 $(n-1)\mid(n-2)!$. 因此 $(n-1)^2\mid(n-1)!$，即

$$(n-1)^2\mid(n^k-1). \tag{②}$$

另一方面，由二项式定理知

$$\begin{aligned}n^k-1&=((n-1)+1)^k-1\\&=(n-1)^k+C_k^1(n-1)^{k-1}+\cdots+C_k^{k-2}(n-1)^2+k(n-1).\end{aligned}\tag{③}$$

由②、③推出 $(n-1)^2\mid k(n-1)$，即 $(n-1)\mid k$. 故 $k\geqslant n-1$，从而

$$n^k-1\geqslant n^{n-1}-1>(n-1)!.$$

这表明，当 $n>5$ 时方程①没有正整数解，即①的全部正整数解为 $(n,k)=(2,1),(3,1),(5,2)$.

**注 1**　上面解法的关键是在 $n>5$ 时，利用整除给出 $k$ 的下界：$k\geqslant n-1$，进而(利用不等式)证明①无解. 论证的第一步，是对奇数 $n>5$ 证明 $(n-1)^2\mid(n-1)!$. 这个事实是下面结果的一个特别情形

设 $m$ 是大于 4 的整数，且不是素数，则 $m\mid(m-1)!$.

(其证明请读者完成.)

**注 2**　论证的第二步，是用 $(n-1)^2$ 除 $n^k-1$，这其实不必应用二项式定理，只需注意：$(x+1)^k-1$ 的展开式，是一个关于 $x$ 的整系数多项式，其中常数项为零，而一次项系数为 $k$.

若应用下一单元讲的同余，则可更为直接地证明 $(n-1)\mid k$：

因为 $n^k-1=(n-1)(n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1)$，而 $n^i\equiv1(\mathrm{mod}\ n-1)$，$i=1,\cdots,k-1$，故

$$n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{个}}=k(\mathrm{mod}\ n-1).$$

从而 $n^k-1\equiv k(n-1)(\mathrm{mod}\ (n-1)^2)$，于是由 $(n-1)^2\mid n^k-1$，得出 $(n-1)^2\mid k(n-1)$，即 $(n-1)\mid k$.

**例 5**　求出不定方程：

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$$

的全部整数解.

**解法一**　原方程左端是关于 $x$、$y$ 的三次多项式，右边是二次多项式. 而

对于整数 $x$、$y$，三次式的值的绝对值一般应大于二次式的值的绝对值，因此本题有希望用估计法解决. 现将方程分解为

$$(x^2+y^2)(x+y-8)=8(xy+1). \qquad ①$$

若 $x+y-8\geqslant 6$，则 $x+y\geqslant 14$，从而

$$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}>4.$$

这时①的左端

$$\begin{aligned}&\geqslant 6(x^2+y^2)=4(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)\\&\geqslant 8xy+2(x^2+y^2)>8(xy+1),\end{aligned}$$

故此时方程无整数解.

若 $x+y-8\leqslant -4$，则 $x+y\leqslant 4$，这时①的左端

$$\leqslant -4(x^2+y^2)\leqslant -4\times 2\mid xy\mid\leqslant 8xy<8(xy+1),$$

此时方程亦无整数解. 因此，方程的整数解$(x,\ y)$应满足

$$-3\leqslant x+y-8\leqslant 5.$$

另一方面，①的左端应是偶数，这推出 $x$，$y$ 的奇偶性必须相同，从而 $x+y-8$ 是偶数，故它只能是$-2$、0、2、4. 结合①，通过检验不难得知，所求的解为 $(x,\ y)=(2,\ 8),\ (8,\ 2)$.

**解法二** 记 $u=x+y$，$v=xy$，则原方程可变形为

$$u(u^2-2v)=8(u^2-v+1), \qquad ②$$

即

$$u^3-2uv=8u^2-8v+8,$$

由此可见 $u$ 是偶数，设 $u=2w$，则

$$2w^3-vw=8w^2-2v+2. \qquad ③$$

我们解出 $v$，得到

$$v=\frac{2w^3-8w^2-2}{w-2}=2w^2-4w-8-\frac{18}{w-2}. \qquad ④$$

因此 $w-2$ 是 18 的约数，即是$\pm 1$，$\pm 2$，$\pm 3$，$\pm 6$，$\pm 9$，$\pm 18$. 对于 $w$ 的每一个可能值，结合④可确定 $v$，进而求得相应的整数解$(x,\ y)$只有$(2,\ 8)$及$(8,\ 2)$.（注意，求得一组 $w$，$v$ 的值，则相应的 $x$，$y$ 为整数等价于$w^2-v$为完全平方数.）

**注** 原方程的左、右两边均是关于 $x$、$y$ 的二元对称多项式，因此必能表示为关于 $u=x+y$，$v=xy$ 的多项式（见②）. 对本题而言，这一表示的优点在于，导出的方程③关于 $v$ 是一次方程，从而可解出 $v$（用 $w$ 表示）.

**例 6** 求出具有下述性质的正整数 $n$：它被 $\leqslant\sqrt{n}$ 的所有正整数整除.

**解法一** 我们首先证明，每个正整数 $n$ 可唯一地表示为形式

$$n=q^2+r,\ 0\leqslant r\leqslant 2q \qquad ①$$

这是因为任意正整数 $n$ 必介于两个相邻的平方数之间，即有正整数 $q$，使得 $q^2\leqslant n<(q+1)^2$. 令 $r=n-q^2$，则 $r\geqslant 0$，又 $r<(q+1)^2-q^2=2q+1$，故整数 $r\leqslant 2q$，从而 $n$ 有形如①的表示.

另一方面，若 $n$ 可表示为①的形式，则易知 $q^2\leqslant n<(q+1)^2$，故 $q=[\sqrt{n}]$，由此即知 $q$ 被 $n$ 唯一确定，相应的 $r$ 因此也被确定.

利用①便不难解决例 6. 因已知 $q=[\sqrt{n}]$ 整除 $n$，结合①知 $q\mid r$，故 $r=0$、$q$ 或 $2q$，即 $n$ 具有形式

$$n=q^2,\ q^2+q,\ q^2+2q.$$

$n=1$，2，3 显然合要求. 设 $n>3$，则 $q=[\sqrt{n}]\geqslant 2$，故由已知条件知 $(q-1)\mid n$. 若 $n=q^2$，由

$$q^2=q(q-1)+q \quad 及 \quad (q-1,\ q)=1$$

可见，必须 $q-1=1$，即 $q=2$，所以 $n=4$.

同样，若 $n=q^2+q$，则 $q=2$，3，从而 $n=6$，12；若 $n=q^2+2q$，则 $q=2$ 或 4，相应地 $n=8$，24. 因此，$n$ 只可能是 1，2，3，4，6，8，12，24，经检验它们均符合要求.

**解法二** 设 $q=[\sqrt{n}]$，我们证明 $q\geqslant 6$ 时没有符合要求的 $n$. 反证法，假设有这样的 $n$，我们将利用 $q$、$q-1$、$q-2$ 均整除 $n$ 来产生矛盾.

因为 $q$ 与 $q-2$ 整除 $n$，故 $[q,\ q-2]\mid n$，即 $\dfrac{q(q-2)}{(q,\ q-2)}\Big| n$（见第 2 单元(10)）. 又 $q-1\mid n$，故 $q-1$ 与 $\dfrac{q(q-2)}{(q,\ q-2)}$ 的最小公倍数 $D$ 整除 $n$. 但 $q-1$ 与 $q$ 及 $q-2$ 均互素，故 $q-1$ 与 $q(q-2)$ 互素，从而 $D=(q-1)\cdot\dfrac{q(q-2)}{(q,\ q-2)}$. 因此

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{(q,\ q-2)}\leqslant n.$$

但显然 $(q, q-2) \leqslant 2$，故

$$q(q-1)(q-2) \leqslant 2n.$$

注意 $\sqrt{n} < q+1$，故由上式可得 $q(q-1)(q-2) < 2(q+1)^2$，这可化简为

$$q^3 - 5q^2 - 2q - 2 < 0.$$

但当 $q \geqslant 6$ 时，上式的左边 $= q^2(q-5) - 2q - 2 \geqslant q^2 - 2q - 2 > 0$，矛盾. 因此 $q \geqslant 6$ 时无解. 而当 $q \leqslant 5$ 时易通过逐一检验求出所有符合要求的 $n$：1，2，3，4，6，8，12 及 24.

下面的例 7，是一个优雅的经典结果.

**例 7**　证明：从 1，2，…，100 中任意取出 51 个数，其中必有两个数互素.

**证明**　问题点破了极为简单：我们从 1，2，…，100 中依次取相邻的两个数，配成下面 50 个数对

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \cdots, \{99, 100\},$$

则任意取出的 51 个数必然包含了上述数对中的某一对，因这两数相邻，它们当然互素.

**例 8**　证明：存在连续 1000 个正整数，其中恰有 10 个素数.

**证明**　这一证明的基础是习题 3 第 1 题，由这结论可知，存在连续 1000 个正整数

$$a, a+1, \cdots, a+999, \qquad ①$$

其中每个数都不是素数.

现将①中的数施行如下操作：删去①中最右边的 $a+999$，而在最左边添上 $a-1$. 显然，所得的数列

$$a-1, a, \cdots, a+998$$

中至多有一个素数. 重复这一手续，直至达到 1，2，…，1000 后停止. 我们注意，一次操作后所得的（连续 1000 个）正整数中的素数个数，与操作前的 1000 个正整数中的素数个数相比，或相等，或增、减 1. 而最终得到的数 1，2，…，1000 中，显然有多于 10 个素数，因此，上述操作过程中，必有一次所产生的 1000 个连续整数中恰包含 10 个素数.

例 7 和例 8 都是所谓的“存在性问题”，即证明存在“某事物”具有“某种性质”. 这里的论证并未实际地构造出符合要求的事物，而是用逻辑的力量表明了它们的存在. 例 7 应用了众所周知的“抽屉原理”，例 8 则应用了下述的原则，这有时被称作“离散的零点定理”：

设 $f(n)$ 为一个定义在(正)整数集上的函数，取值也为整数. 若对所有 $n$ 有 $|f(n)-f(n+1)|\leqslant 1$，并且存在整数 $a$ 及 $b$，使得 $f(a)f(b)<0$，则在数 $a$、$b$ 之间必有一整数 $c$，使 $f(c)=0$.(例 8 中，我们可取 $g(n)$ 为从 $n$ 开始的连续 1000 个正整数中素数的个数，而取 $f(n)=g(n)-10$.)

处理存在性问题的另一种有效的方法是所谓的构造法，即实际地造出符合要求的事物. 构造法是一种重要的数学方法，灵活多样. 数论中有许多问题可以(甚至必须)用构造法来论证. 我们举几个这样的例子.

**例 9** 若一个正整数的标准分解中，每个素约数的幂次都大于 1，则称它为幂数. 证明：存在无穷多个互不相同的正整数，它们及它们中任意多个不同数的和都不是幂数.

**证明** 设 $2=p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$ 是全体素数，则

$$p_1,\ p_1^2p_2,\ p_1^2p_2^2p_3,\ \cdots,\ p_1^2p_2^2\cdots p_{n-1}^2p_n,\ \cdots \qquad ①$$

符合要求.

为了验证这一断言，我们将数列中第 $n$ 个数记作 $a_n$. 首先，每个 $a_n$ 都不是幂数. 对任意 $r$，$s$，$\cdots$，$n(1\leqslant r<s<\cdots<n)$，由①知，$p_r\mid a_r$ 但 $p_r^2\nmid a_r$，并且 $p_r\left|\dfrac{a_s}{a_r}\right.$，$\cdots$，$p_r\left|\dfrac{a_n}{a_r}\right.$. 因此，在



$$a_r+a_s+\cdots+a_n=a_r\left(\frac{a_s}{a_r}+\cdots+\frac{a_n}{a_r}+1\right)$$

中，第二个因数与 $p_r$ 互素，于是素数 $p_r$ 在 $a_r+a_s+\cdots+a_n$ 的标准分解中恰出现一次，故 $a_r+a_s+\cdots+a_n$ 不是幂数. 此外，由于素数有无穷多个，所以①中的数也有无穷多个.

**注** 本题的一个不同的(基于递推的)解法，请见第 7 单元例 4 中问题(2)的解答.

**例 10** 证明：有无穷多个正整数 $n$ 满足 $n\mid(2^n+1)$.

**证明一** 考察最初几个 $n$ 的值，小于 10 的数只有 $n=3^0$，$3^1$，$3^2$ 符合要求. 我们可期望 $n=3^k(k\geqslant 0)$ 都符合要求.

证实这件事是一个简单的归纳练习. 奠基是显然的. 假设对 $k\geqslant 0$ 已有 $3^k\mid(2^{3^k}+1)$，即

$$2^{3^k}=-1+3^ku,\ u\text{ 为整数.}$$

则 $2^{3^{k+1}}=(-1+3^ku)^3=-1+3^{k+1}v$($v$ 是一个整数)，故 $3^{k+1}\mid(2^{3^{k+1}}+1)$，这表明 $n=3^{k+1}$ 也符合要求，从而完成了上述断言的归纳证明.

**证明二** 这是一个不同的构造法. 关键是注意到：若 $n\mid(2^n+1)$，则对

$m=2^n+1$，有 $m\mid(2^m+1)$.

事实上，由于 $2^n+1$ 是奇数，若 $2^n+1=nk$（$k$ 为整数），则 $k$ 必是奇数，所以

$$2^m+1=(2^n)^k+1=(2^n+1)((2^n)^{k-1}-(2^n)^{k-2}+\cdots-2^n+1)$$

是 $m=2^n+1$ 的倍数. 由上述的结果，便递推地给出无穷多个符合要求的数：1，3，9，513，….

两种方法得出的解不全相同，但它们（除 1 之外）都是 3 的倍数. 这一点并非偶然，实际上，由第 8 单元例 1 可知，符合本题要求的 $n(>1)$ 都被 3 整除.

**例 11**　证明：有无穷多个正整数 $n$，满足 $n\mid(2^n+2)$.

**证明**　本题乍看上去与例 10 相差甚微，但实际上要困难得多. 我们仍采用归纳构造法，其中的关键一着是加强归纳假设. 下面证明：若 $n$ 满足

$$2\mid n,\ n\mid(2^n+2),\ (n-1)\mid(2^n+1),\qquad①$$

则对于 $m=2^n+2$，有

$$2\mid m,\ m\mid(2^m+2),\ (m-1)\mid(2^m+1).\qquad②$$

事实上，由于 $2^n+2=2(2^{n-1}+1)$ 是奇数的 2 倍及 $2\mid n$，故 $2^n+2=nk$ 中的整数 $k$ 是一个奇数，所以

$$2^m+1=2^{nk}+1=(2^n)^k+1$$

是 $2^n+1=m-1$ 的倍数.

同样，从 $2^n+1=(n-1)l$ 知 $l$ 为奇数，故

$$2^m+2=2(2^{m-1}+1)=2((2^{n-1})^l+1)$$

为 $2(2^{n-1}+1)=2^n+2=m$ 的倍数. 又 $m=2^n+2$ 显然为偶数，故上述的断言得到了证明.

现在，由于 $n=2$ 满足①，于是用②便递推地构造出无穷多个符合要求的数：2，6，66，….

我们注意，①中的 $2\mid n$ 是必要的，即满足本题要求的数都是偶数. 因为若有奇数 $n>1$，适合 $n\mid(2^n+2)$，则 $n\mid(2^{n-1}+1)$，这将与第 8 单元例 3 的结论相违.

## 习　题　5

**1**　设 $m$ 为大于 4 的整数，且不是素数. 证明 $m\mid(m-1)!$.

**2** 证明：正整数 $n$ 可以表示为连续若干个（至少两个）正整数之和的充分必要条件是，$n$ 不是 2 的方幂.

**3** 证明：任意正整数 $n$ 可表示为 $a-b$ 的形式，其中 $a$、$b$ 为正整数，且 $a$、$b$ 的不同素因子的个数相同.

**4** 任意给定整数 $n\geqslant 3$，证明，存在一个由正整数组成的 $n$ 项的等差数列（公差不为 0），其中任意两项互素.

**5** 证明：对每个 $n\geqslant 2$，存在 $n$ 个互不相等的正整数 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，使得 $(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$.

# 6 同余

同余，是数论中的一个重要概念，应用极为广泛.

设 $n$ 是给定的正整数，若整数 $a$、$b$ 满足 $n\mid(a-b)$，则称 $a$ 和 $b$ 模 $n$ 同余，记作

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ n).$$

若 $n\nmid(a-b)$，则称 $a$ 和 $b$ 模 $n$ 不同余，记作

$$a\not\equiv b(\mathrm{mod}\ n).$$

由带余除法易知，$a$ 和 $b$ 模 $n$ 同余的充分必要条件是 $a$ 与 $b$ 被 $n$ 除得的余数相同.

对于固定的模 $n$，模 $n$ 的同余式与通常的等式有许多类似的性质：

（1）（反身性） $a\equiv a(\mathrm{mod}\ n)$.

（2）（对称性） 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，则 $b\equiv a(\mathrm{mod}\ n)$.

（3）（传递性） 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\ n)$，则 $a\equiv c(\mathrm{mod}\ n)$.

（4）（同余式相加） 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，$c\equiv d(\mathrm{mod}\ n)$，则 $a\pm c\equiv b\pm d(\mathrm{mod}\ n)$.

（5）（同余式相乘） 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，$c\equiv d(\mathrm{mod}\ n)$，则 $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ n)$.

不难看到，反复用(4)或(5)，可以对多于两个的(模相同的)同余式建立加、减和乘法的运算公式. 特别地，由(5)易推出：若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，$k$，$c$ 为整数且 $k>0$，则

$$a^kc\equiv b^kc(\mathrm{mod}\ n).$$

请注意，同余式的消去律一般并不成立，即从 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\ n)$ 未必能推出 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$. 然而，我们有下面的结果：

（6）若 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\ n)$，则 $a\equiv b\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{n}{(n,\ c)}\right)$. 由此推出，若 $(c,\ n)=1$，则有 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，即在 $c$ 与 $n$ 互素时，可以在原同余式两边约去 $c$ 而不改变模(这再一次表现了互素的重要性).

现在提及几个涉及模的简单但有用的性质.

(7) 若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$，而 $d \mid n$，则 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, d)$.

(8) 若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$，$d \neq 0$，则 $da \equiv db(\mathrm{mod}\, dn)$.

(9) 若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n_i)(i = 1, 2, \cdots, k)$，则 $a \equiv b(\mathrm{mod}[n_1, n_2, \cdots, n_k])$.

特别地，若 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 两两互素，则有 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n_1 n_2 \cdots n_k)$.

由上述的性质(1)、(2)、(3)可知，整数集合可以按模 $n$ 来分类，确切地说，若 $a$ 和 $b$ 模 $n$ 同余，则 $a$ 与 $b$ 属同一个类，否则不属于同一个类，每一个这样的类称为模 $n$ 的一个同余类.

由带余除法，任一整数必恰与 $0, 1, \cdots, n-1$ 中的一个模 $n$ 同余，而 $0, 1, \cdots, n-1$ 这 $n$ 个数彼此模 $n$ 不同余，因此模 $n$ 共有 $n$ 个不同的同余类，即为

$$M_i = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ x \equiv i(\mathrm{mod}\, n)\},\ i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

例如，模 2 的同余类共有两个，即通常说的偶数类与奇数类. 两个类中的数分别具有形式 $2k$ 与 $2k+1$($k$ 为任意整数).

在 $n$ 个剩余类中各任取一个数作为代表，这样的 $n$ 个数称为模 $n$ 的一个完全剩余系，简称模 $n$ 的完系. 换句话说，$n$ 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 称为模 $n$ 的一个完系，是指它们彼此模 $n$ 不同余. 例如，$0, 1, \cdots, n-1$ 是模 $n$ 的一个完系，这称作模 $n$ 的最小非负完系.



易于看到，若 $i$ 和 $n$ 互素，则同余类 $M_i$ 中的所有数都和 $n$ 互素，这样的同余类称为模 $n$ 的缩同余类. 我们将模 $n$ 的缩同余类的个数记作 $\varphi(n)$，称为欧拉函数，这是数论中的一个重要函数. 显然，$\varphi(1) = 1$，而对 $n > 1$，$\varphi(n)$ 为 $1, 2, \cdots, n-1$ 中与 $n$ 互素的数的个数. 例如，若 $p$ 是素数，则有 $\varphi(p) = p - 1$.

在模 $n$ 的 $\varphi(n)$ 个缩同余类中各任取一个数作为代表，这样的 $\varphi(n)$ 个数称为模 $n$ 的一个缩剩余系，简称模 $n$ 的缩系，于是 $\varphi(n)$ 个数 $r_1, r_2, \cdots, r_{\varphi(n)}$ 称为模 $n$ 的一个缩系，是指它们模 $n$ 互不同余，且均与 $n$ 互素. 不超过 $n$ 且与 $n$ 互素的 $\varphi(n)$ 个正整数称为模 $n$ 的最小正缩系.

下面的结果，由模 $n$ 的一个完(缩)系，产生模 $n$ 的另一个完(缩)系，用处很多.

(10) 设 $(a, n) = 1$，$b$ 是任意整数.

若 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是模 $n$ 的一个完系，则 $ac_1 + b, ac_2 + b, \cdots, ac_n + b$ 也是模 $n$ 的一个完系；

若 $r_1, r_2, \cdots, r_{\varphi(n)}$ 是模 $n$ 的一个缩系，则 $ar_1, ar_2, \cdots, ar_{\varphi(n)}$ 也是模 $n$ 的一个缩系.

由(10)中的第一个断言可推出：

(11) 设 $(a, n) = 1$，$b$ 是任意整数，则有整数 $x$，使得 $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$，并易

知所有这样的 $x$ 形成模 $n$ 的一个同余类.

特别地，有 $x$ 使得 $ax\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$. 这样的 $x$ 称为 $a$ 关于模 $n$ 的逆，记作 $a^*$ 或 $a^{-1}(\mathrm{mod}\,n)$，它们形成模 $n$ 的一个同余类，从而有一个 $a^{-1}$ 满足 $1\leqslant a^{-1}<n$.

我们知道，一个整数模 $n$ 的余数有 $n$ 种可能的值，但对于整数的平方、立方等，模 $n$ 的余数的个数则可能大大减少. 这一事实，是用同余解决许多问题的一个基本点. 下面的一些简单结论，应用相当广泛、灵活.

(12) 完全平方数模 4 同余于 0 或 1；模 8 同余于 0、1、4；模 3 同余于 0 或 1；模 5 同余于 0，$\pm 1$.

完全立方数模 9 同余于 0、$\pm 1$.

整数的四次幂模 16 同余于 0 或 1.

现在，我们通过一些例子，来表现同余在解决问题中的作用.

**例 1** 设 $a$、$b$、$c$、$d$ 为正整数，证明：$a^{4b+d}-a^{4c+d}$ 被 240 整除.

**证明** 由于 $240=2^4\times 3\times 5$，我们将分别证明 $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ 被 3、5、16 整除，由此便证得了结论(参见第 3 单元例 5 的注).

首先证明 $3\mid(a^{4b+d}-a^{4c+d})$. 由(12)中的结果 $a^2\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,3)$，可知 $a^{4b}\equiv a^{4c}\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,3)$. 从而

$$a^{4b+d}-a^{4c+d}=a^d(a^{4b}-a^{4c})\equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

类似地，由 $a^2\equiv 0,\pm 1(\mathrm{mod}\,5)$，可知 $a^4\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,5)$，从而 $a^{4b}\equiv a^{4c}\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,5)$. 于是 $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$.

最后，由 $a^4\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,16)$，可知 $a^{4b}\equiv a^{4c}\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,16)$，故 $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0(\mathrm{mod}\,16)$. 这就证明了我们的结论.

例 1 是一个常规问题，下面的例 2 则稍有些技巧.

**例 2** 设整数 $a$、$b$、$c$ 满足 $a+b+c=0$，记 $d=a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}$. 证明：$|d|$ 不是素数.

**证明** 本题有好几种解法，这里我们采用同余来证明：$|d|$ 有一个非平凡的固定约数.

首先，对任意整数 $u$，数 $u^{1999}$ 与 $u$ 的奇偶性相同，即 $u^{1999}\equiv u(\mathrm{mod}\,2)$，故 $d\equiv a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$，即 $2\mid d$.

此外，对任意整数 $u$，易于验证(区分 $3\mid u$ 及 $3\nmid u$)

$$u^3\equiv u(\mathrm{mod}\,3). \qquad ①$$

由此推出

$$\begin{aligned}u^{1999}=u\cdot u^{1998}&\equiv u\cdot u^{666}\equiv u\cdot u^{222}\equiv u^{75}\\&\equiv u^{25}\equiv u^9\equiv u^3\equiv u(\mathrm{mod}\,3).\end{aligned}$$

因此 $d \equiv a+b+c \equiv 0 \pmod 3$. 故 $6 \mid d$，从而 $d$ 不是素数.

**注** 解答中的同余式①是著名的费马小定理的特殊情形，请参见下一单元.

**例 3** 设整数 $x$、$y$、$z$ 满足

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z, \qquad ①$$

证明：$x+y+z$ 被 27 整除.

**证明** 我们将由①推出，$x$、$y$、$z$ 必须两两模 3 同余，从而 $27 \mid (x-y)(y-z)(z-x)$，故由①知 $27 \mid (x+y+z)$.

反证法，首先设 $x$、$y$、$z$ 中恰有两个数模 3 同余，无妨设 $x \equiv y \pmod 3$，但 $x \not\equiv z \pmod 3$. 此时 $3 \mid (x-y)$，而 $3 \nmid (x+y+z)$，于是①的左边 $\equiv 0 \pmod 3$，但右边 $\not\equiv 0 \pmod 3$，矛盾. 故这种情形不会出现.

其次设 $x$、$y$、$z$ 模 3 的余数互不相同，此时易知 $3 \mid (x+y+z)$，但 $3 \nmid (x-y)(y-z)(z-x)$，从而①两边模 3 的余数不同，矛盾. 即这种情形也不能出现.

因此，我们前述的断言正确，即证明了本题的结论.

**注** 例 3 的解法，体现了应用同余处理数论问题的一个基本原则：若整数 $A=0$，则 $A$ 被任何正整数 $n(n>1)$ 除得的余数必然是 0. 因此，若能找到某一个 $n>1$，使 $A$ 模 $n$ 不为 0，则整数 $A$ 决不能是 0. 我们常基于这一原则，用同余导出某种必要条件，或产生结果（如例 3），或为进一步论证作准备，本书的后面还有许多这样的例子.

下面的例 4 是一个老问题.

**例 4** 设 $n>1$，证明：$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 不是完全平方数.

**证明** 反证法，设有某个 $n>1$ 及整数 $x$，使得

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1} = x^2. \qquad ①$$

由①可知 $x$ 是奇数（实际上是将①模 2，注意 $x^2 \equiv x \pmod 2$）. 进一步，因 $2 \nmid x$，故 $x^2 \equiv 1 \pmod 4$. 但

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1} - 1 = \underbrace{11\cdots10}_{n-1个1}$$

只能被 2 整除，而不被 4 整除，即①的左边 $\not\equiv 1 \pmod 4$，矛盾！

用同余处理问题，关键在于选择模. 但究竟怎样选择，却并无简单的规则可循，得视具体问题而定. 在例 4 中，我们先将①模 2，虽不能解决问题，但基

于此得出的信息进一步模 4，则导出了矛盾.

**例 5** 用数码 1、2、3、4、5、6、7 作七位数，每个数码恰用一次. 证明：这些七位数中没有一个是另一个的倍数.

**证明** 假设有这样两个七位数 $a$，$b(a\neq b)$使得

$$a=bc, \tag{1}$$

其中 $c$ 为大于 1 的整数. 由于 $a$、$b$ 的数码之和均是 $1+2+3+4+5+6+7\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$，故 $a\equiv b\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$（见第 1 单元例 3 的注 2）. 现在将①模9，得出$c\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$. 但 $c>1$，故 $c\geqslant 10$，这样，$a\geqslant 10b>10^7$，与 $a$ 是七位数矛盾.

**例 6** 数列$\{x_n\}$为 1，3，5，11，…满足递推关系

$$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1},\ n\geqslant 2. \tag{1}$$

数列$\{y_n\}$为 7，17，55，161，…满足递推关系

$$y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1},\ n\geqslant 2. \tag{2}$$

证明：这两个数列没有相同的项.

**证明** 考虑以 8 为模. 首先证明，数列$\{x_n\}$模 8 后是一个周期数列

$$1,3,5,3,5,\cdots. \tag{3}$$

因为 $x_2\equiv 3$，$x_3\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$. 若已有

$$x_{n-1}\equiv 3,\ x_n\equiv 5(\mathrm{mod}\,8),$$

则由递推公式①，得

$$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}\equiv 5+2\times 3\equiv 3(\mathrm{mod}\,8),$$
$$x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n\equiv 3+2\times 5\equiv 5(\mathrm{mod}\,8),$$

这就归纳证明了我们的断言.

同样由②可证明，数列$\{y_n\}$模 8 后成为周期数列

$$7,1,7,1,7,1,\cdots. \tag{4}$$

由③、④可见，两个数列 $x_2$，$x_3$，…与 $y_1$，$y_2$，…模 8 后无相同项，故这两个数列无相同项. 又因为$\{y_n\}$是递增的，所以 $y_1$，$y_2$，…决不会等于 $x_1=1$，这就证明了$\{x_n\}$与$\{y_n\}$无相同项.

**注 1** 易知$\{x_n\}$与$\{y_n\}$模 3 后分别成周期数列：

$$1,0,2,2,0,1,1,0,2,2,\cdots;\text{及}\ 1,2,1,2,\cdots.$$

两者有无穷多对项相等，因此模 3 不能解决问题. 同样可知，模 4 也不能解决问题. 参见例 3 后面的注.

**注 2** 线性递推数列①和②模 8 后成为周期数列，这一点并非偶然. 实际上，给定 $m>1$，若$\{x_n\}(n\geqslant 1)$ 是由递推公式

$$x_{n+k}=f(x_{n+k-1},\cdots,x_{n+1},x_n)$$

确定的整数数列，其中 $f$ 是 $k$ 元整系数多项式，初值 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 为给定整数，则$\{x_n\}$模 $m$ 后终将成为周期数列.

为证明这一结论，我们用$\overline{x}_i$ 表示$x_i$ 被$m$ 除得的余数$(0\leqslant\overline{x}_i<m)$ 考虑有序的 $k$ 元数组

$$A_n=\langle\overline{x}_n,\overline{x}_{n+1},\cdots,\overline{x}_{n+k-1}\rangle(n=1,2,\cdots).$$

由于每个$\overline{x}_i$ 至多可取 $m$ 个不同值，故互不相同的数组 $A_n$ 至多有 $m^k$ 个. 因此，在 $m^k+1$ 个 $k$ 元数组 $A_1,A_2,\cdots,A_{m^k+1}$ 中，必有两个完全相同，设 $A_i=A_j(i<j)$，即

$$\overline{x}_{i+t}=\overline{x}_{j+t}(t=0,1,\cdots,k-1).$$

由此结合 $\{x_n\}$ 的递推公式及同余式的基本性质易推出，上式在 $t=k$ 时亦成立，即有$\overline{x}_{i+k}=\overline{x}_{j+k}$. 于是，由归纳法即可证明，对任意 $t\geqslant 0$，都有$\overline{x_{i+t}}=\overline{x_{j+t}}$，这意味着，数列$\{\overline{x}_n\}$ 从第 $i$ 项开始，每 $j-i$ 个一组，将循环出现.

**例 7** 设 $p$ 是给定的正整数，试确定 $(2p)^{2m}-(2p-1)^n$ 的最小正值，这里 $m$、$n$ 为任意正整数.

**解** 所求的最小正值是 $(2p)^2-(2p-1)^2=4p-1$. 为了证明，我们首先注意，由

$$(2p)^2=(4p-2)p+2p,$$

及

$$(2p-1)^2=(4p-2)(p-1)+(2p-1)$$

易推出

$$(2p)^{2m}-(2p-1)^n\equiv(2p)-(2p-1)\equiv 1(\mathrm{mod}\,4p-2). \qquad ①$$

进一步，我们证明，没有正整数 $m$、$n$ 使得 $(2p)^{2m}-(2p-1)^n=1$. 假设相反，则有

$$((2p)^m-1)((2p)^m+1)=(2p-1)^n.$$

上式左边两个因数显然互素，而右边是正整数的 $n$ 次幂，故

$$(2p)^m+1=a^n, \qquad ②$$

其中 $a$ 是一个正整数，$a\mid(2p-1)$. 将②式模 $a$，其左边为

$$(2p-1+1)^m+1\equiv 1+1\equiv 2(\mathrm{mod}\,a),$$

导出 $2\equiv 0(\mathrm{mod}\,a)$，但由 $a\mid 2p-1$ 知 $a$ 是大于 1 的奇数，产生矛盾.

综合①可见，若 $(2p)^{2m}-(2p-1)^n>0$，则 $(2p)^{2m}-(2p-1)^n\geqslant 4p-1$，且在 $m=1$，$n=2$ 时取得等号，这就证明了我们的结论.

**例 8** 连结正 $n$ 边形的顶点，得到一个闭的 $n$—折线. 证明：若 $n$ 为偶数，则在连线中有两条平行线；若 $n$ 为奇数，连线中不可能恰有两条平行线.

**证明** 这是一个不宜用几何方法解决的几何问题，它与模 $n$ 的完全剩余系有关.

依逆时针顺序将顶点标上数 0，1，…，$n-1$. 设问题中的闭折线为 $a_0\to a_1\to\cdots\to a_{n-1}\to a_n=a_0$，这里 $a_0$，$a_1$，…，$a_{n-1}$ 是 0，1，…，$n-1$ 的一个排列.

首先，由诸 $a_i$ 是正 $n$ 边形的顶点易知

$$\begin{aligned}a_ia_{i+1}\ /\!/\ a_ja_{j+1}&\Leftrightarrow \overset{\frown}{a_{i+1}a_j}=\overset{\frown}{a_{j+1}a_i}\\&\Leftrightarrow a_i+a_{i+1}\equiv a_j+a_{j+1}(\mathrm{mod}\,n).\end{aligned}$$

当 $n$ 为偶数时，$2\nmid(n-1)$，故模 $n$ 的任一完系之和 $\equiv 0+1+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$.

但另一方面，我们总有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})&=\sum_{i=0}^{n-1}a_i+\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}=2\sum_{i=0}^{n-1}a_i=2\times\frac{n(n-1)}{2}\\&=n(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,n).\end{aligned}\qquad①$$

所以 $a_i+a_{i+1}(i=0,1,\cdots,n-1)$ 不能构成模 $n$ 的完全剩余系，即必有 $i\neq j(0\leqslant i,j\leqslant n-1)$，使得

$$a_i+a_{i+1}\equiv a_j+a_{j+1}(\mathrm{mod}\,n),$$

因而必有一对边 $a_ia_{i+1}\ /\!/\ a_ja_{j+1}$.

当 $n$ 为奇数时，若恰有一对边 $a_ia_{i+1}\ /\!/\ a_ja_{j+1}$，则 $n$ 个数 $a_0+a_1$，$a_1+a_2$，…，$a_{n-1}+a_0$ 之中恰有一个剩余类 $r$ 出现两次，从而也恰缺少一个剩余类 $s$，于是（这时 $2\mid(n-1)$）

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})&\equiv 0+1+\cdots+(n-1)+r-s=\frac{n(n-1)}{2}+r-s\\&\equiv r-s(\mathrm{mod}\,n).\end{aligned}$$

结合①得 $r \equiv s \pmod{n}$，矛盾！这表明在 $n$ 为奇数时，不可能恰有一对边平行.

**例 9**　设 $n > 3$ 是奇数，证明：将 $n$ 元集合 $S = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 任意去掉一个元素后，总可以将剩下的元素分成两组，每组 $\frac{n-1}{2}$ 个数，使两组的和模 $n$ 同余.

**证明**　论证的一个关键是，对任意 $x \in S$，$x \neq 0$，集合 $S\backslash\{x\}$ 可以从 $T = \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 作变换

$$T + x \pmod{n} = \{a + x \pmod{n},\ a \in T\}$$

得到.

这就将问题化归为证明其特殊情形：$T = S\backslash\{0\}$ 可以分成两组，每组 $\frac{n-1}{2}$ 个数，使两组的和模 $n$ 同余.

我们区分两种情况. 当 $n = 4k+1 (k \geqslant 1)$ 时，注意 $2k$ 个数对

$$\{1, 4k\}, \{2, 4k-1\}, \cdots, \{2k, 2k+1\}$$

中，每对的和模 $n$ 均为 0，于是任取 $k$ 个数对作成一集，剩下的 $k$ 对数作另一集便符合要求.



若 $n = 4k+3 (k \geqslant 1)$，我们先取 1、2、$4k$ 于一集，3、$4k+1$、$4k+2$ 于另一集，然后将剩下的 $2k-2$ 个数对

$$\{4, 4k-1\}, \cdots, \{2k+1, 2k+2\}$$

各取 $k-1$ 对分置上述两集即可.

**例 10**　证明：对任意整数 $n \geqslant 4$，存在一个 $n$ 次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

具有下述性质：

(1) $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 均为正整数；

(2) 对任意正整数 $m$，及任意 $k (k \geqslant 2)$ 个互不相同的正整数 $r_1, \cdots, r_k$，均有

$$f(m) \neq f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k).$$

**证明**　本题的基本精神是要求两个整数不能相等，同余对此正能派上用场（参见例 3 下面的注）.

我们希望作出一个（首项系数为 1 的）正整数系数的 $n$ 次多项式，使得对任意整数 $a$，均有 $f(a) \equiv 2 \pmod{4}$，由此即知，对任意 $k (k \geqslant 2)$ 个整数 $r_1, \cdots,$

$r_k$，有 $f(r_1)\cdots f(r_k)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$，但 $f(m)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$，因此，对任意整数 $m$，数 $f(m)$ 与 $f(r_1)\cdots f(r_k)$ 模 4 不相等，从而它们决不能相等.

我们取

$$f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+2. \qquad ①$$

将①的右边展开即知 $f(x)$是一个 $n$ 次的首项系数为 1 的正整数系数的多项式. 另一方面，对任意整数 $a$，由于 $n\geqslant 4$，故连续 $n$ 个整数 $a+1$，…，$a+n$ 中必有一个为 4 的倍数，因此 $4\mid(a+1)\cdots(a+n)$，故由①知 $f(a)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$. 这表明多项式①符合问题的要求.

构作 $f(x)$的方式很多，下面是一个稍有些不同的方法：

我们注意，当 $n\geqslant 4$ 为偶数时，则对任意整数 $a$ 有 $4\mid a^n-a^2$. 这是因为，若 $a$ 为偶数，则 $4\mid a^2$，故 4 整除 $a^2(a^{n-2}-1)=a^n-a^2$；若 $a$ 为奇数，则因 $n-2$ 为偶数，故 $a^{n-2}$ 是奇数的平方，从而 $4\mid a^{n-2}-1$，故 $4\mid a^2(a^{n-2}-1)$.

同样不难证明，当 $n\geqslant 5$ 为奇数时，$a^n-a^3=a^3(a^{n-3}-1)$ 被 4 整除.

因此，对偶数 $n\geqslant 4$，取

$$f(x)=x^n+4(x^{n-1}+\cdots+x^3)+3x^2+4x+2 \qquad ②$$
$$=x^n-x^2+4(x^{n-1}+\cdots+x)+2; \qquad ③$$

对奇数 $n\geqslant 5$，取

$$f(x)=x^n+4(x^{n-1}+\cdots+x^4)+3x^3+4x^2+4x+2 \qquad ④$$
$$=x^n-x^3+4(x^{n-1}+\cdots+x)+2. \qquad ⑤$$

则由②、④可见，$f(x)$是 $n$ 次的首项系数为 1 的正整数系数多项式；而由③、⑤及前面说的结果知，对任意整数 $a$，有 $f(a)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$. 因此多项式②或④符合要求. 证毕.

请注意，若不要求所说的多项式的首项系数为 1，则问题极为平凡. 例如，可取 $f(x)=4(x^n+x^{n-1}+\cdots+x)+2$.

**例 11** 设 $k$、$l$ 是两个给定的正整数. 证明，有无穷多个正整数 $m$，使得 $\mathrm{C}_m^k$ 与 $l$ 互素.

**证法一** 我们需证明，有无穷多个 $m$，使得对于 $l$ 的任一个素因子 $p$，有 $p\nmid \mathrm{C}_m^k$. 注意

$$k!\mathrm{C}_m^k=m(m-1)\cdots(m-(k-1)). \qquad ①$$

对于任意一个素数 $p\mid l$，设 $p^\alpha\parallel k!$，即 $p^\alpha\mid k!$，但 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，这里 $\alpha\geqslant 0$. 我们取(无穷多个)$m$，使得①的右边 $\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1})$. 这样的 $m$ 可以取为

$$m \equiv k(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1}). \qquad ②$$

对满足②的 $m$，①的右边（在模 $p^{\alpha+1}$ 意义下）被简化为：$\equiv k(k-1)\cdots 1 = k!$ $(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1})$，即有

$$k!C_m^k \equiv k!(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1}).$$

因 $p^{\alpha+1} \nmid k!$，故由上式知 $p \nmid C_m^k$.

现在设 $p_1, \cdots, p_t$ 是 $l$ 的全部的不同素因子，并设 $p_i^{\alpha_i} \parallel k!$，由上面的结果知，若 $m \equiv k(\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i+1})(i = 1, \cdots, t)$，即

$$m \equiv k(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1+1}\cdots p_t^{\alpha_t+1}), \qquad ③$$

则 $C_m^k$ 与 $p_1, \cdots, p_t$ 均互素，从而与 $l$ 互素. 满足③的正整数 $m$ 当然有无穷多个. 证毕.

注意，由 $p_i$ 及 $p_i^{\alpha_i}$ 的定义可见，$p_1^{\alpha_1+1}\cdots p_t^{\alpha_t+1} \mid l \cdot k!$，因此，若 $m$ 满足 $m \equiv k(\mathrm{mod}\ l \cdot k!)$，则更满足③，故也可取 $m$ 为显式依赖于给定整数 $k$，$l$ 的正整数：$m \equiv k(\mathrm{mod}\ l \cdot k!)$.

**证法二** 这一解法无需借助同余. 将 $C_m^k$ 表示为

$$\begin{aligned} C_m^k &= \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \\ &= \frac{m}{1} \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{(m-(k-2))}{k-1} \cdot \frac{(m-(k-1))}{k} \\ &= \left(\frac{m+1}{1}-1\right)\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\cdot \cdots \cdot \left(\frac{m+1}{k-1}-1\right)\left(\frac{m+1}{k}-1\right). \end{aligned}$$

我们希望取正整数 $m$，使得对任意 $i = 1, 2, \cdots, k$，数 $\frac{m+1}{i}$ 为 $l$ 的倍数，从而每个 $\frac{m+1}{i}-1$ 均与 $l$ 互素，故它们的积与 $l$ 互素，即 $(C_m^k, l) = 1$. 显然 $m = -1 + xl \cdot k!$ 符合这样的要求，$x = 1, 2, \cdots$，这当然有无穷多个.

## 习 题 6

**1** 一个立方体的顶点标上数 $+1$ 或 $-1$，面上标一个数，它等于这个面四个顶点处的数之乘积. 证明：这样标出的 14 个数之和不能为 0.

**2** 求所有的正整数 $n$，使得由 $n-1$ 个数码 1 与一个数码 7 构成的十进制整数，都是素数.

**3** 设 $p$ 是素数，$a \geqslant 2$，$m \geqslant 1$，$a^m \equiv 1 \pmod{p}$，$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. 证明：$a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

**4** 设 $m$ 是给定的正整数，证明：由

$$x_1 = x_2 = 1,\ x_{k+2} = x_{k+1} + x_k (k = 1, 2, \cdots)$$

定义的数列 $\{x_n\}$ 的前 $m^2$ 个项中，必有一项被 $m$ 整除.

# 7 几个著名的数论定理

费马小定理，欧拉定理以及中国剩余定理这几个著名的数论定理，在初等数论中有着重要的作用.

(1) 费马小定理　设 $p$ 是素数，$a$ 是与 $p$ 互素的任一整数，则

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

费马小定理有一个变异的形式，这有时更为适用：

对任意整数 $a$ 有 $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$.

(在 $p \nmid a$ 时，两个命题等价；当 $p \mid a$ 时后者显然成立.)

用归纳法不难给出费马小定理的一个证明：易知，我们只需对 $a = 0, 1, \cdots, p-1$ 证明命题. $a = 0$ 时，结论显然成立. 若已有 $a^p = a (\mathrm{mod}\ p)$，则由于 $p \mid C_p^i (i = 1, 2, \cdots, p-1)$，故

$$(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} a + 1 \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

这表明命题在 $a$ 换为 $a+1$ 时也成立.

(2) 欧拉定理　设 $m > 1$ 为整数，$a$ 是与 $m$ 互素的任一整数，$\varphi(m)$ 为欧拉函数(见第 6 单元)，则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m).$$

欧拉定理可如下证明：取 $r_1, r_2, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 为模 $m$ 的一个缩系. 因为 $(a, m) = 1$，故 $ar_1, ar_2, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ 也是模 $m$ 的一个缩系(见第 6 单元). 由于模 $m$ 的两个完(缩)系在模 $m$ 意义下互为排列，因此特别地有

$$r_1 \cdots r_{\varphi(m)} \equiv ar_1 \cdot ar_2 \cdot \cdots \cdot ar_{\varphi(m)} = a^{\varphi(m)} r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)} (\mathrm{mod}\ m).$$

因 $(r_i, m) = 1$，故 $(r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)}, m) = 1$，因此上式两边可约去 $r_1 \cdots r_{\varphi(m)}$，即有 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$.

**注 1**　当 $m = p$ 为素数时，由于 $\varphi(p) = p-1$，故由欧拉定理可推出费马小定理.

**注 2**　若已知 $m$ 的标准分解 $m = p_1^{q_1} \cdots p_k^{q_k}$，则欧拉函数 $\varphi(m)$ 由下面公式

确定(其证明这里略去)：

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= p_1^{q_1-1}(p_1-1)p_2^{q_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{q_k-1}(p_k-1)\\ &= m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

(3) 中国剩余定理　设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 $k$ 个两两互素的正整数，$M = m_1m_2\cdots m_k$，$M_i = \dfrac{M}{m_i}(i = 1, 2, \cdots, k)$，$b_1, b_2, \cdots, b_k$ 为任意整数，则同余式组

$$x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\ m_1), \cdots, x \equiv b_k (\mathrm{mod}\ m_k)$$

有唯一解 $x \equiv M_1^* M_1 b_1 + \cdots + M_k^* M_k b_k (\mathrm{mod}\ M)$，其中 $M_i^*$ 为满足 $M_i^* M_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$ 任意整数$(i = 1, 2, \cdots, k)$.

验证上述结论是一件容易的事情，我们将这留给读者(注意，对任意 $i$，有 $(m_i, M_i)=1$，以及对任意 $j\neq i$ 有 $m_i | M_j$). 中国剩余定理的主要力量在于，它断言所说的同余式组当模两两互素时一定有解，而解的具体形式通常并不重要.

上述的几个数论定理是解决问题的有力工具，它们往往和其他方法结合使用，我们在后面将看到这一点，这里先介绍几个较为直接的应用这些定理的例子.

**例 1**　设 $p$ 是给定的素数. 证明：数列 $\{2^n - n\}(n \geqslant 1)$ 中有无穷多个项被 $p$ 整除.

**证明**　$p = 2$ 时结论显然成立. 设 $p > 2$，则由费马小定理得 $2^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，从而对任意正整数 $m$ 有

$$2^{m(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p). \qquad ①$$

我们取 $m \equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$，则由 ①，得

$$2^{m(p-1)} - m(p-1) \equiv 1 + m \equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

因此，若 $n = (kp-1)(p-1)$，则 $2^n - n$ 被 $p$ 整除($k$ 为任意正整数)，故数列中有无穷多项被 $p$ 整除.

**例 2**　证明：数列 1，31，331，3331，…中有无穷多个合数.

**证明**　因 31 是素数，由费马小定理知，$10^{30} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 31)$，故对任意正整数 $k$，有 $10^{30k} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 31)$，从而

$$\frac{1}{3}(10^{30k} - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 31).$$

这表明，$30k$ 个 3 组成的数被 31 整除，这数乘以 100 后再加上 31，也被 31 整除，即数列中第 $30k+2$ 项被 31 整除，故它不是素数，从而上述的数列中有无穷多个合数.

**例 3**　证明：对任意给定的正整数 $n$，均有连续 $n$ 个正整数，其中每一个都有大于 1 的平方因子.

**证明**　由于素数有无穷多个，我们可取出 $n$ 个互不相同的素数 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$，而考虑同余式组

$$x \equiv -i \pmod{p_i^2},\ i=1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

因 $p_1^2$，$p_2^2$，…，$p_n^2$ 显然两两互素，故由中国剩余定理知，上述同余式组有正整数解，于是，连续 $n$ 个数 $x+1$，$x+2$，…，$x+n$ 分别被平方数 $p_1^2$，$p_2^2$，…，$p_n^2$ 整除.

若不直接使用素数，也可采用下面的变异的方法. 由于费马数 $F_k=2^{2^k}+1(k\geqslant 0)$ 两两互素（第 2 单元例 3），故将 ① 中的 $p_i^2$ 换为 $F_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 后，相应的同余式组也有解，同样导出证明.

**注**　例 3 的解法表现了中国剩余定理的一个基本功效，它常常能将“找连续 $n$ 个整数具有某种性质”的问题，化归为“找 $n$ 个两两互素的数具有某种性质”，后者往往易于解决.



**例 4**　(1) 证明：对任意正整数 $n$，存在连续 $n$ 个正整数，其中每一个都不是幂数；

(2) 证明，存在无穷多个互不相同的正整数，它们及它们中任意多个不同数的和均不是幂数.

（幂数的定义请见第 5 单元例 9.）

**证明**　(1) 我们证明，存在连续 $n$ 个正整数，其中每一个数都至少有一个素因子，在这个数的标准分解中仅出现一次，从而这个数不是幂数.

由于素数有无穷多个，故可取 $n$ 个互不相同的素数 $p_1$，…，$p_n$. 考虑同余式组

$$x \equiv -i+p_i \pmod{p_i^2},\ i=1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

因 $p_1^2$，$p_2^2$，…，$p_n^2$ 两两互素，故由中国剩余定理知，上述同余式组有正整数解 $x$. 对 $1\leqslant i\leqslant n$，因 $x+i\equiv p_i \pmod{p_i^2}$，故 $p_i \mid (x+i)$；但由 ① 可知 $p_i^2 \nmid (x+i)$，即 $p_i$ 在 $x+i$ 的标准分解中恰出现一次，故 $x+1$，$x+2$，…，$x+n$ 都不是幂数.

(2) 我们归纳构作一个由非幂数的正整数组成的（严格增的）无穷数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…，使得对每个 $n$，数 $a_1$，…，$a_n$ 中任意多个的和均不是幂数，

由此即证明了(2)中的结论.

首先，$a_1$ 可取为任一个非幂数的数，例如取 $a_1=2$. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 已确定，我们证明，可选择 $a_{n+1}$ 不是幂数，$a_{n+1}>a_n$，且 $a_{n+1}$ 与 $a_1, \cdots, a_n$ 中任意多个数的和均不是幂数.

设 $s_1, \cdots, s_m$ 是由 $a_1, \cdots, a_n$ 产生的所有不同项的和，这里 $m=2^n-1$. 由于素数有无穷多个，故可取 $m+1$ 个不同素数 $p, p_1, \cdots, p_m$，考虑同余式组

$$x \equiv p(\mathrm{mod}\ p^2),\ x \equiv -s_i + p_i(\mathrm{mod}\ p_i^2),\ i=1, \cdots, m. \qquad ②$$

因 $p^2, p_1^2, \cdots, p_m^2$ 两两互素，故同余式组②有无穷个正整数解 $x$. 任取一个大于 $a_n$ 的解，记为 $a_{n+1}$. 则由 $a_{n+1} \equiv p(\mathrm{mod}\ p^2)$ 知，$a_{n+1}$ 被 $p$ 整除，但 $p^2 \nmid a_{n+1}$，故 $a_{n+1}$ 不是幂数. 又 $a_{n+1} \equiv -s_i + p_i(\mathrm{mod}\ p_i^2)$ 表明，$a_{n+1}+s_i$ 被 $p_i$ 整除但不被 $p_i^2$ 整除，从而对每个 $i=1, \cdots, m$，数 $a_{n+1}+s_i$ 均不是幂数. 由此就递推地构作了一个符合前述要求的无穷数列，$a_1, a_2, \cdots$. 证毕.

**注** 本题(2)的另一种解法见第 5 单元例 9，那儿构作的数列中，每一项均整除其后一项. 作为对比，我们注意，将(2)的上述解法稍作修改，则可使得我们构作的数列中的项两两互素.

事实上，归纳假设 $a_1, \cdots, a_n$ 已两两互素，设 $q_1, \cdots, q_t$ 是这些数中出现的所有不同的素因子. 现在取素数 $p, p_1, \cdots, p_m$ 互不相同，且与 $q_1, \cdots, q_t$ 也不相同，在同余式组②中增加一个限制

$$x \equiv 1(\mathrm{mod}\ q_1 \cdots q_t). \qquad ③$$

由于 $p^2, p_1^2, \cdots, p_m^2, q_1 \cdots q_t$ 两两互素，故同余式组②增添③后有解，并且由③知，任一个解 $x$ 与 $q_1 \cdots q_t$ 互素，从而与 $a_1, \cdots, a_n$ 均互素.

**例 5** 给定正整数 $n$，设 $f(n)$ 是使 $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ 能被 $n$ 整除的最小正整数. 证明：当且仅当 $n$ 为 2 的幂时有 $f(n)=2n-1$.

**证明** 问题的前一半甚为容易. 如果 $n=2^m$，则一方面

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k = \frac{(2n-1)\times 2n}{2} = (2^{m+1}-1)\cdot 2^m$$

被 $2^m=n$ 整除. 另一方面，若 $r \leqslant 2n-2$，则

$$\sum_{k=1}^{r} k = \frac{r(r+1)}{2}$$

不被 $2^m$ 整除，这是因为 $r$ 和 $r+1$ 中有一个是奇数，而另一个不超过 $(2n-2)+1=2^{m+1}-1$，因而不被 $2^{m+1}$ 整除. 综合上述两个方面，即知 $f(2^m)=$

$2^{m+1}-1$.

现在设 $n$ 不是 2 的方幂，即 $n=2^m a$，其中 $m\geqslant 0$，$a>1$ 为奇数. 我们证明，存在正整数 $r<2n-1$，使得 $2^{m+1}\mid r$，且 $a\mid(r+1)$，于是

$$\sum_{k=1}^{r}k=\frac{r(r+1)}{2}$$

被 $2^m a=n$ 整除，因而 $f(n)<2n-1$.

为证明上面的断言，我们考虑

$$x\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{m+1}),\ x\equiv -1(\mathrm{mod}\ a). \qquad ①$$

因为 $(2^{m+1},\ a)=1$，故由中国剩余定理知，同余式组 ① 必有解 $x_0$，并且其全部解为 $x\equiv x_0(\mathrm{mod}\ 2^{m+1}a)$，即 $x\equiv x_0(\mathrm{mod}\ 2n)$. 因此可确定一个 $r$ 满足 ①，且 $0<r\leqslant 2n$. 进一步，由 ① 中第二个同余式知 $r\neq 2n$. 而由第一个同余式可见 $r\neq 2n-1$，因此实际上 $r<2n-1$. 这证明了存在满足要求的 $r$.

**例 6** 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，$a_1$，…，$a_m$ 是给定的非零整数，具有下面的性质：对任意整数 $n$，数 $f(n)$ 被 $a_1$，…，$a_m$ 中的一个整除. 证明：存在一个 $a_i(1\leqslant i\leqslant m)$，使得对所有整数 $n$，$f(n)$ 均被 $a_i$ 整除.

**证明** 若 $a_1$，…，$a_m$ 中有一个数为 $\pm 1$，则结论显然成立. 以下设每个 $a_i\neq\pm 1$. 假设结论不对，则对每个 $a_i$ 均相应地有一个整数 $x_i$，使得 $a_i\nmid f(x_i)$. $i=1$，…，$m$. 我们将由此作出一个整数 $n$，使得所有 $a_i$ 均不整除 $f(n)$，这将与已知条件矛盾.

对 $i=1$，…，$m$，因为 $a_i\nmid f(x_i)$，故有一个素数幂 $p_i^{q_i}$，使得 $p_i^{q_i}\mid a_i$，但 $p_i^{q_i}\nmid f(x_i)$. 若 $p_1^{q_1}$，…，$p_m^{q_m}$ 中有同一个素数的幂，则仅留下一个幂次最低的，而将那些高次（及同次）幂删去. 经过这种手续，不妨设剩下的素数幂为 $p_1^{q_1}$，…，$p_t^{q_t}(1\leqslant t\leqslant m)$，则它们两两互素，故由中国剩余定理知，同余式组

$$n\equiv x_i(\mathrm{mod}\ p_i^{q_i}),\ i=1,\ \cdots,\ t \qquad ①$$

有整数解 $n$.

由于 $f(x)$ 是整系数多项式，故由①可知

$$f(n)\equiv f(x_i)(\mathrm{mod}\ p_i^{q_i}),\ i=1,\ \cdots,\ t.$$

对于 $i=1$，…，$t$，由于 $p_i^{q_i}\nmid f(x_i)$，故由上式知 $p_i^{q_i}\nmid f(n)$，更有 $a_i\nmid f(n)$，而对于 $j=t+1$，…，$m$，由前面的手续及假设知，每个 $p_j$ 等于某一个 $p_i(1\leqslant i\leqslant t)$，且 $p_i^{q_i}\mid p_j^{q_j}$. 因此由 $p_i^{q_i}\nmid f(n)$，推出 $p_j^{q_j}\nmid f(n)$，进而 $a_j\nmid f(n)$. 因此 $f(n)$ 不被 $a_1$，…，$a_m$ 中的任一个整除，这与问题中的条件相违. 从而本题的结论成立. 证毕.

# 习 题 7

**1** 设 $p$ 为奇素数，$n=\dfrac{2^{2p}-1}{3}$. 证明：$2^{n-1}\equiv 1(\bmod n)$.

**2** 设 $m\geqslant 2$，$a_1$，$a_2$，…，$a_m$ 是给定的正整数. 证明：有无穷多个正整数 $n$，使得数 $a_1\cdot 1^n+a_2\cdot 2^n+\cdots+a_m\cdot m^n$ 都是合数.

**3** 设 $m$、$n$ 为正整数，且 $m\geqslant n$，具有性质：等式

$$(11k-1,\ m)=(11k-1,\ n)$$

对所有正整数 $k$ 成立. 证明：$m=11^r n$，$r$ 是一个非负整数.

# 8 阶及其应用

设 $n>1$，$a$ 是满足 $(a,n)=1$ 的整数，则必有一个 $r(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 使得 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$.

事实上，由于 $n$ 个数 $a^0$，$a^1$，…，$a^{n-1}$ 都与 $n$ 互素，故它们模 $n$ 至多有 $n-1$ 个不同的余数，因此其中必有两个模 $n$ 同余，即有 $0\leqslant i<j\leqslant n-1$，使得 $a^i\equiv a^j(\mathrm{mod}\ n)$，故 $a^{j-i}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$，于是取 $r=j-i$ 则符合要求.

满足 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ 的最小正整数 $r$，称为 $a$ 模 $n$ 的阶. 由上面的论证可知 $1\leqslant r\leqslant n-1$. 下述的(1)表明，$a$ 模 $n$ 的阶具有一个非常锐利的性质：

(1) 设 $(a,n)=1$，$a$ 模 $n$ 的阶为 $r$. 若正整数 $N$ 使得 $a^N\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$，则 $r\mid N$.



这是因为，设 $N=rq+k(0\leqslant k<r)$，则

$$1\equiv a^N\equiv (a^r)^q\cdot a^k\equiv a^k(\mathrm{mod}\ n).$$

因 $0\leqslant k<r$，故由上式及 $r$ 的定义知，必须有 $k=0$，从而 $r\mid N$.

性质(1)结合欧拉定理(第 7 单元中(2))可推出

(2) 设 $(a,n)=1$，则 $a$ 模 $n$ 的阶 $r$ 整除 $\varphi(n)$. 特别地，若 $n$ 是素数 $p$，则 $a$ 模 $p$ 的阶整除 $p-1$.

许多问题中，求出 $a$ 模 $n$ 的阶往往非常重要. 利用 $a$ 模 $n$ 的阶及性质(1)，便能由某些整数幂的指数产生整除关系，这是数论中导出整除的一个基本方法. 另一方面，确定 $a$ 模 $n$ 的阶通常极其困难，当问题具有某种特殊性时方有可能实现. 对于具体的 $a$ 和 $n$，逐一计算 $a$，$a^2$，…，模 $n$ 的余数可以求得 $a$ 模 $n$ 的阶；若利用(2)，这一手续能稍被简化.

阶是解决许多问题的有力工具，我们举些例子作为说明.

**例 1** 设 $n>1$，$n\mid(2^n+1)$，证明 $3\mid n$.

**证明** 显然 $n$ 是奇数. 设 $p$ 是 $n$ 的最小素因子，我们证明 $p=3$，从而 $3\mid n$. 设 2 模 $p$ 的阶是 $r$. 由 $2^n\equiv -1(\mathrm{mod}\ n)$ 知

$$2^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p). \qquad ①$$

又因 $p \geqslant 3$，故费马小定理给出

$$2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p). \qquad ②$$

由①、②及阶的性质推出 $r|2n$ 及 $r|(p-1)$，故 $r|(2n, p-1)$. 不难证明 $(2n, p-1)=2$. 这是因为，由 $2 \nmid n$ 知 $2|(2n, p-1)$，但 $2^2 \nmid (2n, p-1)$；另一方面，若有奇素数 $q|(2n, p-1)$，则 $q|(p-1)$，及 $q|n$，但前者表明 $q<p$，这与 $p$ 是 $n$ 的最小素因子相违. 所以 $(2n, p-1)=2$，从而 $r=2$，故 $p=3$.

例 1 的一个关键想法是考虑 $n$ 的(最小)素因子 $p$，通过模 $p$ 而导出结果.

**例 2** 设 $n>1$，证明 $n \nmid (2^n-1)$.

**证明一** 反证法，设有一个 $n>1$，使 $n|(2^n-1)$. 对 $n$ 的任一个素因子 $p$，有 $p \geqslant 3$. 设 2 模 $p$ 的阶为 $r$，则显然 $r>1$. 由 $2^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$ 推出

$$2^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p). \qquad ①$$

又由费马小定理得

$$2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p). \qquad ②$$

因此 $r|n$ 及 $r|(p-1)$，从而 $r|(n, p-1)$. 现在我们特别地取 $p$ 为 $n$ 的最小素因子，则必有 $(n, p-1)=1$. 因为否则就有素数 $q|(n, p-1)$，故 $q|(p-1)$，及 $q|n$，但前者意味着 $q<p$，这与 $p$ 的选取矛盾，因此 $(n, p-1)=1$，故 $r=1$，矛盾！

**注 1** 这一解法的一个要点仍是考虑 $n$ 的素因子. 因 $n>1$ 等价于 $n$ 有一个素因子，因此，从 $2^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$ 过渡到同余式①，虽然减弱了反证法假设，但仍刻画了 $n>1$.

模一个素数的同余，往往有一些更适用的性质(或结果)，就本题而言，这样做的益处在于此时有同余式②. 例 1 及下面的例 3 均如此.

**注 2** 同余式①和②对于 $n$ 的任一素因子 $p$ 均成立. 因此，在证法一的开始阶段，我们将 $p$ 视为一待定参量，导出 $r|(p-1, n)$，便提供了选择 $p$ 以产生矛盾的机会.

保留参量，使我们的处理留有选择的余地，保持了某种灵活性，这是一种非常基本的手法.

**注 3** 由第 5 单元例 10 可知，满足例 1 条件的 $n$ 有无穷多个，这与例 2 的结论完全相反. 读者可查看一下，是论证中的哪些差异，使得导出的结果如此的不同.

**注 4** 顺便提一下，不利用阶也能解决例 2. 设 $p$ 是 $n$ 的最小素因子，则 $(p-1, n)=1$. 而由①，②知 $p|(2^{p-1}-1, 2^n-1)$，故由第 2 单元例 4 推出

$p \mid (2^{(p-1,\,n)}-1)$，从而 $p \mid 1$，矛盾！

例 1 也可类似地证明.

**证明二** 这一解法不必考虑 $n$ 的素因子. 设有 $n>1$，使 $n \mid (2^n-1)$，则 $n$ 为奇数，设 $r$ 是 2 模 $n$ 的阶，则由 $2^n \equiv 1 \pmod n$ 知 $r \mid n$. 又 $2^r \equiv 1 \pmod n$，故更有 $2^r \equiv 1 \pmod r$，即

$$r \mid (2^r-1). \tag{3}$$

因阶 $r$ 满足 $1 \leqslant r < n$，而显然 $r \neq 1$（否则导出 $n=1$），故 $1<r<n$. 由 ③ 重复上述论证，可得出无穷多个整数 $r_i (i=1,\ 2,\ \cdots)$，满足 $r_i \mid 2^{r_i}-1$，且 $n>r>r_1>r_2>\cdots>1$，这显然不可能.

这一证明，也可采用下面更为简单的表述：取 $n>1$ 是最小的使 $n \mid (2^n-1)$ 的整数，上面论证产生了一个整数 $r$，使得 $r \mid (2^r-1)$ 且 $1<r<n$，这与 $n$ 的选取相违.

**注** 证明二中的方法，就是所谓的无穷递降法，其基本精神是，由反证法假设存在一个解，设法造出另一个正整数解，而新的解比原来的解“严格地小”，即严格递减. 若上述过程可以无穷次地进行下去，则由于严格递减的正整数数列只有有限多项，便产生了矛盾.

**例 3** 设 $n>1, 2 \nmid n$，则对任意整数 $m>0$，有 $n \nmid (m^n+1)$.



**证明** 假设有大于 1 的奇数 $n$，满足 $n \mid (m^n+1)$，则 $(m,\ n)=1$. 设 $p$ 是 $n$ 的任一个素约数，$r$ 是 $m$ 模 $p$ 的阶（注意 $p \nmid m$）. 又设 $n-1=2^k t$，$k \geqslant 1$，$2 \nmid t$. 那么就有

$$m^{2^k t} \equiv -1 \pmod p, \tag{1}$$

从而 $m^{2^{k+1} t} \equiv 1 \pmod p$，故 $r \mid 2^{k+1} t$.

关键的一点是证明 $2^{k+1} \mid r$. 假设这结论不对，那么 $r=2^s r_1$，其中 $0 \leqslant s \leqslant k$，$r_1 \mid t$. 则由 $m^r \equiv 1 \pmod p$ 推出 $m^{2^k t} \equiv 1 \pmod p$，结合 ① 得 $p=2$，矛盾！故 $2^{k+1} \mid r$.

现在由 $(p,\ m)=1$，得出 $m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，从而 $r \mid (p-1)$，故 $2^{k+1} \mid (p-1)$，即 $p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. 由于 $p$ 是 $n$ 的任一素因子，将 $n$ 作标准分解，即知 $n \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$，即 $2^{k+1} \mid (n-1)$，但这与前面所设的 $2^k \parallel (n-1)$ 相违.

**例 4** 设 $p$ 是一个奇素数. 证明：$\dfrac{p^{2p}+1}{p^2+1}$ 的任一正约数均 $\equiv 1 \pmod{4p}$.

**证明** 我们只要证明 $\dfrac{p^{2p}+1}{p^2+1}$ 的任一个素约数 $q$ 满足 $q \equiv 1 \pmod{4p}$ 即可.

首先注意

$$\frac{p^{2p}+1}{p^2+1}=p^{2(p-1)}-p^{2(p-2)}+\cdots-p^2+1, \qquad ①$$

故 $q\neq p$. 设 $r$ 是 $p$ 模 $q$ 的阶，因

$$p^{2p}\equiv -1(\mathrm{mod}\,q), \qquad ②$$

故 $p^{4p}\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$，所以 $r\mid 4p$. 于是 $r=1,2,4,p,2p$ 或 $4p$.

若 $r=1,2,p,2p$，将导出 $p^{2p}\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$，结合 ② 得到 $q=2$，这不可能；若 $r=4$，则因 $q$ 是素数，我们推出 $q\mid(p^2-1)$ 或 $q\mid(p^2+1)$. 前者已证明为不可能. 若后者成立，即 $p^2\equiv -1(\mathrm{mod}\,q)$. 我们将 ① 式模 $q$，其左边模 $q$ 当然为 0，而右边 $\equiv(-1)^{p-1}-(-1)^{p-2}+\cdots-(-1)+1\equiv p(\mathrm{mod}\,q)$. 因此 $p=q$，这不可能，故 $r\neq 4$. 因此只能 $r=4p$.

最后，因 $(p,q)=1$，故由费马小定理得 $p^{q-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$，于是 $r\mid(q-1)$，即 $4p\mid(q-1)$，因此 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\,4p)$.

上面的解法中，关键是确定 $p$ 模 $q$ 的阶. 下面的例 5 是一个关于阶的有趣结果，其证明方法也具有一定的普遍性.

**例 5** (1) 设 $p$ 是奇素数，$a\neq\pm 1$，$p\nmid a$. 设 $r$ 是 $a$ 模 $p$ 的阶，$k_0$ 满足 $p^{k_0}\parallel(a^r-1)$. 记 $r_k$ 是 $a$ 模 $p^k$ 的阶，则有

$$r_k=\begin{cases} r, & \text{若 } k=1,\cdots,k_0,\\ rp^{k-k_0}, & \text{若 } k>k_0.\end{cases}$$

(2) 设 $a$ 是奇数，$a\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，$a\neq 1$，$k_0$ 满足 $2^{k_0}\parallel(a-1)$. 记 $l_k$ 是 $a$ 模 $2^k$ 的阶，则有

$$l_k=\begin{cases} 1, & \text{若 } k=1,\cdots,k_0,\\ 2^{k-k_0}, & \text{若 } k>k_0.\end{cases}$$

(3) 设 $a$ 是奇数，$a\equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$，$a\neq -1$，$k_0$ 满足 $2^{k_0}\parallel(a+1)$. 记 $l_k$ 是 $a$ 模 $2^k$ 的阶，则有

$$l_k=\begin{cases} 1, & \text{若 } k=1,\\ 2, & \text{若 } k=2,\cdots,k_0+1,\\ 2^{k-k_0}, & \text{若 } k>k_0+1.\end{cases}$$

**证明** (1) 当 $1\leqslant k\leqslant k_0$ 时，由 $a^{r_k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^k)$ 推出 $a^{r_k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$，故由 $r$ 的定义知 $r\mid r_k$. 另一方面，由 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^{k_0})$ 可得 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^k)$，故由 $r_k$ 的定义推出 $r_k\mid r$，从而 $r_k=r(k=1,\cdots,k_0)$.

现在设 $k>k_0$. 我们先证明，对每个 $i=0,1,\cdots$，有 $p^{k_0+i}\parallel(a^{rp^i}-1)$，

即有

$$a^{rp^i}=1+p^{k_0+i}u_i,\ (u_i,\ p)=1. \qquad ①$$

这可用归纳法来证明：当 $i=0$ 时，由 $k_0$ 的定义知 ① 成立. 设 ① 对 $i\geqslant 0$ 时已成立，则由二项式定理易知

$$\begin{aligned}a^{rp^{i+1}}&=(1+p^{k_0+i}u_i)^p=1+p^{k_0+i+1}u_i+C_p^2p^{2k_0+2i}u_i^2+\cdots\\&=1+p^{k_0+i+1}(u_i+C_p^2p^{k_0+i-1}u_i^2+\cdots)\\&=1+p^{k_0+i+1}u_{i+1},\end{aligned}$$

易知 $p\nmid u_{i+1}$（注意，我们这里需要 $p\geqslant 3$），于是 ① 对所有 $i\geqslant 0$ 都成立.

利用①，我们对 $k\geqslant k_0$ 归纳证明 $r_k=rp^{k-k_0}$. 当 $k=k_0$ 时，前面已证明了结论成立. 若 $k>k_0$，设已有 $r_{k-1}=rp^{k-k_0-1}$. 一方面，在 ① 中取 $i=k-k_0$ 可知 $a^{rp^{k-k_0}}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^k)$，故 $r_k\mid rp^{k-k_0}$. 另一方面，由 $a^{r_k}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^k)$ 可推出 $a^{r_k}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^{k-1})$，故 $r_{k-1}\mid r_k$，因此 $r_k=rp^{k-k_0}$ 或 $rp^{k-k_0-1}$. 但在 ① 中取 $i=k-k_0-1$，可知 $a^{rp^{k-k_0-1}}\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^k)$，故必须 $r_k=rp^{k-k_0}$.

(2) 当 $1\leqslant k\leqslant k_0$ 时，结论显然成立. 当 $k>k_0$ 时，注意 $a\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$a\neq 1$ 意味着 $k_0\geqslant 2$，由此极易用归纳法对 $i=0,\ 1,\ \cdots$ 证明

$$a^{2^i}=1+2^{k_0+i}u_i,\ 2\nmid u_i. \qquad ②$$

由②则不难与(1)中相同的论证推出，$l_k=2^{k-k_0}$ $(k\geqslant k_0)$.

(3) 由 $a\equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$，易证明 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ k_0+1$ 时的结论. 又用归纳法不难得知，对 $i=1,\ 2,\ \cdots$，有

$$a^{2^i}=1+2^{k_0+i}u_i,\ 2\nmid u_i \qquad ③$$

由此可与(1)中论证相同地得到 $l_k=2^{k-k_0}$（对 $k\geqslant k_0+1$）.

**注 1** 设 $a$ 和 $n>0$ 为给定的互素的整数，且均不是 $\pm 1$，并设 $n$ 的标准分解为 $n=2^\alpha p_1^{q_1}\cdots p_k^{q_k}$（$p_i$ 是奇素数，$\alpha\geqslant 0$）. 若已求得 $a$ 模 $p_i$ 的阶，则由例 5 可确定 $a$ 模 $p_i^{q_i}$ 的阶，也可求得 $a$ 模 $2^\alpha$ 的阶. 进而，由习题 8 第 2 题的结果，可求得 $a$ 模 $n$ 的阶. 因此，为确定 $a$ 模一个整数 $n$ 的阶，最终均化归为求 $a$ 模一个奇素数 $p$ 的阶. 后者一般而言，是一个极其困难的问题，但对于较小的 $a$ 和 $p$，可以通过手算求得结果.

**注 2** 设 $p$ 是奇素数，$a\neq\pm 1$，$p\nmid a$，$r$ 是 $a$ 模 $p$ 的阶，$k_0$ 满足 $p^{k_0}\parallel(a^r-1)$，则由例 5 中 ① 的证明可见，对任意与 $p$ 互素的正整数 $m$，有

$$a^{mrp^i}=1+p^{k_0+i}u_i',\ (u_i',\ p)=1,\ i=0,\ 1,\ \cdots.$$

由此并注意 $p$ 必与 $r$ 互素，我们易得：

(1) 设正整数 $n$ 满足 $r\mid n, p^l \parallel n$，则 $p^l \parallel \dfrac{a^n-1}{a^r-1}$.

此外，设 $a$ 为奇数，$a\neq\pm1$，$k_0$ 满足 $2^{k_0}\parallel(a^2-1)$，$m$ 为任意正奇数，则有

$$a^{2^i m}=1+2^{k_0+i-1}u_i',\ 2\nmid u_i',\ i=1,2,\cdots.$$

由此即知：

(2) 设 $n$ 为正整数，$2^l\parallel n$. 若 $l\geqslant 1$，则 $2^{l-1}\parallel\dfrac{a^n-1}{a^2-1}$.

例 5 中①、②、③的上述形式，有时更便于应用.

**注 3** 设 $p$ 是奇素数，$a$，$b$ 为整数，$p\nmid ab$. 则必有正整数 $r$，使得

$$a^r\equiv b^r(\mathrm{mod}\ p). \qquad ①$$

这是因为有 $b_1$ 使 $bb_1\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$，又有正整数 $r$ 满足 $(ab_1)^r\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$，由此导出①. 此外，易知使①成立的最小正整数 $r$ 与 $ab_1$ 模 $p$ 的阶相等. 由此推出，若正整数 $n$ 满足 $a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\ p)$，则 $r\mid n$

注 2 中的(1)与(2)有下面的推广，其证明则完全类似.

(1) 设 $a\neq\pm b$，$n$ 为正整数，若 $r\mid n$，$p^l\parallel n$，则 $p^l\parallel\dfrac{a^n-b^n}{a^r-b^r}$.

(2) 设 $a$、$b$ 为奇数，$a\neq\pm b$，$n$ 为正整数，$2^l\parallel n$. 若 $l\geqslant1$，则有 $2^{l-1}\parallel\dfrac{a^n-b^n}{a^2-b^2}$.

**例 6** 设 $a$ 和 $n$ 为整数，均不为 $\pm1$，且 $(a,n)=1$. 证明：至多有有限个 $k$，使得 $n^k\mid(a^k-1)$.

**证明** 因 $n\neq\pm1$，故 $n$ 有素因子. 首先设 $n$ 有奇素数因子 $p$，则 $p\nmid a$. 设 $a$ 模 $p$ 的阶为 $r$，因 $a\neq\pm1$，故有正整数 $k_0$ 使得 $p^{k_0}\parallel(a^r-1)$.

若有无穷多个 $k$ 使得 $n^k\mid(a^k-1)$，从而有无穷多个 $k>k_0$ 满足

$$a^k\equiv1(\mathrm{mod}\ p^k). \qquad ①$$

但由例 5 得知，$a$ 模 $p^k$ 的阶是 $rp^{k-k_0}$，故由①知 $rp^{k-k_0}\mid k$，从而 $k\geqslant rp^{k-k_0}\geqslant 3^{k-k_0}$，这样的 $k$ 显然只有有限多个，产生矛盾.

若 $n$ 没有奇素数因子，则 $n$ 是 2 的方幂. 首先注意，若奇数 $k$ 使得 $n^k\mid(a^k-1)$，则

$$a^k-1=(a-1)(a^{k-1}+\cdots+a+1) \qquad ②$$

被 $2^k$ 整除. 但②中后一个因数是奇数个奇数之和，故是奇数，从而 $2^k\mid(a-1)$. 因 $a\neq1$，这样的 $k$ 至多有有限多个.

设有无穷多个偶数 $k=2l$ 使得 $n^k \mid (a^k-1)$，则

$$(a^2)^l \equiv 1 \pmod{2^l}. \qquad ③$$

定义 $k_0$ 满足 $2^{k_0} \parallel (a^2-1)$，则 $k_0 \geqslant 3$. 由例 5 知，当 $l>k_0$ 时，$a^2$ 模 $2^l$ 的阶为 $2^{l-k_0}$，故在 $l>k_0$ 时，由③推出 $2^{l-k_0} \mid l$，从而 $l \geqslant 2^{l-k_0}$，但这样的 $l$ 至多有有限多个，矛盾！

## 习 题 8

**1** 证明：费马数 $F_k = 2^{2^k}+1 (k \geqslant 0)$ 的任一个约数均 $\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

**2** (1) 设 $m$，$n$ 是互素的正整数，$m$，$n>1$. $a$ 是一个与 $mn$ 互素的整数. 设 $a$ 模 $m$ 及模 $n$ 的阶分别为 $d_1$、$d_2$，则 $a$ 模 $mn$ 的阶为 $[d_1, d_2]$；

(2) 求出 3 模 $10^4$ 的阶.

**3** 证明，对任何整数 $k>0$，都存在正整数 $n$，使得 $2^k \mid (3^n+5)$.

**4** 证明，若整数 $n>1$，则 $n \nmid 3^n-2^n$.

# 9 不定方程（二）

同余，是处理不定方程的一个有力工具，我们常应用同余证明不定方程无整数解，或导出解应满足的某种必要条件. 这样的论证，往往灵活多变，在数学竞赛中尤为多见，本节将撷取一些例子来表现同余在这方面的应用.

**例 1** 若 $n \equiv 4 \pmod 9$，证明不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 = n \qquad ①$$

没有整数解$(x, y, z)$.

**证明** 若方程①有整数解，则①模 9 也有整数解. 熟知，一完全立方模 9 同余于 0，1，$-1$ 之一，因而

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8 \pmod 9.$$

但 $n \equiv 4 \pmod 9$，所以①模 9 无解，这与前面所说的相违，故方程①无整数解.

用同余处理不定方程，核心在于选择适当的模. 例 1 是一个较为容易的问题，因题中已经出现了模 9. 作为对比，下面的例 2 则稍有一点困难.

**例 2** 确定方程

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599$$

的全部非负整数解$(x_1, \cdots, x_{14})$(不计解的排列次序).

**解** 模 16 就能够证明方程无整数解，因为整数的四次幂模 16 同余于 0 或 1，故 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4$ 模 16 的所有可能值是 0，1，2，…，14，唯独不能取 15. 但 $1599 \equiv 15 \pmod{16}$，因此方程无解，证毕.

之所以选择 16，是因为方程左边有 14 项，剩余类的个数$\geqslant$15 才比较有希望导出矛盾(这里我们采用同余来证明方程无整数解). 而 $15 = 3 \times 5$，根据中国剩余定理，模 15 相当于模 3 与模 5 的作用，不能解决问题.

**例 3** 证明：下列数不能表示为若干个连续整数的立方和.

(1) $385^{97}$；

(2) $366^{17}$.

**证明**　利用

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

易知，连续若干个整数的立方和可表示为形式

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \qquad ①$$

$m$，$n$ 为整数. 我们要证明，对于(1)、(2)中的整数，不存在 $m$，$n$，使之可表示为①的形式. 用分解方法虽也能解决问题，但相当麻烦；用同余论证，则相当直接.

首先，按整数 $x$ 模 9 分类并逐一检验，不难得知，$\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ 模 9 同余于 0 及 $-1$，因此，形如①的数模 9 只能是 0，1，$-1$. 另一方面，由欧拉定理知

$$385^{97}\equiv 385\times(385^{16})^6\equiv 385\equiv 7(\mathrm{mod}\ 9),$$

这就证明了 $385^{97}$ 不能表示为①的形式.

然而，因 $366^{17}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$，故对于数 $366^{17}$，模 9 不能解决问题.



我们这次模 7. 易于验证，对整数 $x$，数 $\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ 模 7 同余于 0，1，$-1$. 故形如①的数模 7 只能是 0，$\pm1$，$\pm2$. 但

$$366^{17}\equiv 2^{17}\equiv 2\times 2^4\equiv 4(\mathrm{mod}\ 7).$$

因此我们的断言成立.

有整数解的方程，仅用同余通常不易解决问题，而需将同余与其他方法(估计、分解等)结合使用. 我们举几个这样的例子.

**例 4**　求所有这样的 2 的幂，将其(十进制表示中的)首位删去后，剩下的数仍是一个 2 的幂.

**解**　问题即要求出方程

$$2^n=2^k+a\times 10^m \qquad ①$$

的全部正整数解 $(n, k, m, a)$，其中 $a=1, 2, \cdots, 9$. 将①变形为

$$2^k(2^{n-k}-1)=a\times 10^m. \qquad ②$$

首先证明 $m=1$. 因为若 $m>1$，则②式右边被 $5^2$ 整除，从而 $5^2\mid(2^{n-k}-1)$. 又易知，2 模 $5^2$ 的阶是 20(这只需注意所说的阶整除 $\varphi(25)=20$，及 $2^{10}\equiv -1$

$(\mathrm{mod}\ 25)$)，因此，20 整除 $n-k$，从而 $2^{20}-1$ 整除 ② 的左边，但 $2^{20}-1=(2^5)^4-1$ 有因子 $2^5-1=31$，而 31 不整除 ① 的右边，矛盾！因此 $m=1$.

现在只需在为二位数的 2 的幂中，检验符合要求的解，易知这只有 32 和 64.

**例 5** 求所有正整数 $x>1$，$y>1$，$z>1$，使得

$$1!+2!+\cdots+x!=y^z. \qquad ①$$

**解** 关键一步是证明当 $x\geqslant 8$ 时必有 $z=2$. 因为①的左边被 3 整除，故 $3\mid y^z$，从而 $3\mid y$，于是①的右边被 $3^z$ 整除. 另一方面，

$$1!+2!+\cdots+8!=46\,233$$

被 $3^2$ 整除，但不被 $3^3$ 整除；而对 $n\geqslant 9$ 有 $3^3\mid n!$. 所以，当 $x\geqslant 8$ 时，① 的左边被 $3^2$ 整除而不能被 $3^3$ 整除，从而 ① 的右边也如此，即必须 $z=2$.

现在进一步证明，当 $x\geqslant 8$ 时方程 ① 无解. 模 5：当 $x\geqslant 8$ 时，① 的左边 $\equiv 1!+2!+3!+4!\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$；又已证明了此时有 $z=2$，故 ② 的右边 $z^2\equiv 0$，$\pm 1(\mathrm{mod}\ 5)$，从而上述断言成立.

最后，当 $x<8$ 时，不难通过检验求得 ① 的解是 $x=y=3$，$z=2$.

例 4 和例 5 中，通过比较某个素数在一个等式两边出现的幂次，以导出结果，同余的这种变形手法被称为**比较素数幂法**，下面的例 6 也应用了这一方法.

**例 6** 证明，不定方程

$$(x+2)^{2m}=x^n+2 \qquad ①$$

没有正整数解.

**证明** 为了后面的论证，我们先从方程①导出一些简单的结论.

显然 $n>1$. 此外，$x$ 必是奇数，否则将 ① 模 4 则产生矛盾. 进一步，$n$ 也是奇数，因为若 $2\mid n$，则 $x^n$ 为一个奇数的平方，从而 ① 的右边 $\equiv 1+2=3(\mathrm{mod}\ 4)$，但其左边 $\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，这不可能. 故 $2\nmid n$.

设 $x+1=2^\alpha x_1$，其中 $x_1$ 为奇数，$\alpha>0$（因 $x$ 为奇数）. 将方程①改写为

$$(x+2)^{2m}-1=x^n+1. \qquad ②$$

②的左边有因子 $(x+2)^2-1=(2^\alpha x_1+1)^2-1=2^{\alpha+1}(2^{\alpha-1}x_1^2+x_1)$，故 $2^{\alpha+1}$ 整除 ② 的左边. 但另一方面，由于 $n-1>0$ 为偶数，用二项式定理易得

$$x^n+1=x(2^\alpha x_1-1)^{n-1}+1\equiv x\cdot 1+1=2^\alpha x_1(\mathrm{mod}\ 2^{\alpha+1}).$$

因 $2\nmid x_1$，故②的右边 $x^n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{\alpha+1})$，矛盾！

**例 7** 证明：不定方程

$$8^x + 15^y = 17^z \tag{①}$$

的全部正整数解是 $x = y = z = 2$.

**证明** 我们先用同余证明，$y$ 和 $z$ 都是偶数.

方程①模 4，得到

$$(-1)^y \equiv 1 \pmod 4,$$

从而 $y$ 是偶数. 将方程①模 16，得到

$$8^x + (-1)^y \equiv 1 \pmod{16},$$

即 $8^x \equiv 0 \pmod{16}$，故 $x \geqslant 2$.

注意 $17^2 \equiv 1$，$15^2 \equiv 1 \pmod{32}$，故若 $z$ 是奇数，则由 $2 \mid y$ 及 $x \geqslant 2$，可从①得出

$$1 \equiv 17 \pmod{32},$$

这不可能. 所以 $z$ 必为一个偶数.

设 $y = 2y_1$，$z = 2z_1$，则方程①可分解为

$$(17^{z_1} - 15^{y_1})(17^{z_1} + 15^{y_1}) = 8^x. \tag{②}$$



易知②中左边两个因数的最大公约数为 2，而②的右边是 2 的幂，故必须有

$$\begin{cases} 17^{z_1} - 15^{y_1} = 2, & ③ \\ 17^{z_1} + 15^{y_1} = 2^{3x-1}. & ④ \end{cases}$$

将③模 32 可知，$z_1$ 与 $y_1$ 必须都是奇数（否则，③的左边 $\equiv 0$，$-14$，$16 \pmod{32}$）. 将③、④相加，得

$$17^{z_1} = 1 + 2^{3x-2}. \tag{⑤}$$

若 $x \geqslant 3$，则 ⑤ 的右边 $\equiv 1 \pmod{32}$；而因 $z_1$ 为奇数，故左边 $\equiv 17 \pmod{32}$，这不可能，故必有 $x = 2$. 由此及 ⑤ 得 $z_1 = 1$，即 $z = 2$，进而易知 $y_1 = 1$，即 $y = 2$. 因此 $x = y = z = 2$.

这一解法，是同余结合分解方法的典型的例子. 用同余导出 $y$、$z$ 均是偶数，正是为后面的分解方程作准备.

下面的例 8 较为困难. 这里介绍两种解法. 第一种解法基于同余结合分解手法，相当简单，第二种解法采用比较素数幂方法，虽然较为麻烦，却具有一些代表性.

**例 8** 证明：不定方程

$$(x+1)^y - x^z = 1,\ x,\ y,\ z > 1 \qquad ①$$

仅有一组正整数解 $x=2$，$y=2$ 及 $z=3$.

**证明一**　首先，将方程①模 $x+1$，得

$$-(-1)^z \equiv 1 (\mathrm{mod}\, x+1),$$

故 $z$ 是奇数. 将①分解为

$$(x+1)^{y-1} = x^{z-1} - x^{z-2} + \cdots - x + 1,$$

由此易知 $x$ 是偶数. 因为若 $x$ 为奇数，则上式右边为奇数($z$)个奇数之和，故是奇数，而左边是偶数，产生矛盾. 同样，将①变形为

$$(x+1)^{y-1} + (x+1)^{y-2} + \cdots + (x+1) + 1 = x^{z-1},$$

可见 $y$ 也是偶数.

现在设 $x=2x_1$，$y=2y_1$，则①可分解为

$$((x+1)^{y_1} - 1)((x+1)^{y_1} + 1) = x^z. \qquad ②$$

因 $x$ 是偶数，故 $(x+1)^{y_1} - 1$ 与 $(x+1)^{y_1} + 1$ 的最大公约数是 2，又显然有 $x \mid (x+1)^{y_1} - 1$. 由这些及②推出，必须

$$(x+1)^{y_1} - 1 = 2x_1^z,\ (x+1)^{y_1} + 1 = 2^{z-1}.$$

因此 $2^{z-1} > 2x_1^z$，故 $x_1 = 1$，即 $x=2$，从而易得 $y=2$ 及 $z=3$.

**证明二**　这一证明分两步进行. 首先证明 $x$ 没有奇素数因子. 采用反证法，设有一个奇素数 $p$，使 $p \mid x$，设 $x = p^a x_1$，其中 $a \geqslant 1$，$p \nmid x_1$. 由二项式定理，可将①变形为

$$xy + \sum_{i=2}^{y} C_y^i x^i = x^z. \qquad ③$$

由此可见 $x^2 \mid xy$，即 $x \mid y$，从而 $p \mid y$. 设 $y = p^b y_1$，$p \nmid y_1$，则 $b \geqslant a$. 我们将通过比较③式两边所含 $p$ 的幂次来导出矛盾.

对 $2 \leqslant i \leqslant y$，设 $p^c \parallel i$，则在

$$C_y^i x^i = \frac{y}{i} C_{y-1}^{i-1} x^i = \frac{p^b y_1}{i} C_{y-1}^{i-1} (p^a x_1)^i$$

中，$p$ 的幂次至少是 $d = b + ai - c$. 若 $c=0$，则 $d > a+b$；若 $c>0$，则由 $p \geqslant 3$ 得 $p^c > c+1$，又 $p^c \mid i$，故 $p^c \leqslant i$. 因此，$i > c+1$，从而

$$d > b + a + c(a-1) \geqslant a + b.$$

故我们总有 $d \geqslant a+b+1$，于是 $p^{a+b+1} \mid \mathrm{C}_y^i x^i (2 \leqslant i \leqslant y)$，进而有

$$p^{a+b+1} \mid \sum_{i=2}^{y} \mathrm{C}_y^i x^i.$$

又 $p^{a+b} \parallel xy$，因此③式左边含 $p$ 的幂次为 $a+b$.

另一方面，由于 $p^a \parallel x$，故 $p^{az} \parallel x^z$，即③式右边含 $p$ 的幂次为 $az$. 但由原方程①可见 $z > y$，又 $p^b \mid y$，故 $y \geqslant p^b$，从而

$$az > ay \geqslant ap^b \geqslant a(b+1) \geqslant a+b.$$

因此③式左、右两边含 $p$ 的幂次不等，这不可能. 所以 $x$ 不含奇素数因子，即 $x$ 为 2 的幂.

设 $x = 2^k (k \geqslant 1)$. 由前面证明过的 $x \mid y$，可知 $y$ 是偶数，设 $y = 2y_1$. 方程①可分解为

$$((2^k+1)^{y_1}-1)((2^k+1)^{y_1}+1) = 2^{kz},$$

因上式左边两个因数的最大公约数为 2，而右边是 2 的幂，故必须

$$(2^k+1)^{y_1}-1 = 2,\ (2^k+1)^{y_1}+1 = 2^{kz-1}.$$

因此 $k = y_1 = 1$，即 $x = y = 2$，故 $z = 3$.



## 习 题 9

**1** 证明不定方程

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$$

没有整数解.

**2** 求所有正整数 $m$、$n$，使得 $|12^m - 5^n| = 7$.

**3** 求所有素数 $p$，使得 $2^p + 3^p$ 为一个整数的 $k$ 次幂（这里的 $k \geqslant 2$）.

**4** 证明：不定方程

$$5^x - 3^y = 2$$

仅有正整数解 $x = y = 1$.

**5** 证明 $x^3 + y^4 = 7$ 没有整数解.

**6** 设 $p$ 是给定的奇素数，求 $p^x - y^p = 1$ 的全部正整数解 $x$、$y$.

# 10 竞赛问题选讲（二）

数学竞赛中有一些数论问题较为困难和棘手，解决它们需综合、灵活地应用前面章节中涉及的知识和方法. 本节介绍一些这样的问题.

**例 1** 设 $u$ 是一个给定的正整数，证明方程

$$n! = u^x - u^y$$

至多有有限组正整数解$(n, x, y)$.

**证明** 可设 $u > 1$. 结论等价于证明方程

$$n! = u^r(u^s - 1) \tag{①}$$

至多只有有限组正整数解$(n, r, s)$.

首先注意，给定 $n$，方程①显然至多有有限组解$(r, s)$. 下面证明，当 $n$ 充分大时，方程①无解，由此便证明了上述的结论.

取定一个素数 $p \nmid u$. 可假定①有解 $n > p$（否则已无需证明），并设 $p^\alpha \parallel n!$，则有

$$\alpha = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^l}\right] \geqslant \left[\frac{n}{p}\right] > an, \tag{②}$$

其中 $a$ 是一个仅与 $p$ 有关的（正）常数.

设 $u$ 模 $p$ 的阶为 $d$ 以及 $p^{k_0} \parallel (u^d - 1)$，则由第 8 单元例 5 知，当 $\alpha > k_0$ 时，$u$ 模 $p^\alpha$ 的阶为 $dp^{\alpha-k_0}$. 因 $u$、$p$ 均为固定的数，故 $k_0$、$d$ 也均为固定的数. 若①对充分大的 $n$ 有解，则由②知 $\alpha > k_0$. 而由①得

$$u^s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^\alpha),$$

故由阶的性质推出 $dp^{\alpha-k_0} \mid s$；特别地，$s \geqslant dp^{\alpha-k_0}$. 因此，

$$u^s - 1 \geqslant u^{dp^{\alpha-k_0}} - 1 > u^{dp^{an-k_0}} - 1. \tag{③}$$

但当 $n$ 充分大时，易知上式右边 $\geqslant n^n - 1$. 故由③推出 $u^s - 1 > n!$，更有 $u^r(u^s - 1) > n!$，因此当 $n$ 充分大时，①无正整数解$(r, s)$. 这就完成了证明.

**注 1** 本题后一半的论证，类似于第 8 单元例 6 的证明. 但那里的问题较

为直接，而现在的问题则困难得多. 本题的要点是将方程①过渡到模 $p^\alpha$ 来处理，以利用模 $p^\alpha$ 的阶的性质导出 $s$ 很大，进而①在 $n$ 充分大时不成立. 我们选取 $\alpha$ 使 $p^\alpha \parallel n!$，无非是为了使 $\alpha$（随 $n$）很大（见②式）.

**注 2** 若有一点（关于无穷大量的）阶的概念，则在导出 $s \geqslant dp^{\alpha-k_0}$ 后，可立即看出 ① 不能成立：若记 $b = u^{dp-k_0}$，则所说的不等式 $b^{p^{\alpha n}} - 1 > n^n - 1$，即为

$$p^{\alpha n} > n\log_b n.$$

在 $n$ 很大时，上式左边为 $n$ 的（底大于 1 的）指数函数，当然大于右边的一次函数与对数函数的积.（若记 $p^\alpha = 1+\beta$，$\beta > 1$，并用二项式定理将 $(1+\beta)^n$ 展开，则所说的事情便一目了然.）

**例 2** 求所有整数 $n > 1$，使得 $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ 是整数.

**解** 容易猜想，$n = 3$ 是唯一符合要求的解. 下面证明事实确实如此.

证明需分几步进行. 第一个要点是考虑 $n$ 的最小素因子 $p$，并由 $n \mid (2^n+1)$ 导出 $p = 3$，见第 8 单元例 1. 因此我们可设

$$n = 3^m c,\ m \geqslant 1,\ 3 \nmid c. \tag{①}$$

第二步，证明 $m = 1$. 由 $n^2 \mid (2^n+1)$ 得 $2^{3^m c} \equiv -1 \pmod{3^{2m}}$，故

$$2^{2\times 3^m c} \equiv 1 \pmod{3^{2m}}. \tag{②}$$

若 $m \geqslant 2$，则由第 8 单元例 5 可知，2 模 $3^{2m}$ 的阶是 $2\times 3^{2m-1}$，故由 ② 推出，$2\times 3^{2m-1} \mid 2\times 3^m c$，即 $3^{m-1} \mid c$，从而 $3 \mid c$（因 $m \geqslant 2$），这与①中 $3 \nmid c$ 矛盾. 故必须有 $m = 1$.

第三步，证明①中的 $c = 1$. 这可与上述第一步，即第 8 单元中例 1 类似地进行：

若 $c > 1$，设 $q$ 是 $c$ 的最小素因子，则有

$$2^{3c} \equiv -1 \pmod{q}. \tag{③}$$

设 $r$ 是 2 模 $q$ 的阶，由③得 $2^{6c} \equiv 1 \pmod{q}$，又 $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$，故 $r \mid 6c$ 及 $r \mid (q-1)$，从而 $r \mid (6c, q-1)$. 由 $q$ 的选取知 $(q-1, c) = 1$，所以 $r \mid 6$，再由 $2^r \equiv 1 \pmod{q}$，推知 $q = 3$ 或 7. 易知 $q = 3$ 为不可能；而由 ③ 知 $q = 7$ 也不可能. 所以必有 $c = 1$. 因此 $n = 3$.

请注意，若先证明①中的 $c = 1$ 将不易奏效. 这里的论证次序颇为重要. 此外，第二步中 $m = 1$ 也可通过比较素数幂来证明：

由二项式定理得

$$2^n+1=(3-1)^n+1=3n+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k C_n^k 3^k. \qquad ④$$

设 $3^\alpha \parallel k!$，则

$$\alpha=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{k}{3^l}\right]<\sum_{l=1}^{\infty}\frac{k}{3^l}=\frac{k}{2},$$

于是由 $C_n^k 3^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}3^k$ 可见，$C_n^k 3^k$ 被 $3^\beta$ 整除，而 $\beta$ 满足（注意 $k\geqslant 2$）

$$\beta\geqslant k+m-\alpha>k+m-\frac{k}{2}\geqslant m+1,$$

故 $\beta\geqslant m+2$，从而④式右边的和被 $3^{m+2}$ 整除. 若 $m>1$，则 $2m\geqslant m+2$，故由 $3^{2m}\mid(2^n+1)$ 及④推出 $3^{m+2}\mid 3n$，即 $3^{m+1}\mid n$，这与①矛盾，因此必有 $m=1$.

下面的例 3 也可用比较素数幂的方法解决.

**例 3** 证明：对每个 $n>1$，方程

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1=0$$

没有有理数根.

**证明** 设 $a$ 是所说的方程的一个有理根，则易知

$$a^n+\frac{n!}{(n-1)!}a^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{k!}a^k+\cdots+\frac{n!}{1!}a+n!=0, \qquad ①$$

于是 $a$ 是一个首项系数为 1 的整系数多项式的有理根，故 $a$ 必是一个整数（见习题 2 中第 4 题）.

因 $n>1$，故 $n$ 有素因子 $p$（这一基本的事实已使用过多次）. 由于 $n\left|\dfrac{n!}{k!}\right.(k=0,1,\cdots,n-1)$，故由①推出 $p\mid a^n$，从而素数 $p$ 整除 $a$. 现在比较①式左边各项中含 $p$ 的方幂. 因为 $p$ 在 $k!$ 中出现的次数为

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p^l}\right]<\sum_{l=1}^{\infty}\frac{k}{p^l}<k,$$

故有 $p^k\nmid k!\ (k\geqslant 1)$. 设 $p^r\parallel n!$. 则由于 $p^k\mid a^k$ 及 $p^k\nmid k!$，可知 $p^{r+1}\left|\dfrac{n!}{k!}a^k\right.(k=1,2,\cdots,n)$，从而由①得出 $p^{r+1}\mid n!$，这与 $r$ 的定义相违.

**注** 用较深入的方法能够证明，有理系数多项式

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1$$

在有理数域上不可约，即不能分解为两个非常数的有理系数多项式的乘积. 例 3 是这一结论的一个简单特例：所说的多项式没有一次的有理因式.

数学竞赛中，常常出现一些与多项式有些关联的数论问题，我们举几个这方面的例子.

**例 4** 设 $n>1$，$x_1$，…，$x_n$ 是 $n$ 个实数，它们的积记为 $A$. 若对 $i=1$，…，$n$，数 $A-x_i$ 都是奇整数. 证明：每一个 $x_i$ 都是无理数.

**证明** 反证法，若有一个 $i$ 使得 $x_i$ 为有理数，则因 $A-x_i$ 为奇整数，所以 $A$ 必是一个有理数. 记 $A-x_i=a_i(i=1,\cdots,n)$. 则由 $x_1\cdots x_n=A$，得出

$$(A-a_1)\cdots(A-a_n)=A. \qquad ①$$

由于 $a_i$ 均是(奇)整数，从而 $A$ 满足了一个首项系数为 1 的整系数方程，故有理数 $A$ 必是一个整数. 但另一方面，无论 $A$ 是奇数或偶数，易知①式左、右两边的奇偶性都不同，从而①决不能成立，矛盾！故每个 $x_i$ 都是无理数.

**例 5** 设 $a$，$b$，$c$ 为整数，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. 证明：有无穷多个正整数 $n$，使得 $f(n)$不是完全平方数.



**证明** 我们证明，对任意正整数 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，四个整数 $f(n)$，$f(n+1)$，$f(n+2)$，$f(n+3)$ 中至少有一个不是完全平方，由此便证明了问题中的结论.

易知

$$\begin{aligned}
&f(n)\equiv 1+a+b+c(\mathrm{mod}\ 4),\\
&f(n+1)\equiv 2b+c(\mathrm{mod}\ 4),\\
&f(n+2)\equiv -1+a-b+c(\mathrm{mod}\ 4),\\
&f(n+3)\equiv c(\mathrm{mod}\ 4).
\end{aligned}$$

消去 $a$、$c$ 得

$$f(n+1)-f(n+3)\equiv 2b,\ f(n)-f(n+2)\equiv 2b+2(\mathrm{mod}\ 4).$$

因此，或者 $f(n+1)-f(n+3)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$，或者 $f(n)-f(n+2)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$. 因为完全平方数模 4 同余于 0 或 1，故或者 $f(n+1)$ 与 $f(n+3)$ 中至少有一个非平方数，或者 $f(n)$ 与 $f(n+2)$ 中至少有一个非平方数，从而 $f(n)$，$f(n+1)$，$f(n+2)$，$f(n+3)$ 中至少有一个不是完全平方.

**例6** 设 $p(x)$是一个整系数多项式，对任意 $n\geqslant 1$ 有 $p(n)>n$. 定义 $x_1=1$，$x_2=p(x_1)$，…，$x_n=p(x_{n-1})(n\geqslant 2)$. 若对于任意正整数 $N$，数列$\{x_n\}$

$(n \geqslant 1)$ 中均有被 $N$ 整除的项. 证明 $p(x) = x+1$.

**证明** 我们分两步进行. 首先证明，对任一个固定的 $m > 1$，数列 $\{x_n\}$ 模 $x_m - 1$ 是周期数列. 显然 $x_m \equiv 1 = x_1 (\mathrm{mod}\, x_m - 1)$. 因 $p(x)$ 是整系数多项式，故对任意整数 $u$、$v(u \neq v)$ 有 $(u-v) \mid (p(u) - p(v))$，即

$$p(u) \equiv p(v) (\mathrm{mod}\, u - v),$$

在上式中取 $u = x_m$，$v = x_1 = 1$，得 $x_{m+1} \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, x_m - 1)$. 依此类推，$x_{m+2} \equiv x_3$，$x_{m+3} \equiv x_4$，$\cdots (\mathrm{mod}\, x_m - 1)$，可知 $\{x_n\}$ 模 $x_m - 1$ 是周期数列 $x_1$，$\cdots$，$x_{m-1}$，$x_1$，$\cdots$，$x_{m-1}$，$\cdots$.

第二步，我们证明

$$x_m - 1 = x_{m-1}. \qquad ①$$

由已知条件，对于数 $N = x_m - 1$，存在 $x_k$ 使得 $(x_m - 1) \mid x_k$，而由上一段的结论，可设 $1 \leqslant k \leqslant m-1$，此外，$p(x_{m-1}) > x_{m-1}$，故 $x_m - 1 \geqslant x_{m-1}$，所以 $k$ 必须为 $m-1$，即 $(x_m - 1) \mid x_{m-1}$，于是，$x_{m-1} \geqslant x_m - 1$，综合起来即知①式成立.

因为①即是 $p(x_{m-1}) - 1 = x_{m-1}$. 由于 $m$ 是任意大于 1 的整数，这意味着 $p(x) = x+1$ 有无穷多个不同的根，故 $p(x)$ 必须恒等于多项式 $x+1$. 这就证明了本题的结论.

由一个（整系数）多项式的算术（数论）性质，推断其代数性质，是数论中非常有趣的一个课题，例 6 正是这样的一个简单例子，下面的例 7 也是具有这种精神的问题.

**例 7** 设 $f(x)$ 是一个实系数的二次多项式，若对所有正整数 $n$，$f(n)$ 均是整数的平方. 证明，$f(x)$ 是一次整系数多项式的平方.

**证明** 本题并不容易，但有几种完全不同的解法. 这里介绍的方法基于数列的极限知识，较为简单.

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$，$a_n = f(n)(n \geqslant 1)$，则易知

$$\begin{aligned}\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} &= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} \\ &= \frac{2an - a + b}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + (-2a+b)n + a - b + c}} \\ &= \frac{2a + \dfrac{b-a}{n}}{\sqrt{a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2}} + \sqrt{a + \dfrac{b-2a}{n} + \dfrac{a-b+c}{n^2}}}.\end{aligned}$$

因此当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}$ 有极限，且极限值为 $\dfrac{2a}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$. 但已知 $\sqrt{a_n}$ 都是整数，故 $\{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}\}(n\geqslant 2)$ 是一个整数数列，因此其极限值 $\sqrt{a}$ 必是一个整数，且 $n$ 充分大后，所有项 $\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}$ 都等于极限 $\sqrt{a}$，即有一个（固定的）正整数 $k$，使得

$$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{a},\text{对 } n\geqslant k+1.$$

现在设 $m$ 是大于 $k$ 的任一个整数，将上式对 $n=k+1,\cdots,m$ 求和，得出 $\sqrt{a_m}=\sqrt{a_k}+(m-k)\sqrt{a}$，即

$$a_m=(m\sqrt{a}+\sqrt{a_k}-k\sqrt{a})^2. \qquad ①$$

记 $\alpha=\sqrt{a}$，$\beta=\sqrt{a_k}-k\sqrt{a}$，则 $\alpha$、$\beta$ 都是与 $m$ 无关的固定整数，于是，①表明，所有大于 $k$ 的整数 $m$ 都是多项式

$$f(x)-(\alpha x+\beta)^2$$

的根，从而这多项式必是零多项式，即 $f(x)=(\alpha x+\beta)^2$.

数学竞赛中也常出现一些具有组合韵味的数论问题，所需的知识不多，但极其灵活. 这种问题，我们在前面章节中已经接触过，现在再举些例子.



**例 8**　设 $n>1$，$n$ 个正整数的和为 $2n$. 证明，在其中一定可以选出某些数，使它们的和等于 $n$，除非所给的数满足下面的条件之一：

（1）有一个数是 $n+1$，其余的都是 1；

（2）在 $n$ 为奇数时，所有数都等于 2.

**证明**　设所给的正整数为 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，并记 $S_k=a_1+\cdots+a_k(k=1,\cdots,n-1)$，则在下面 $n+1$ 个数

$$0,\ a_1-a_n,\ S_1,\ \cdots,\ S_{n-1}$$

中，必有两个数模 $n$ 同余. 我们区分四种情况讨论：

（i）设有一个 $S_k(1\leqslant k\leqslant n-1)$，使 $S_k\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$. 此时由

$$1\leqslant S_k\leqslant a_1+\cdots+a_n-a_{k+1}\leqslant 2n-1, \qquad ①$$

故 $S_k=n$.

（ii）设有 $S_i$，$S_j(1\leqslant i<j\leqslant n-1)$ 满足 $S_j\equiv S_j(\mathrm{mod}\,n)$，则由①知 $1\leqslant S_j-S_i\leqslant 2n-1$，故 $S_j-S_i=n$，此即

$$a_{i+1}+\cdots+a_j=n.$$

(iii) 设有某个 $S_k(1\leqslant k\leqslant n-1)$，使得 $S_k\equiv a_1-a_n(\mathrm{mod}\,n)$. 若 $k=1$，将有 $a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$. 但 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都是正整数，故 $a_1+\cdots+a_{n-1}\geqslant n-1$，从而

$$a_n=2n-(a_1+\cdots+a_{n-1})\leqslant n+1, \qquad ②$$

因此 $a_n=n$，故此时结论成立；若 $k>1$，则有

$$a_2+\cdots+a_k+a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,n).$$

而上式左边显然是小于 $a_1+\cdots+a_n=2n$ 的正整数，故

$$a_2+\cdots+a_k+a_n=n.$$

(iv) 设 $a_1-a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$. 我们已证明 $a_n\leqslant n+1$(见 ② 式). 若 $a_n=n+1$，则 $n-1$ 个正整数 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的和等于 $2n-a_n=n-1$，从而它们都等于 1，这正是问题中排除的情形(1).

设 $a_n\leqslant n$，则 $0\leqslant a_n-a_1\leqslant n-1$，结合 $a_n-a_1\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$，推出 $a_n=\cdots=a_2=a_1=2$. 当 $n$ 为奇数时，这是问题中排除的情形(2). 若 $n$ 为偶数，则任取 $\frac{n}{2}$ 个 $a_i$ 的和便等于 $n$.

例 8 的证明大意可概述如下：由于所有给定数的和为 $2n$，因此，只要能证明有若干个(不是全部)数的和是 $n$ 的倍数，则这个和必然恰等于 $n$，而后一问题正是同余的用武之地.

**例 9** 设 $p$ 为素数，给定 $p+1$ 个不同的正整数. 证明，可以从中取出这样一对数，使得将两者中较大的数除以两者的最大公约数后，所得的商不小于 $p+1$.

**证明** 将所给的 $p+1$ 个数都除以它们的最大公约数，显然不影响本题的结论，因此我们可设这 $p+1$ 个数互素. 特别地，其中必有一个数不被 $p$ 整除. 记这 $p+1$ 个数是

$$x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}=p^{l_{k+1}}y_{k+1},\cdots,x_{p+1}=p^{l_{p+1}}y_{p+1},$$

这里，$x_1,\cdots,x_k$ 互不相等且均和 $p$ 互素 $(k\geqslant 1)$，$l_{k+1},\cdots,l_{p+1}$ 是正整数，$y_{k+1},\cdots,y_{p+1}$ 都是不被 $p$ 整除的正整数.

在 $p+1$ 个数

$$x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots,y_{p+1} \qquad ①$$

中，必有两个模 $p$ 同余，我们区分三种情况讨论.

(1) ①中的数至少有三个相等. 此时结论容易证明. 因为若 $y_r=y_s=y_t$，

则 $p^{l_r}$，$p^{l_s}$，$p^{l_t}$ 互不相等，其中最大的数至少是最小者的 $p^2$ 倍，无妨设 $p^{l_r} \geqslant p^2 \cdot p^{l_t}$，则 $x_r$ 与 $x_t$ 符合要求；若 $y_r = y_s = x_t (1 \leqslant t \leqslant k)$，无妨设 $l_r > l_s$，则 $l_r \geqslant 2$，于是 $x_r$ 与 $x_t$ 符合要求.

(2) ①中的数有两对相等. 若 $y_i = y_j$，$y_r = y_s$，则当 $|l_i - l_j| \geqslant 2$ 或 $|l_r - l_s| \geqslant 2$ 时，同上可知结论成立；当 $|l_i - l_j| \leqslant 1$ 且 $|l_r - l_s| \leqslant 1$ 时，可改记 $x_i$，$x_j$，$x_r$，$x_s$ 为 $a$，$ap$，$b$，$bp$，且 $a < b$. 此时

$$\frac{bp}{(a, bp)} \geqslant \frac{bp}{a} > p,$$

故整数 $\frac{bp}{(a, bp)} \geqslant p+1$.

若 $x_i = y_r$，$x_j = y_s (1 \leqslant i, j \leqslant k)$，同样可证明结论.

(3) ①中的数恰有两个相等. 这只能是 $y_r = y_s$，或 $x_i = y_r (1 \leqslant i \leqslant k)$. 这时可在①中删去 $y_r$，则剩下的 $p$ 个数互不相等，但仍有两个模 $p$ 同余. 现在又有三种可能：

(i) 设 $y_r \equiv y_s (\mathrm{mod}\ p)$. 无妨设 $y_r > y_s$. 若 $l_r > l_s$，结论显然成立. 若 $l_r \leqslant l_s$，记 $y_r = y_s + n$，则 $n > 0$，且 $p \mid n$. 设 $(y_r, y_s) = d$，则 $p \nmid d$，于是 $(x_r, x_s) = p^{l_r} d$，我们有（注意 $d \mid n$，$p \mid n$，以及 $p \nmid d$）

$$\frac{x_r}{(x_r, x_s)} = \frac{y_r}{d} = \frac{y_s}{d} + \frac{n}{d} \geqslant 1 + p.$$

所以，$x_r$ 与 $x_s$ 中的较大者除以它们的最大公约数后，得出的商至少是 $p+1$.

(ii) 设 $x_r \equiv x_s (\mathrm{mod}\ p) (1 \leqslant r < s \leqslant k)$. 这一情形可与(i)类似地解决.

(iii) 设 $x_r \equiv y_s (\mathrm{mod}\ p) (1 \leqslant r \leqslant k)$. 若 $y_s > x_r$，则结论显然成立. 若 $y_s < x_r$，设 $x_r = y_s + n$，则 $n > 0$，且 $p \mid n$. 设 $(x_r, y_s) = d$，则 $p \nmid d$，于是 $(x_r, x_s) = (x_r, p^{l_s} y_s) = d$，因此

$$\frac{x_r}{(x_r, x_s)} = \frac{y_s}{d} + \frac{n}{d} \geqslant 1 + p,$$

从而 $x_r$ 与 $x_s$ 中较大的数除以它们的最大公约数后，得出的商不小于 $p+1$.

这就完成了问题的证明.

我们注意，若例 9 中的 $p+1$ 个整数换为 $p$ 个整数，则结论不必正确. 例如，$p$ 个数 1，2，…，$p$ 中显然没有符合要求的两个数.

**例 10** 设 $S$ 是 $\{1, 2, \cdots, 2^m n\}$ 的一个子集，$S$ 的元素个数 $|S| \geqslant (2^m - 1)n + 1$. 证明，$S$ 中有 $m+1$ 个不同的数 $a_0$，…，$a_m$，使得 $a_{i-1} \mid a_i (i = 1, \cdots, m)$.

**证明** 每个正整数 $a$ 可唯一地表示为 $2^u k$ 的形式，其中 $u \geqslant 0$，$k$ 为奇数，我们称 $k$ 为 $a$ 的奇数部分，并且若 $a$ 的奇数部分不超过 $n$，则称 $n$ 为好数. 这里的证明，基于 $S$ 中好数个数的下界估计. 为此，我们首先计数在区间 $(n, 2^m n]$ 中有多少个好数.

设区间 $[1, n]$ 中共有 $t$ 个奇数（$t$ 实际上等于 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$，但我们并不需要这一点）. 设 $k$ 是任意一个这样的奇数，则满足 $n < 2^u k \leqslant 2^m n$ 的整数 $u$ 恰有 $m$ 个. 这只要注意，设整数 $v$ 满足 $2^{v-1} \leqslant \frac{n}{k} < 2^v$，则 $2^v k$，$2^{v+1} k$，…，$2^{v-1+m} k$ 是全部符合要求的数，即在区间 $(n, 2^m n]$ 中奇数部分为 $k$ 的数共有 $m$ 个，故其中恰有 $mt$ 个好数. 因此这区间中非好数有 $2^m n - n - mt$ 个，从而 $S$ 中好数的个数 $\geqslant |S| - (2^m n - n - mt) = mt + 1$ 个.

设 $k_1$，…，$k_t$ 是 $[1, n]$ 中的全部奇数，并设 $S$ 中恰有 $x_i$ 个数以 $k_i$ 为奇数部分（$k = 1, \cdots, t$），则由上一段的结论，$S$ 中好数的个数为

$$x_1 + \cdots + x_t \geqslant mt + 1,$$

从而必有一个 $x_i (1 \leqslant i \leqslant t)$，使得 $x_i \geqslant m + 1$，即 $S$ 中至少有 $m + 1$ 个整数具有相同的奇数部分 $k_i$，这些数从小到大排列为 $a_0$，$a_1$，…，$a_m$，即为符合要求的 $m$ 个数，证毕.

**注 1** 当 $m = 1$ 时，本题化为了一个熟知的结果，这里的证明即是此结果（通常的）证明的推广. 本题还有其他的解法，例如，对 $m$ 归纳或对 $n$ 归纳，有兴趣的读者可自己试试.

**注 2** 集合 $S = \{n + 1, \cdots, 2^m n\}$ 表明，若例 10 中的 $S$ 满足 $|S| = (2^m - 1)n$，则结论不必正确. 因若有 $a_0$，…，$a_m$ 符合要求，则 $a_m \geqslant 2^m a_0$，从而现在有 $a_m \geqslant 2^m (n + 1)$，这不可能.

**例 11** 设 $A$ 是正整数的 $n$ 元集合 $(n \geqslant 2)$. 证明，$A$ 有一个子集 $B$，满足 $|B| > \frac{n}{3}$，且对任意 $x$，$y \in B$，有 $x + y \notin B$.

**证明** 记 $A$ 中的数为 $a_1$，…，$a_n$. 由习题 3 的第 2 题知，模 3 为 $-1$ 的素数有无穷多个，故可取一个这样的素数 $p > a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，设 $p = 3k - 1$. 考虑下面（$p$ 行 $n$ 列的）$pn$ 个数

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, \cdots, a_n; \\ 2a_1, 2a_2, \cdots, 2a_n; \\ \cdots\cdots \\ pa_1, pa_2, \cdots, pa_n. \end{array} \qquad ①$$

由于 $p>a_i$，故 $(p, a_i)=1$. 因此①中每一列数均构成模 $p$ 的一个完系(见第6单元中(10))，从而对每个 $j(0\leqslant j<p)$，① 中的数共有 $n$ 个模 $p$ 为 $j$，于是模 $p$ 为 $k$，$k+1$，…，$2k-1$ 之一的数共有 $kn$ 个.

设①中第 $i$ 行中共有 $x_i$ 个数模 $p$ 为 $k$，$k+1$，…，$2k-1$ 之一. 则上面的论证表明

$$x_1+\cdots+x_p=kn.$$

故有一个 $x_i$ 满足

$$x_l\geqslant\frac{kn}{p}=\frac{kn}{3k-1}>\frac{n}{3},$$

即有一个 $l(1\leqslant l\leqslant p)$，使 $la_1$，$la_2$，…，$la_n$ 中模 $p$ 为 $k$，$k+1$，…，$2k-1$ 之一的个数大于 $\frac{n}{3}$. 我们取

$$B=\{a\in A\mid la \text{ 模 } p \text{ 为 } k, k+1, \cdots, 2k-1 \text{ 之一}\},$$

则 $B$ 符合要求：因为对任意 $x$，$y\in B$，易知 $l(x+y)(=lx+ly)$ 模 $p$ 的余数或 $\geqslant 2k$，或 $\leqslant k-1$，从而 $x+y\notin B$.

这一证法，由以色列著名数学家 N. Alon 提出，极具巧思，值得仔细玩味.



本节的最后是两个可以用构造法解决的问题.

**例12** 给定 $n\geqslant 2$. 证明，存在 $n$ 个互不相同的正整数具有下述性质：

(1) 这些数两两互素；

(2) 这些数中任意 $k$ 个 $(2\leqslant k\leqslant n)$ 数的和都是合数.

**证明** $n=2$ 时结论显然成立. 设已有 $n$ 个正整数 $a_1$，…，$a_n$ 符合要求，下面基于此造出 $n+1$ 个符合要求的数.

由于素数有无穷多个，故可取 $2^n-1$ 个互不相同且均与 $a_1a_2\cdots a_n$ 互素的素数 $p_i(1\leqslant i\leqslant 2^n-1)$. 将由 $a_1$，…，$a_n$ 中任取 $k$ 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 所作成的 $2^n-1$ 个和记为 $S_j(1\leqslant j\leqslant 2^n-1)$，其中 $k=1$ 时的和就是数 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$.

因为 $(p_i, a_1\cdots a_n)=1$，故有 $b_i$ 使得 $a_1\cdots a_n\cdot b_i\equiv 1(\mathrm{mod}\, p_i)(1\leqslant i\leqslant 2^n-1)$. 由中国剩余定理，同余式组

$$x\equiv -b_i-b_iS_i(\mathrm{mod}\, p_i),\ 1\leqslant i\leqslant 2^n-1 \qquad ①$$

有无穷多个正整数解 $x$. 我们取定一个解 $x_0>p_i(1\leqslant i\leqslant 2^n-1)$，并将①中同余式两边同乘 $a_1\cdots a_n$，得到

$$a_1\cdots a_nx_0+1+S_i\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_i),\ 1\leqslant i\leqslant 2^n-1. \qquad ②$$

令 $a_{n+1}=a_1\cdots a_nx_0+1$，则 $a_1$，…，$a_n$，$a_{n+1}$ 这 $n+1$ 个数符合要求：因为 $x_0>p_i$，故 $a_{n+1}+S_i>p_i$；而②意味着 $a_{n+1}+S_i$ 有约数 $p_i$，故对任意 $i$，$a_{n+1}+S_i$ 是合数. 而由 $a_{n+1}$ 的构作，它当然与每个 $a_i$ 互素（$1\leqslant i\leqslant n$）. 这就完成了归纳构造.

上述解法的精神是，若已有了 $a_1$，…，$a_n$，我们希望可以取参量 $x$ 的一个值，使得数 $a_1\cdots a_nx+1$ 能够作为 $a_{n+1}$. 构作这种形式的数的主要益处在于，所要求的 $(a_{n+1},a_i)=1(1\leqslant i\leqslant n)$ 自动成立.

符合问题中要求的事物往往不止一个，我们可以选择某些具有特别性质的事物来尝试，即使之满足适当的充分条件，以保证适合问题中的部分要求，这种以退求进、舍多取少的手法在构造论证中应用极多.

本题也可采用下面（更为直接的）构造法：取 $a_i=i\cdot n!+1$，则 $a_1$，…，$a_n$ 符合要求. 这是因为：

首先，对 $i\neq j$ 有 $(a_i,a_j)=1$. 这是因为若设 $(a_i,a_j)=d$，则 $ja_i-ia_j$ 是 $d$ 的倍数，即 $d\mid(i-j)$. 但 $1\leqslant|i-j|<n$，故推出 $d\mid n!$，从而由 $d\mid a_i$ 知 $d=1$.

此外，任意 $k$ 个（$2\leqslant k\leqslant n$）$a_i$ 之和具有形式 $m\cdot n!+k$（$m$ 为某个整数），这显然有真因子 $k$，从而不是素数.

**例 13** 求所有的正整数 $k$，使得存在正整数 $n$，满足

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}=k, \tag{1}$$

其中 $\tau(n)$ 表示 $n$ 的正约数的个数.

**解** 由第 3 单元(6)中 $\tau(n)$ 的计算公式可知，$\tau(n^2)$ 必是奇数，因此满足①的 $k$ 一定是奇数. 下面证明每个正奇数 $k$ 均符合要求.

$k=1$ 显然符合要求. 对 $k>1$，由 $\tau(n)$ 的计算公式可知，问题等价于证明，存在正整数 $\alpha$，$\beta$，…，$\gamma$，使得

$$\frac{(2\alpha+1)}{\alpha+1}\cdot\frac{(2\beta+1)}{\beta+1}\cdot\cdots\cdot\frac{(2\gamma+1)}{\gamma+1}=k. \tag{2}$$

现假设小于 $k$ 的奇数均符合要求，对于奇数 $k$，可设 $k=2^lm-1$，这里 $l\geqslant1$，$m$ 为奇数. 由 $k>1$ 易知 $m<k$，故由归纳假设知，有 $\alpha'$，$\beta'$，…，$\gamma'$，使得

$$\frac{(2\alpha'+1)}{\alpha'+1}\cdot\frac{(2\beta'+1)}{\beta'+1}\cdot\cdots\cdot\frac{(2\gamma'+1)}{\gamma'+1}=m. \tag{3}$$

我们现在取两个待定整数 $x\geqslant1$ 及 $u\geqslant0$，满足 $2^u\mid x$，以及

$$\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{2\cdot\frac{x}{2}+1}{\frac{x}{2}+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot\frac{x}{2^u}+1}{\frac{x}{2^u}+1}=\frac{k}{m}. \tag{4}$$

显然，若能找到符合上述要求的 $u$ 和 $x$，则将③与④相乘，即得出了关于 $k$ 的形如②的表示，从而证明了 $k$ 符合要求，即完成了归纳构造.

事实上，④可化为

$$\frac{2x+1}{\frac{x}{2^u}+1}=\frac{k}{m},$$

此即(注意 $k=2^lm-1$)，

$$x=\frac{2^u(k-m)}{2^{u+1}m-2^lm+1}.$$

因此，只要取 $u=l-1$，则 $u\geqslant 0$，相应的 $x=2^{l-1}(k-m)$ 为正整数，且被 $2^{l-1}(=2^u)$ 整除. 证毕.

## 习 题 10

**1** 证明，对任意整数 $a\geqslant 3$，有无穷多个正整数 $n$，使得 $a^n-1$ 被 $n$ 整除.（请比较第 8 单元例 2.）



**2** 设 $n_1$，…，$n_k$ 为正整数，具有下面的性质：

$$n_1\mid(2^{n_2}-1),\ n_2\mid(2^{n_3}-1),\ \cdots,\ n_k\mid(2^{n_1}-1).$$

证明：$n_1=\cdots=n_k=1$.

**3** 设正整数 $a$、$b$ 满足 $a^2b\mid(a^3+b^3)$，证明 $a=b$.

**4** 证明：不定方程 $x^n+1=y^{n+1}$ 没有正整数解 $(x,\ y,\ n)$，其中 $(x,\ n+1)=1$，$n>1$.

**5** (1) 证明：对任意给定的正整数 $n$，存在非整数的正有理数 $a$、$b$，$a\neq b$，使得 $a-b$，$a^2-b^2$，…，$a^n-b^n$ 均为整数.

(2) 设 $a$、$b$ 为正有理数，$a\neq b$. 若有无穷多个正整数 $n$，使 $a^n-b^n$ 为整数，则 $a$、$b$ 都是整数.

**6** 设 $n\geqslant 4$ 是整数，$a_1$，…，$a_n$ 是小于 $2n$ 的互不相同的正整数. 证明：从这些数中可取出若干个，使它们的和被 $2n$ 整除.

## 习 题 1

**1.** 在 $1, 2, \cdots, n$ 中，被 $k$ 整除的数为 $k, 2k, \cdots, dk$，其中正整数 $d$ 满足 $dk \leqslant n$ 但 $(d+1)k > n$，从而 $\frac{n}{k} - 1 < d \leqslant \frac{n}{k}$，即 $d = \left[\frac{n}{k}\right]$，故所说的数中共有 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 个被 $k$ 整除.

**2.** 由于各个孩子采到的蘑菇数目一样多，故孩子的总数 $n+11$ 能整除蘑菇总数

$$n^2 + 9n - 2 = (n+11)(n-2) + 20,$$

从而 $n+11$ 整除 20. 由于 $n+11 > 11$，故 $n$ 只能是 9. 因此，女孩比男孩多.

**3.** 我们有

$$n - T(n) = (a_0 - a_0) + (10a_1 + a_1) + \cdots + (a_k \times 10^k - (-1)^k a_k).$$

易知对 $i = 0, 1, \cdots, k$，数 $a_i \times 10^i - (-1)^i a_i$ 被 11 整除（按 $i$ 为偶、奇数分别用分解式(5)、(6)）. 因此 $n - T(n)$ 被 11 整除，故问题中两方面的结论均成立.

**4.** 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是具有所说性质的整数，$A$ 是它们的积，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，数 $n$ 整除 $\frac{A}{a_i} - a_i$，因而能整除

$$a_i\left(\frac{A}{a_i} - a_i\right) = A - a_i^2.$$

故 $n$ 整除这些数的和 $(A - a_1^2) + \cdots + (A - a_n^2) = nA - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)$. 从而 $n$ 整除 $a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

**5.** 若 $a$、$b$、$c$、$d$ 都被 $ad - bc$ 整除，则 $(ad - bc)^2$ 整除 $ad$ 及 $bc$，故整除 $ad - bc$，由此得知 $|ad - bc| = 1$，这与已知 $ad - bc > 1$ 矛盾.

## 习　题　2

**1.** 我们有 $4(9n+4)-3(12n+5)=1$.

**2.** 设 $d=(2^m-1,\ 2^n+1)$. 则 $2^m-1=du$，$2^n+1=dv$，这里 $u$、$v$ 为整数. 易知 $(du+1)^n=(dv-1)^m$，将两端展开(注意 $m$ 为奇数)，得到 $dA+1=dB-1$ ($A$、$B$ 为某两个整数)，由此可知 $d\mid 2$，即 $d=1$ 或 2. 但显然 $d$ 只能是 1.

**3.** 因 $(a,\ b)=1$，故 $(a^2,\ b)=1$，从而 $(a^2+b^2,\ b)=1$. 同理 $(a^2+b^2,\ a)=1$. 因此 $(a^2+b^2,\ ab)=1$(用本单元的(6)).

**4.** 设既约的有理数 $\frac{p}{q}$ 是(首项系数为 1)的整系数多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的一个根. 由 $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ 易得

$$p^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

由于 $a_1p^{n-1}q$，$\cdots$，$a_{n-1}pq^{n-1}$，$a_nq^n$ 均被 $q$ 整除，故 $q\mid p^n$. 但 $(p,\ q)=1$，从而 $(q,\ p^n)=1$. 于是必须 $q=\pm 1$，即有理数 $\frac{p}{q}$ 为一个整数.

**5.** 由本单元(10)可知，已知条件即为

$$\frac{(m+k)m}{(m+k,\ m)}=\frac{(n+k)n}{(n+k,\ n)}.$$

由于 $(m+k,\ m)=(m,\ k)$，$(n+k,\ n)=(n,\ k)$，故由上式得

$$\frac{(m+k)m}{(m,\ k)}=\frac{(n+k)n}{(n,\ k)} \qquad ①$$

我们设 $(m,\ k)=d_1$，则 $m=m_1d_1$，$k=k_1d_1$，其中 $(m_1,\ k_1)=1$.
再设 $(n,\ k)=d_2$，则 $n=n_1d_2$，$k=k_2d_2$，其中 $(n_1,\ k_2)=1$. 于是等式①化为

$$(m_1+k_1)m_1d_1=(n_1+k_2)n_1d_2.$$

将上式两边同乘 $k_1$，并利用 $k_1d_1=k_2d_2(=k)$，可得出

$$(m_1+k_1)m_1k_2=(n_1+k_2)n_1k_1.$$

上式左边是 $k_2$ 的倍数，故 $k_2$ 也整除右边，即 $k_2\mid k_1n_1^2$. 但 $(k_2,\ n_1)=1$，故 $(k_2,\ n_1^2)=1$，从而有 $k_2\mid k_1$. 同样可证明 $k_1\mid k_2$. 综合起来得到 $k_1=k_2$，即 $(m,\ k)=(n,\ k)$. 故由①知 $(m+k)m=(n+k)n$，由此易知 $m=n$.

## 习　题　3

**1.** 易于验证，$(n+1)!+2$，$(n+1)!+3$，…，$(n+1)!+(n+1)$ 是 $n$ 个连续的合数.

**2.** 可将欧几里得证明素数有无穷多个的方法稍作修改来论证：假设 $4k-1$ 形式的素数只有有限多个，设它们的全部为 $p_1$，…，$p_m$. 考虑数 $N=4p_1\cdots p_m-1$. 显然 $m>1$，故 $N>1$，故 $N$ 有素因子. 进一步，因两个 $4k+1$ 形式的数之积仍具有形式 $4k+1$，而 $N$ 有形式 $4k-1$，故 $N$ 必有一个 $4k-1$ 形式的素因子 $p$，由前面的假设知，$p$ 应同于 $p_1$，…，$p_m$ 之一，进而 $N-4p_1\cdots p_m$ 被 $p$ 整除，即 $p\mid 1$，矛盾. 同样可证明，形如 $6k-1$ 的素数有无穷多个.

**3.** 取 $m=9k^3(k=1,3,\cdots)$，则 $8^m+9m^2=(2^m)^3+(9k^2)^3$. 易知它有真因子 $2^m+9k^2$.

**4.** 反证法，设有满足题设的一组 $a$、$b$、$c$、$d$，使得 $ab+cd$ 为素数，记之为 $p$，将 $a=\dfrac{p-cd}{b}$ 代入给出的等式，得到

$$p(p-2cd+bc)=(b^2+c^2)(b^2+bd-d^2).$$

因 $p$ 是素数，故 $p$ 整除 $b^2+c^2$，或者 $p$ 整除 $b^2+bd-d^2$.

若 $p\mid(b^2+c^2)$，则由 $0<b^2+c^2<2ab<2(ab+cd)=2p$，推出 $b^2+c^2=p$，即 $ab+cd=b^2+c^2$，从而 $b\mid c(c-d)$. 显然 $(b,c)=1$（因 $ab+cd$ 是素数），故 $b\mid(c-d)$，这与 $0<c-d<c<b$ 矛盾.

若 $p\mid(b^2+bd-d^2)$，则由 $0<b^2+bd-d^2<2(ab+cd)=2p$ 知，$b^2+bd-d^2=p$，即 $ab+cd=b^2+bd-d^2=a^2+ac-c^2$，故 $a\mid(c+d)c$ 及 $b\mid(c+d)d$ 都成立. 但易知 $(ab,cd)=1$，故 $c+d$ 被 $a$ 和 $b$ 整除. 因 $0<c+d<2a$，$0<c+d<2b$，从而必须有 $c+d=a$ 及 $c+d=b$，矛盾.

## 习　题　4

**1.** 设 $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$，$x$、$y$ 都是正整数. 则有

$$(x^2+3x+1)^2-y^2=1,$$

易知这不可能.

**2.** 设整数 $n$ 可表示为两个整数的平方差：$n=x^2-y^2$，即 $n=(x-y)\cdot(x+y)$. 由于 $x-y$ 与 $x+y$ 的奇偶相同，故或者 $n$ 是奇数，或者 $n$ 被 4 整除.

反过来，若 $n$ 为奇数，可取 $x-y=1$，$x+y=n$，即 $x=\dfrac{n+1}{2}$，$y=\dfrac{n-1}{2}$；若

$4 \mid n$，可取 $x-y=2$，$x+y=\frac{n}{2}$，即 $x=\frac{n}{4}+1$，$y=\frac{n}{4}-1$，则 $x^2-y^2=n$.

**3.** 从方程组中消去 $z$，得到

$$8-9x-9z+3x^2+6xy+3y^2-x^2y-xy^2=0,$$

变形为

$$8-3x(3-x)-3y(3-x)+xy(3-x)+y^2(3-x)=0,$$

即 $(3-x)(3x+3y-xy-y^2)=8$. 故 $(3-x) \mid 8$，从而 $3-x=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$，即 $x=-5, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 11$. 逐一代入原方程组检验，可求出全部整数解为 $(x, y, z)=(1, 1, 1), (-5, 4, 4), (4, -5, 4), (4, 4, -5)$.

**4.** 首先注意，若 $y^2+3y>0$，则由原方程推出 $(y+1)^3>x^3>y^3$，即 $x^3$ 介于两个相邻的完全立方之间，这不可能. 故必有 $y^2+3y \leqslant 0$，得整数 $y=-3, -2, -1, 0$. 代入原方程检验，可求得全部整数解为 $(x, y)=(1, 0), (1, -2), (-2, -3)$.

**5.** 设 $\begin{cases} x^2+3y=u^2, \\ y^2+3x=v^2, \end{cases}$ 由于 $x$、$y$ 为正整数，故 $u>x$，$v>y$. 我们设 $u=x+a$，$v=y+b$，这里 $a$、$b$ 为正整数. 由

$$\begin{cases} x^2+3y=(x+a)^2, \\ y^2+3x=(y+b)^2 \end{cases}$$

可化为

$$\begin{cases} 3y=2ax+a^2, \\ 3x=2by+b^2. \end{cases}$$

解这个关于 $x$、$y$ 的二元一次方程组得 $\begin{cases} x=\dfrac{2a^2b+3b^2}{9-4ab}, \\ y=\dfrac{2b^2a+3a^2}{9-4ab}. \end{cases}$ 因 $x$、$y$ 为正整数，故 $9-4ab>0$，因 $a$、$b$ 为正整数，故 $ab=1$ 或 $2$，即 $(a, b)=(1, 1), (1, 2), (2, 1)$. 相应地求得 $(x, y)=(1, 1), (16, 11), (11, 16)$.

## 习　题　5

**1.** 因 $m$ 不是素数，故 $m$ 可表示为 $m=ab$，其中 $1<a$、$b<n$. 当 $a \neq b$ 时，$a$、$b$ 是数列 $1, 2, \cdots, m-1$ 中两个不同的项，故 $(m-1)!=1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (m-1)$ 被 $m=a \cdot b$ 整除.

当 $a=b$ 时，$m=a^2$. 由于 $m>4$，故 $a>2$，因而 $a^2>2a$，即 $m>2a$. 所以 $a$ 与 $2a$ 是数列 1，2，…，$m-1$ 中两个不同的项，因此 $(m-1)!$ 被 $a\cdot 2a=2m$ 整除.

**2.** 设 $n=x+(x+1)+\cdots+(x+k-1)$，$x$ 为正整数，$k\geqslant 2$. 即

$$(2x+k-1)k=2n. \qquad ①$$

若 $n$ 为 2 的方幂，则 $k$ 与 $2x-1+k$ 都是 2 的方幂，但 $2x-1$ 为奇数，故必须 $k=1$，这与题设不合.

反过来，若 $n$ 不是 2 的方幂，设 $n=2^{m-1}(2t+1)$，$m\geqslant 1$，$t\geqslant 1$. 当 $t\geqslant 2^{m-1}$ 时，可取 $k=2^m$，$x=t+1-2^{m-1}$；当 $t<2^{m-1}$ 时，可取 $k=2t+1$，$x=2^{m-1}-t$. 则 $k$ 与 $x$ 都是正整数且 $k\geqslant 2$.

**3.** 当 $n$ 为偶数时，可取 $a=2n$，$b=n$. 若 $n$ 为奇数，设 $p$ 是不整除 $n$ 的最小奇素数，则 $p-1$ 或者没有奇素数因子（即是 2 的幂），或者其奇素数因子都整除 $n$. 因此 $a=pn$，$b=(p-1)n$ 的不同素因子的个数都等于 $n$ 的不同素因子个数加上 1.

**4.** 数列 $\{k\cdot n!+1\}(k=1,\cdots,n)$ 符合要求. 假设有 $s$、$t$ $(1\leqslant s<t\leqslant n)$ 使 $s\cdot n!+1$ 与 $t\cdot n!+1$ 不互素，则有素数 $p$ 整除这两个数，从而整除它们的差，即 $p\mid (t-s)n!$. 因 $p$ 是素数，故 $p\mid (t-s)$ 或 $p\mid n!$. 但 $1\leqslant t-s<n$，故若 $p\mid (t-s)$，则也有 $p\mid n!$. 因此我们总有 $p\mid n!$，再结合 $p\mid s\cdot n!+1$ 可知 $p\mid 1$，矛盾.

**5.** 采用归纳构造法. $n=2$ 时，可取 $a_1=1$，$a_2=2$. 假设在 $n=k$ 时已有 $a_1,\cdots,a_k$ 符合要求，令 $b_0$ 为 $a_1,\cdots,a_k,a_i-a_j(1\leqslant i,j\leqslant k,i\neq j)$ 的最小公倍数，则 $k+1$ 个数

$$b_0,a_1+b_0,\cdots,a_k+b_0$$

符合要求.

## 习 题 6

**1.** 记 $S$ 为所说的和. 我们将任一顶点处的有 $-1$ 的地方改为 $+1$，则 $S$ 中有四个数，设为 $a$、$b$、$c$、$d$ 被改变了符号，用 $S'$ 表示改数后的 14 个数之和，由于 $a+b+c+d\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$，故

$$S-S'=2(a+b+c+d)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4).$$

重复进行这种改数过程，直至顶点处的数均为 $+1$ 为止，即知 $S\equiv 1+1+\cdots+1=14\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$，所以 $S\neq 0$.

**2.** 由 $n-1$ 个数码 1 与一个数码 7 构成的正整数 $N$ 可表示为形式 $N=A_n+6\times 10^k$，这里 $0\leqslant k\leqslant n-1$，$A_n$ 是由 $n$ 个 1 所构成的整数.

当 $3\mid n$ 时，$A_n$ 的数码之和被 3 整除，故 $3\mid A_n$，于是 $3\mid N$，但 $N>3$，故此时 $N$ 不是素数.

现在设 $3\nmid n$. 注意 $10^6\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$，我们因此将 $n$ 模 6 分类，来讨论 $A_n$ 模 7 的值（$n\equiv 0$，$3(\mathrm{mod}\ 6)$ 的情形已不必考虑）. 易于得知，对 $l\geqslant 0$，

$$A_{6l+1}=\frac{1}{9}\times(10^{6l+1}-1)=\frac{1}{9}\times(10^{6l}-1)\times 10+\frac{1}{9}\times(10-1)$$
$$\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7),$$

$$A_{6l+2}\equiv 4,\ A_{6l+4}\equiv 5,\ A_{6l+5}\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$$

此外，$10^0$，$10^2$，$10^4$，$10^5$ 模 7 依次同余于 1，2，4，5. 因而当 $n>6$ 时，按 $n\equiv 1$，2，4，5$(\mathrm{mod}\ 6)$，分别取 $k=0$，4，5，2，即知

$$N=A_n+6\times 10^k\equiv A_n-10^k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7),$$

故 $N$ 不是素数，从而大于 5 的 $n$ 均不合要求. 在 $n\leqslant 5$ 时，不难验证只有 $n=1$，2 合要求.

**3.** 由 $a^m\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 得 $a^m=1+px$. 因此

$$a^{pm}=(1+px)^p=1+p^2x+C_p^2p^2x^2+\cdots\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2). \qquad ①$$

又 $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$，故 $a^{(p-1)m}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$，从而 $a^{pm}\equiv a^m(\mathrm{mod}\ p^2)$. 结合 ① 知 $a^m\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$.

**4.** 无妨设 $m>1$. 我们用 $\overline{x}_k$ 表示 $x_k$ 被 $m$ 除得的余数. 考虑有序数对

$$\langle\overline{x}_1,\overline{x}_2\rangle,\langle\overline{x}_2,\overline{x}_3\rangle,\cdots,\langle\overline{x}_n,\overline{x}_{n+1}\rangle,\cdots. \qquad ①$$

因为被 $m$ 除得的余数共组成 $m^2$ 个互不相等的有序数对，故在序列①中取出前 $m^2+1$ 个数对，其中必有两个相同. 设 $\langle\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}\rangle$ 是下标最小的与某一个 $\langle\overline{x}_j,\overline{x}_{j+1}\rangle$ 相等的数对（$j\leqslant m^2+1$），我们证明 $i$ 必然是 1，否则从

$$x_{i-1}=x_{i+1}-x_i,\ x_{j-1}=x_{j+1}-x_j$$

推出 $x_{i-1}\equiv x_{j-1}(\mathrm{mod}\ m)$，故 $\langle\overline{x}_{i-1},\overline{x}_i\rangle=\langle\overline{x}_{j-1},\overline{x}_j\rangle$，这与 $i$ 的最小性矛盾，所以 $i=1$. 现在由 $\langle\overline{x}_j,\overline{x}_{j+1}\rangle=\langle\overline{x}_1,\overline{x}_2\rangle=\langle 1,1\rangle$. 可知 $x_{j-1}\equiv x_{j+1}-x_j\equiv 1-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$，即 $m\mid x_{j-1}(1<j-1\leqslant m^2)$.

## 习 题 7

**1.** 由条件可得

$$3(n-1)=4(2^{p-1}+1)(2^{p-1}-1). \qquad ①$$

因素数 $p>3$，故由费马小定理得 $p\mid(2^{p-1}-1)$. 结合 ① 推出 $2p\mid(n-1)$，从而 $(2^{2p}-1)\mid(2^{n-1}-1)$. 再由条件知 $n\mid(2^{2p}-1)$，所以 $n\mid(2^{n-1}-1)$.

**2.** 显然 $a_1+2a_2+\cdots+ma_m>1$，故有素数 $p$ 整除 $a_1+2a_2+\cdots+ma_m$. 取 $n=k(p-1)+1$，$k=1,2,\cdots$，则对 $1\leqslant i\leqslant m$，若 $p\nmid i$，由费马小定理知

$$i^n=i\cdot(i^k)^{p-1}\equiv i(\mathrm{mod}\ p).$$

若 $p\mid i$，上式显然也成立. 因此

$$a_1\cdot 1^n+a_2\cdot 2^n+\cdots+a_m\cdot m^n\equiv a_1+2a_2+\cdots+ma_m\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),$$

又 $a_1\cdot 1^n+a_2\cdot 2^n+\cdots+a_m\cdot m^n$ 显然大于 $p$，故它是一个合数. 因此上述选取的 $n$ 符合要求，这显然有无穷多个.

**3.** 设 $m=11^iu$，$n=11^jv$，其中 $i,j$ 为非负整数，$u,v$ 为不被 11 整除的正整数. 我们证明必有 $u=v$，由此即知 $m=11^{i-j}n$. 若 $u\neq v$，无妨设 $u>v$. 因 $(u,11)=1$，故由中国剩余定理，有正整数 $x$，使得

$$x\equiv 0(\mathrm{mod}\ u),\ x\equiv -1(\mathrm{mod}\ 11), \qquad ①$$

即 $x=11k-1$（$k$ 为某个正整数）. 由 ① 易知 $(11k-1,m)=(x,11^iu)=u$，但 $(11k-1,n)=(x,11^jv)\leqslant v<u$，这与条件 $(11k-1,m)=(11k-1,n)$ 相违，故必须 $u=v$.



## 习 题 8

**1.** 只要证明 $F_k$ 的任一个素因子 $p$ 满足 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2^{k+1})$. 显然 $p\neq 2$. 设 2 模 $p$ 的阶为 $r$，由 $p\mid F_k$ 得

$$2^{2^k}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p), \qquad ①$$

故 $2^{2^{k+1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，从而 $r\mid 2^{k+1}$，所以 $r$ 是 2 的方幂. 设 $r=2^l$，其中 $0\leqslant l\leqslant k+1$. 若 $l\leqslant k$，则由 $2^{2^l}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 反复平方，可推出 $2^{2^k}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，结合 ① 得 $p=2$，这不可能. 故必须 $l=k+1$. 又 $2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 从而有 $r\mid(p-1)$，故 $2^{k+1}\mid(p-1)$，即 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2^{k+1})$.

**2.** (1) 设 $a$ 模 $mn$ 的阶为 $r$. 由 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\ mn)$ 可得 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$ 及 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$. 故 $d_1\mid r$ 及 $d_2\mid r$，从而 $[d_1,d_2]\mid r$. 另一方面，由 $a^{d_1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$ 及 $a^{d_2}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$，推出 $a^{[d_1,d_2]}\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$，及 $a^{[d_1,d_2]}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$. 因 $(m,n)=1$，故 $a^{[d_1,d_2]}\equiv 1(\mathrm{mod}\ mn)$，于是 $r\mid[d_1,d_2]$. 综合两方面的结果即知 $r=[d_1;d_2]$.

(2) 直接验算可知 3 模 $2^4$ 的阶为 4. 又易知 3 模 5 的阶为 4，故由例 5 中(1)可知，3 模 $5^4$ 的阶为 $4\times5^3$. 因此由本题的(1)推出，3 模 $10^4$ 的阶为 $[4, 4\times5^3]=500$.

**3.** 采用归纳法. $k=1$，2 时结论显然成立. 设对 $k\geqslant3$ 有 $n_0$ 使得 $2^k\mid(3^{n_0}+5)$，设 $3^{n_0}=2^ku-5$. 若 $u$ 是偶数，则 $2^{k+1}\mid(3^{n_0}+5)$. 以下设 $u$ 是奇数.

论证的关键是注意，对 $k\geqslant3$ 有

$$3^{2^{k-2}}=1+2^kv,\ v\text{ 是奇数.}$$

(参见本单元例 5 中的③.)现在我们有

$$\begin{aligned}3^{n_0+2^{k-2}}&=3^{n_0}\cdot3^{2^{k-2}}=(-5+2^ku)(1+2^kv)\\&=-5+(u-5v+2^kuv)\cdot2^k.\end{aligned}$$

上式括号内的数是偶数，故 $2^{k+1}$ 整除 $3^{n_0+2^{k-2}}+5$. 这就完成了归纳证明.

**4.** 反证法，设有 $n>1$，使 $n\mid3^n-2^n$. 设 $p$ 是 $n$ 的最小素因子，则 $3^n\equiv2^n\pmod p$，从而 $p\geqslant5$. 故有整数 $a$，使得 $2a\equiv1\pmod p$. 因此有

$$(3a)^n\equiv1\pmod p.$$

设 $d$ 是 $3a$ 模 $p$ 的阶. 由上式知 $d\mid n$. 又费马小定理给出 $(3a)^{p-1}\equiv1\pmod p$，故 $d\mid p-1$. 若 $d>1$，则 $d$ 有素因子 $q$，而由 $d\mid n$ 知 $q\mid n$；由 $d\mid p-1$ 知 $q<p$，这与 $p$ 的选取相违，故 $d=1$. 从而 $3a\equiv1\pmod p$，结合 $2a\equiv1\pmod p$ 可知 $a\equiv1\pmod p$，进而 $2a\equiv2\pmod p$，产生矛盾.

## 习　题　9

**1.** 将方程配方成

$$(2x+3y)^2=17y^2+4\times122,$$

模 17 得 $(2x+3y)^2\equiv12\pmod{17}$. 但易于验证，一个整数的平方模 17 只可能取 0、1、2、4、8、9、13、15、16 之一，不能为 12. 因此原方程无整数解.

**2.** 模 4 即知方程

$$12^m-5^n=-7$$

无正整数解. 方程

$$12^m-5^n=7\qquad①$$

显然有解 $m=n=1$. 下面证明当 $m>1$ 时它无正整数解. 将 ① 模 3 得 $-(-1)^n\equiv1\pmod3$，故 $n$ 为奇数，因此 $5^n\equiv5\pmod8$. 又 $m\geqslant2$，故 $8\mid12^m$.

将①模 8 得出 $-5\equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)$，这不可能. 所以 $m=1$，从而 $n=1$.

**3.** $p=2$，5 均不合要求. 设素数 $p>2$ 且 $p\neq 5$. 由二项式定理易知

$$\begin{aligned}2^p+3^p&=2^p+(5-2)^p=5^p-\mathrm{C}_p^1 5^{p-1}\times 2+\cdots+5\mathrm{C}_p^{p-1}2^{p-1}\\&=5^2u+5p\times 2^{p-1},u\text{ 为一个整数.}\end{aligned}$$

故 $5\parallel(2^p+3^p)$，从而 $2^p+3^p$ 不能是整数的 $k$ 次幂（$k>1$）.

**4.** 方程显然有解 $x=y=1$. 将方程模 4 易知 $y$ 为奇数. 若 $y>1$，将方程模 9 得

$$5^x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 9)\qquad①$$

不难求得对 $x=1,2,\cdots,5^x$ 模 9 周期地为 5，7，8，4，2，1. 故由①知 $x$ 必有形式 $6k+5$. 再将原方程模 7，易验证，对奇数 $y$，有

$$3^y\equiv 3,5,6(\mathrm{mod}\ 7).$$

而 $x=6k+5$ 时，由费马小定理知 $5^6\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$，故

$$5^x=5^{6k+5}\equiv 5^5\equiv 3(\mathrm{mod}\ 7),$$

从而原方程两边模 7 不等，因此它没有 $y>1$ 的解，故仅有的正整数解为 $y=1$，$x=1$.

**5.** 易于验证，$x^3\equiv 0,1,5,8,12(\mathrm{mod}\ 13)$；$y^4\equiv 0,1,3,9(\mathrm{mod}\ 13)$. 由这些易知 $x^3+y^4\not\equiv 7(\mathrm{mod}\ 13)$，故方程无整数解.

**6.** 由 $p^x=y^p+1=(y+1)(y^{p-1}-y^{p-2}+\cdots-y+1)$ 可知，$y+1=p^n$，$n$ 为一个整数. 因 $y>0$，故 $n>0$. 因此

$$\begin{aligned}p^x&=(p^n-1)^p+1\\&=p^{np}-p\cdot p^{n(p-1)}+\mathrm{C}_p^2p^{n(p-2)}-\cdots-\mathrm{C}_p^{p-2}p^{2n}+p\cdot p^n.\qquad①\end{aligned}$$

易知，上式右边除最后一项外，均被 $p^{n+2}$ 整除（注意，因 $p$ 是素数，故所有 $\mathrm{C}_p^i$ 对 $i=1,\cdots,p-2$ 均被 $p$ 整除），因此 $p^{n+1}$ 是①的右边的 $p$ 的最高次幂，故必须 $x=n+1$，此时①化为

$$p^{np}-p\cdot p^{n(p-1)}+\mathrm{C}_p^2p^{n(p-2)}-\cdots-\mathrm{C}_p^{p-2}p^{2n}=0.\qquad②$$

当 $p=3$ 时，② 即为 $3^{3n}-3\cdot 3^{2n}=0$，得 $n=1$，故 $x=y=2$. 若 $p\geqslant 5$，注意到 $\mathrm{C}_p^{p-2}$ 不被 $p^2$ 整除，易知 ② 的左边除最后一项外，均被 $p^{2n+2}$ 整除，但最后一项不能被 $p^{2n+2}$ 整除，这表明 ② 不能成立. 因此，本题仅在 $p=3$ 时有解 $x=y=2$.

## 习 题 10

**1.** 因 $a \geqslant 3$，故 $a-1$ 有素因子 $p$. 由费马小定理知，$a^p \equiv a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 用归纳法易证，$n = p^k (k = 1, 2, \cdots)$ 均符合要求.

**2.** 已知条件可重述为

$$2^{n_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n_1),\ 2^{n_3} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n_2),\ \cdots,\ 2^{n_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n_k).$$

设 $D = [n_1, \cdots, n_k]$. 则由上式得出

$$2^D \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n_i) (i = 1, \cdots, k),$$

从而 $2^D \equiv 1 (\mathrm{mod} D)$，故由第 8 单元中例 2 知 $D = 1$，所以 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.

**3.** 设 $a^3 + b^3 = ma^2 b$，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^3 - m\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0$，即有理数 $\frac{a}{b}$ 是首项系数为 1 的整系数方程

$$x^3 - mx^2 + 1 = 0 \qquad ①$$

的一个根，故 $\frac{a}{b}$ 必是整数（习题 2 第 4 题）. 另一方面，方程①的任一整数根必然整除常数项 1，从而只能是 $\pm 1$；又 $a$，$b$ 为正数，故 $\frac{a}{b} = 1$，即 $a = b$.

**4.** 显然 $y > 1$. 原方程可分解为

$$(y-1)(y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1) = x^n. \qquad ①$$

关键是证明，$y-1$ 与 $y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1$ 互素. 若它们的最大公约数 $d > 1$，则 $d$ 有素因子 $p$. 由 $y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ 知，$y^i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$，从而有

$$y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1 \equiv n + 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

于是 $p \mid (n+1)$；但由 ① 又推出 $p \mid x^n$，从而素数 $p \mid x$，这与 $(x, n+1) = 1$ 相违，故 $d = 1$. 现在由①推出，存在正整数 $a$，$b$，使得

$$y - 1 = a^n,\ y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1 = b^n. \qquad ②$$

但 $y^n < y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1 < (y+1)^n$，即 $y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1$ 界于两个相邻的 $n$ 次幂之间，故它不能是整数的 $n$ 次幂，这与已证得的 ② 相矛盾.

**5.** (1) 例如可取 $a = 2^n + \frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$，则对 $k = 1, \cdots, n$，

$$\begin{aligned} a^k - b^k &= (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \\ &= 2^n \cdot a^{k-1} + 2^n \cdot a^{k-2}b + \cdots + 2^n \cdot ab^{k-2} + 2^n \cdot b^{k-1}. \end{aligned}$$

由于 $k\leqslant n$，易知上式右边每一项均是整数，故它们的和是整数.

(2) 设 $a=\dfrac{x}{z}$，$b=\dfrac{y}{z}$，$x$，$y$，$z$ 都是正整数，且 $(x,y,z)=1$. 则 $a^n-b^n$ 为整数，等价于

$$x^n\equiv y^n(\mathrm{mod}\ z^n). \tag{①}$$

我们要证明 $z=1$，由此即知 $a$，$b$ 都是整数.

设 $z>1$，则 $z$ 有素因子. 若 $z$ 有奇素数因子 $p$，我们设 $r$ 是使 $x^r\equiv y^r\ (\mathrm{mod}\ p)$ 成立的最小正整数. 由 ① 知 $x^n\equiv y^n(\mathrm{mod}\ p)$，故 $r\mid n$(参考第 8 单元例 5 中的注 3). 设 $p^\alpha\parallel n$，$p^\beta\parallel(x^r-y^r)$(注意，因 $a\neq b$，故 $x\neq y$)，则由第 8 单元例 5 中的(1) 知 $p^{\alpha+\beta}\parallel(x^n-y^n)$，但 ① 意味着 $p^n\mid(x^n-y^n)$，因此 $p^n\leqslant p^{\alpha+\beta}$，故 $n\leqslant\alpha+\beta$，又 $p^\alpha\leqslant n$，故 $\alpha\leqslant\log_p n$，从而

$$n\leqslant\log_p n+\beta,$$

这在 $n$ 充分大时不能成立(注意 $\beta$ 是一个固定的数)，因此①不可能对无穷多个 $n$ 成立，矛盾.

若 $z$ 没有奇素数，则 $z$ 是 2 的幂. 由①及 $(x,y,z)=1$ 知，$x$，$y$ 都是奇数. 当 $n$ 为奇数时，由

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

并注意到上式右边第二个因子是奇数，从而 $2^n\mid(x^n-y^n)$ 意味着 $2^n\mid(x-y)$，因 $x\neq y$，故这样的 $n$ 只有有限多个. 当 $n$ 为偶数时，设 $2^s\parallel(x^2-y^2)$，由第 8 单元例 5 中注 3 的(2) 知，若 $2^\alpha\parallel n$，则 $2^{\alpha+s-1}\parallel(x^n-y^n)$. 结合 ① 得 $n\leqslant\alpha+s-1$. 因 $\alpha\leqslant\log_2 n$，故

$$n\leqslant\log_2 n+s-1,$$

这对充分大的偶数 $n$ 不能成立，矛盾.

**6.** 若每个 $a_i$ 都不等于 $n$，则结论易证. 因为 $2n$ 个数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2n-a_1,\ 2n-a_2,\ \cdots,\ 2n-a_n$$

都是正整数，且小于 $2n$，故其中必有两个相等，即有 $i$，$j$ 使 $a_i=2n-a_j$. 因 $i=j$ 意味着 $a_i=n$，这与假设不符，故 $i\neq j$，从而 $a_i+a_j=2n$，可被 $2n$ 整除.

现在无妨设 $a_n=n$. 考虑 $n-1$ ($\geqslant 3$) 个整数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{n-1}$，这其中必有两个数的差不被 $n$ 整除，因为，若所有的 $C_{n-1}^2$ 个两数之差都被 $n$ 整除，则因 $C_{n-1}^2\geqslant 3$，故有三个数 $a_i<a_j<a_k$，使 $n\mid(a_j-a_i)$，$n\mid(a_k-a_j)$，从而 $a_k-a_i=(a_k-a_j)+(a_j-a_i)\geqslant 2n$，这不可能.

无妨设 $a_1-a_2$ 不被 $n$ 整除. 考虑下面 $n$ 个数

$$a_1,\ a_2,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}. \qquad ①$$

若它们模 $n$ 互不同余，则其中有一个被 $n$ 整除；若①中的数有两个模 $n$ 同余，则这两数的差被 $n$ 整除，因此必产生 $a_1$，…，$a_{n-1}$ 中某些数之和被 $n$ 整除（因 $a_1-a_2$ 不被 $n$ 整除），记这个和为 $kn$. 若 $k$ 是偶数，则结论已成立；若 $k$ 是奇数，将 $a_n=n$ 添入所说的和，即得结果.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 数论/余红兵著. —2 版. —上海：华东师范大学出版社，2011. 12
ISBN 978-7-5617-9183-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①余… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 265802 号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷

# 数论(第二版)

著　　者　余红兵
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　上海崇明县裕安印刷厂
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　5.75
字　　数　99千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年1月第二次
印　　数　11001-16100
书　　号　ISBN 978-5617-9183-7/G·5487
定　　价　13.00元

出 版 人　朱杰人