数学奥林匹克小丛书
第二版
高中卷 11

Shuxue Aolinpike
XIAOCONG SHU

组合数学

张垚 编著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

组合数学历史悠久，早在几千年前，我国的《河图》、《洛书》中就已经涉及一些简单有趣的组合问题.近20年来，由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展，提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题，加上组合数学自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题，使得组合数学的研究十分活跃而富有成果.解决问题的方法和技巧更是千变万化，使这一门古老的数学分支成为一门充满了活力的数学学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往表达形式简单明了，而求解这些问题却需要敏锐的观察力、丰富的想象力和必要的技巧，通常没有一个固定的解题模式可遵循，而且各种难易程度的问题都非常丰富，所以各种程度的智力训练和数学竞赛中，大多离不开组合问题.

本书主要按照全国高中数学联赛对组合问题的要求而编写，全书由三部分组成，第一部分为知识篇，着重介绍了全国高中联赛中涉及到的组合数学的有关知识.第二部分为方法篇，主要介绍了全国高中联赛中解组合问题的一些常用的思想方法.第三部分为问题篇，主要对全国高中联赛中出现得最多的几类问题，从解题思想方法上进行了初步的归纳和小结.

在例题和习题的选择方面，我们尽可能选编一些较新颖的、尤其是近几年国内外数学竞赛中相当于我国高中联赛水平的组合数学的试题，也包括了作者自己编拟的部分问题，还有个别中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题.在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结.希望通过这部分内容的学习，能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编者

2004年8月

再版前言

第二版与第一版比较，主要作了如下的一些修改：

(1) 删去了一些陈旧的例题与习题，其中一部分更换为近几年国内外数学竞赛中出现的一些有代表性的试题，从而使得全书在内容上更加新颖、实用，而篇幅略有减少；

(2) 改正了原书中出现的一些错误.

本书出版以来.很多参加数学竞赛培训的老师和学生热心地提出了一些宝贵的建议和意见，这对提高本书的质量有极大的帮助.借此机会向他(她)们致以深深的谢意，并热诚欢迎广大读者继续给本书提出批评和指正.

编者

2011 年 8 月

目 录

知 识 篇

方 法 篇

问　题　篇

知识篇

1 计数原理和计数公式

一、加法原理和乘法原理

加法原理　如果做一件事，完成它有 m 类不同的方法，在第 1 类方法中有 n_1 种不同的方法，在第 2 类方法中有 n_2 种不同的方法……在第 m 类方法中有 n_m 种不同的方法，那么完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

乘法原理　如果做一件事，完成它需要 m 个步骤，做第 1 步有 n_1 种不同的方法，做第 2 步有 n_2 种不同的方法……做第 m 步有 n_m 种不同的方法，那么完成这件事共有 $n_1n_2\cdots n_m$ 种不同的方法.

例 1　设 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 499, 500\}$，从 S 中任取 4 个不同的数，按照从小到大的顺序排列成一个公比为正整数的等比数列，求这样的等比数列的个数.

解　设所求等比数列为 a_1，a_1q，a_1q^2，a_1q^3（a_1，$q\in\mathbf{N}_+$，$q\geqslant 2$），则 $a_1q^3\leqslant 500$，$q\leqslant\sqrt[3]{\dfrac{500}{a_1}}\leqslant\sqrt[3]{500}$，所以 $2\leqslant q\leqslant 7$，且 $1\leqslant a_1\leqslant\left[\dfrac{500}{q^3}\right]$，即公比为 q 的等比数列有 $\left[\dfrac{500}{q^3}\right]$ 个.

由加法原理得满足条件的等比数列共有 $\sum\limits_{q=2}^{7}\left[\dfrac{500}{q^3}\right]=62+18+7+4+2+1=94$（个）.

例 2　已知集合 $A=\{x\mid 5x-a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 6x-b>0\}$，$a$，$b\in\mathbf{N}$，且 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2, 3, 4\}$，则整数对 (a, b) 的个数为　　(　　)

(A) 20　　(B) 25　　(C) 30　　(D) 42

（2006 年全国高中数学联赛试题）

解　$5x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\dfrac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\dfrac{b}{6}$. 要使 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,$

3，4}，其充要条件是 $\begin{cases}1\leqslant \dfrac{b}{6}<2\\ 4\leqslant \dfrac{a}{5}<5\end{cases}$，即 $\begin{cases}6\leqslant b<12\\ 20\leqslant a<25\end{cases}$，故 b 有 C_6^1 种取法，a 有 C_5^1 种取法，由乘法原理得数对 (a, b) 的个数为 $C_5^1C_6^1=30$ 个，所以选 C.

二、无重复的排列与组合

排列 从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 因为这个排列中无重复元素，故又叫做无重复的排列. 从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素的排列的个数记为 A_n^m 或 P_n^m，则

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},$$

其中 $m\leqslant n$，并约定 $0!=1$.

特别地，当 $m=n$ 时，从 n 个不同元素中取 n 个不同元素的排列，叫做 n 个不同元素的全排列. n 个不同元素的全排列的个数为

$$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$

组合 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 因为这个组合中无重复元素，故又叫做无重复的组合. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的组合的个数记为 C_n^m 或 $\dbinom{n}{m}$，则

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

例 3 由 1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字，并且大于 21 300 的正整数?

解法 1 由 1，2，3，4，5 组成的没有重复数字，并且大于 21 300 的正整数可分为 3 类：

万位数字为 3，4，5 的有 $A_3^1\cdot A_4^4$ 个；

万位数字为 2，千位数字为 3，4，5 的有 $A_3^1\cdot A_3^3$ 个；

万位数字为 2，千位数字为 1 的有 A_3^3 个.

由加法原理，符合条件的正整数的个数是

$$A_3^1\cdot A_4^4+A_3^1\cdot A_3^3+A_3^3=96.$$

解法 2 由 1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的 5 位数共有 A_5^5 个，其中只有万位数字为 1 的数不大于 21 300，这样的 5 位数有 A_4^4 个，故符合条件的正整数的个数是

$$A_5^5 - A_4^4 = 5! - 4! = 96.$$

三、可重复的排列与组合

可重复的排列 从 n 个不同元素中取 m 个元素（同一元素允许重复取出），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复排列，这种排列的个数为 n^m.

这个结论不难用乘法原理证明.

可重复的组合 从 n 个不同元素中取 m 个元素（同一元素允许重复取出）并成一组，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合，这种组合的个数为 C_{n+m-1}^m.

证明 用 1，2，…，n 表示 n 个不同元素，这时从这 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合具有下列形式：

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}\ (1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n).$$

因为允许重复选取，其中等号可以成立.

将上述每个组合自左向右逐个分别加上：0，1，2，…，$(m-1)$，得到 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$，其中 $j_1 = i_1$，$j_2 = i_2 + 1$，…，$j_m = i_m + (m-1)$，满足 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n+m-1$. 而 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$ 恰是从 $n+m-1$ 个不同元素 1，2，3，…，$n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合. 所以从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复的组合数为 C_{n+m-1}^m.

不全相异元素的全排列 如果 n 个元素中，分别有 n_1，n_2，…，n_k 个元素相同，且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列，其不同的排列个数记为 $\begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

证明 设符合条件的排列数为 f，因为每类相同元素交换排列顺序，仍属于同一种排列，如果每类元素都换成互不相同的元素，则有 $n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$ 种变化，于是由乘法原理得 n 个不同元素的排列数为 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$，而实际上，$n$ 个不同元素的排列数应为 $n!$，于是得 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k! = n!$，故有 $f = \begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

多组组合　把 n 个相异元素分为 $k(k\leqslant n)$ 个按照一定顺序排列的组，其中第 i 组有 n_i 个元素（$i=1,2,\cdots,k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$），则不同的分组方法的种数为 $\begin{pmatrix} & n & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

证明　从 n 个元素中取出 n_1 个元素有 $C_n^{n_1}$ 种方法，从剩下 $n-n_1$ 个元素中取出 n_2 个元素有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法，再依次选出 $n_3,\cdots,n_k$ 个元素，分别有 $C_{n-n_1-n_2}^{n_3},\cdots,C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种方法，故由乘法原理得不同的分组方法的种数是

$$\begin{aligned}&C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\cdots\cdot C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}\\=&\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!}\\=&\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.\end{aligned}$$

注意　多组组合与不全相异元素的全排列的计数公式完全相同，但它们的组合意义是不相同的. 我们也可用前面在证明不全相异元素的全排列公式的方法来证明多组组合公式，我们把这个证明留给读者自己去完成.

例 4　从银行中取出伍角、壹元、贰元、伍元、拾元、伍拾元、壹百元的纸币共 10 张，共有多少种不同的取法？

解　本题为从 7 种不同的纸币中取 10 种纸币可重复的组合数，依可重复的组合数公式得不同的取法数目为

$$C_{7+10-1}^{10}=C_{16}^{6}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=8008.$$

例 5　将 3 面红旗、4 面蓝旗、2 面黄旗依次悬挂在旗杆上，问可以组成多少种不同的标志？

解　由不全相异元素的全排列公式得所求标志数目为

$$\begin{pmatrix} & 9 & \\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}=\frac{9!}{3!4!2!}=1260.$$

例 6　从 $n(n\geqslant6)$ 名乒乓球选手中选拔出 3 对选手准备参加双打比赛，问共有多少种不同的方法？

解法 1　从 n 名选手中选出 6 名选手有 C_n^6 种方法，将这 6 名选手分成 3 个不同的组，每组 2 名有 $\begin{pmatrix} & 6 & \\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 种方法，但 3 对选手是不计顺序的，故所求的方法数应为

$$\frac{C_n^6\begin{pmatrix} & 6 & \\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}}{3!}=\frac{n!}{6!(n-6)!}\cdot\frac{6!}{2!2!2!}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{n!}{48\cdot(n-6)!}.$$

解法 2 从 n 名选手中选出 6 人有 C_n^6 种方法，选出的 6 人中选出 2 人配成一对有 C_6^2 种方法，剩下 4 人中选 2 人配成一对有 C_4^2 种方法，最后剩下的 2 人配成一对有 C_2^2 种方法．但因选出的 3 对是不计顺序的，故所求方法数为

$$\frac{C_n^6C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}=\frac{n!}{48(n-6)!}.$$

注意 本题若改为从 n 名选手中选出 3 对选手分别列为第 1、2、3 号种子选手，则其不同的选法数目为

$$C_n^6C_6^2C_4^2C_2^2=\frac{n!}{8(n-6)!}.$$

这是因为选出的 3 对选手是排了序的，故不要除以 3!.

四、相异元素的圆排列和项链数

圆排列 将 n 个不同元素不分首尾排成一圈，称为 n 个相异元素的圆排列，其排列种数为 $(n-1)!$.

证明 因为 n 个不同的直线排列 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，$A_2A_3\cdots A_nA_1$，$A_3A_4\cdots A_1A_2$，…，$A_nA_1\cdots A_{n-2}A_{n-1}$，分别将其首尾相连排成一圈得到的是同一种圆排列，而 n 个相异元素的全排列有 $n!$ 个，故 n 个相异元素的圆排列个数为 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

项链数 将 n 粒不同的珠子用线串成一副项链，则得到的不同项链数当 $n=1$ 或 2 时为 1，当 $n\geqslant 3$ 时为 $\frac{1}{2}(n-1)!$.

证明 若 $n=1$ 或 2，则项链数显然为 1. 当 $n\geqslant 3$ 时，若 n 粒不同珠子的两个圆排列仅有顺时针与逆时针方向上的区别，则这两个圆排列对应的是同一副项链．故当 $n\geqslant 3$ 时，项链数应为对应的圆排列数的一半，即为 $\frac{1}{2}(n-1)!$.

例 7 6 位女同学和 15 位男同学围成一圈跳集体舞，要求每两名女同学之间至少有两名男同学，那么共有多少种不同的围圈跳舞的方法？

解 首先让每位女同学选择两名男同学作为她的舞伴，一人排在她左

侧，另一人排在她右侧. 由于 6 位女同学互不相同，故第 1 名女同学有 15×14 种选法，第 2 名有 13×12 种选法……一共有 A_{15}^{12} 种"配对"方法.

将每名女同学和她的舞伴看成一组，剩下 $15-12=3$ 名男同学每人看成一组，一共有 9 个组，把这 9 个组排成一圈，共有 $(9-1)!=8!$ 种排法.

由乘法原理得满足条件的排列数为

$$A_{15}^{12}\cdot 8!=\frac{15!\cdot 8!}{3!}.$$

五、一类不定方程的非负整数解的个数

不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n\ (m,\ n\in\mathbf{N}_+)$ 的非负整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ 的个数为 C_{n+m-1}^{m-1}.

证明 将方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的一组非负整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$，对应于一个由 n 个圈"○"和 $m-1$ 条竖线"|"组成的排列

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_1\text{个}}\ \Big|\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_2\text{个}}\ \Big|\ \cdots\ \Big|\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_m\text{个}},$$

其中第一条竖线"|"左侧有 x_1 个圈"○"，第 i 条竖线"|"与第 $i+1$ 条"|"之间有 x_{i+1} 个圈"○" $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-2)$，第 $m-1$ 条竖线"|"右侧有 x_m 个圈"○". 这个对应是一个一一对应，故不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ 的个数等于 n 个圈"○"和 $m-1$ 条竖线"|"共 $n+m-1$ 个元素的直线排列的个数 $C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m-1}^{m-1}$.

注意 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解的个数与可重复组合的计数是相同的.

推论 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n\ (m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ m\leqslant n)$ 的正整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ 的个数为 C_{n-1}^{m-1}.

证明 令 $y_i=x_i-1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则 $y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m$，所以不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数 S 等于不定方程 $y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m$ 的非负整数解的个数，即 $S=C_{n-m+m-1}^{m-1}=C_{n-1}^{m-1}$.

下面给出例 7 的另一种解法.

解法二 以女同学为组长，15 位男同学分入 6 个组每组至少有两位男同学，且记各组内男同学数分别为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_6$，则分组的方法数等于不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=15,\ x_i\geqslant 2\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6) \qquad ①$$

的整数解的个数，令 $y_i=x_i-2(i=1,2,\cdots,6)$ 则

$$y_1+y_2+\cdots+y_6=3,\ y_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,6). \quad ②$$

故①的整数解的个数等于②的非负整数解的个数 $C_{3+6-1}^{6-1}=C_8^5=C_8^3$，即 15 位男同学分入 6 个组，每组至少 2 人的方法数为 C_8^3. 6 个组排成一个圆圈有 5! 种方法（这时女同学排在每组的首位，她的位置已排定），又 15 个男同学站入的方法数为 A_{15}^{15}，故满足条件的排列数为 $C_8^3\cdot 5!\cdot A_{15}^{15}=\dfrac{8!\,15!}{3!}$.

例 8 将 24 个志愿者名额分配给 3 个学校，则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有________种.（2008 年全国高中数学联赛试题）

解 设分配给 3 个学校的名额数分别为 x_1, x_2, x_3，则每个学校至少有一个名额的分配方法数为不定方程 $x_1+x_2+x_3=24$ 的正整数解的个数，即 $C_{24-1}^{3-1}=C_{23}^2=\dfrac{23\times 22}{2}=253$. 但上述分配方法中“至少有两个学校名额数相同”的分配方法有下列 31 种：

$(i,i,24-2i)$、$(i,24-2i,i)$、$(24-2i,i,i)$

$(i=1,2,3,4,5,6,7,9,10,11)$及$(8,8,8)$.

故满足条件的分配方法共有 $253-31=222$(种).

例 9 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解(x,y,z)的个数是________.（2010 年全国高中数学联赛试题）

解 首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times 1004$；

其次，把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解分为三类：

(1) $x=y=z$ 的正整数解只有 1 个：$(670,670,670)$；

(2) x,y,z 中恰有 2 个相等的正整数解有下列 1003 个：$(x,x,2010-2x)$、$(x=1,2,\cdots,669)$以及$(2010-2y,y,y)(y=671,672,\cdots,1004)$；

(3) 设 x,y,z 两两不等的正整数解有 k 个，于是

$$1+1003\times C_3^1+k\times 3!=C_{2009}^2=2009\times 1004,$$

所以

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{6}(2009\times 1004-3\times 1003-1)\\&=\frac{1}{6}(2009\times 1005-2009-3\times 1005+3\times 2-1)\\&=\frac{1}{6}(2006\times 1005-2004)=1003\times 335-334\end{aligned}$$

$=335\ 671.$

故满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解 (x,y,z) 的个数为

$$1+1003+335\ 671=336\ 675.$$

六、容斥原理

容斥原理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合，用 $|A_i|$ 表示集合 A_i 中的元素个数，那么

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\quad ①$$

证明 若 $a\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，则 a 至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一个集合. 不妨设 a 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 而不属于其他集合. 于是 a 在①式左端计算了一次. 而 a 在右端的第一个和中计算了 C_k^1 次，在第 2 个和中计算了 C_k^2 次，…，可见，a 在右端算式中，它被计算的总次数为

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_k^1-\mathrm{C}_k^2+\mathrm{C}_k^3-\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{C}_k^k\\=&\mathrm{C}_k^0-(\mathrm{C}_k^0-\mathrm{C}_k^1+\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_k^k)\\=&1-(1-1)^k\\=&1.\end{aligned}$$

若 $a\notin A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，则显然 a 在①式两端计算的次数都为 0. 这表明①式右端的确表示至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一个集合的元素的总数 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$，从而①式成立.

上述证明①式成立的方法叫做贡献法.

逐步淘汰原理(筛法公式) 设 S 是有限集合，$A_i\subset S\ (i=1, 2, \cdots, n)$，$A_i$ 在 S 中的补集为 $\complement_S A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 则

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\quad ②$$

证明 因为 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|S|-|\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|$，而由集合论中德·摩根律，我们有

$$\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n.$$

由上述两式及①式即得②式.

公式①和②都源于同一思想，即不断地使用包含与排除，逐步筛去重复的计数. 因此，这两个公式又统称为包含与排除原理，今后我们统称为容斥原理.

例 10 （伯努利装错信笺问题）有 n 封不同的信和 n 个配套的写有收信人地址的信封，现将 n 封信一对一地套入到 n 个信封中去，结果发现没有一封信套对（即每封信都没有按地址套入其应套入的信封），问有多少种不同的套法？

解 设 S 是所有套法组成的集合，则显然有 $|S|=n!$. 我们把每封信和对应的信封都分别用 $1, 2, 3, \cdots, n$ 进行编号，并记 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为第 i 封信恰套入第 i 个信封（即套正确）的所有套法构成的集合，故所求的方法数即为 $|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \cdots \cap \complement_S A_n|$，而易知

$$|A_i|=(n-1)!\ (1\leqslant i\leqslant n),$$
$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!\ (1\leqslant i<j\leqslant n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!\ (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$
$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=0!=1.$$

于是由筛法公式有

$$\begin{aligned}&|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \cdots \cap \complement_S A_n|\\&=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-C_n^3(n-3)!+\cdots+(-1)^n C_n^n\cdot 0!\\&=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}\\&=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

注 本例通常又称为乱序排列问题. 所谓乱序排列指的是：将 n 个不同元素重新排列，使每个元素都不在原来位置上.

置换及其不动点 给定集合 $X=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，φ 是从 X 到 X 上的一一映射，通常记为

$$\varphi=\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n)\end{Bmatrix},$$

则称 φ 是 X 上的置换，其中 $\varphi(i)$ 是元素 i 在映射 φ 下的象. 因为是一一映射，所以 $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)$ 实际上是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 满足 $\varphi(i)=i$ 的数 i 称为 φ 的一个不动点. 由上例立即可得下列结论：

推论 集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上没有任何不动点的置换 φ 的个数是

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

例 11 设 φ 是集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的置换，将 X 上没有不动点的置换个数记为 f_n，恰有一个不动点的置换个数记为 g_n，证明：$|f_n-g_n|=1$.（第 14 届加拿大数学奥林匹克试题）

证明 设 $g_{n_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示 X 上恰有唯一不动点 i 的置换个数. 于是

$$g_n=g_{n_1}+g_{n_2}+\cdots+g_{n_n}.$$

由上述推论，有

$$f_n=D_n,\ g_{n_i}=D_{n-1}(i=1, 2, \cdots, n),$$

故

$$g_n=nD_{n-1}.$$

所以

$$\begin{aligned}|f_n-g_n|&=|D_n-nD_{n-1}|\\&=\left|n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)-\right.\\&\qquad\left.n\cdot(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right|\\&=\left|n!\cdot\frac{(-1)^n}{n!}\right|\\&=1.\end{aligned}$$

例 12 从全体正整数 1，2，3，…中划去 3 和 4 的倍数，但其中凡是 5 的倍数都保留（例如 15，20，60，…等都保留），划完后，将剩下的数从小到大排成一个数列：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=10$，…，求 a_{2011} 之值.

解法 1 设 $a_{2011}=n$，令 $S=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，$A_i=\{k\mid k\in S$ 且 k 被 i 整除$\}$，于是 S 中没有被划去的数的集合为 $(\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5)\cup A_5$，依题意并利用筛法公式得

$$\begin{aligned}2011&=|(\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5)\cup A_5|\\&=|\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5|+|A_5|\\&=|S|-|A_3|-|A_4|-|A_5|+|A_3\cup A_4|+|A_3\cup A_5|+|A_4\cup A_5|-\\&\qquad|A_3\cap A_4\cap A_5|+|A_5|\end{aligned}$$

$$=n-\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{3\times4}\right]+\left[\frac{n}{3\times5}\right]+\left[\frac{n}{4\times5}\right]-\left[\frac{n}{3\times4\times5}\right]. \quad ①$$

利用 $\alpha-1<[\alpha]\leqslant\alpha$，由①得

$$2011<n-\left(\frac{n}{3}-1\right)-\left(\frac{n}{4}-1\right)+\frac{n}{3\times4}+\frac{n}{3\times5}+\frac{n}{4\times5}-\left(\frac{n}{3\times4\times5}-1\right)=\frac{3}{5}n+3. \quad ②$$

和

$$2011>n-\frac{n}{3}-\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{3\times4}-1\right)+\left(\frac{n}{3\times5}-1\right)+\left(\frac{n}{4\times5}-1\right)-\frac{n}{3\times4\times5}=\frac{3}{5}n-3. \quad ③$$

由②和③联立解得

$$3346\frac{2}{3}<n<3356\frac{2}{3}. \quad ④$$

又 n 为正整数，并且满足④的 n 中凡是 3 或 4 的倍数而同时不是 5 的倍数的数应去掉，故 n 只可能是 3347，3349，3350，3353，3355，3356. 经检验知 $n=3350$ 满足①，并且由实际意义知本题的解是唯一的，所以 $a_{2011}=3350$.

解法 2 因为 3，4，5 的最小公倍数为 60，故先考虑集合 $S_0=\{1, 2, 3, \cdots, 60\}$ 中含有多少个没有被划去的数. 令 $B_i=\{k \mid k\in S_0$，且 k 被 i 整除$\}$ $(i=3, 4, 5)$，则 S_0 中没有被划去的数的集合为 $(\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5)\cup B_5$，由筛法公式得

$$\begin{aligned}
&|(\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5)\cup B_5|\\
=&|\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5|+|B_5|\\
=&|S_0|-|B_3|-|B_4|-|B_5|+|B_3\cap B_4|+|B_3\cap B_5|+|B_4\cap B_5|-\\
&|B_3\cap B_4\cap B_5|+|B_5|\\
=&60-\left[\frac{60}{3}\right]-\left[\frac{60}{4}\right]+\left[\frac{60}{3\times4}\right]+\left[\frac{60}{3\times5}\right]+\left[\frac{60}{4\times5}\right]-\left[\frac{60}{3\times4\times5}\right]\\
=&36,
\end{aligned}$$

即 S_0 中没有被划去的数有 36 个：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=7$，$\cdots$，$a_{36}=60$. 记 $P=\{a_1, a_2, \cdots, a_{36}\}$，令 $a_n=60k+r$，(k，r 为非负整数，且 $1\leqslant r\leqslant 60$).

若 $(a_n, 12)=(60k+r, 12)=1$，则 $(r, 12)=1$，于是 $r\in P$. 若 $(a_n$，

$12)=(60k+r,\ 12)\neq 1$，则 $(r,\ 12)\neq 1$，但由 $5|a_n$ 得 $5|r$，也有 $r\in P$.

反之，对任意形如 $60k+r$（k 为非负整数，$r\in P$）的正整数. 若 $(r,\ 12)=1$，则 $(60k+r,\ 12)=1$，这时 $60k+r$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的一项. 若 $(r,\ 12)\neq 1$，则由 $r\in P$ 知 $5|r$. 从而 $5\mid(60k+r)$，故 $60k+r$ 仍是数列 $\{a_n\}$ 中一项.

可见，数列 $\{a_n\}$ 中的项由且只由形如 $60k+r$（k 为非负整数，$r\in P$）的正整数组成，且对每一个固定的 k. 当 r 取遍 P 中的数时，可得数列 $\{a_n\}$ 中相邻的 36 项. 又 $2011=36\times 55+31$，所以 $a_{2011}=60\times 55+a_{31}=3300+a_{31}$. 而 $a_{36}=60$，$a_{35}=59$，$a_{34}=58$，$a_{33}=55$，$a_{32}=53$，$a_{31}=50$，故

$$a_{2011}=3300+50=3350.$$

注 本题解法 1 中所用的方法称为估值法，首先估计解的取值范围，如果解的取值范围只有有限种可能，并且从问题的意义知解是唯一的，则只有从取值范围的中间值（本题中 $n=3350$）开始检验（若不满足条件，则在两侧中的一个中间值处再检验），其中满足条件的值就是问题的唯一解. 解法 2 中所使用的方法称为组合分析法，它是先弄清所求数列的结构后，再进行计算.

习 题 1

1 将 $n+1$ 件不同奖品全部发给 n 个同学，每人至少一件，则发放的方法数为________.

2 从 5 位男同学和 4 位女同学中选出 4 人组成一个代表团参加全校辩论比赛. 若要求男同学和女同学都至少一人，则不同的选择种数为________.

3 如果自然数 a 的各位数字之和等于 7，那么称 a 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$，若 $a_n=2005$，则 $a_{5n}=$________.（2005 年全国高中数学联赛试题）

4 设三位数 $n=\overline{abc}$，若以 $a,\ b,\ c$ 为 3 条边的长可以构成一个等腰（含等边）三角形，则这样的三位数 n 有________个.（2004 年全国高中数学联赛试题，原题为选择题）

5 从 1，2，3，4，5，7，9 这 7 个数字中任取两个数字分别做成对数的底数和真数，则可构成不相等的对数值的数目是________.

6 某次乒乓球单打比赛，原计划每两名选手比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场后退出了比赛，这样全部比赛一共进行了 50 场，那么上述 3 名选手之间比赛的场次数是________.（1994 年全国高中数学联赛试题，原题

为选择题)

7 已知直线 $ax+by+c=0$ 中，a，b，c 取自集合$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$中三个不同元素，并没该直线的倾斜角为锐角，那么这样直线的条数是________.(1999 年全国高中数学联赛试题)

8 2×3 的矩形花坛被分成 6 个 1×1 的小正方形区域：A，B，C，D，E，F，在每个区域内栽种一种植物，相邻两个区域内栽种的植物不同，今有 6 种植物可供选择，则共有________种不同的栽种方法.(2002 年湖南省中学生夏令营试题)

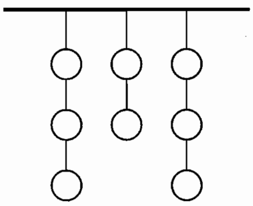
9 甲、乙两队各抽出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，……，直到一方队员全部被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一个比赛过程，那么所有可能出现的比赛过程的种数为________.(1988 年全国高中数学联赛试题)

10 在一次射击比赛中，有 8 个泥制的靶子挂成如图所示的三列(其中两列 3 个，一列 2 个)，一位神枪手每一枪按下面规则打中靶子：

(1) 选择一列；

(2) 打中所选一列的最下面未打过的靶子.

问打中这 8 个靶子共有多少种不同的顺序？(第 8 届美国数学邀请赛试题)



(第 10 题)

11 将正四棱锥的顶点染色，要求同一条棱的两个端点不同色. 如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法共有多少种？(假设经过绕对称轴旋转后可以变相同的染色方法是同一种染色方法)

12 已知两个实数集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中每个元素都有原象，且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射的总个数为________.(2002 年全国高中数学联赛试题，原题为选择题)

13 n 对夫妻任意排成一行，求没有任何一对夫妻相邻的排法总数.

14 将与 105 互素的正整数从小到大排列成数列，求出这个数列的第 1000 项.(1994 年全国高中数学联赛试题)

15 由数字 1，2，3 组成 n 位数($n\geqslant3$)，要求 n 位数中数字 1，2，3 中每一个至少出现一次，求这种 n 位数的个数.

2 抽屉原理与平均值原理

一、抽屉原理

抽屉原理又称鸽巢原理或狄利克雷(Dirichlet)原理，抽屉原理是组合数学中基本而重要的原理之一，许多存在性问题的证明都可以用抽屉原理来解决.

第一抽屉原理 如果将 m 个物件放入 n 个抽屉内，那么必有一个抽屉内至少有 $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]+1$ 个物件.

证明 用反证法，如果每个抽屉内至多有 $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ 个物件，那么放入 n 个抽屉内的物件的总数至多为 $n\left[\dfrac{m-1}{n}\right]\leqslant n\left(\dfrac{m-1}{n}\right)=m-1$，这与共有 m 个物件矛盾，故必有一个抽屉内至少有 $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]+1$ 个物件. 证毕.

推广 如果将 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ ($m_1, m_2, \cdots, m_n$ 均为正整数) 个物件放入 n 个抽屉内，那么或者第一个抽屉内至少有 m_1+1 个物件，或者第二个抽屉内至少有 m_2+1 个物件……或者第 n 个抽屉内至少有 m_n+1 个物件.

证明 用反证法，如果第 i 个抽屉内至多只有 m_i 个物件 ($i=1, 2, \cdots, n$)，那么 n 个抽屉内的物件的总数至多为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$，这与一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ 个物件矛盾，故结论成立. 证毕.

第二抽屉原理 如果将 m 个物件放入 n 个抽屉内，那么必有一个抽屉内至多有 $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ 个物件.

证明 用反证法，如果每个抽屉内至少有 $\left[\dfrac{m}{n}\right]+1$ 个物件，那么 n 个抽屉内的物件总数至少为 $n\left(\left[\dfrac{m}{n}\right]+1\right)>n\cdot\dfrac{m}{n}=m$，这与 n 个抽屉内共有 m 个物

件矛盾，故结论成立. 证毕.

推广 如果将 $m_1+m_2+\cdots+m_n-1$（$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 均为正整数）个物件放入 n 个抽屉内，那么或者第一个抽屉内至多有 m_1-1 个物件，或者第二个抽屉内至多有 m_2-1 个物件……或者第 n 个抽屉内至多有 m_n-1 个物件.

证明 用反证法，如果第 i 个抽屉内至少有 m_i 个物件（$i=1, 2, \cdots, n$），那么 n 个抽屉内的物件的总数至少为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$，这与 n 个抽屉内共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n-1$ 个物件矛盾，故结论成立. 证毕.

例 1 （Ramsey 定理）设空间 6 个点中任意 4 点不共面，若将其中任意两点间的连线染成红色或蓝色之一，则必存在一个三边颜色相同的三角形.

证明 从一个已知点 A 出发的 5 条线段被染成红蓝两种颜色，由抽屉原理知其中必有 $\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$ 条线段同色，不妨设它们是 AB, AC, AD，并且同为红色. 考察 $\triangle BCD$，若其中有一边为红色，例如 BD 为红色，则 $\triangle ABD$ 的三边为红色，结论成立，否则 $\triangle BCD$ 的三边都为蓝色，结论也成立.

为了今后应用方便，我们介绍一些简单的图论中的术语.

平面内任给 n 个点，每两点连一线段得到的图叫做 n 阶完全图，其中给定的 n 个点叫做顶点，所连线段叫做边，从每一点出发的线段数叫做该点的度. n 阶完全图常用记号 K_n 表示，其中 k 条边组成的闭折线叫做 k 边形，三边形又叫三角形. 用 m 种颜色将一个 n 阶完全图 K_n 染色，每边恰染一色得到的图叫做 m 色 n 阶完全图，其中每边都同色的 k 边形叫做同色 k 边形. 于是，Ramsey 定理可用图论的语言写成下列形式.

Ramsey 定理 2 色完全图 K_6 中必存在同色三角形.

此外，如图 2－1，存在一个 2 色完全图 K_5（其中实线表红色，虚线表蓝色），其中不存在同色三角形.

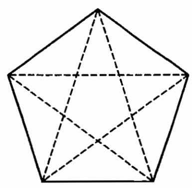


图 2－1

一般地，使 m 色完全图 K_n 中存在同色三角形的最小正整数 n 叫做 Ramsey 数，记为 R_m. 上面结论实际上证明了 $R_2=6$. 寻求 Ramsey 数是一个很困难的问题，目前仅找出了为数不多的几个 Ramsey 数：$R_2=6$, $R_3=17$, $R_4=65$, $\cdots$. 详细情形读者可参看有关组合数学和图论的书籍.

如果用点表示人，并且两人互相认识时，则对应点的连线染红色，否则染蓝色. 那么上述 Ramsey 定理便成为下述 1947 年的匈牙利数学竞赛试题：

试证任何 6 个人中必有 3 个人互相认识或互相不认识.

例 2 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B$ 为空集，若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$

的元素个数最多为（　　）.

(A) 62　　(B) 66　　(C) 68　　(D) 74

（2007年全国高中数学联赛试题）

解　因为对任意 $n\in A$ 有 $2n+2\in B\subseteq\{1, 2, \cdots, 100\}$，所以 $2n+2\leqslant 100$，$n\leqslant 49$，即 A 是 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 的子集. 将 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 分为下列 33 个两两不相交的子集：

$\{1, 4\}$，$\{3, 8\}$，$\{5, 12\}$，$\{7, 16\}$，$\cdots$，$\{23, 48\}$ 共 12 个；

$\{2, 6\}$，$\{10, 22\}$，$\{14, 30\}$，$\{18, 38\}$ 共 4 个；

$\{25\}$，$\{27\}$，$\{29\}$，$\{31\}$，$\cdots$，$\{49\}$ 共 13 个；

$\{26\}$，$\{34\}$，$\{42\}$，$\{46\}$ 共 4 个.

因为 $A\subseteq\{1, 2, 3, \cdots, 49\}$，若 $|A|\geqslant 34$，则由抽屉原理知上述 33 个集合中至少有一个 2 元集合中的两个数都等于 A，即存在 $n\in A$ 且 $2n+2\in A$，这与已知条件矛盾，故 $|A|\leqslant 33$. 又 $|A\cap B|=0$，$|B|=|A|$，所以

$$|A\cup B|=|A|+|B|=2|A|\leqslant 66.$$

另一方面，若取 $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, 31, \cdots, 49, 26, 34, 42, 46\}$，$B=\{2n+2 \mid n\in A\}$，则 A，B 满足题设条件且 $|A\cup B|=66$. 故选(B).

例 3　设 α 是正实数，n 为正整数，求证：存在正整数 p，q 使

$$\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\leqslant\frac{1}{np}.$$

证明　先证下列命题：

任给 $x_0, x_1, \cdots, x_n\in[0, 1)$，一定存在 i，$j(0\leqslant i<j\leqslant n)$，使得 $|x_i-x_j|<\frac{1}{n}$.（只要将 $[0, 1)$ n 等分为 n 个小区间 $\left[0, \frac{1}{n}\right)$，$\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$，$\cdots$，$\left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$，根据抽屉原理知 $n+1$ 个数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 中必有两个数 x_i，$x_j(0\leqslant i<j\leqslant n)$ 落在同一区间内，从而有 $|x_i-x_j|<\frac{1}{n}$.）

下面令 $m_i=[i\alpha]$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$. 于是 $m_i\leqslant i\alpha<m_i+1$，即 $0\leqslant i\alpha-m_i<1$，由上述命题知，存在 $0\leqslant k<l\leqslant n$，使得 $|(l\alpha-m_l)-(k\alpha-m_k)|<\frac{1}{n}$，即

$$|(l-k)\alpha-(m_l-m_k)|<\frac{1}{n}. \qquad ①$$

令 $p=l-k$，$q=m_l-m_k$，则 p，q 为正整数，代入①得

$$|p\alpha-q|<\frac{1}{n}，即\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|<\frac{1}{np}.$$

由例 3 我们可以得到一个关于实数的重要性质：因 $p\geqslant 1$，故 $\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|<\frac{1}{np}\leqslant\frac{1}{n}$，它说明了实数可用有理数逼近到任意精确的程度.

例 4 从数 1，2，3，…，2011 中删去一些数，使得剩下的数中任何一个数都不等于其余任意两个不同的数的积，问最少要删去多少个数才能做到这一点？

解 从 1，2，3，…，2011 中选出下列 3 数组：$\{44，45，44\times 45\}$，$\{43，46，43\times 46\}$，$\{42，47，42\times 47\}$，…，$\{3，86，3\times 86\}$，$\{2，87，2\times 87\}$ 共 43 组，若删去的数少于 43，则必有同一组中的 3 个数没有被删去，它们中较大的一个等于其余两个数之积，故至少要删去 43 个数. 另一方面，若删去 2，3，4，…，43，44 这 43 个数，则剩下的数中任意两数之积要么不小于 $45\times 46=2070$，要么两个数为 1，a（$a=45，46，…，2011$），它们的积 $1\cdot a=a$，不可能等于 1，2，…，2011 中第 3 个不同于 a 和 1 的数，故只要删去 2，3，4，…，43，44 这 43 个数就可满足题目要求.

例 5 设 $n\geqslant 4$，a_1，a_2，…，a_n 是开区间 $(0,2n)$ 内互不相同的整数. 证明：存在 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的一个子集，它的所有元素之和被 $2n$ 整除.（1992 年四川省数学竞赛试题）

证明 (1) 若 $n\notin\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $2n$ 个数 a_1，a_2，…，a_n，$2n-a_1$，$2n-a_2$，…，$2n-a_n$ 均只能取 1，2，…，$2n-1$ 这 $2n-1$ 个值，由抽屉原理知其中必有两个数相等，但 a_1，a_2，…，a_n 互不相等，$2n-a_1$，$2n-a_2$，…，$2n-a_n$ 也互不相等，故只可能 $a_i=2n-a_j$，又因 $a_i\neq n$，$a_j\neq n$，所以 $i\neq j$ 且 $a_i+a_j=2n$，结论成立；

(2) 若 $n\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，不妨设 $a_n=n$，考虑 $n-1$ 个数 a_1，a_2，…，a_{n-1}（$n-1\geqslant 3$），在其中任取 3 个数 $a_i<a_j<a_k$，若 a_j-a_i 及 a_k-a_j 都被 n 整除，则 $a_k-a_i=(a_k-a_j)+(a_j-a_i)\geqslant 2n$，这与 a_i，a_j，$a_k\in(0,2n)$ 矛盾，故 a_i，a_j，a_k 中至少有 2 个数，它们之差不被 n 整除，不妨设 $a_2-a_1(>0)$ 不被 n 整除.

考虑下列 n 个数：

$$a_1,\ a_2,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$$

(i) 若这 n 个数关于模 n 的余数两两不同，则其中必有一个被 n 整除. 令此数为 kn（k 为正整数）. 若 k 为偶数，则结论成立. 若 k 为奇数，则将此数加上

$a_n=n$，知结论也成立；

(ii) 若这 n 个数中有两个关于模 n 同余，则它们之差被 n 整除，但 a_2-a_1 不被 n 整除，故这个差必是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中若干个数(至少一个数)之和，于是同(i)可证结论成立.

注 本题中 $n\geqslant 4$ 是必要的，$n=3$ 时，对集合 $\{1, 3, 4\}$，题目结论不成立.

例6 49 个学生解 3 个问题，每个题的得分是 0 到 7 分的整数. 求证：存在两个学生 A 和 B，对每个问题，A 的得分不少于 B.(第 29 届 IMO 预选题)

证明 若有两个学生的第 1、2 题的得分相同，设其中学生 A 的第 3 题的得分不低于另一名学生 B，于是，对每一个问题，A 的得分不低于 B，结论成立.

下设任意两名学生第 1，2 题的得分至少有一个不相同，将每个学生用平面内的一个整点 (i, j) 表示，其中 i, j 分别表示该学生在第 1，2 题的得分 $(0\leqslant i, j\leqslant 7)$. 于是 49 个学生对应的整点互不相同. 记

$M_1=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, 0\leqslant i\leqslant 7, j=0\text{ 或 }i=7, 1\leqslant j\leqslant 7\}$；

$M_2=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, 0\leqslant i\leqslant 6, j=1\text{ 或 }i=6, 2\leqslant j\leqslant 7\}$；

$M_3=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, 0\leqslant i\leqslant 5, j=2\text{ 或 }i=5, 3\leqslant j\leqslant 7\}$；

$M_4=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, 0\leqslant i\leqslant 4, j=3\text{ 或 }i=4, 4\leqslant j\leqslant 7\}$；

$M_5=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, i=2, 3, 4\leqslant j\leqslant 7\}$；

$M_6=\{(i, j)\mid i, j\text{ 为整数}, i=0, 1, 4\leqslant j\leqslant 7\}$.

因为 49 个学生对应的 49 个不同的整点属于上述 6 个集合，故由抽屉原理知至少有 $\left[\frac{49-1}{6}\right]+1=9$ 个整点属于同一个集合，由于 $|M_5|=|M_6|=8$，故这个集合只能是前 4 个集合中的一个，记这个集合为 M. 这 9 个整点对应的 9 个学生的第 3 题得分只有 $0, 1, 2, \cdots, 7$ 这 8 种可能，再由抽屉原理知其中必有两个学生的第 3 题得分相同，于是，由 M_1, M_2, M_3, M_4 的构造知，这两个学生中必有一个学生(记为 A)，他的第 1、2 题的得分都不低于另一个学生(记为 B)，故对每一个问题 A 的得分不低于 B，结论得证.

注 (1) 本题中若将 49 个学生改为 48 个学生，则不保证原题结论成立：我们用 (a, b, c) 表示一个学生第 1，2，3 题的得分分别为 a, b, c，假设 48 个学生的得分如下：

$(3, 7, 0), (4, 6, 0), (5, 5, 0), (6, 4, 0), (7, 3, 0)$；

$(2, 7, 1), (3, 6, 1), (4, 5, 1), (5, 4, 1), (6, 3, 1), (7, 2, 1)$；

$(1, 7, 2), (2, 6, 2), (3, 5, 2), (4, 4, 2), (5, 3, 2), (6, 2, 2), (7, 1, 2)$；

(0, 7, 3), (1, 6, 3), (2, 5, 3), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 2, 3), (6, 1, 3), (7, 0, 3);

(0, 6, 4), (1, 5, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (4, 2, 4), (5, 1, 4), (6, 0, 4);

(0, 5, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 2, 5), (4, 1, 5), (5, 0, 5);

(0, 4, 6), (1, 3, 6), (2, 2, 6), (3, 1, 6), (4, 0, 6);

(0, 3, 7), (1, 2, 7), (2, 1, 7), (3, 0, 7).

则其中不存在两名学生 A 和 B 使得对每一个问题 A 的得分却不低于 B.

(2) 例 6 及注(1)中结论可等价地写成下列形式：设 D 为 $2^7\cdot 3^7\cdot 5^7$ 的所有不同正因数组成的集合，$S\subseteq D$，且 S 内存在两个数 A 和 B 使得 B 整除 A，那么 S 内所含元素个数的最小值等于 49.

上述问题的一个自然推广是下列问题：

问题 1 设 n 为正整数，D_n 为 $2^n3^n5^n$ 的所有不同正因数组成的集合，$S\subseteq D_n$，且 S 中任意一数不整除 S 中另一数. 求 $|S|$ 的最大值. (2004 年中国国家队培训题第 30 题)

问题 1 的答数为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$. 换言之，如果 S 中存在 2 个数 A 和 B，使得 B 整除 A，那么 $|S|$ 的最小值为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]+1$，我们将这一结论的证明留给读者作为练习题. 关于问题 1 的进一步推广，有兴趣的读者可从下列文章中找到：张垚：《一个组合最值问题的来源和推广》，中等数学 2010 年第 2 期.

例 7 设 n, r 是给定的正整数，试确定最小正整数 m，使将集合 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$ 任意剖分为 r 个两两不相交的集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_r 之后，都存在两个数 a, b 属于同一个集合 A_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 并且满足：$b<a\leqslant\dfrac{n+1}{n}b$. (2000 年湖南省数学夏令营试题，特别 $n=3$, $r=14$ 为 2001 年中国西部数学奥林匹克试题)

解 设所求 m 的最小值为 m_0 (m_0 的值可由以下分析中得到).

若 $m<m_0$，令 $A_i=\{k\mid k\in S,\ k\equiv i(\bmod r)\}$ $(i=1, 2, \cdots, r\}$，则对任意 a, $b\in A_i(i=1, 2, \cdots, r)$, $a>b$，有 $b<a\leqslant m<m_0$, $a-b\geqslant r$，从而 $b\leqslant a-r<m_0-r$，于是

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}>1+\frac{r}{m_0-r},$$

故当 $m_0=nr+r$ 时，有 $\dfrac{a}{b}>1+\dfrac{1}{n}$，即 $a>\dfrac{n+1}{n}b$，不满足题目要求.

另一方面，若 $m \geqslant m_0 = nr + r$，将 S 任意剖分为 r 个两两不相交的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 之后，取 S 中 $r+1$ 个数 $nr, nr+1, nr+2, \cdots, nr+r$，则由抽屉原理知其中必有 2 个数 $a, b\ (a > b)$ 属于同一个子集 $A_i\ (1 \leqslant i \leqslant r)$，且 $a - b \leqslant r$，$b \geqslant nr$，于是

$$1 < \frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} \leqslant 1 + \frac{r}{nr} = 1 + \frac{1}{n},$$

即 $b < a \leqslant \frac{n+1}{n} b$，满足题目要求.

综上所述知所求 m 的最小值为 $m_0 = nr + r$.

例 8　平面内任给 $n\ (\geqslant 4)$ 个点，其中任意 4 点不共面，若这些点之间连有 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ 条线段，则存在两个有公共边的三角形.

证明　$n=4$ 时，一共有 4 个点 A, B, C, D，它们之间连有 $\left[\frac{4^2}{4}\right]+1=5$ 条线段，故其中只有 $\mathrm{C}_4^2 - 5 = 1$ 对点之间没有连线，不妨设 C 与 D 没有连线，这时存在两个有公共边的三角形：$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$，结论成立.

假设 $n = k(\geqslant 4)$ 时，结论成立，即若 k 个点之间连有 $\left[\frac{k^2}{4}\right]+1$ 条线时，则存在两个有公共边的三角形，那么 $n = k+1$ 时，假设 $k+1$ 个点之间连有 $\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]+1$ 条线，于是，从各点出发的线段数之和为 $2\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]+2$，故由第二抽屉原理知，其中必有一点 A，从它出发的线段数至多为 $\left[\frac{1}{k+1}\left(2\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]+2\right)\right]$，去掉这一点 A 以及从 A 出发的线段，则还剩 k 个点，它们之间的连线数至少为

$$N = \left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]+1-\left[\frac{1}{k+1}\left(2\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]+2\right)\right],$$

而当 $k = 2m(m \geqslant 2)$ 为偶数时，$N = m(m+1)+1-\left[m+\frac{m+2}{2m+1}\right] = m(m+1)+1-m = m^2+1 = \left[\frac{k^2}{4}\right]+1$，当 $k = 2m-1\ (m \geqslant 3)$ 为奇数时，$N = m^2+1-\left[m+\frac{1}{m}\right] = m(m-1)+1 = \left[\frac{k^2}{4}\right]+1$，即 k 个点之间至少连有 $\left[\frac{k^2}{4}\right]+1$ 条线段，故由归纳假设知存在两个有公共边的三角形，于是原题结论得证.

注　当 $n \geqslant 4$ 为偶数时，本题为第二届国家集训队选拔考试试题.

二、平均值原理

平均值原理 （1）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数，$A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中必有一个数不小于 A，也有一个数不大于 A；

（2）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中必有一个数不小于 G，也有一个数不大于 G.

证明 （1）$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}\leqslant A\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$；

（2）$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}\leqslant G\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$.

例 9 将 10 个数 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 按任意顺序排列成一个圆圈，证明：其中必有连续相邻的 3 个数之和不小于 18.

证明 设 10 个数在圆周上依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$，则不妨设其中 $a_1=1$，于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}[(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9+a_{10})]\\=&\frac{1}{3}(2+3+\cdots+10)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 9\times 12=18,\end{aligned}$$

故 $a_2+a_3+a_4$，$a_5+a_6+a_7$，$a_8+a_9+a_{10}$ 中必有一个不小于 18.

例 10 平面内有 $n\,(\geqslant 4)$ 个不同的点，每两点间连一线段，已知这些线段中恰有 $n+1$ 条长度等于 d 的线段. 证明：其中必有一点，从它出发的线段中至少有 3 条长度等于 d 的线段.

证明 设 n 个点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，从 P_i 出发的线段中恰有 d_i 条长度为 d 的线段 $(i=1, 2, \cdots, n)$，于是

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n+1),$$
$$\frac{1}{n}(d_1+d_2+\cdots+d_n)=\frac{2(n+1)}{n}>2,$$

故其中必有某个 $d_i\geqslant 3$，即从 P_i 出发至少有 3 条长度等于 d 的线段.

例 11 已知 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ 是一个 n 次复系数多项式，求证：一定存在复数 z_0：$|z_0|\leqslant 1$，使得 $|f(z_0)|\geqslant|c_0|+|c_n|$.（第 9 届 CMO 试题）

证明一 设 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，$\omega_k=\omega^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1, n)$，$\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$（$\theta$ 待定），于是 $\omega^0=\omega^n=1$，$\omega^j\neq 1$ $(j=1, 2, \cdots, n-1)$，从而有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^j = n\ (j=0\text{ 或 }n),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^j = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk} = \frac{1-(\omega^j)^n}{1-\omega^j} = \frac{1-1}{1-\omega^j} = 0\ (j=1,2,\cdots,n-1),$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha\omega_k) = c_0\alpha^n\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^n + c_1\alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k + c_n\cdot n$$
$$= n(c_0\alpha^n + c_n).$$

取 α 的幅角 θ 使 $c_0\alpha^n$ 与 c_n 的幅角主值相等(事实上,设 c_0，c_n 的幅角主值分别为 θ_0，θ_n,取 $\theta=\frac{1}{n}(\theta_n-\theta_0)$ 即可),那么

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(\alpha\omega_k)| \geqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha\omega_k)\right| = n|c_0\alpha^n + c_n|$$
$$= n(|c_0|\cdot|\alpha|^n + |c_n|) = n(|c_n|+|c_0|).$$

由平均值原理知,存在 k_0,使

$$|f(\alpha\omega_{k_0})| \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(\alpha\omega_k)| = |c_n|+|c_0|,$$

取 $z_0=\alpha\omega_{k_0}$，则 $|z_0|=1$，并且 $|f(z_0)|\geqslant|c_n|+|c_0|$，证毕.

证明二　取复数 u 使 u 与 c_n 有相同的幅角并且 $|u|=|c_0|+|c_n|$，构造多项式

$$g(z) = f(z) - u = c_0z^n + c_1z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n - u.$$

设 $g(z)$的 n 个复根为 z_1，z_2，$\cdots$，z_n,则

$$|z_1z_2\cdots z_n| = \left|\frac{c_n-u}{c_0}\right| = \frac{||c_n|-|u||}{|c_0|} = \frac{|c_0|}{|c_0|} = 1.$$

$$\sqrt[n]{|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|} = 1.$$

故由平均值原理知,存在 k_0 $(1\leqslant k_0\leqslant n)$ 使

$$|z_{k_0}|\leqslant 1.$$

记 $z_0=z_{k_0}$，则 $|z_0|\leqslant 1$，且

$$g(z_0) = f(z_0) - u = 0.$$

所以，$|f(z_0)|=|u|=|c_0|+|c_n|$，证毕.

习 题 2

1 有 17 位科学家，其中每位科学家都同其他所有人通信，他们在通信时只讨论了三个题目，且每两位科学家之间只讨论一个题目，证明至少有三位科学家，他们互相之间讨论的是同一个题目.（第 6 届 IMO 试题）

2 是否存在(1)4 个;(2)5 个不同的正整数，它们中任意 3 个数之和是素数?(1995 年城市数学联赛试题)

3 在面积为 1 的$\triangle ABC$内任意放入 7 个点，其中任意 3 点不共线. 证明：这 7 个点中必有 3 个点，以它们为顶点的三角形的面积不大于$\frac{1}{4}$.

4 设$S=\{1, 2, 3, \cdots, 2011\}$，问从$S$中最多能选出多少个数，使得其中任何两数之和都不能被它们的差整除?

5 设$S=\{1, 2, 3, \cdots, 2000\}$，$M$是$S$的一个子集且$M$中任意两数之差都不等于 5 或 8，问$M$中最多有多少个元素?

6 有$n(n>12)$个人参加某次数学邀请赛，试卷由 15 个填空题组成，每答对 1 题得 1 分，不答或答错得 0 分. 分析每一种可能的得分情况，发现：只要其中任意 12 个人得分之和不少于 36 分，则这n个人中至少有 3 个人答对了至少 3 个同样的题，求n的最小可能值.（2009 年第 9 届中国西部数学奥林匹克试题）

7 10 人到书店去买书，已知：

(1) 每人都买了 3 种书;

(2) 任何两人买的书中，都至少有一种相同. 问购买人数最多的一种书最少有几人购买? 说明理由.（第 8 届 CMO 试题）

8 平面上每个点都以红、蓝色之一着色. 证明：(1)对任意实数a，存在边长为a，$\sqrt{3}a$，$2a$且三个顶点同色的直角三角形;(2)存在两个相似三角形，它们的相似比为1995，并且每个三角形的三个顶点同色.（第(2)小题为 1995 年全国高中数学联赛试题）

9 若凸多面体有 6 个顶点和 12 条棱，证明：它的每一个面都是三角形.

10 平面有限点集叫做稳定的，如果它内部任意两点间的距离是确定的. 给定含$n\geqslant 4$个点的平面点集M_n，其中任意 3 点不共线，若M_n中有$\frac{1}{2}n(n-3)+4$对点之间的距离是确定的. 证明：M_n是稳定的.（1999 年上海市高中数学奥林匹克试题）

3 母函数

一、母函数的概念

设 $f(x)=(1+x)^n$，由二项式定理，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

这时，$f(x)$对应了一个数列$\{C_n^k,\ 0\leqslant k\leqslant n\}$，即生成数列$\{C_n^k\}$，因此，我们把函数 $f(x)=(1+x)^n$ 称为数列$\{C_n^k\}$的生成函数或母函数.

一般地说，对于有穷数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$

多项式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n$ 称为数列$\{a_k\}$的母函数.

更一般地，对于无穷数列

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

我们称下列形式幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

为无穷数列$\{a_n\}$的母函数.

关于形式幂级数我们作如下的规定：设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 是两个形式幂级数，我们规定

(1) $f(x)=g(x)$，当且仅当 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$；

(2) $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$；

(3) $\alpha f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n)x^n$（$\alpha$ 为常数）；

(4) $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，$n=0,1,2,\cdots$.

二、几个重要公式

在应用母函数解题时，除了二项式定理以外，还要用到下列几个公式：

公式Ⅰ（无穷递缩等比数列求和公式）

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\ (|x|<1).$$

公式Ⅱ　$(1-x)^{-k}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k-1}x^n=1+C_k^{k-1}x+C_{k+1}^{k-1}x^2+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}x^n+\cdots$（$k$ 为正整数，$|x|<1$）.

公式Ⅱ可由公式Ⅰ两边求 $k-1$ 阶导数后除以 $(k-1)!$ 而得到.

例1　已知 $a_0=-1$，$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+3^n(n\geqslant 2)$，求 a_n.

解　设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，

则 $-2xf(x)=-2a_0x-2a_1x^2-\cdots-2a_{n-1}x^n+\cdots$，

$-3x^2f(x)=-3a_0x^2-\cdots-3a_{n-2}x^n+\cdots$，

将以上三式相加，并利用 $a_0=-1$，$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+3^n$，得

$$\begin{aligned}(1-2x-3x^2)f(x)&=-1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots\\&=-1+\frac{3x}{1-3x}=\frac{6x-1}{1-3x}.\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{6x-1}{(1+x)(1-3x)^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1-3x)^2}+\frac{C}{1-3x}.\qquad ①$$

①式两边乘 $1+x$ 后，令 $x=-1$ 得

$$A=\left.\frac{6x-1}{(1-3x)^2}\right|_{x=-1}=-\frac{7}{16},$$

①式两边乘 $(1-3x)^2$ 后，令 $x=\frac{1}{3}$ 得

$$B=\left.\frac{6x-1}{1+x}\right|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{3}{4},$$

①式两边乘 x 后，令 $x\to\infty$ 得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to\infty}\frac{x(6x-1)}{(1+x)(1-3x)^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{Ax}{1+x}+\frac{Bx}{(1-3x)^2}+\frac{Cx}{1-3x}\right)\\&=A-\frac{1}{3}C.\end{aligned}$$

所以 $C=3A=-\frac{21}{16}$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=-\frac{7}{16(1+x)}+\frac{3}{4(1-3x)^2}-\frac{21}{16(1-3x)}\\&=-\frac{7}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^{1}3^nx^n-\frac{21}{16}\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(4n-3)\cdot 3^{n+1}-7(-1)^n}{16}\right]x^n.\end{aligned}$$

故得

$$a_n=\frac{1}{16}[(4n-3)\cdot 3^{n+1}-7(-1)^n].$$

例 2 证明：对一切正整数 n，有

$$\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i}C_{2i}^{i}2^{2n-2i+1}=C_{4n+2}^{2n+1}.$$

证明 一方面 $(1+x)^{4n+2}=\sum\limits_{i=0}^{4n+2}C_{4n+2}^{i}x^i$ 中 x^{2n+1} 的系数为 C_{4n+2}^{2n+1}，另一方面

$$\begin{aligned}(1+x)^{4n+2}&=[(1+x^2)+2x]^{2n+1}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(1+x^2)^k(2x)^{2n+1-k}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}2^{2n+1-k}\cdot x^{2n+1-k}\left(\sum_{j=0}^{k}C_k^jx^{2j}\right)\end{aligned}$$

中 x^{2n+1} 的系数为 $\sum\limits_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i}2^{2n+1-2i}\cdot C_{2i}^{i}$，所以

$$\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i}C_{2i}^{i}2^{2n-2i+1}=C_{4n+2}^{2n+1}.$$

例 3 证明：$\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^kC_{n+1}^{k}C_{2n-2k-1}^{n}=\frac{1}{2}n(n+1)\ (n\geqslant 1)$.

证明 一方面 $(1+x)^{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}x^{k}$ 中 x^{n-1} 的系数为 $C_{n+1}^{n-1}=C_{n+1}^{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$，另一方面，$(1+x)^{n+1}=\frac{(1-x^2)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}=\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}x^{2k}\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n+j}^{n}x^{j}\right)$ 中 x^{n-1} 的系数为 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}C_{n+(n-1-2k)}^{n}=\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}C_{2n-2k-1}^{n}$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}C_{2n-2k-1}^{n}=\frac{1}{2}n(n+1)$.

注 当恒等式中流动标号只出现在组合数 C_{m}^{n} 的下位 m 时，可考虑用公式 $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n+j}^{n}x^{j}$.

例 4 一副三色牌，共有纸牌 32 张. 其中红、黄、蓝每种颜色的牌各 10 张，编号分别是 1，2，…，10；另有大、小王牌各一张，编号均为 0. 从这副牌中任取若干张牌. 然后按如下规则计算分值：每张编号为 k 的牌计为 2^{k} 分. 若它们的分值之和为 n（$n\leqslant 2020$ 为给定的正整数），就称这些牌为一个“好”牌组.

试求“好”牌组的个数.

（注：当 $n=2004$ 时，例 4 为 2004 年第 3 届中国女子数学奥林匹克试题）

解 对 $n\in\{1,2,\cdots,2020\}$，用 a_n 表示分值之和为 n 的牌组数目，则由题意知 a_n 等于函数

$$f(x)=(1+x^{2^0})^2(1+x^{2^1})^3(1+x^{2^2})^3\cdots(1+x^{2^{10}})^3$$

的展开式中 x^n 的系数（约定 $|x|<1$），由于

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1+x}\{(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^{10}})\}^3\\&=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}(1-x^{2^{11}})^3,\end{aligned}$$

而 $n\leqslant 2020<2^{11}$，所以 a_n 等于

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3},$$

展开式中 x^n 的系数，由于

$$g(x)=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}C_{j+1}^{1}x^{j}\right),$$

故当 $n=2k$ 时，x^{2k} 的系数为

$$\begin{aligned}a_{2k} &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2k-2i+1}^{1} = \sum_{i=0}^{k}[2(k-i)+1] \\ &= (2k+1)+(2k-1)+(2k-3)+\cdots+5+3+1 \\ &= (k+1)^2 = \frac{(2k+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right];\end{aligned}$$

当 $n=2k-1$ 时，x^{2k-1} 的系数为

$$\begin{aligned}a_{2k-1} &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{(2k-1)-2i+1}^{1} = \sum_{i=0}^{k} 2(k-i) \\ &= 2k+(2k-2)+(2k-4)+\cdots+6+4+2 = k(k+1) \\ &= \frac{(2k+1)^2-1}{4} = \left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right] = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right].\end{aligned}$$

从而，所求的"好"牌组的个数为

$$a_n = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right].\ (n \in \mathbf{N}_+ \text{ 且 } n \leqslant 2020)$$

（特别，当 $n=2004$ 时，"好"牌组的个数为 $a_{2004}=1003^2$.）

注　例 4 中也可用下列方法求 $g(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1-x)^3}$ 的展开式中 x^n 的系数：令

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1-x)^3}+\frac{C}{(1-x)^2}+\frac{D}{1-x},$$

则 $A=\left.\dfrac{1}{(1-x)^3}\right|_{x=-1}=\dfrac{1}{8}$，$B=\left.\dfrac{1}{1+x}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{C}{(1-x)^2}+\frac{D}{1-x} &= \frac{1}{(1+x)(1-x)^3}-\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1}{2(1-x)^3} \\ &= \frac{8-(1-x)^3-4(1+x)}{8(1+x)(1-x)^3} = \frac{x^3-3x^2-x+3}{8(1+x)(1-x)^3} \\ &= \frac{(x-3)(x+1)(x-1)}{8(1+x)(1-x)^3} = \frac{3-x}{8(1-x)^2} = \frac{2+(1-x)}{8(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{8(1-x)},\end{aligned}$$

即 $C=\dfrac{1}{4}$，$D=\dfrac{1}{8}$，所以

$$g(x)=\frac{1}{8(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{8(1-x)}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+2}^2 x^k+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+1}^1 x^k+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\{(-1)^k+4C_{k+2}^2+2C_{k+1}^1+1\}x^k,$$

其中 x^n 的系数为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{8}\{(-1)^n+4C_{n+2}^2+2C_{n+1}^1+1\}\\&=\frac{1}{8}\{(-1)^n+2(n+2)(n+1)+2(n+1)+1\}\\&=\frac{2n^2+8n+7+(-1)^n}{8}\\&=\frac{(n+2)^2}{4}-\frac{1-(-1)^n}{8}=\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right].\end{aligned}$$

习　题　3

1 试用母函数方法求下列数列的通项 a_n.

(1) $a_0=2$, $a_1=5$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n=0, 1, 2, \cdots)$;

(2) $a_1=3$, $a_2=15$, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n-12\ (n=1, 2, \cdots)$.

2 证明下列恒等式：

(1) $\sum_{k=1}^{n}C_n^k C_n^{n+1-k}=C_{2n}^{n+1}$;

(2) $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n+1}^k C_{2n-2k}^n=n+1$;

(3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k+1}^{2k+1}=n+1$;

(4) $\sum_{k=p}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^p=(-1)^n\delta_{pn}$，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$

3 用母函数方法求下列问题的解.

(1) 求各位数字之和等于 17 的三位正整数的个数；

(2) 将一张 n 元的纸币全部兑换为 1 元和 2 元的纸币，问有多少种不同的兑换方法？

4 递推数列

一、递推数列

对于一个数列$\{x_n\}$，若存在正整数k和一个把x_{n+k}和前面k项x_{n+k-1}，x_{n+k-2}，…，x_n联系起来的方程

$$\Phi(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \cdots, x_n)=0, k=0, 1, 2, \cdots, \quad ①$$

则称数列$\{x_n\}$为k阶递推数列，且称方程①是数列$\{x_n\}$的递推方程. 从①解出

$$x_{n+k}=\varphi(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \cdots, x_n), \quad ②$$

又称为数列$\{x_n\}$的递推公式，数列$\{x_n\}$开头k项的值.

$$x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_k=a_k(a_1, a_2, \cdots, a_k \text{为已知常数}), \quad ③$$

称为递推方程①或递推公式②的初始条件或初始值，显然，一个k阶递推数列$\{x_n\}$可由递推公式②和初始值③唯一确定.

由递推公式

$$\begin{gathered} x_{n+k}=p_1x_{n+k-1}+p_2x_{n+k-2}+\cdots+p_kx_n+q, \\ (n=1, 2, 3, \cdots; p_1, p_2, \cdots, p_k \text{为常数且} p_k\neq 0) \end{gathered} \quad ④$$

及初始值③确定的数列$\{x_n\}$称为k阶常系数线性递推数列，特别$q\equiv 0$时，称为k阶常系数线性齐次递推数列.

二、求递推数列通项的方法

(1) 换元方法

这种方法的基本思想是：选择适当的变换函数$\varphi(x)$，令$x_n=\varphi(y_n)$或$\varphi(x_n)=y_n$，代入到$\{x_n\}$的递推关系中，得到$\{y_n\}$的一个新的递推关系. 如果从这个新的递推关系中能求出y_n的通项，那么代入到$x_n=\varphi(y_n)$或$\varphi(x_n)=$

y_n 中，便可求出 x_n 的通项. 因此，换元的关键是选择变换函数 $\varphi(x)$.

例 1　已知 $a_1=1$，$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+n^2-15\ (n\geqslant 2)$，求 a_n.

解　引入待定常数 a，b，c，使

$$a_n+(an^2+bn+c)=\frac{2}{3}\{a_{n-1}+[a(n-1)^2+b(n-1)+c]\},$$

整理后，有

$$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\left(-\frac{1}{3}a\right)n^2+\left(-\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b\right)n+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c,$$

与 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+n^2-15$，比较得

$$\begin{cases}-\frac{1}{3}a=1,\\ -\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b=0,\\ \frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3,\\ b=12,\\ c=15.\end{cases}$$

故

$$a_n-3n^2+12n+15=\frac{2}{3}[a_{n-1}-3(n-1)^2+12(n-1)+15].$$

令 $b_n=a_n-3n^2+12n+15$，则 $b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}$，$b_1=a_1-3+12+15=25$，由等比数列通项公式得 $b_n=25\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，所以

$$a_n=25\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3n^2-12n-15.$$

一般说来，对于递推公式 $a_n=pa_{n-1}+f(n)\ (n\geqslant 2$，$p$ 为常数，$f(n)$ 是 k 次多项式)，当 $p\neq 1$ 时，可用待定系数法确定 k 次多项式 $g(n)$ 使 $a_n+g(n)=p(a_{n-1}+g(n-1))$，再通过代换 $b_n=a_n+g(n)$ 转化成等比数列 $b_n=pb_{n-1}$，从而求出 $b_n=b_1p^{n-1}=(a_1+g(1))p^{n-1}$，于是 $a_n=(a_1+g(1))p^{n-1}-g(n)$. 当 $p=1$ 时，则由 $a_n=a_{n-1}+f(n)$，逐次递推可得 $a_n=a_1+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$ 或用公式得 $a_n=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}f(k)$.

例 2　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，求

$a_1a_2\cdots a_n$.

解 由 $a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$ 得 $a_{n+1}=\dfrac{4}{4-a_n}$，于是

$$a_{n+1}-2=\frac{4}{4-a_n}-2=\frac{2(a_n-2)}{4-a_n}.$$

所以

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{4-a_n}{2(a_n-2)}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2},$$

又 $\dfrac{1}{a_1-2}=-1$，故由等差数列通项公式得

$$\frac{1}{a_n-2}=-1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n+1}{2}.$$

由此得出 $a_n=2\cdot\dfrac{n}{n+1}$，所以

$$a_1a_2\cdots a_n=\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\left(2\cdot\frac{2}{3}\right)\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots\left(2\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2^n}{n+1}.$$

注 本题中 2 是方程 $x^2=4(x-1)$ 的二重根.一般说来，对于分式线性递推数列 $a_{n+1}=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$，其中 $c\neq0$，$ad-bc\neq0$，$a_1\neq\dfrac{aa_1+b}{ca_1+d}$，我们称方程 $x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的根为该数列的不动点.

若该数列只有唯一不动点 p(即方程 $x(cx+d)=ax+b$ 有二重根 p)，则

$$\frac{1}{a_{n+1}-p}=\frac{1}{a_n-p}+\frac{2c}{a+d}.$$

若该数列有两个不同的不动点 p 和 q，则

$$\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=\frac{a-pc}{a-qc}\cdot\frac{a_n-p}{a_n-q}.$$

例 3 设 $\dfrac{1}{2}<a_1<\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1})$，$n=1,2,3,\cdots$，证明 $n+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<n+2$.

解 由 $a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1})$ 得 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$. 解方程 $x=\dfrac{2x}{x+1}$，得到两个不动点 $x_1=0$，$x_2=1$，再由 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$ 和 $a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{1+a_n}$，可得

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n-1}{a_n}\right).$$

于是，由等比数列的通项公式得

$$\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{a_1-1}{a_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

由此得出

$$\frac{1}{a_n}=1+\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

注意到 $\frac{1}{2}<a_1<\frac{2}{3}$ 时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{a_1}-1<1$，故

$$1+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{2^{n-1}},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}&<\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\&=n+2-\frac{1}{2^{n-1}}<n+2,\\\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}&>\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\\&=n+1-\frac{1}{2^n}>n+1-\frac{1}{2}=n+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

即
$$n+\frac{1}{2}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<n+2.$$

前面我们通过实例介绍了如何通过待定系数法、不动点去寻找变换函数. 但对一般的递推数列，如何确定变换函数 $\varphi(x)$，并无统一规律可循，下面我们再举例介绍一些其他的换元方法.

例 4 已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$ $(n\geqslant 1)$，求 a_n.

解 为了使递推关系不含根号，我们自然令 $b_n=\sqrt{1+24a_n}$，即 $a_n=\frac{1}{24}(b_n^2-1)$，代入原递推关系得

$$\frac{1}{24}(b_{n+1}^2-1)=\frac{1}{16}\left[1+4\times\frac{1}{24}(b_n^2-1)+b_n\right],$$

即 $(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$. 因为 $b_n>0$，故有 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$，即

$$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3),$$

又 $b_1=\sqrt{1+24a_1}=5$，由等比数列通项公式得

$$b_n-3=(b_1-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{2-n}.$$

所以

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{24}(b_n^2-1)=\frac{1}{24}[(2^{2-n}+3)^2-1]\\&=\frac{1}{3}(2^{1-2n}+3\cdot 2^{-n}+1).\end{aligned}$$

注　本例中由 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$ 变为 $b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$ 时，其中 3 是方程 $x=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的根. 也称为函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的不动点. 一般说来，对于一阶常系数线性递推数列 $b_{n+1}=pb_n+q$ (p, q 为常数，$p\neq 1$)，通过解方程 $x=px+q$，解出 $x=-\frac{q}{p-1}$，便可化为 $b_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\left(b_n+\frac{q}{p-1}\right)$.

例 5　设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 定义如下：

$$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}},$$

$$b_0=1,\ b_{n+1}=\frac{1}{b_n}(\sqrt{b_n^2+1}-1),\ n=0,1,2,3,\cdots$$

证明：对每一个 $n=0,1,2,3,\cdots$ 有下列不等式成立：

$$2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n.$$

证明　用归纳法易证 $0<a_n<1$，$b_n>0$. 令 $a_n=\sin\lambda_n\left(0<\lambda_n<\frac{\pi}{2},\ n\geqslant 0\right)$，则

$$\sin\lambda_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\lambda_n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\lambda_n}=\sin\frac{\lambda_n}{2}.$$

从而有 $\lambda_{n+1}=\frac{1}{2}\lambda_n(n\geqslant 0)$，又 $\lambda_0=\arcsin a_0=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，所以

$$\lambda_n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\pi}{2^{n+2}},\ a_n=\sin\lambda_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\ (n\geqslant 0).$$

类似地，令 $b_n=\tan\delta_n$，可求得 $b_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ $(n\geqslant 0)$. 由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$，所以 $a_n<\frac{\pi}{2^{n+2}}<b_n$，即 $2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n$.

(2) 特征根法

考虑二阶常系数线性齐次递推数列 $\{x_n\}$：

$$x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p,\ q\text{ 为常数},q\neq 0). \qquad ⑤$$

若有等比数列 $\{r^n\}$ 满足⑤，则易知 r 必须满足下列二次方程

$$r^2=pr+q, \qquad ⑥$$

我们称方程⑥为⑤的特征方程，并称⑥的根为特征根，反之若 r_0 是⑥的一个根，则易证等比数列 $\{r_0^n\}$ 满足递推公式⑤.

若⑥有两个不相等的根 r_1 和 r_2，则数列 $\{r_1^n\}$ 和 $\{r_2^n\}$ 都是⑤的解，并且对任意常数 c_1，c_2，数列 $\{c_1r_1^n+c_2r_2^n\}$ 也是⑤的解. 如果给出初始值 $x_0=a$，$x_1=b$，则由

$$\begin{cases}c_1+c_2=a,\\ c_1r_1+c_2r_2=b,\end{cases}$$

可唯一确定 c_1 和 c_2，从而得出⑤的满足初始值 $x_0=a$，$x_1=b$ 的唯一解为

$$x_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n.$$

若⑥有二重根 $r=\frac{p}{2}$，则由

$$\begin{cases}2r-p=0,\\ r^2-pr-q=0,\\ r^2=-q.\end{cases}$$

可得 $pr+2q=0$，从而有

$$\begin{aligned}&nr^n-p(n-1)r^{n-1}-q(n-2)r^{n-2}\\ =&nr^{n-2}(r^2-pr-q)+r^{n-2}(pr+2q)\\ =&0.\end{aligned}$$

即数列 $\{nr^{n-1}\}$ 是⑤的解，并且对任意常数 c_1 和 c_2. $\{c_1r^n+c_2nr^n\}$ 也是⑤的解. 再由初始值 $x_0=a$，$x_1=b$，可唯一确定 c_1，c_2，从而得到⑤的满足初始值

$x_0=a$，$x_1=b$ 的唯一解为 $x_n=(c_1+c_2n)r^n$.

例 6 （斐波那契数列）假设开始时有雌雄各一的一对小兔，一个月后长成大兔，再一个月后生了一对雌雄各一的小兔，而这对小兔经过一个月后就长成大兔，此后，每对大兔每月生一对雌雄各一的小兔，每对小兔经过一个月又长成大兔，问经过 n 个月一共有多少对兔？

解 设经过 n 个月有小兔 a_n 对，大兔 b_n 对，大、小兔共 F_n 对. 于是，b_n 由两部分组成，第一部分是上月已有的大兔数，即 b_{n-1}，另一部分是上月的小兔长成的大兔数，即 a_{n-1}，故得 $b_n=b_{n-1}+a_{n-1}=F_{n-1}$， ①

而 a_n 是上一月大兔生出来的，故应等于 b_{n-1}. 于是有 $a_n=b_{n-1}$， ②

由①及②可得

$$F_n=a_n+b_n=b_{n-1}+b_n=F_{n-2}+F_{n-1}, \qquad ③$$

并且显然 $F_0=1$（开始时只有一对小兔），$F_1=1$（经过一个月后只有一对大兔）. ③的特征方程是 $r^2=r+1$. 特征根为 $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，故

$$F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

由 $F_0=1$，$F_1=1$ 得 $\begin{cases}c_1+c_2=1,\\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1.\end{cases}$

解得 $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$，$c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$，故得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ n=0,1,2,\cdots$$

满足 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n=2,3,\cdots)$，$F_0=F_1=1$ 的数列，叫做斐波那契(Fibonacci)数列. 它的前面 10 项是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots$$

许多组合计数问题和数学竞赛试题都与斐波那契数列有关.

例 7 用 1，2，3 组成 n 位数，如果要求没有 2 个 1 相邻，问这样的 n 位数共有多少个？

解 用 a_n 表示所求 n 位数的个数，显然，$a_1=3$，$a_2=8$.（因满足要求的 2 位数只有 12，13，21，22，23，31，32，33 共 8 个）. 当 $n\geqslant 3$ 时，如果第一个数字为 1，那么第 2 个数字只能是 2 或 3，余下的数字有 a_{n-2} 种不同的取法；如

果第 1 位数字是 2 或 3，那么余下的数字有 a_{n-1} 种不同的取法，由加法法则和乘法法则得 $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}(n\geqslant 3)$. 特征方程为 $r^2-2r-2=0$，特征根为 $r_1=1+\sqrt{3}$，$r_2=1-\sqrt{3}$，故得

$$a_n=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n,$$

补充定义 a_0 满足 $a_2=2a_1+2a_0$，即 $a_0=\frac{1}{2}(a_2-2a_1)=1$. 由 $a_0=1$，$a_1=3$，得

$$\begin{cases}c_1+c_2=1,\\ c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3.\end{cases}$$

解得 $c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}}$，$c_2=-\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{(1-\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}}$，所以

$$a_n=\frac{1}{4\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^{n+2}-(1-\sqrt{3})^{n+2}].$$

(3) 数学归纳法

这个方法的基本思想是：从初始值出发，利用所给的递推关系逐次算出数列前面若干项的值，从中找出规律，归纳出通项的表达式，再用数学归纳法给予证明.

例 8 记 a_n 为下述正整数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1，3 和 4. 求证：a_{2n} 是完全平方数，$n=1, 2, 3, \cdots$.（1991 年全国高中数学联赛试题）

证明 因为各位数字之和为 n 的 a_n 个正整数中，首位数字为 1，3 和 4 的分别有 a_{n-1}，a_{n-3} 和 a_{n-4} 个，所以

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}(n\geqslant 5), \quad ①$$

且用枚举法易知 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=4$，利用①逐次计算 a_n 可得下表.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
a_n	1	1	2	4	6	9	15	25	40	64	104	169	…
特征		1^2	1×2	2^2	2×3	3^2	3×5	5^2	5×8	8^2	8×13	13^2	…

由上表我们猜想：

设 $\{f_n\}$ 为斐波那契数列：$f_1=1$，$f_2=2$，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}(n\geqslant 3)$，那么

$$\begin{cases} a_{2n} = f_n^2, & ② \\ a_{2n+1} = f_n f_{n+1}, & ③ \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

我们用数学归纳法证明上述猜想成立.

$n = 1, 2$ 时，直接计算知②及③成立.

设 $n = k-1$ 及 $n = k$ 时②，③成立，那么由①及归纳假设和数列 $\{f_n\}$ 的定义得

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= a_{2k+1} + a_{2k-1} + a_{2k-2} \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k-1} f_k + f_{k-1}^2 \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k-1}(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k-1} f_{k+1} \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) = f_{k+1}^2, \\ a_{2k+3} &= a_{2k+2} + a_{2k} + a_{2k-1} \\ &= f_{k+1}^2 + f_k^2 + f_{k-1} f_k \\ &= f_{k+1}^2 + f_k(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_{k+1}^2 + f_k f_{k+1} \\ &= f_{k+1}(f_{k+1} + f_k) \\ &= f_{k+1} f_{k+2}, \end{aligned}$$

即 $n = k+1$ 时②，③成立. 这就证明了我们的猜想成立. 由②即知 $a_{2n} = f_n^2$ 为完全平方数.

注　本例也可猜出 $a_{2n} = (\sqrt{a_{2n-2}} + \sqrt{a_{2n-4}})^2$ 后，再由①推出

$$a_{2n+4} = 2a_{2n+2} + 2a_{2n} - a_{2n-2}. \qquad ④$$

然后由④用数学归纳法证明这一猜想成立. 具体证明留给读者自己完成.

例 9　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_0 = 1$，$b_0 = 0$，且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, & ① \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4, & ② \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

证明：$a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是完全平方数.（2000 年全国高中数学联赛试题）

证明　由①得 $b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 7a_n + 3)$，代入②后整理得

$$a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 6, \qquad ③$$

于是 $a_0 = 1 = 1^2$，$a_1 = 7a_0 + 6b_0 - 3 = 4 = 2^2$，

$$a_2 = 14a_1 - a_0 - 6 = 49 = 7^2,\ a_3 = 14a_2 - a_1 - 6 = 676 = 26^2,$$

$$a_4 = 14a_3 - a_2 - 6 = 9409 = 97^2, \cdots$$

由此我们猜想 $a_n = d_n^2$，其中 $d_0 = 1$，$d_1 = 2$，$d_{n+2} = 4d_{n+1} - d_n (n \geqslant 0)$.

下面我们用数学归纳法证明这一猜想成立.

$n = 0$，1 时，$a_0 = 1 = d_0^2$，$a_1 = 4 = d_1^2$.

设 $n = k-1$ 时 $a_{k-1} = d_{k-1}^2$，$n = k$ 时，$a_k = d_k^2$，那么

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 14a_k - a_{k-1} - 6 = 14d_k^2 - d_{k-1}^2 - 6 \\ &= (4d_k - d_{k-1})^2 - 2(d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3) \\ &= d_{k+1}^2 - 2(d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3 &= d_k(4d_{k-1} - d_{k-2}) + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3 \\ &= d_{k-1}^2 - d_{k-2}d_k + 3 \\ &= d_{k-1}^2 - d_{k-2}(4d_{k-1} - d_{k-2}) + 3 \\ &= d_{k-1}^2 + d_{k-2}^2 - 4d_{k-1}d_{k-2} + 3 \\ &\cdots\cdots \\ &= d_1^2 + d_0^2 - 4d_1 d_0 + 3 \\ &= 2^2 + 1^2 - 4 \times 2 \times 1 + 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 $a_{k+1} = d_{k+1}^2$，这就证明了对一切非负整数 n，$a_n = d_n^2$ 是完全平方数.

注 本题也可用特征根法求出 a_n 的通项来完成证明.

令 $x_n = a_n - \frac{1}{2}$（$\frac{1}{2}$ 为方程 $x=14x-x-6$ 的根），则 $x_0 = \frac{1}{2}$，$x_1 = \frac{7}{2}$，并且由 ③ 可得 $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n (n \geqslant 0)$. 用特征根法可求得

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{4}(7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{4}(7 - 4\sqrt{3})^n \\ &= \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})^{2n}, \end{aligned}$$

$$a_n = x_n + \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n\right]^2.$$

令 $(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$（$A_n$，$B_n$ 为正整数），则 $(2-\sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$，于是 $a_n = A_n^2 (n = 0, 1, \cdots)$ 为完全平方数.

下面的例子表明，通过建立递推关系可以使有些数学问题很容易得到解决.

例 10 试确定 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2004}$ 小数点前一位数字和小数点后一位数字.

解　记 $N=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2004}=(5+2\sqrt{6})^{1002}$，令 $x_n=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n$，则数列 $\{x_n\}$ 对应的特征方程是

$$[r-(5+2\sqrt{6})][r-(5-2\sqrt{6})]=0,$$

即 $r^2-10r+1=0$，所以数列 $\{x_n\}$ 满足的递推关系是

$$x_n=10x_{n-1}-x_{n-2}(n\geqslant 3), \qquad ①$$

其中 $x_1=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=10$，$x_2=(5+2\sqrt{6})^2+(5-2\sqrt{6})^2=98$ 皆为整数. 若 x_{n-2}，x_{n-1} 为整数，则由①知 x_n 也为整数，故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，x_n 为整数，且由①得

$$x_n=10x_{n-1}-(10x_{n-3}-x_{n-4})=10(x_{n-1}-x_{n-3})+x_{n-4}.$$

故 $x_n\equiv x_{n-4}\pmod{10}$. 特别 $x_{1002}\equiv x_2\pmod{10}$，即知 x_{1002} 的个位数字是 8. 又因为 $0<5-2\sqrt{6}<0.2$，于是

$$0<(5-2\sqrt{6})^{1002}<0.2^{1002}=0.008^{334}<0.01^{334}=\underbrace{0.00\cdots0}_{668\text{个}0}1,$$

即
$$x_{1002}=N+(5-2\sqrt{6})^{1002}=N+0.\underbrace{00\cdots0}_{668\text{个}0}***\cdots$$

因 x_{1002} 的个位数字是 8，所以 N 的小数点前一位数字是 7，小数点后一位数字是 9.

习　题　4

1　设正数列 a_0，a_1，…，a_n，…满足

(1) $\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$；$(n\geqslant 2)$

(2) $a_0=a_1=1$.

求 $\{a_n\}$ 的通项.（1993 年全国高中数学联赛试题）

2　试确定实数 a_0，使得由递推关系 $a_{n+1}=-3a_n+2^n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 决定的数列 $\{a_n\}$ 严格递增，即对 $n\geqslant 0$，$a_{n+1}>a_n$.

3　设数列 a_1，a_2，…，a_n，…满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n(n\geqslant 1)$，确定 $a_n(n\geqslant 1)$ 的值.（第 7 届加拿大数学奥林匹克试题）

4　数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_0=0$，$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 2)$，证明 $2^k\mid a_n$

的充要条件是 $2^k|n$. 这里 $a|b$ 表示 a 整除 b.（第 29 届 IMO 预选题）

5 用 n 块 1×2 的纸片覆盖一个 $2\times n$ 的棋盘（没有重叠也没有空隙）共有多少种不同的方法？

6 球面上有 n 个大圆，其中没有 3 个大圆通过同一点，求这 n 个大圆将球面分成的区域的个数 a_n.

7 用 1，2，3，4 可组成多少个含偶数个 1 的 n 位数？

8 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$，$n\in\mathbf{N}_+$，求证：(1)对任意 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为正整数；(2)对任意 $n\in\mathbf{N}$，$a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.（2005 年全国高中数学联赛试题）

9 证明：对任何非负整数，$[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ 能被 2^{n+1} 整除.（这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

10 证明：对任何非负整数 n，$\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ 不能被 35 整除.

方法篇

5 分类和分步

一、分　类

当被研究的数学问题出现多种不同的情形时，常常可按出现的各种情形分别进行讨论和解答.得出各种情形下相应的结论，综合起来就获得原问题的解答，这就是分类的思想方法.

应用分类的思想方法解题应遵循以下原则：

(1) 分类必须包含原题目中所有可能出现的各种情形，没有遗漏；

(2) 任何两类之间互相排斥，没有重叠；

(3) 每次分类必须使用同一标准；

(4) 选择分类标准的关键在于各类情形都比原问题易于解决.

例1　将9个1，9个2，9个3，…，9个1000共9000个数填入一个9行、1000列的表格内(每格内填入一个数)，使得同一列中任何两数之差的绝对值不超过3.设这个表格中每列中各数之和(共1000个列和)的最小值为M，试求M的最大值.

解　我们依据9个1的分布的列数的不同情形来分别求列和的最小值M.

如果9个1分布在同一列，那么$M=9$.

如果9个1分布在两列中，那么这两列中各数之和不小于$2M$，同时由已知条件知两列中出现的最大数至多只能为4，故这两列数之和$\leqslant 9\times1+9\times4=45$，即$2M\leqslant45$，所以$M\leqslant22$.

如果9个1分布在三列中，那么同上讨论可得$3M\leqslant 9\times1+9\times4+9\times3=72$，所以$M\leqslant 24$.

如果9个1分布在四列中，那么类似可得$4M\leqslant 9\times1+9\times4+9\times3+9\times2=90$，所以$M\leqslant 22$.

如果9个1分布的列数大于4，那么其中某一列必有一个数大于4(因为

2，3，4一共27个数，不足以填满所有出现1的列），这与已知条件中任何一列中任意两个数之差的绝对值不大于3矛盾，所以这种情形不出现.

综上可知，列和的最小值 $M \leqslant 24$.

下列表格表明：列和的最小值可达到24.

$$
\begin{array}{l}
1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
3\ 3\ 3\ 2\ 2\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
3\ 3\ 3\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
3\ 3\ 3\ 5\ 5\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000; \\
4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6\ 7\ 8\ \cdots\ 1000.
\end{array}
$$

所以，所求列和的最小值的最大值为24.

对于较复杂的问题，有时一次分类还不够，还要进行第二次分类，两次分类可以互相独立，也可能第二次是将第一次的一个子类再进行分类. 总之，可以根据问题的需要多层次地进行分类.

例2 空间给定 $2n\ (n \geqslant 2)$ 个点，其中任意4点不共面，它们之间连有 n^2+1 条线段，求证这些线段至少构成 n 个三角形.

证明 $n=2$ 时，共有4个点 A，B，C，D 它们之间连有5条线段，其中只有 $C_4^2-5=1$ 对点之间没有连线，不妨设 C 与 D 没有连线，于是存在两个三角形：$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$.

设 $n=k$ 时，结论成立，当 $n=k+1$ 时，我们首先证明此时至少存在一个三角形.

设已知两点 A 与 B 之间连有线段，并设由 A，B 向其余 $2k$ 个点所引出的线段数分别为 a，b.

(1) 若 $a+b \geqslant 2k+1$，则存在不同于 A，B 的点 C 同时与 A 和 B 都连有线段，即存在一个三角形 ABC.

(2) 若 $a+b \leqslant 2k$，则去掉 A，B 两点以及从 A，B 出发的线段，还剩 $2k$ 个点，它们之间至少连有 $(k+1)^2+1-(2k+1)=k^2+1$ 条线段，从而由归纳假设知存在 k 个三角形.

设 $\triangle ABC$ 是所连线段构成的一个三角形，n_A，n_B，n_C 分别是从 A，B，C 向其他 $2k-1$ 个点所引出的线段数，下面又分两种情形.

(a) 若 $n_A+n_B+n_C \geqslant 3k-1$，则恰以 AB、BC、CA 之一为边的三角形至

少有 k 个，再加上三角形 ABC，则一共至少有 $k+1$ 个三角形.

(b) 若 $n_A+n_B+n_C \leqslant 3k-2$，即 $(n_A+n_B)+(n_B+n_C)+(n_C+n_A) \leqslant 6k-4$，故 n_A+n_B，n_B+n_C，n_C+n_A 中必有一个不超过 $\left[\frac{6k-4}{3}\right]=2k-2$. 不妨设 $n_A+n_B \leqslant 2k-2$，于是把 A，B 以及从 A，B 出发的线段(包括 $\triangle ABC$ 的 3 条边)去掉后，还剩 $2k$ 个点，它们之间至少连有 $(k+1)^2+1-(2k-2)-3=k^2+1$ 条线段，于是由归纳假设知存在 k 个以所连线段为边的三角形，再加上 $\triangle ABC$，一共至少有 $k+1$ 个三角形.

故 $n=k+1$ 时，结论成立，这就完成了归纳证明.

注 本题证明中，前后两次进行了分类，并且两次分类是独立的(分别采用不同的分类标准). 下面的例中第二次分类则是将第一次的子类再分类.

例 3 8 个人参加一次聚会.

(1) 如果其中任何 5 个人中都有 3 个人两两认识，求证：可以从中找出 4 个人两两认识；

(2) 试问，如果其中任何 6 个人中都有 3 个人两两认识，那么是否一定可以找出 4 个人两两认识？(2006 年第五届中国女子数学奥林匹克试题)

解 (1) 分下列两种情形.

情形Ⅰ. 如果存在 3 个人两两互不认识，那么余下的 5 人必然两两认识，否则他们之中必有两人互不认识，这两人与原来 3 人一起构成的 5 人组中没有 3 人两两认识，导致矛盾，所以此时题中结论成立；

情形Ⅱ. 任何 3 人中必有两人互相认识.

(a) 如果 8 人中有 1 个人 A 至多认识 3 个人，那么他至少不认识 4 个人，于是这 4 个人两两认识，否则他们之中必有两人互不认识，这两人与 A 一起构成的 3 人组中没有两人互相认识，导致矛盾，所以此时题中结论成立.

(b) 如果 8 个人中存在 1 人 A 至少认识 5 个人，那么这 5 个人中必有 3 人两两认识，这 3 个人与 A 一起构成的 4 人组中都两两认识，从而结论也成立.

(c) 如果 8 个人中任何 1 人都恰恰认识其余 4 个人.

任取其中 1 人 A. 如果 A 所认识的 4 人两两认识，那么题中结论成立，否则存在两人 B 和 C 都与 A 认识，但他们互不认识. 因为 A 恰认识 4 人，故 A 恰有 3 个不认识的人：F、G、H. 这 3 人中任何 2 人都与 A 构成 3 人组，故 F、G、H 中任何两人互相认识. 如果 B、C 中有 1 人与 F、G、H 都认识，那么此人与 F、G、H 构成的 4 人组中两两认识，结论成立，否则 B、C 分别不认识 F、G、H 中一个人，并且 B、C 不可能不认识他们中同一个人，否则该人与 B、C 构成的 3 人组中无 2 人互相认识，导致矛盾. 所以 B 和 C 分别不认识 F、

G、H 中两个不同的人，不妨设 B 不认识 F，C 不认识 G. 设将 B、F、A、G、C 依次排在一个圆周上，于是任何相邻位置上的人互相不认识. 然而他们中任何 3 人中都有两个人处在圆周上的相邻位置，故 B、F、A、G、C 中找不到 3 个人两两认识，导致矛盾，即最后一种情形不存在.

综上所述，在任何情形下，都存在 4 个人两两互相认识；

(2) 如果任何 6 个人中都有 3 个人两两互相认识，那么不保证存在 4 个人，他们都两两互相认识. 例子如下：

在正八边形内连出 8 条最短的对角线，8 个顶点代表 8 个人，如果两点间连有边或对角线，则对应的两人互相认识，否则互相不认识. 因为图中共有 8 个三角形，而每一顶点恰是 3 个三角形的公共顶点，任意去掉 2 点，至多减少 6 个三角形，以余下 6 点为顶点的三角形至少还有 2 个，即任意 6 人中必有 3 人两两互相认识，但是这 8 个人中找不出 4 人两两互相认识.

例 4　已知 $n(\geqslant 6)$ 个人之间互通电话问候，满足：(1) 每个人至多与 $n-\left[\frac{n+2}{2}\right]$ 人互通电话；(2) 任何 3 个人中至少有两人互通了电话. 证明：这 n 个人总可以分成不相交的两组，使同组的任何两人之间都互通了电话.

证明　设已知 n 个人的集合为 S. 由已知条件(1)知每人至少与 $n-1-\left(n-\left[\frac{n+2}{2}\right]\right)=\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人没有通电话. 设 A_1 与 $B_1, B_2, \cdots, B_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 没有通电话，B_1 与 $A_1, A_2, \cdots, A_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 没有通电话，并记 $S_1=\{A_1, A_2, \cdots, A_{\left[\frac{n}{2}\right]}\}$，$S_2=\{B_1, B_2, \cdots, B_{\left[\frac{n}{2}\right]}\}$. 由已知条件(2)知 $S_1\cap S_2=\varnothing$，并且每个 $S_i(i=1, 2)$ 内任意两人互通了电话. 下面分为两种情形.

(1) 若 $n=2k$ 为偶数，则 n 个人的集合 S 可分为不相交的两组 S_1 和 S_2 使每一组内的任何两人互通了电话，结论成立.

(2) 若 $n=2k+1\geqslant 6$ 为奇数，则 $k\geqslant 3$. 且已知 n 个人中除了 $S_1\cup S_2$ 内的 $2k$ 个人外，还有另一个人 C，又分为下列 3 种情形.

(a) 若 C 与 B_1 没有通电话，则记 $S_1'=S_1\cup\{C\}$，于是由已知条件(2)知 S_1' 和 S_2 的每一个内的任意两人互通了电话，并且 $S=S_1'\cup S_2$，$S_1'\cap S_2=\varnothing$，故知结论成立.

(b) 若 C 与 A_1 没有通电话，则同(a)可证结论成立.

(c) 若 C 与 A_1 和 B_1 都通了电话，则由已知条件(1)知与 C 没有通话的至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]=k\geqslant 3$ 人，他们不能全属于 S_1，也不能全属于 S_2（因为 $|S_1\setminus\{A_1\}|=|S_2\setminus\{B_1\}|=k-1<k$）. 不妨设 C 与 S_1 中 $A_i(2\leqslant i\leqslant k)$ 没有通电话，并且 C 与 S_2 中 $B_j, B_t(2\leqslant j<t\leqslant k)$ 没有通电话. 因为与 A_i 没有通话的

至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]=k$ 人，他们中除 C 外，其余 $k-1$ 人都在 S_2 中，而 S_2 中除 B_j，B_t 外只有 $k-2$ 人，故 A_i 必与 B_j，B_t 中一人没有通电话，不妨设 A_i 与 B_j 没有通电话. 于是 C，A_i，B_j 中任何两人都没有互通电话，这与已知条件(2)矛盾. 证毕.

二、分　步

分步就是将一个较复杂的问题变成(或改编成)一组互相关联的"小问题". 在这一组"小问题"中，后面问题的解决常常依赖于前面小题的结果，而当最后一个小问题解出时，便得出了原问题的结论.

例 5　求最小正整数 n，使得任何 n 个无理数中总有 3 个数，其中每两个数之和仍为无理数.

解　显然$\{-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\}$，这 4 个无理数中的任何三个数含有一对相反数，它们之和为 0，不是无理数，故满足要求的最小正整数 $n\geqslant 5$.

下面我们证明任意 5 个无理数中必有 3 个数，其中每两个数之和仍为无理数，为了表达方便，用平面内 5 个点 x，y，z，u，v 表示 5 个无理数(以下点与对应的数用同一字母表示)，其中任意 3 点不共线. 若两数之和为有理数，则对应点连虚线，否则连实线，得到图 G，只须证明图中存在实线三角形即可.

第一步证明图 G 中存在实线或虚线三角形.

事实上，若从某点出发的 4 条线段中有 3 条同为实线或同为虚线，则必存在实线或虚线三角形，故不妨设从每点出发有两条实线和两条虚线. 整个图 G 中恰有 5 条实线和 5 条虚线. 因为每点出发有两条实线，故每点都为一条闭实折线的顶点，但每条闭实折线至少有 3 条线段. 故 5 条实线形成一条闭折线，同理 5 条虚线形成一条闭折线. 不妨设 $xyzuvx$ 为闭虚线，于是 $x+y$，$y+z$，$z+u$，$u+v$，$v+x$ 均为有理数，从而

$$x=\frac{1}{2}[(x+y)-(y+z)+(z+u)-(u+v)+(v+x)]$$

为有理数，这与已知矛盾. 故 G 中必存在实线或虚线三角形.

第二步证明必存在实线三角形. 若不然，必有虚线三角形，不妨设$\triangle xyz$ 为虚线三角形，于是 $x+y$，$y+z$，$z+x$ 均为有理数. 从而

$$x=\frac{1}{2}[(x+y)+(z+x)-(y+z)]$$

为有理数，与已知矛盾. 可见 G 中不存在虚线三角形，于是由第一步的结论知

必有实线三角形，不妨设$\triangle xyz$为实线三角形，即存在3个数x，y，z使其中每两个数之和均为无理数.证毕.

综上可得，所求最小正整数$n=5$.

例6 设有2^{n-1}个不同的数列，每个数列有n项，每项都等于0或1.已知对于这些数列中任意3个数列，都存在正整数p，使得这3个数列的第p项都是1，证明存在唯一的正整数k，使得所有2^{n-1}个数列的第k项都等于1.（第32届莫斯科数学奥林匹克试题）

证明 记$S=\{X\mid X=(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i=0或1, i=1, 2, \cdots, n\}$，而用$S_0$表示已知$2^{n-1}$个不同数列组成的集合.显然$S_0\subsetneqq S$.我们先研究$S_0$的特性，再来应用这些特性去证明题中结论.为了表达方便，我们引入下列记号：

对任意$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in S$，令$\overline{X}=(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$，其中$\overline{x_i}=\begin{cases}1, 若\ x_i=0,\\0, 若\ x_i=1,\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, n$.其次对任意$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in S$，令

$$X\cdot Y=(x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n),$$

于是，当$X, Y\in S$时，$\overline{X}$及$X\cdot Y$都属于S.

(1) 我们首先证明：对任意$X\in S$，X与$\overline{X}$中有且只有一个属于S_0，并且$0=(0, 0, \cdots, 0)\notin S_0$.

事实上，对任意$X\in S$，将X与$\overline{X}$配成一对，于是将S中2^n个元素配成2^{n-1}对.若某个X与$\overline{X}$都属于S_0，则任取一个$Y\in S_0$，得$X\cdot\overline{X}\cdot Y=(0, 0, \cdots, 0)$，这与已知条件：存在正整数$p$，使$X$，$\overline{X}$，$Y$的第$p$项都是1矛盾，故对任意$X\in S$，$X$与$\overline{X}$中至多有一个属于$S_0$.因不同的数列对$(X, \overline{X})$共$2^{n-1}$个，每对中至多只有一个属于$S_0$，而$S_0$中恰有$2^{n-1}$个数列，故每对数列$X$与$\overline{X}$中恰有一个属于$S_0$.其次，若$0=(0, 0, \cdots, 0)\in S_0$，则任取$X, Y\in S_0$有$0\cdot X\cdot Y=(0, 0, \cdots, 0)$这与已知条件矛盾.故$0=(0, 0, \cdots, 0)$不属于$S_0$.

(2) 其次我们证明.若$X, Y\in S_0$，则$X\cdot Y\in S_0$.

事实上，若$Z=X\cdot Y\notin S_0$，则由(1)知$\overline{Z}=\overline{X\cdot Y}\in S_0$.于是$X\cdot Y\cdot\overline{Z}=(X\cdot Y)\cdot(\overline{X\cdot Y})=(0, 0, \cdots, 0)$，这与已知条件矛盾.故$X\cdot Y\in S_0$.

(3) 最后，我们证明：若S_0中2^{n-1}个不同的数列是$X_1, X_2, \cdots, X_{2^{n-1}}$，令$X=X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdot X_{2^{n-1}}$，则$X$中恰有一项等于1，其余$n-1$项都等于0.

事实上，由(2)和(1)知$X\in S_0$且$X\neq(0, 0, \cdots, 0)$.即X至少有一项等

于 1. 若 X 至少有两项等于 1，则 S_0 中每个数列的这两项的值都等于 1. 并且每个数列的其余 $n-2$ 项只能为 0 或 1，这样的不同数列一共至多有 2^{n-2} 个，这与 S_0 中共有 2^{n-1} 个不同数列矛盾.

现回到原题，由结论(3)，可设 $X = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{2^{n-1}}$ 的第 k 项等于 1，其余各项等于零. 即知存在唯一正整数 k，使 S_0 中 2^{n-1} 个数列的第 k 项都等于 1，而其他任何一项不能都等于 1. 证毕.

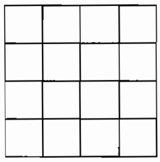
注　本题可等价地描述为下列问题. 设 $I = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 n 元集合，它的 2^{n-1} 个子集构成的集合 S_0 具有下列性质：S_0 中的任何 3 个元素（I 的子集）的交非空. 证明：S_0 中所有元素（I 的 2^{n-1} 个子集）的交集恰含唯一一个元素. 本题证明中引入的运算 $\overline{X}$ 和 $X \cdot Y$ 恰恰对应于集合的补集和交集运算. 故读者不难用补集、交集运算按上述证明步骤给出等价命题的证明. 这样实质上给出了原题的另一种本质相同而形式不同的证明，并且从集合的角度来看，本题的证明就显得非常自然了.

习　题　5

1 如果(1) a, b, c, d 都属于 $\{1, 2, 3, 4\}$；(2) $a \neq b$，$b \neq c$，$c \neq d$，$d \neq a$；(3) a 是 a, b, c, d 中最小值，那么可组成不同的四位数 $\overline{abcd}$ 的个数是________.（2000 年全国高中数学联赛试题）

2 由 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成的，至少有三个数位上的数码不同的 5 位数中，有多少个数使得数码 1 和 6 不相邻？

3 将 2 个 a 和 2 个 b 共 4 个字母填在如图所示的 16 个方格内，每个小方格内至多填 1 个字母，若使相同字母既不同行也不同列，则不同的填法共有________种.（用数字作答）（2007 年全国高中数学联赛试题）



（第 3 题）

4 有三条长度分别为 1, 2, 3 的线段，现将长为 3 的线段任意分成 n 段，$n \geqslant 2$，证明：在所得的 $n+2$ 条线段中必有三段可组成三角形.

5 从集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ $(n \in \mathbf{N}_+)$ 中先取出子集 X，再取出子集 Y，使 X 不是 Y 的子集，且 Y 也不是 X 的子集，问这种有序选取有多少种不同的方法？

6 在平面直角坐标系上有 9 个整点 $A_i(x_i, y_i)$ $(x_i, y_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, 3, \cdots, 9)$，其中任意三点不共线，求证：必存在一个 $\triangle A_iA_jA_k$ $(1 \leqslant i < j <$

$k \leqslant 9$)，其重心仍为整点.

7 某协会共有 n 个人，已知其中任意 3 人中必有两人互相认识，求最小正整数 n 使得其中必存在 4 人互相都认识.

8 平面上已给 7 个点，用一些线段连接它们，使得：(1)每 3 点中至少有两点连有线段；(2)线段条数最少，问有多少条线段？并给出这样一个图形.

9 设凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面积为 S. 证明：以其中 3 点为顶点的所有三角形中必有一个三角形的面积不大于 $\frac{1}{6}S$.

6 对应方法

对应不仅是一个基本的数学概念，而且是解题和证题的一种重要方法和技巧.对应是联系陌生问题和熟悉问题的桥梁，通过对应往往使得一些隐蔽的关系变得明朗和具体，使人们易于找到解决问题的途径.用对应方法解题的关键是构造对应关系，而这并没有一般的通法，而应根据不同问题的特点作具体分析才能确定.下面我们将通过具体例题说明各种对应方法在解题中的应用.

一、配对法

所谓配对法，是指这样一种解题和证题的思想方法：按照一定的规则，将所研究的对象两两配成一对，从而使得计算比较容易或解题思路更加清晰，达到化繁为简，化难为易的目的.

例 1 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 1000\}$，对 M 的任意非空子集 X，令 α_X 表示 X 中最大数与最小数之和，那么所有 α_X 的算术平均值为________.（1991 年全国高中数学联赛试题）

解 将 M 的所有非空子集配对，对 M 的任意非空子集 X，令

$$X'=\{1001-x \mid x\in X\},$$

则 X' 也是 M 的非空子集，且当 $X\neq X_1$ 时，$X'\neq X_1{}'$.

于是，M 的所有非空子集分为两类：

(1) $X\neq X'$；　　(2) $X=X'$.

对于(2)类中的 X，若 $x\in X$，则 $1001-x\in X$，当 x_0 为 X 中最小数时，$1001-x_0$ 为 X 中最大数，这时 $\alpha_X=x_0+(1001-x_0)=1001$.

对于(1)中一对 X 和 X'，若 X 中最小数和最大数分别为 x_0，y_0，则 X' 中的最大数和最小数分别为 $1001-x_0$ 和 $1001-y_0$，这时

$$\alpha_X+\alpha_{X'}=x_0+y_0+(1001-x_0)+(1001-y_0)=2002.$$

综上可得，所有 α_X 的平均值等于 1001.

例 2 任意 133 个正整数中，若至少有 799 对正整数互素，证明：其中必存在 4 个正整数 a, b, c, d 使得 a 与 b，b 与 c，c 与 d，d 与 a 都互素.（1990 年中国国家集训队测试题）

解 用 133 个点 A_1, A_2, …, A_{133} 表示 133 个正整数，如果两个正整数互素，那么对应的两点连一线段，否则不连线段，得到一个图 G. 已知 G 中 133 个点之间至少连有 799 条线段，要证明 G 中存在一个四边形（即存在 4 点 A, B, C, D 使得 A 与 B，B 与 C，C 与 D，D 与 A 都连有线段），而这只要证明存在一个点对 (B, D)，使得 B 和 D 都和另外两点 A 和 C 连有线段.

若两点 B 和 D 都和点 A 连有线段，则将 B 和 D 配成一对，并称 (B, D) 为属于 A 的点对. 设从 A_i 出发的线段有 d_i 条 $(i = 1, 2, \cdots, 133)$，于是

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{133} \geqslant 2 \times 799, \qquad ①$$

并且分别属于 A_1, A_2, …, A_{133} 的点对数的总和为

$$\sum_{i=1}^{133} \mathrm{C}_{d_i}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{133} d_i^2 - \sum_{i=1}^{133} d_i\right). \qquad ②$$

由柯西(Cauchy)不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{133} d_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{133} 1^2 \sum_{i=1}^{133} d_i^2 = 133 \sum_{i=1}^{133} d_i^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{133} d_i^2 \geqslant \frac{1}{133}\left(\sum_{i=1}^{133} d_i\right)^2. \qquad ③$$

将③代入②并利用①得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{133} \mathrm{C}_{d_i}^2 &\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{133}\left(\sum_{i=1}^{133} d_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{133} d_i\right] \\
&= \frac{1}{2 \times 133}\left(\sum_{i=1}^{133} d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{133} d_i - 133\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2 \times 133} \times 2 \times 799 \times (2 \times 799 - 133) \\
&> \frac{1}{2 \times 133} \times 2 \times 6 \times 133 \times (2 \times 6 \times 133 - 133) \\
&= \frac{133 \times 132}{2} = \mathrm{C}_{133}^2.
\end{aligned}$$

而 133 个点一共只能形成 C_{133}^2 个点对. 故上述左端点对的计数有重复，即至少

053

存在一个点对(B, D)属于两个不同的点A和C，可见B和D既与A连有线段，又与C连有线段. 于是A, B, C, D对应的正整数a, b, c, d满足a与b，b与c，c与d，d与a都互素，命题得证.

例3 设有11个集合$M_1, M_2, \cdots, M_{11}$，满足

(i) $|M_i|=5$, $i=1, 2, \cdots, 11$;

(ii) $|M_i \cap M_j| \neq 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant 11$.

记$T=M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{11}$，并对任意$x \in T$，令

$$n(x)=|\{M_i \mid x \in M_i, 1 \leqslant i \leqslant 11\}|,$$
$$n=\max\{n(x) \mid x \in T\},$$

求n的可能值中的最小值.(1994罗马尼亚数学奥林匹克试题)

说明 $|M_i|$表示集合M_i中元素的个数，即$|M_i|=\mathrm{Card}\, M_i$. $n(x)$表示包含元素$x \in T$的集合M_i的个数，而n是所有这些$n(x)$的最大值.

解 设$T=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，作$m \times 11$数表，其中第$i$行第$j$列处的数为

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{若 } x_i \in M_j), \\ 0 & (\text{若 } x_i \notin M_j)\end{cases}(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, 11).$$

于是$n(x_i)=\sum_{j=1}^{11} a_{ij}$表示$x_i$属于$M_1, M_2, \cdots, M_{11}$中$n(x_i)$个集合，而$|M_j|=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$表示$M_j$中元素的个数，从而由已知条件(i)有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} n(x_i) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{11} a_{ij}=\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{11}|M_j|=11 \times 5=55.\end{aligned} \quad ①$$

若集合$M_j, M_k(j \neq k)$都包含元素x_i，则将M_j与M_k配成一对，并称(M_j, M_k)是属于元素x_i的集合对，于是分别属于$x_1, x_2, \cdots, x_m$的集合对的个数的总和为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{C}_{n(x_i)}^{2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} n(x_i)(n(x_i)-1) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(n-1) \sum_{i=1}^{m} n(x_i),\end{aligned} \quad ②$$

另一方面，由已知条件(ii)知，对每对集合$(M_i, M_j)(i<j)$，有$y \in M_i \cap M_j$，即(M_i, M_j)为属于y的集合对，故这个集合对(M_i, M_j)包含在②式左端的计

算中，而 $M_1, M_2, \cdots, M_{11}$ 可组成 $C_{11}^2=55$ 个集合对，所以有

$$\sum_{i=1}^{m} C_{n(x_i)}^2 \geqslant 55. \tag{③}$$

由②和③并利用①得

$$55 \leqslant \sum_{i=1}^{m} C_{n(x_i)}^2 \leqslant \frac{1}{2}(n-1)\sum_{i=1}^{m} n(x_i)=\frac{1}{2}\times 55(n-1),$$

即得 $n \geqslant 3$.

如果 $n=3$，则对任意 $x_i \in T$，$n(x_i) \leqslant n=3$.

以下先证明：不存在 $x_i \in T$ 使 $n(x_i) \leqslant 2$. 否则有 $x_{i_0} \in T$，使 $n(x_{i_0}) \leqslant 2$，于是有

$$\begin{aligned}
55 &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n(x_i)(n(x_i)-1)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0} n(x_i)(n(x_i)-1)+\frac{1}{2}n(x_{i_0})(n(x_{i_0})-1)\\
&\leqslant \frac{1}{2}(n-1)\sum_{i=1}^{m} n(x_i)+\frac{1}{2}n(x_{i_0})(n(x_{i_0})-n)\\
&=\frac{1}{2}\times(3-1)\times 55+\frac{1}{2}\times 2\times(2-3)=54,
\end{aligned}$$

矛盾.

于是，对任意 $x_i \in T$，都有 $n(x_i)=3$，从而由 $\sum_{i=1}^{m} n(x_i)=55$ 推出 $3m=55$，这也不可能，所以 $n \geqslant 4$.

最后，当 $n=4$ 时，下列 11 个集合满足题目条件(i)和(ii)：

$$\begin{aligned}
&M_1=M_2=\{1,2,3,4,5\},\ M_3=\{1,6,7,8,9\},\\
&M_4=\{1,10,11,12,13\},\ M_5=\{2,6,9,10,14\},\\
&M_6=\{3,7,11,14,15\},\ M_7=\{4,8,9,12,15\},\\
&M_8=\{5,9,13,14,15\},\ M_9=\{4,5,6,11,14\},\\
&M_{10}=\{2,7,11,12,13\},\ M_{11}=\{3,6,8,10,13\}.
\end{aligned}$$

这表明 $n(x_i) \leqslant 4$，从而得到 n 的最小值 $=4$.

例 4 某班共 30 名学生，每名学生在班的内部都有同样多的朋友，期末考试后，任何两人的成绩都可以分出优劣，没有并列者. 比自己的多半朋友的成绩都好的学生称之为好学生，问好学生最多有几名？(第 20 届全俄数学奥林匹克试题)

解法一　设每人有 k 个朋友，全班有 x 个好学生. 若学生 a 比他的朋友 b 的成绩好，则将 a 与 b 配成一对. 设这种对子共有 n 对.

一方面，最好的学生比他的 k 个朋友的成绩都好，可配成 k 对，其余 $x-1$ 名好学生至少比他的 $\left[\frac{k}{2}\right]+1\geqslant\frac{k+1}{2}$ 个朋友的成绩都好，每人至少配成 $\frac{k+1}{2}$ 对，所以

$$n\geqslant k+(x-1)\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

另一方面，30 名学生，每人恰有 k 个朋友，至多共形成 $\frac{30k}{2}=15k$ 对，即 $n\leqslant 15k$，所以

$$k+(x-1)\left(\frac{k+1}{2}\right)\leqslant 15k\text{，即 }x\leqslant\frac{28k}{k+1}+1=29-\frac{28}{k+1}. \qquad ①$$

其次，设 c 是好学生中最差的 1 名，于是 c 至多比 $30-x$ 名学生的成绩要好，从而 c 至多生成 $30-x$ 对，另一方面 c 至少比他的 $\left[\frac{k}{2}\right]+1\geqslant\frac{k+1}{2}$ 名朋友的成绩好. 故 c 至少可生成 $\frac{k+1}{2}$ 对，所以

$$30-x\geqslant\frac{k+1}{2}\text{，即 }k\leqslant 59-2x. \qquad ②$$

②代入①得 $x\leqslant 29-\frac{28}{60-2x}=29-\frac{14}{30-x}$，即

$$x^2-59x+856\geqslant 0,$$

解得 $x\leqslant\frac{59-\sqrt{57}}{2}<26$ 或 $x\geqslant\frac{59+\sqrt{57}}{2}>30$（舍去），所以 $x\leqslant 25$.

下面例子表明好学生可以是 25 人（由②中等号成立知这时 $k=9$）

用 1，2，…，30 这 30 个号码分别表示第 1 名，第 2 名，…，第 30 名学生，并将这些号码填入右侧 6×5 的表格中.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

（1）第 1 行每个学生的朋友是同行以及下一行不同列的其他 8 人以及第 6 行中同列的那个人（例如 3 号学生的朋友的编号是 1，2，4，5，6，7，9，10，28）；

（2）第 2 行至第 5 行中每个学生的朋友是相邻

上、下 2 行中与他不同列的其他 8 人以及第 6 行中与他同列的那个人(例如 17 号学生的朋友的编号是 11，13，14，15，21，23，24，25，27)；

(3) 第 6 行每个学生的朋友是上一行以及同列的其他 9 人(例如 29 号学生的朋友的编号是 21，22，23，24，25，4，9，14，19).

于是，每人恰有 9 位朋友，并且编号 1 至 25 的学生都是好学生.

解法二 若每位学生有 $2k-1$ 个朋友，那么 30 人中所有朋友对的数目为 $\frac{1}{2}\times 30\times(2k-1)=30k-15$. 每对朋友中给成绩较优的发一张奖状，这样共发出了 $30k-15$ 张奖状. 第 1 名总是拿 $2k-1$ 张奖状，第 2 名至少拿 $2k-2$ 张奖状，…，第 k 名至少拿 k 张奖状，于是这 k 名好学生至少一共拿了 $(2k-1)+(2k-2)+\cdots+k=\frac{1}{2}k(3k-1)$ 张奖状，至多还剩 $30k-15-\frac{1}{2}k(3k-1)$ 张奖状，因为每个好学生至少得 k 张奖状，故至多还有 $\frac{1}{k}\left[30k-15-\frac{1}{2}k(3k-1)\right]$ 个好学生. 所以，好学生的人数 n 至多为

$$k+\frac{1}{k}\left[30k-15-\frac{1}{2}k(3k-1)\right]=30\frac{1}{2}-\left(\frac{15}{k}+\frac{k}{2}\right)$$
$$\leqslant 30\frac{1}{2}-2\sqrt{\frac{15}{k}\times\frac{k}{2}}=30\frac{1}{2}-\sqrt{30}<30\frac{1}{2}-5=25\frac{1}{2},$$

因此，$n\leqslant 25$.

若每位学生有 $2k$ 个朋友，则完全类似地可发出 $30k$ 张奖状，至少得 $k+1$ 张奖状的为好学生. 第 1 名至第 k 名至少共得了 $2k+(2k-1)+\cdots+(k+1)=\frac{1}{2}k(3k+1)$ 张奖状，故好学生人数 n 至多为

$$\begin{aligned}
&k+\frac{1}{k+1}\left[30k-\frac{1}{2}k(3k+1)\right]\\
&=\frac{1}{k+1}\left[30k-\frac{1}{2}k(k-1)\right]\\
&=\frac{1}{k+1}\left[30(k+1)-30-\frac{1}{2}k(k-1)\right]=30-\left(\frac{31}{k+1}+\frac{k-2}{2}\right)\\
&=31\frac{1}{2}-\left(\frac{31}{k+1}+\frac{k+1}{2}\right)\leqslant 31\frac{1}{2}-2\sqrt{\frac{31}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}}\\
&=31\frac{1}{2}-\sqrt{62}<25.
\end{aligned}$$

综合两种情形知，好学生至多有 25 人，下同解法一.

配对法除了用于直接计数和通过计数进行证明外，还用于一类两人对策

问题.这类问题常常涉及到几何图形的特征或数量的性质(如整除性、同余等).在这类对策问题中,若某一步走后未被判输,则称这样的步为活步.若某一方的策略能保证自己总能在对方走出活步后仍有步可走,则必不败,而在有限步对策问题中不败就必胜(假设无平局).

保证有步可走的常用方法之一是将所有可走的位置(或可取的数)配对,使每对位置(或每对数)a,b满足:只要对方走到一个位置(或取到一个数),比如a,自己就能走到另一个位置b(或取到另一个数b).

对涉及到几何图形的对策问题,配对应根据几何图形的特征和走步规则来确定,常用的有对称、相邻等条件,应抢占多余的位置或对称中心.而对涉及数量性质的对策问题,配对应根据问题条件中数的特征和走步规则来确定,常用的有整除、同余、几个数的和一定等条件.

例5 阿乃斯和波比在6×6的方格纸上玩游戏,两人轮流在每一个空格内写上一个在其他格子中没有出现过的有理数.阿乃斯首先写,当所有方格内都已写上数后,将每一行中写的数为最大的那一个方格染成黑色.如果阿乃斯可以从方格纸的上顶部开始经过黑格画一条线到达方格纸的下底部,那么阿乃斯获胜,否则波比获胜(如果两个正方形有公共顶点,那么阿乃斯也能够画一条线从一个正方形到达另一个正方形),找出(并证明)谁有必胜策略.(第33届美国数学奥林匹克试题)

解 波比有必胜策略:波比每次写过数以后,总可以使得每一行的最大数在集合$A\cup B$内的方格中,其中

$$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\},$$
$$B=\{(3,5),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\},$$

这里(i,j)表示位于第i行第j列处的方格.

事实上,波比将$A\cup B$内的每个方格和同行的一个不在$A\cup B$内的方格配对,使得方格纸上的每一个方格恰在一个对子中.无论阿乃斯在那个对子中的一个方格内写数,波比总可以接着在该对子中的另一个格子内写数,如果阿乃斯在$A\cup B$的一个格子内写上数x,那么波比在该对子中的另一个方格内写上数y使$y<x$.如果阿乃斯写上数x的格子不属于$A\cup B$,则波比在该对子中属于$A\cup B$的格子内写上z使$z>x$.可见,在波比写完后,每个对子中的最大数总在$A\cup B$内,从而每行中的最大数总在$A\cup B$内.于是,当所有数写完后,第一行中的最大数在A内,第6行的最大数在B内.因为不可能在$A\cup B$内画一条线从A达到B,所以波比必获胜.

例6 甲乙两人进行如下游戏,甲先开始,两人轮流从1,2,3,…,100,

101 中每次任意勾去 9 个数，经过 11 次操作后，还剩两个数，这时余下两个数之差即为甲的得分，试证不论乙怎么做，甲至少可得 55 分.（第 32 届莫斯科数学奥林匹克试题）

证明　甲第一次勾掉 47，48，49，…，55 这 9 个数，将剩下的数两两配对：$\{i, 55+i\}(i=1, 2, \cdots, 46)$，同一对中两数之差为 55. 在每次乙勾掉 9 个数之后，甲的策略是使得甲勾掉的 9 个数与乙勾掉的 9 个数恰好组成上述 46 对数中的 9 对. 这样一来，最后余下的两个数必须是上述 46 对数中的一对，这两个数之差必为 55，可见甲可保证自己得 55 分.

例 7　在一个无限大的方格纸上，甲、乙两人轮流在空格上放棋子，每次放一枚，甲放黑棋子，乙放白棋子. 如果在某一行、或某一列、或一条对角线上出现 11 枚连续摆放着的黑棋子，则先放棋子的甲获胜，证明：乙总能阻止甲获胜.（第 35 届 IMO 预选题）

证明　如图 6－1 所示：将一个 4×4 正方形和一个与其相邻的 2×2 正方形中 20 个方格内周期地填上 0，1，2，3，4 这 5 个数字. 我们把图中如图 6－2 所示的 4 种已填数字的 2 个小方格组成的图形称之为一块多米诺骨牌. 易见，无论是在横行、竖列，还是平行于对角线的直线上，任何连续 11 个方格都含有一块多米诺骨牌. 因此，一旦甲在某块多米诺骨牌的一个方格内放上黑棋子，则乙在另一个方格内放上白棋子，这样一来，甲就无法取胜了（若甲在填数字 0 的方格上放黑棋子，乙就在其有公共边的另一个填数字 0 的方格上放白棋子）.

1	4	3	3	2	2	4	1	0	0	1	4	3	3
1	4	2	2	3	3	4	1	0	0	1	4	2	2
2	2	4	1	0	0	1	4	3	3	2	2	4	1
3	3	4	1	0	0	1	4	2	2	3	3	4	1
0	0	1	4	3	3	2	2	4	1	0	0	1	4
0	0	1	4	2	2	3	3	4	1	0	0	1	4
3	3	2	2	4	1	0	0	1	4	3	3	2	2
2	2	3	3	4	1	0	0	1	4	2	2	3	3
4	1	0	0	1	4	3	3	2	2	4	1	0	0
4	1	0	0	1	4	2	2	3	3	4	1	0	0
1	4	3	3	2	2	4	1	0	0	1	4	3	3
1	4	2	2	3	3	4	1	0	0	1	4	2	2

图 6－1

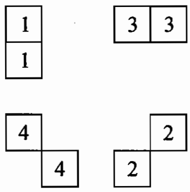


图 6－2

二、映射方法

运用映射法解题，主要是利用下列定理.

定理 设 f 是从有限集合 M 到有限集合 N 的映射. $|M|$，$|N|$ 分别表示 M, N 中元素个数.

(1) 若 f 是单射(即对任意 x_1, $x_2 \in M$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时有 $f(x_1) \neq f(x_2)$)，则 $|M| \leqslant |N|$；

(2) 若 f 为满射(即对任意 $y \in N$, 都存在 $x \in M$ 使 $f(x) = y$)，则 $|M| \geqslant |N|$；

(3) 若 f 为双射，又称 f 是从 M 到 N 上的一一对应(即 f 既是单射，又是满射)，则 $|M| = |N|$.

当计算有限集合 M 中的元素个数比较困难时，我们设法建立 M 到另一集合 N 上的双射，如果 N 中的元素个数 $|N|$ 容易算出，于是由 $|M| = |N|$，得出 M 中元素的个数，这就是计数中的映射方法. 在某些组合证明中，除了要建立方程外，有时还要建立不等关系，这时就可考虑构造单射、满射来进行论证.

例 8 把 n 个物体排成一行，如果这些物体的某个子集合中任何两个元素均不相邻，则称这个子集是不亲切的，证明：其中含有 k 个元素的不亲切子集的个数是 C_{n-k+1}^{k}.（第 16 届美国普特南数学竞赛试题）

证明 我们将排成一行的物体记为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n，且设 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}\}$ 是它的一个含 k 个元素的不亲切子集 $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$，于是有 $i_{j+1} - i_j \geqslant 2(j = 1, 2, \cdots, k-1)$，从而 $1 \leqslant i_1 < i_2 - 1 < i_3 - 2 < \cdots < i_k - (k-1) \leqslant n-k+1$，故 i_1, $i_2 - 1$, $i_3 - 2$, $\cdots$, $i_k - (k-1)$ 是 $1, 2, 3, \cdots, n-k+1$ 中一个严格上升序列. 反之，对每一个这样的严格上升序列 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n-k+1$，则以 a_{j_1}, a_{j_2+1}, $\cdots$, $a_{j_k+(k-1)}$ 为元素的集合是一个不亲切集合，二者成一一对应. 而从 $1, 2, \cdots, n-k+1$ 中选取 k 个数组成严格上升序列有 C_{n-k+1}^{k} 种方法，故含 k 个元素的不亲切子集的个数是 C_{n-k+1}^{k}.

例 9 设凸 n 边形的任意 3 条对角线不交于形内同一点，求它的对角线在形内的交点的个数.

解 依题意，一个交点 P 由两条对角线 l 和 m 相交而得，反之，两条相交对角线 l 和 m，确定一个交点 P，从而 P 与 (l, m) 可建立一一对应.

又因两条相交对角线 l, m 分别由凸 n 边形中两对顶点 A、B 和 C、D 连接而成，而且对于凸 n 边形的任意 4 个顶点，有且只有一对对角线相交于多边形内(如图 6－3)，故 (l, m) 又可与 4 顶点组 (A, C, B, D) 建立一一对应，即有 $P \leftrightarrow (l, m) \leftrightarrow (A, C, B, D)$. 因此，形内对角线的交点总数等于凸 n 边形的 4 顶点组数 C_n^4.

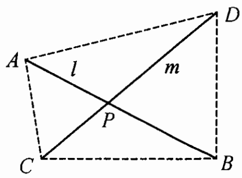


图 6－3

注 本题中结论是组合几何中一个重要结论，今后可用它去解决组合几何中较为复杂的计数问题.

例 10 把正三角形 ABC 各边 n 等分，过各分点在三角形内作边的平行线段将$\triangle ABC$ 完全分割成边长为$\frac{1}{n}BC$ 的小正三角形. 求其中边长为$\frac{1}{n}BC$ 的小菱形个数.

解 首先考虑边不平行 BC 的小菱形，延长每个菱形的边顺次与 BC 相交于 4 个分点(特殊情形下，第 2 个交点与第 3 个交点重合于菱形的一个顶点)为了便于处理，可延长 AB 到 B' 使 $BB'=\frac{1}{n}AB$，延长 AC 到 C' 使 $CC'=\frac{1}{n}AC$，并延长各平行线交线段 $B'C'$ 于 $n+2$ 个等分点，记为 0，1，2，…，$n+1$ (包括 B'，C' 两个端点)，于是每边不平行 BC 的小菱形的两组对边延长后交 $B'C'$ 于 4 个不同分点 i，$i+1$，k，$k+1$. 反之，任给这样 4 个分点必对应一个边不平行 BC 的小菱形，二者具有一一对应关系. 由于有序数组 $(i, i+1, k, k+1)(0\leqslant i<i+1<k<k+1\leqslant n+1)$ 又与有序数组 $(i+1, k)(1\leqslant i+1<k\leqslant n)$ 一一对应，故边不平行于 BC 的小菱形的个数为 C_n^2. 由对称性，所求小菱形的个数为 $3C_n^2$.

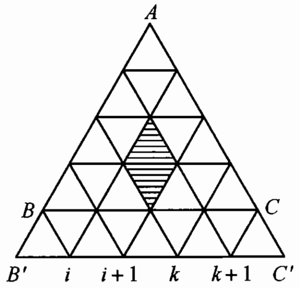


图 6-4

注 仿照例 10 的解题方法，读者不难得出下列问题的解答为 $f(n)=3C_{n+2}^4$.

问题 将等边三角形每边 n 等分，过各分点在形内作各边的平行线段，所形成的平行四边形个数记为 $f(n)$，求 $f(n)$的表达式.（第 23 届加拿大数学奥林匹克试题）

例 11 试问，有多少种方式将数集$\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}(n\in\mathbf{N}_+)$分拆为两个不相交的非空子集 A 和 B，使得方程 $n^2-S(A)x+S(B)=0$ 有整数根. 其中 $S(M)$表示数集 M 中所有元素的和?（当 $n=2005$ 时，此题为 2005 年俄罗斯数学奥林匹克九年级试题）

解 设 $x_1\leqslant x_2$ 是方程 $x^2-S(A)x+S(B)=0$ 的两个整数根，则 $x_1+x_2=S(A)>0$，$x_1\cdot x_2=S(B)>0$，从而 $0<x_1\leqslant x_2$ 且 $(x_1+1)(x_2+1)=S(A)+S(B)+1=2^0+2^1+\cdots+2^n+1=2^{n+1}$.

由此可得 $x_1+1=2^k$，$x_2+1=2^{n+1-k}\left(k=1, 2, 3, \cdots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$，反之当 $x_1+1=2^k$，$x_2+1=2^{n+1-k}\left(k=1, 2, 3, \cdots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ 时，$0<x_1\leqslant$

x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个正整数根,其中 $p=2^k+2^{n+1-k}-2$, $q=2^{n+1}-1-p$. 数 p 有唯一的二进制表达式,在该表达式中 2 的最高方幂不超过 2^n,又由于 $p+q=2^{n+1}-1$. 所以在 p 的二进制表达式中是 1 的地方,在 q 的二进制表达式中刚好是 0,反之亦然. 由此可见,对每个 $k\left(1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$,都存在唯一的分法$(A, B)$,使方程 $x^2-S(A)x+S(B)=0$ 的 2 个正整数根恰好是 x_1 和 $x_2(x_1\leqslant x_2)$,这个对应是一一对应. 故共有$\left[\frac{n+1}{2}\right]$种不同的分拆方式.

例 12 设 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$,$\mathscr{A}$是 I 的一些三元子集组成的集族,满足 $\mathscr{A}$ 中任何两个元素(I 的三元子集) 至多有一个公共元. 证明:存在 I 的一个子集 X,满足:(1)$\mathscr{A}$的任何元素(I 的三元子集) 不是 X 的子集;(2) $|X|\geqslant[\sqrt{2n}]$.

分析 我们只要找出 I 的所有满足条件(1)的子集中含元素个数最多的一个子集 X,再证明 $|X|\geqslant[\sqrt{2n}]$ 即可.

证明 将 I 的具有下列性质的子集 M 称为好子集:$\mathscr{A}$ 中任何元素(I 的三元子集)不是 M 的子集. 显然,好子集是存在的(因为 I 的任何二元子集均为好子集)且个数有限. 设 X 是所有好子集中含元素个数最多的一个好子集,并设 $|X|=k$, 则 X 满足条件(1),故只要证 X 满足条件(2).

记 $Y=I\backslash X$, 由条件(1)知 $X\neq I$, 即 $Y\neq\varnothing$, 设 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_{n-k}\}$, 对任意 $y_i\in Y$, 由 X 所含元素最多性质知 $X\cup\{y_i\}$ 不是好子集,即存在 $\mathscr{A}$ 中一个元素(I 的三元子集) $A_i\subset X\cup\{y_i\}$, 而 $A_i\not\subset X$, 故存在 $x_{i_1}, x_{i_2}\in X$, 使 $A_i=\{x_{i_1}, x_{i_2}, y_i\}$, 我们就令 y_i 与$\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$对应. 构成从 Y 到 X 的所有二元子集组成的集族 $\mathscr{B}$ 的一个映射 f, 下面证明 f 为单射. 事实上,对任意 $y_i, y_j\in Y$, $y_i\neq y_j$, 存在 X 的二元子集$\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, $\{x_{j_1}, x_{j_2}\}$使 $A_i=\{x_{i_1}, x_{i_2}, y_i\}$, $A_j=\{x_{j_1}, x_{j_2}, y_i\}$ 都属于 $\mathscr{A}$,若 $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}=\{x_{j_1}, x_{j_2}\}$, 则 A_i 与 A_j 有两个公共元,这与已知矛盾. 故 f 为单射,所以 $|Y|\leqslant|\mathscr{B}|$, 即 $n-k\leqslant C_k^2$, $[\sqrt{k(k+1)}]\geqslant[\sqrt{2n}]$, 但 $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1$, 所以 $|X|=k=[\sqrt{k(k+1)}]\geqslant[\sqrt{2n}]$.

例 13 一次聚会有 40 人参加,已知其中任何 19 人都有唯一公共偶象也参加了聚会.(约定甲是乙的偶象时乙不一定是甲的偶象,并且任何人不是自己的偶象)证明:参加聚会的人中存在一个由 20 人组成的集合 T_0. 使对任意 $a\in T_0$, 从 T_0 中去掉 a 后,剩下 19 人的唯一公共偶象不是 a.

证明 设参加聚会的 40 人组成的集合为 S,我们称 S 的一个 20 元子集 T 为好子集,如果存在 $a\in T$, 从 T 去掉 a 后剩下 19 人的唯一公共偶象是 a.

于是问题化为证明存在一个 S 的 20 元子集 T_0 不是好子集，为此只需证明好子集的个数少于 S 的所有 20 元子集的个数 C_{40}^{20}.

记 S 的全体好子集组成的集族为 X，S 的全体 19 元子集组成的集族记为 Y. 对任意 $B\in Y$，B 中 19 人的唯一公共偶象记为 $g(B)$. 于是，对任意 $T\in X$，由好子集定义知存在 $a\in T$，使从 T 去掉 a 后剩下 19 人的唯一公共偶象是 a，即 $g(T\backslash\{a\})=a$. 我们就令 T 与 $T\backslash\{a\}$ 对应，构成从 X 到 Y 的一个映射 f. 下面我们证明 f 是单射. 事实上，对任意 T_1，$T_2\in X$，$T_1\neq T_2$，存在 $a_1\in T_1$，$a_2\in T_2$ 使 $g(T_1\backslash\{a_1\})=a_1$，$g(T_2\backslash\{a_2\})=a_2$，且 $f(T_1)=T_1\backslash\{a_1\}$，$f(T_2)=T_2\backslash\{a_2\}$. 若 $f(T_1)=f(T_2)$，则 $T_1\backslash\{a_1\}=T_2\backslash\{a_2\}$，于是 $a_1=g(T_1\backslash\{a_1\})=g(T_2\backslash\{a_2\})=a_2$，从而有 $T_1=T_2$，矛盾，所以 f 是单射. 故 $|X|\leqslant|Y|=C_{40}^{19}<C_{40}^{20}$. 因 S 的 20 元子集有 C_{40}^{20} 个. 可见至少有 S 的一个 20 元子集 T_0 不是好子集，于是对任意 $a\in T_0$，从 T_0 去掉 a 后的 19 人的唯一公共偶象不是 a. 证毕.

例 14　集合 M 由 48 个不同的正整数组成，其中每个正整数的素因子均不大于 30. 证明：M 中存在 4 个不同的正整数，它们之积是完全平方数.（第 49 届莫斯科数学奥林匹克试题）

证明　不大于 30 的素数有 10 个：$p_1=2$，$p_2=3$，$p_3=5$，$p_4=7$，$p_5=11$，$p_6=13$，$p_7=17$，$p_8=19$，$p_9=23$，$p_{10}=29$. 令 $Y=\{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{10}^{\alpha_{10}}\mid \alpha_i=0$ 或 $1, i=1, 2, \cdots, 10\}$，X 是 M 的所有二元子集组成的集族.

对任意 $\{a, b\}\in X$，乘积 ab 可唯一写成下列形式：$ab=K_{ab}^2\cdot m_{ab}$，其中 $K_{ab}\in\mathbf{N}_+$，$m_{ab}\in Y$. 我们就令 $\{a, b\}$ 与 m_{ab} 对应，构成一个从 X 到 Y 的映射 f. 因为 $|X|=C_{48}^2=1128$，$|Y|=2^{10}=1024$，有 $|X|>|Y|$，所以 f 不是单射，故存在 $\{a, b\}$，$\{c, d\}\in X$，$\{a, b\}\neq\{c, d\}$ 使 $m_{ab}=f(\{a, b\})=f(\{c, d\})=m_{cd}$，从而

$$abcd=K_{ab}^2m_{ab}\cdot K_{cd}^2m_{cd}=(K_{ab}K_{cd}m_{ab})^2$$

为完全平方数，如果 a, b, c, d 互不相等，那么结论成立. 否则 $\{a, b\}$ 中恰有一个数与 $\{c, d\}$ 中一个数相等. 不妨设 $a\neq c$，$b=d$. 于是由 $abcd=acb^2$ 是完全平方数知 ac 是完全平方数，从 M 中去掉 a，c 两个数，还剩 46 个数，因为 $C_{46}^2=1035>1024=|Y|$，故同理可证 $X\backslash\{\{a, c\}\}$ 中存在两个不同的二元子集 $\{a', b'\}$，$\{c', d'\}$ 使 $a'b'c'd'$ 为完全平方数. 如果 a'，b'，c'，d' 互不相同，那么结论成立，否则同理可以不妨设 $a'\neq c'$，$b'=d'$ 且 $a'c'$ 为完全平方数，于是存在两个没有公共元的二元子集 $\{a, c\}$，$\{a', c'\}$，使 $aca'c'$ 为完全平方数. 证毕.

除了上述一对一的映射方法外，有时还要用到一个对多个的对应方法.

例 15 圆周上有 n 个点 $(n \geqslant 6)$，每两点连一线段，假设其中任意三条线段在圆内不共点，于是任意三条两两相交的线段构成一个三角形，试求这些线段确定的三角形的个数.(第 32 届 IMO 中国国家集训队练习题)

解 我们称圆周上的点为外点，任意两条对角线在圆内的交点为内点，则所确定的三角形按其顶点可分为四类：

第一类三角形的三个顶点均为外点，设其个数为 I_1；

第二类三角形的三个顶点中有 2 个外点 1 个内点，设其个数为 I_2；

第三类三角形的三个顶点中有 1 个外点 2 个内点，设其个数为 I_3；

第四类三角形的三个顶点均为内点，设其个数为 I_4.

显然第一类三角形与圆周上 3 点组集合成一一对应，所以 $I_1 = C_n^3$.

其次，如图 6-5(1)圆周上任取 4 点 A_1，A_2，A_3，A_4 两两相连的线段，确定了 4 个第二类三角形：$\triangle A_1OA_2$，$\triangle A_2OA_3$，$\triangle A_3OA_4$，$\triangle A_4OA_1$，反之每 4 个这样有公共内顶点的第二类三角形对应了圆周上的一个 4 点组，于是 $I_2 = 4C_n^4$.

类似地，如图 6-5(2)，圆周上任取 5 点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，两两连一线段，确定了 5 个第三类三角形：$\triangle A_1B_1B_2$，$\triangle A_2B_2B_3$，$\triangle A_3B_3B_4$，$\triangle A_4B_4B_5$，$\triangle A_5B_5B_1$，于是可得 $I_3 = 5C_n^5$.

最后，如图 6-5(3)，圆周上任取 6 点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 对应于 1 个第四类三角形，所以 $I_4 = C_n^6$.

综上所述，得所确定的三角形共有 $C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6$ 个.

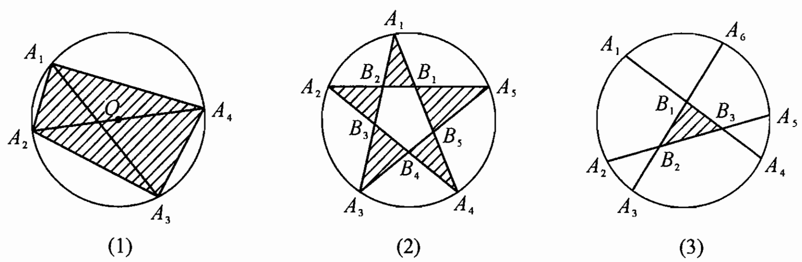


图 6-5

习 题 6

1 从$\{1, 2, \cdots, 100\}$中任取 55 个不同的数，问其中是否必有两个数，使得这两个数之差等于：(a)9；(b)11？

2 设 $n\equiv 1 \pmod 4$ 且 $n>1$，$P=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的任意排列，k_P 表示使下列不等式成立的最大下标 k：

$$a_1+a_2+\cdots+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n,$$

试对一切可能的排列 P，求对应的 k_P 的总和.

3 由平面格点 (x, y) $(1\leqslant x\leqslant 12, 1\leqslant y\leqslant 12, x, y$ 为整数$)$组成点集 M，将 M 中每一点任意染上红、蓝、黑三色之一. 证明：其中必存在 4 个同色点，它们是一个其边与 x 轴、y 轴平行的矩形的 4 个顶点.

4 某城市共有 n 条公共汽车路线，满足如下条件：(1)任意一个车站至多有 3 条线路经过；(2)任意一条线路上至少有 2 个车站；(3)对任意指定的两条线路，都可以找到第三条线路使得乘客可以从指定的两条线路中的任意一条经过所找出的第三条线路转到另一条.

证明：车站的数目至少有 $\dfrac{5}{6}(n-5)$.（第 46 届 IMO 中国国家集训队测试题）

5 在 $m\times n$ 棋盘的一个格子中放一枚棋子，两人轮流走，每步可将棋子从一格走到与它有公共边的邻格中，但已经走过的格子不能第二次进入，谁最后没处可走谁输.

(1) 若开始棋子放在左下角格子中，则谁有必胜策略？

(2) 若开始的棋子放在左下角格子的邻格中，则谁有必胜策略？

6 以凸 n 边形的顶点为顶点，对角线为边的凸 k 边形共有多少个？

7 将数集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中所有元素的算术平均值记为 $P(A)\left(P(A)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$. 若 B 是 A 的非空子集，且 $P(B)=P(A)$，则称 B 是 A 的均衡子集. 试求数集 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的所有均衡子集的个数.（第 2 届中国东南地区数学奥林匹克试题）

8 在一个车厢中，任何 $m(\geqslant 3)$ 个旅客都有唯一的公共朋友（当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友，任何人不是自己的朋友）. 问这个车厢中有朋友最多的人有多少个朋友？（第 31 届 IMO 中国国家集训队选拔考试试题）

9 设 A_i 是有限集合，$i=1, 2, \cdots, n$. 若 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\dfrac{|A_i\cap A_j|}{|A_i|\cdot|A_j|}<1$，证明存在 $a_i\in A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 使得当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

10 设有 $mn+1$ 个互不相等的实数组成数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}$，证明其中或有一个长为 $n+1$ 的递增子列或有一个长为 $m+1$ 的递减子列.（这里一个数列的长指的是该数列的项数）

11 由 a, b 两个字母排成的长为 15 的序列中，恰好出现"aa"5 次，"ab"，

“ba”，“bb”各 3 次的序列有多少个？

12 设 n 为偶数，从整数 $1, 2, \cdots, n$ 中选取 4 个不同的数 a, b, c, d 满足 $a+c=b+d$，求不同的选取方法（不考虑 a, b, c, d 的顺序）的种数.

13 n 项的 0，1 序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为长为 n 的二元序列. a_n 为无连续三项成 0，1，0 的长为 n 的二元序列的个数，b_n 为无连续四项成 0，0，1，1 或 1，1，0，0 的长为 n 的二元序列的个数. 证明：对每一个正整数 n，$b_{n+1}=2a_n$.（第 25 届美国数学奥林匹克试题）

7 算二次方法

设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是两个有限集合，将所有形如 $(a_i, b_j)(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$ 的有序对构成的集合称为 A 与 B 的笛卡儿乘积，并用记号 $A\times B$ 表示. 对任意 $a_i\in A$, 设 $C_i=\{(a_i, b)\mid b\in B\}(i=1, 2, \cdots, m)$, 对任意 $b_j\in B$, 设 $D_j=\{(a, b_j)\mid a\in A\}(j=1, 2, \cdots, n)$, 于是 $|A\times B|=\sum_{i=1}^{m}|C_i|=\sum_{j=1}^{n}|D_j|$, 这个等式叫做富比尼(Fubini)原理，又叫做算二次原理.

运用算二次原理的方法主要体现在对同一对象从两种不同的角度去进行计数，再加以综合，以便推出所欲取得的结果.

例1 一张正方形纸片内有 1000 个点，这些点及正方形的顶点中任意 3 点不共线，然后在这些点及正方形顶点之间连一些线段，将正方形全部分成小三角形(以所连线段及正方形的边为边，且所连线段除端点外，两两无公共点)，问一共连有多少条线段？一共得到多少个三角形？

解 设一共连有 l 条线段，一共得到 k 个三角形.

一方面，所得 k 个三角形的内角总和为 $k\cdot 180°$，另一方面，所得 k 个三角形中，以 1000 个内点为顶点的所有内角之和为 $1000\times 360°$，以正方形的顶点为顶点的所有内角之和为 $4\times 90°$，所以

$$k\cdot 180°=1000\times 360°+4\times 90°,$$

解得 $k=2002$.

其次，每个三角形有 3 条边，k 个三角形一共有 $3k$ 条边，另一方面，所连每条线段是两个三角形的公共边，而正方形的每条边都是一个三角形的一边，于是 $3k=2l+4$，解得 $l=\frac{3}{2}k-2=3001$.

例2 8 位歌手参加艺术节，准备为他们安排 m 次演出，每次由其中 4 位登台表演，并且 8 位歌手中任意两位同台演出的次数一样多，请设计一种方案，使他们一共演出的次数 m 最少.(第 11 届 CMO 试题)

解 设任意一对歌手同台演出的次数都为 r. 若某对歌手 a_i, a_j 同在第 k 场演出，则将 (a_i, a_j, k) 组成一个三元组，设这种三元组共有 S 个，一方面，因为 8 位歌手可形成 $C_8^2=28$ 对，每对歌手同台演出 r 次，所以 $S=28r$.

另一方面，每场有 4 位歌手参加，可形成 C_4^2 个三元组，m 场演出一共可形成 $m\,C_4^2$ 个三元组，所以 $S=mC_4^2=6m$. 于是 $6m=28r$, $3m=14r$.

因为 $(3, 14)=1$, 故 $14\mid m$，从而 $m\geqslant 14$.

下面实例说明 $m=14$（从而 $r=3$）是可以实现的（数字 1 至 8 代表 8 位歌手，每个括号内的 4 个数字代表同台演出的 4 位歌手）：

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 7, 8\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 6, 8\},$$
$$\{1, 4, 5, 8\}, \{1, 4, 6, 7\}, \{2, 3, 5, 8\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{2, 4, 5, 7\},$$
$$\{2, 4, 6, 8\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8\}.$$

综上可知，所求 m 的最小值为 14.

注 进一步，我们可以求出当 m 取最小值时（必有 $r=3$），每位歌手参加演出的场数. 设第 i 位歌手 a_i 参加了 n_i 场演出 $(i=1, 2, \cdots, 8)$. 考虑含 a_1 的三元组 (a_1, a_i, k) $(2\leqslant i\leqslant 8)$ 的个数 S_1，一方面对任意 $a_i(2\leqslant i\leqslant 8)$, a_1 与 a_i 同台演出了 $r=3$ 场，故含 a_1, a_i 的三元组有 3 个，又 a_i 有 7 种取法，所以 $S_1=3\times 7=21$. 另一方面 a_1 共参加 n_1 场演出，每场演出时，a_1 与其他 3 位歌手同台，故 $S_1=3n_1$. 于是 $3n_1=21$，由此得 $n_1=7$. 同理可得 $n_2=n_3=\cdots=n_8=7$. 即每位歌手都参加了 7 场演出.

例 3 有 n 个人，已知他们任意 2 人至多通话一次，他们任意 $n-2$ 个人之间通话的总次数相等，都等于 3^k（k 为正整数）. 求 n 的所有可能值.（2000 年全国高中数学联赛试题）

解 设 n 个人之间通话的总次数为 m，因为 n 个人可形成 C_n^{n-2} 个 $n-2$ 人组，而每 $n-2$ 人之间通话的总次数都为 3^k，故所有 $n-2$ 组中通话次数的总和为 $C_n^{n-2}\cdot 3^k$.

另一方面，上述计数中，每一对通话的人，属于 C_{n-2}^{n-4} 个 $n-2$ 组，故每 2 人间的一次通话重复计算了 C_{n-2}^{n-4} 次，所以

$$m=\frac{C_n^{n-2}\cdot 3^k}{C_{n-2}^{n-4}}=\frac{C_n^2\cdot 3^k}{C_{n-2}^2}=\frac{n(n-1)3^k}{(n-2)(n-3)}.$$

(1) 若 3 不整除 n，即 $(3, n)=1$，则 $(n-3, n)=1$, $(n-3, 3^k)=1$，又 $(n-2, n-1)=1$，所以 $n-3\mid n-1$，即 $\dfrac{n-1}{n-3}=1+\dfrac{2}{n-3}$ 为正整数，所以 $n-3\mid 2$, $n-3\leqslant 2$, $n\leqslant 5$. 又 $C_{n-2}^2\geqslant 3^k\geqslant 3$，所以 $n\geqslant 5$，故 $n=5$.

(2) 若 3 整除 n,则 $3\mid n-3$, $3\nmid n-2$, 即 $(3,\ n-2)=1$, 又 $(n-2,\ n-1)=1$, 所以 $n-2\mid n$, 即 $\dfrac{n}{n-2}=1+\dfrac{2}{n-2}$ 为正整数,故 $n-2\mid 2$, 由此得 $n-2\leqslant 2$, $n\leqslant 4$, 这与(1)中已证 $n\geqslant 5$ 矛盾.

由(1),(2)知 n 只可能为 5,另一方面,若有 $n=5$ 个人,其中每 2 人通一次电话,则任意 $n-2=3$ 人之间通电话的次数都为 $C_3^2=3^1$ (这里 $k=1$ 为正整数)满足题目要求,故所求正整数只有一个 $n=5$.

例 4 设 $2\leqslant r\leqslant\dfrac{n}{2}$, $\mathscr{A}$ 为 $Z=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的一些 r 元子集所成的集族. 如果 $\mathscr{A}$ 中的每两个元素(Z 的 r 元子集)的交非空,那么 $|\mathscr{A}|\leqslant C_{n-1}^{r-1}$, 当 $\mathscr{A}=\{A\mid A$ 为 Z 的 r 元子集且含有 Z 的一个固定元素 $x\}$ 时等号成立(Erdös-Ko-Rado 定理)

证明 把 Z 的元素任意排在一个圆周上有 $(n-1)!$ 种排列方法,对于每种排列方法 $\pi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)!)$, 如果 A_i 中的元素在 π_j 中相连没有间断,则将 $(A_i,\ \pi_j)$ 配成一对,这种对子的集合记为 S. 一方面,因为 $\mathscr{A}$ 中每两个元素(Z 的 r 元子集)的交非空,且 $2\leqslant r\leqslant\dfrac{n}{2}$, 故对每个排列 π_j, 至多有 r 个集合 $A_i\in\mathscr{A}$ 使得每个 A_i 中的元素在 π_j 中是相连没有间断的,即含 π_j 的对子 $(A_i,\ \pi_j)$ 至多有 r 个,而 π_j 有 $(n-1)!$ 个,所以

$$|S|\leqslant r\cdot(n-1)!. \tag*{①}$$

另一方面,对 $\mathscr{A}$ 中每个 A_i, 使 A_i 中元素在圆周上相连不间断的圆排列有 $r!(n-r)!$ 个,而 $\mathscr{A}$ 中元素 A_i 共有 $|\mathscr{A}|$ 个,故

$$|S|=|\mathscr{A}|\cdot r!\cdot(n-r)!, \tag*{②}$$

由①及②得

$$|\mathscr{A}|\cdot r!\cdot(n-r)!\leqslant r(n-1)!.$$

由此可得 $|\mathscr{A}|\leqslant\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=C_{n-1}^{r-1}$.

其次,当 $\mathscr{A}=\{A\mid A$ 为 Z 的 r 元子集且含 Z 的一个固定元素 $x\}$ 时, $\mathscr{A}$ 中的 A 恰有 C_{n-1}^{r-1} 个,这时 $|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$ 成立.

注 进一步可以证明,本题中等号成立的条件不仅是充分的,也是必要的.

例 5 已知集合 $M=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{4n+3}\}$, 它的 $4n+3$ 个子集 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{4n+3}$ 具有以下性质:

(1) M 中每 $n+1$ 个元素恰属于唯一一个子集 $A_j(1\leqslant j\leqslant 4n+3)$；

(2) $|A_i|\geqslant 2n+1(i=1,2,\cdots,4n+3)$.

证明：任意两个子集 A_i 与 $A_j(1\leqslant i<j\leqslant 4n+3)$ 恰有 n 个公共元.

证明 作 $(4n+3)\times(4n+3)$ 数表，其中第 i 行第 j 列处的数为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, 若\ x_i\in A_j,\\ 0, 若\ x_i\notin A_j,\end{cases}\quad i,j=1,2,3,\cdots,4n+3.$$

并记 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{4n+3}a_{ij}$，$l_j=\sum\limits_{i=1}^{4n+3}a_{ij}$，显然 r_i 表示 x_i 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{4n+3}$ 中 r_i 个集合，而 $l_j=|A_j|$ 表示 A_j 中元素个数，于是由已知条件(2)有

$$\sum_{i=1}^{4n+3}r_i=\sum_{i=1}^{4n+3}\sum_{j=1}^{4n+3}a_{ij}=\sum_{j=1}^{4n+3}\sum_{i=1}^{4n+3}a_{ij}=\sum_{j=1}^{4n+3}|A_j|\geqslant(2n+1)(4n+3).\qquad ①$$

若 x_k 同时属于集合 A_i 与 $A_j(1\leqslant i<j\leqslant 4n+3)$，则将 $(x_k;A_i,A_j)$ 组成三元组，这种三元组的集合记为 S. 一方面，由已知条件(1)知对任意 A_i，$A_j(1\leqslant i<j\leqslant 4n+3)$，有 $|A_i\cap A_j|\leqslant n$，故至多有 n 个 x_k 与 A_i，A_j 组成三元组 $(x_k;A_i,A_j)\in S$，所以

$$|S|\leqslant n\cdot C_{4n+3}^2=n(4n+3)(2n+1).\qquad ②$$

另一方面，每一个 x_k 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{4n+3}$ 中 r_k 个子集，可形成 $C_{r_k}^2$ 个含 x_k 的三元组，所以

$$|S|=\sum_{k=1}^{4n+3}C_{r_k}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4n+3}r_k^2-\sum_{k=1}^{4n+3}r_k\right).$$

由上式利用柯西(Cauchy)不等式及①、②得

$$\begin{aligned}n(4n+3)(2n+1)&\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4n+3}r_k^2-\sum_{k=1}^{4n+3}r_k\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4n+3}\left(\sum_{k=1}^{4n+3}r_k\right)^2-\sum_{k=1}^{4n+3}r_k\right]\\&=\frac{1}{2(4n+3)}\left(\sum_{k=1}^{4n+3}r_k\right)\left[\sum_{k=1}^{4n+3}r_k-(4n+3)\right]\\&\geqslant\frac{1}{2(4n+3)}\cdot(4n+3)(2n+1)[(4n+3)(2n+1)-\\&\quad(4n+3)]\\&=n(4n+3)(2n+1).\end{aligned}$$

可见，上式中等号成立，从而②中等号成立，即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 4n+3$，有

$|A_i \cap A_j| = n$.

例 6　设 n 和 k 是正整数，S 是平面内 n 个点的集合，满足：

(1) S 中任何三点不共线；

(2) 对 S 中每一个点 P，S 中至少有 k 个点与 P 的距离相等.

求证：$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.（第 30 届 IMO 试题）

证法一　设 $S = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，依题意，对任意 $P_i \in S$，存在以 P_i 为中心的圆 C_i，在 C_i 上至少有 S 中 k 个点 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 设 C_i 上恰有 S 中的 r_i 个点，而且 P_i 恰在 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中 e_i 个圆上 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，于是

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \geqslant kn. \qquad ①$$

若 S 中的点 P_i 同时在两个圆 C_r 和 C_j 上，则将 $(P_i;\ C_r,\ C_j)$ 组成一个三元组，这种三元组形成的集合记为 M，一方面，每两个圆至多有 2 个交点，至多形成 2 个三元组，n 个圆至多形成 $2\mathrm{C}_n^2$ 个三元组，所以 $|M| \leqslant 2\mathrm{C}_n^2$. 另一方面，因 P_i 在 e_i 个圆上，可形成 $\mathrm{C}_{e_i}^2$ 个含 P_i 的三元组 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，故 $|M| = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{e_i}^2$.

综合两方面，并利用柯西(Cauchy)不等式及①得

$$\begin{aligned} 2\mathrm{C}_n^2 &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{e_i}^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n} e_i\Big) \geqslant \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} e_i\Big] \\ &= \frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i - n\Big) \geqslant \frac{1}{2n}(kn)(kn - n) \\ &= \frac{1}{2} nk(k-1), \end{aligned}$$

即 $k^2 - k - 2(n-1) \leqslant 0$，所以 $k \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n-1)}}{2} < \frac{1 + \sqrt{8n}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

证法二　由题意，可以 S 中每点为中心作一个圆，使每个圆上至少有 k 个点属于 S.

我们称两端点均属于 S 的线段为好线段. 一方面，好线段显然共有 C_n^2 条. 另一方面，每个圆上至少有 C_k^2 条弦是好线段，n 个圆共有 $n\mathrm{C}_k^2$ 条弦是好线段，但其中有一些公共弦被重复计算了. 由于每两个圆至多有一条公共弦，n 个圆至多有 C_n^2 条公共弦（这些公共弦不一定是好线段），故好线段的条数不少于 $n\mathrm{C}_k^2 - \mathrm{C}_n^2$.

综合上述两个方面得 $C_n^2 \geqslant nC_k^2 - C_n^2$，即 $k^2-k-2(n-1)\leqslant 0$，所以 $k\leqslant \frac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} < \frac{1+\sqrt{8n}}{2} = \frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

注 (1) 本题的两种证法都说明了题目中第一个条件是多余的.

(2) 用算二次方法证明题目时，由于选择的计算量不同，常常得到的证明方法不全相同. 本题的证法二显然较证法一简便. 但从例 5 以及今后的例题会看到，计算"三元组"是一个有效的方法.

(3) 算二次时，如果两方面都是精确结果，综合起来就得到一个等式，如果至少一个方面采取了估计(即算了量的上界或下界)，那么综合起来就得到了一个不等式.

例 7 证明：$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$.(第 9 届 CMO 试题)

证法一 一方面 $(1+x)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k$ 中 x^n 的系数等于 C_{2n+1}^n. 另一方面

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{2n+1} &= (1+2x+x^2)^n(1+x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^k (1+x^2)^{n-k}\cdot(1+x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k (1+x^2)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^{k+1}(1+x^2)^{n-k}. \qquad ①
\end{aligned}
$$

当 $n-k$ 为奇数时，$C_n^k 2^k x^k (1+x^2)^{n-k} = C_n^k 2^k x^k \sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i x^{2i}$ 中无 x^n 的项，而 $C_n^k 2^k x^{k+1}(1+x^2)^{n-k} = C_n^k 2^k x^{k+1} \sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i x^{2i}$ 中含 x^n 的项为 $C_n^k 2^k x^{k+1} C_{n-k}^{\frac{n-k-1}{2}} x^{2\left(\frac{n-k-1}{2}\right)} = C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} x^n$.

当 $n-k$ 为偶数时，类似可得 $C_n^k 2^k x^k (1+x^2)^{n-k}$ 中含 x^n 的项为 $C_n^k 2^k x^k C_{n-k}^{\frac{n-k}{2}} x^{2\left(\frac{n-k}{2}\right)} = C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} x^n$，而 $C_n^k 2^k x^{k+1}(1+x^2)^{n-k}$ 中无 x^n 的项.

可见①式右端中 x^n 的系数为 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$.

证明二 一方面 $2n+1$ 个元素的集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}\}$ 的 n 元子集共有 C_{2n+1}^n 个. 另一方面将 S 分为 n 个二元子集和一个单元素集：

$$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \cdots, \{a_{2n-1}, a_{2n}\}, \{a_{2n+1}\}$$

将 S 的 n 元子集分为 $n+1$ 类：第 k 类的每一个 n 元子集中恰有 k 个元取自上述 k 个二元子集(每个二元子集恰取出一个元素)，其方法数为 $C_n^k\cdot 2^k$，其余

$n-k$ 个元取自余下的子集：

当 $n-k$ 为偶数时，a_{2n+1} 必不取出，余下 $n-k$ 元取自剩下 $n-k$ 个二元子集中的 $\frac{n-k}{2}$ 个子集(每个子集的两个元都取出)，共有 $C_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}=C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 种方法.

当 $n-k$ 为奇数，a_{2n+1} 必取出，余下 $n-k-1$ 个元取自余下的 $n-k$ 个二元子集中的 $\frac{n-k-1}{2}$ 个(每个子集中的两个元都取出)，共有 $C_{n-k}^{\frac{n-k-1}{2}}=C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 种方法.

可见第 k 类 n 元子集有 $C_n^k2^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个，又 $k=0,1,2,\cdots,n$. 故 S 的 n 元子集共有 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k2^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个.

综合上述两个方面得 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k2^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^n$.

习　题　7

1 两个高一的学生被允许参加高二学生的象棋比赛，参加比赛的每个选手都同其他选手比赛一次，胜得一分，和得半分，负得零分. 两个高一的学生一共得 8 分，每个高二的学生都和他的同年级同学得分相同. 问有几个高二的学生参加比赛？他们每人得几分？

2 一所学校有 b 个老师和 c 个学生且满足：(1)每个老师恰教 k 个学生；(2)对任意两个不同的学生恰有 h 个老师同时教他们. 求证：$\frac{b}{h}=\frac{c(c-1)}{k(k-1)}$.（2004 年第 7 届香港数学奥林匹克试题）

3 设 $A_i\subseteq M=\{1,2,\cdots,2010\}$ 且 $|A_i|\geqslant 335(i=1,2,\cdots,30)$，证明：存在 A_i，$A_j(1\leqslant i<j\leqslant 30)$ 满足 $|A_i\cap A_j|\geqslant 47$.

4 平面内给定 n 个相异的点，证明：其中距离为单位长的点对数少于 $\frac{n}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}$.

5 由 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成 n 个元素对 $p_1,p_2,\cdots,p_n$. 已知当且仅当 a_i 与 a_j 组成元素对时，p_i 与 p_j 有公共元. 证明：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中每个元素恰属于两个元素对.

6 用两种方法证明：对一切正整数 n 有 $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n-2i}C_n^{n-2i}C_{2i}^i=C_{2n}^n$.

8 递推方法

从第四讲例 6，例 7 和例 8 可以看出应用递推方法解组合问题的一般步骤是：

(1) 用枚举法求初始值；

(2) 建立递推关系；

(3) 利用递推关系求解.

当利用已建立的递推关系求解遇到困难时，还应考虑建立新的递推关系，而在建立递推关系遇到困难时，则可列举简单情形寻求启示，从中归纳得出要求的递推关系.

例 1　整数 $1, 2, \cdots, n$ 的排列满足：每个数或者大于它前面的所有的数，或者小于它前面的所有的数，试问有多少个这样的排列？（第 21 届加拿大数学奥林匹克试题）

解　记所求排列的个数为 a_n.

$n=1$ 时，只有数 1，显然 $a_1=1$. $n=2$ 时，显然只有 2 个排列 1，2 和 2，1，所以 $a_2=2$.

对于 $n>2$，考虑 n 在第 i 个位置的排列，这时 n 之后的 $n-i$ 个数的位置唯一确定，只能是 $n-i, n-i-1, \cdots, 2, 1$，而它前面的 $i-1$ 个数有 a_{i-1} 种排法（约定 $a_0=1$），又 $i=1, 2, \cdots, n$，故必有

$$a_n=1+a_1+\cdots+a_{n-1},$$

从而

$$a_{n-1}=1+a_1+\cdots+a_{n-2}(n\geqslant 3),$$

两式相减得 $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 3)$，所以 $a_n=a_2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$，经检验 $a_1=1$，$a_2=2$ 满足 $a_n=2^{n-1}$，所以 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant 1)$，即所求的排列个数为 2^{n-1}.

例 2　A 城有 n 个女孩和 n 个男孩，且每个女孩都认识所有的男孩. B 城有 n 个女孩 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 和 $2n-1$ 个男孩 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n-1}$，其中女孩 g_i 认识男孩 $b_1, b_2, \cdots, b_{2i-1}$，但不认识其他男孩，$i=1, 2, \cdots, n$. 对任意的 $r=$

1，2，…，n. 从 A 城和 B 城各选取 r 个女孩与 r 个男孩组成 r 对舞伴，要求每个女孩的舞伴都是自己认识的男孩，分别将 A 城和 B 城满足要求的舞伴的不同选法种数记为 $A(r)$ 和 $B(r)$，求证 $A(r)=B(r)$，$r=1, 2, \cdots, n$.（第 38 届 IMO 预选试题）

证明　为了便于用递推方法，将题中 $A(r)$ 和 $B(r)$ 分别记为 $A_n(r)$ 和 $B_n(r)$. 因为 A 城的 n 个女孩中每人都认识所有的男孩，故有

$$A_n(r)=(C_n^r)^2\cdot r!=\frac{(n!)^2}{[(n-r)!]^2\cdot r!}, \qquad ①$$

下面建立 $B_n(r)$ 的递推关系式，设 $n\geqslant 3$，$2\leqslant r\leqslant n$. 考察 B 城中选取 r 对舞伴且每个女孩都认识自己舞伴的所有可能选法，分两种情况来记数.

当 g_n 是选中的 r 个女孩之一时，其余 $r-1$ 对舞伴共有 $B_{n-1}(r-1)$ 种不同选法，g_n 可在余下 $(2n-1)-(r-1)=2n-r$ 个男孩中任选 1 个男孩为舞伴，共有 $2n-r$ 种选法，由乘法原理知这种情况共有 $(2n-r)B_{n-1}(r-1)$ 种不同选法.

当 g_n 未被选中时，当然有 $r<n$，于是 r 个女孩全部选自 $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ 且他们的舞伴来自于 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n-3}$ 之中，所以不同选法数恰为 $B_{n-1}(r)$，这样一来，当 $n\geqslant 3$ 时，总有

$$\left.\begin{aligned}&B_n(r)=B_{n-1}(r)+(2n-r)B_{n-1}(r-1)\\&B_n(n)=nB_{n-1}(n-1)\end{aligned}\right\} \qquad ②$$

其中 $r=2, 3, \cdots, n-1$.

因为 $A_n(1)=n^2=B_n(1)$ 和 $A_2(2)=2=B_2(2)$，并且由①有

$$A_{n-1}(r)=\frac{[(n-1)!]^2}{[(n-1-r)!]^2 r!},\ A_{n-1}(r-1)=\frac{[(n-1)!]^2}{[(n-r)!]^2(r-1)!},$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}&A_n(r)=A_{n-1}(r)+(2n-r)A_{n-1}(r-1)\\&A_n(n)=nA_{n-1}(n-1)\end{aligned}\right\} \qquad ③$$

②，③表明，$A_n(r)$ 与 $B_n(r)$ 有相同的递推关系并且它们有相同的初始值. 所以对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 和 $r=1, 2, \cdots, n$，均有 $A_n(r)=B_n(r)$，证毕.

例 3　一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每行中的数字均等于其肩上的两个数的和，最后一行仅一个数. 第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是________（可以用指数表示）.（2009 年全国高中数学联赛试题）

解 易知：

(1) 该数表共有 100 行；

(2) 每一行构成一个等差数列，且公差依次是：

$$d_1=1,\ d_2=2,\ d_3=2^2,\ \cdots,\ d_{99}=2^{98};$$

(3) 设第 n 行中第一个数为 a_n，则 a_{100} 即为所求.

依题意

$$a_n=a_{n-1}+(a_{n-1}+2^{n-2})=2a_n+2^{n-2},$$

即 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{4}$. 于是 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，所以

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{1}{4}(n+1),$$

故 $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，特别，$a_{100}=101\times 2^{98}$. 也就是表中最后一行的数是 101×2^{98}.

例 4 一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时，在每个顶点处染红、蓝两种颜色之一，使得相邻两个顶点的数字和颜色至少有一个相同，问该种密码锁共有多少种不同的密码设置？(2010 年全国高中数学联赛试题)

解 设共有 a_n 种不同的密码设置，且不妨设一个点为正 1 边形，一条线段为正 2 边形，于是 $a_1=4$，$a_2=4\times 3=12$.

依次将 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 赋值和染色，使得 A_{i+1} 与 A_i 的数字与颜色中至少有一种相同，于是 A_1 有 4 种设置，当 A_i 取定后，A_{i+1} 有 3 种设置 ($i=1$，2，$\cdots$，$n-1$)，故共有 $4\times 3^{n-1}$ 种设置.

设其中 A_n 与 A_1 的数字与颜色都不相同的有 b_n 种，A_n 与 A_1 的数字与颜色完全相同的有 c_n 种，A_n 与 A_1 的数字与颜色恰有一种相同的有 d_n 种，则

$$a_n+b_n=4\times 3^{n-1}, \quad ①$$

$$c_n=a_{n-1}, \quad ②$$

$$a_n=c_n+d_n, \quad ③$$

$$b_n=b_{n-1}+d_{n-1}, \quad ④$$

由①得

$$a_{n-1}+b_{n-1}=4\times 3^{n-2}. \quad ⑤$$

①－⑤得

$$(a_n-a_{n-1})+(b_n-b_{n-1})=4\times(3^{n-1}-3^{n-2})=8\times3^{n-2}. \qquad ⑥$$

而由④，③，②有

$$b_n-b_{n-1}=d_{n-1}=a_{n-1}-c_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}, \qquad ⑦$$

⑦代入⑥得

$$(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})=8\times3^{n-2},$$

所以 $$a_n-a_{n-2}=8\times3^{n-2}(n\geqslant3).$$

于是，当 $n=2k$ 时，

$$\begin{aligned}a_n=a_{2k}&=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2k}-a_{2k-2})\\&=12+8\times3^2+8\times3^4+\cdots+8\times3^{2k-2}\\&=12+\frac{8\times3^2\times(3^{2k-2}-1)}{3^2-1}=12+3^2\times(3^{2k-2}-1)\\&=3^{2k}+3=3^n+2+(-1)^n.\end{aligned}$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$\begin{aligned}a_n=a_{2k+1}&=a_1+(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+\cdots+(a_{2k+1}-a_{2k-1})\\&=4+8\times3+8\times3^3+\cdots+8\times3^{2k-1}\\&=4+\frac{8\times3\times(3^{2k}-1)}{3^2-1}=4+3\times(3^{2k}-1)\\&=3^{2k+1}+1=3^n+2+(-1)^n,\end{aligned}$$

故总有 $a_n=3^n+2+(-1)^n$.

综上得不同的密码设置共有 $3^n+2+(-1)^n$ 种.

例 5 将周长为 24 的圆周等分为 24 段，从 24 个分点中选取 8 个分点使得其中任意两点所夹的弧长不等于 3 和 8，问满足要求的 8 点组的不同取法有多少种？(2001 年 CMO 试题)

解 设 24 个分点依次为 1，2，…，24. 将这 24 个数列成下表：

1	4	7	10	13	16	19	22
9	12	15	18	21	24	3	6
17	20	23	2	5	8	11	14

表中每行相邻两数所代表的点所夹的弧长等于 3(认为同一行首尾两数也相邻)，每列相邻两数所代表的点所夹的弧长等于 8(认为同一列首尾两数也相邻)，故每列中至多只能取出 1 个数，8 列至多取出 8 个数，但一共要取出

8 个数，故每列恰取出一个数且相邻两列所取的数不同行.（认为首尾两列也相邻）

仿照例 4，若将每列看成正 n 边形的一个顶点（本例中 $n=8$），每列中第一、二、三行看成 3 种不同的颜色，则这个问题等价于下列问题中 $n=8$ 的情形：将正 n 边形的 n 个顶点染色，每个顶点任意染成红、蓝、黄三种颜色之一，使任意相邻两顶点不同色，则不同的染色方法共有多少种？（约定线段叫做正二边形）.

假设共有 a_n 种不同的染色方法，则类似于例 4 可得 $a_2=3\times 2$，$a_n+a_{n-1}=3\times 2^{n-1}(n\geqslant 3)$ 于是

$$\begin{aligned}a_8&=(a_8+a_7)-(a_7+a_6)+(a_6+a_5)-(a_5+a_4)+\\&\quad(a_4+a_3)-(a_3+a_2)+a_2\\&=3\times 2^7-3\times 2^6+3\times 2^5-3\times 2^4+3\times 2^3-3\times 2^2+3\times 2\\&=\frac{3\times 2^7\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^8+2=258(\text{种}).\end{aligned}$$

故共有 258 种不同的取法.

注 1　本题的解答也可由习题 8 中第 5 题的解答内给出的公式令 $n=8$，$m=3$ 而得到.

注 2　本题可推广为下列一般性结论：

设 m，n 为大于 1 的正整数，又 $d=(m,n)$ 表示 m，n 的最大公约数且 $n>d$. 将周长为 mn 的圆周等分为 mn 段，从 mn 个分点中取 n 个点，使其中任意两点所夹的弧长不等于 m 和 $kn\left(k=1,2,\cdots,\left[\frac{m}{2}\right]\right)$，记满足要求的 n 点组的不同取法总数为 $A_n(m)$，则 $A_n(m)=\left[(m-1)^{\frac{n}{d}}+(-1)^{\frac{n}{d}}\right]^d$.

关于这一命题的证明读者可参看下列论文：张垚，两道 2001 年数学竞赛试题的关联，中学数学（湖北），2002 年第 5 期.

例 6　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列，设 $f(n)$ 是满足下述条件的排列的个数：

(1) $a_1=1$；(2) $|a_i-a_{i+1}|\leqslant 2$，$i=1,2,\cdots,n-1$.

试问 $f(2011)$ 能否被 3 整除？

解　我们称满足条件(1)(2)的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为好排列，因为 $a_1=1$，故由(2)得 $a_2=2$ 或 3.

(1) 若 $a_2=2$，则 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的各项减去 1 后是 $n-1$ 项的好排列，其个数为 $f(n-1)$；

(2) 若 $a_2=3$，$a_3=2$，则必有 $a_3=4$，故 a_4，a_5，…，a_n 的各项减去 3 以后是 $n-3$ 项的好排列，其个数为 $f(n-3)$；

(3) 若 $a_2=3$，$a_3\geqslant 4$，设 a_{k+1} 是该排列中第一个出现的偶数，则前 k 个数应是 1，3，5，…，$(2k-1)$，a_{k+1} 应是 $2k$ 或 $2k-2$，因此 a_k 与 a_{k+1} 是相邻整数.

由条件(2)知道，排在 a_{k+1} 后面的各数，要么都小于它，要么都大于它，因为 2 在 a_{k+1} 后面，故 a_{k+2}，…，a_n 均小于 a_{k+1}. 这只有一种可能，即先依递增顺序排出所有 $\leqslant n$ 的奇数再依递减次序依次排出所有 $\leqslant n$ 的正偶数.

综上所述，有递推关系

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1\ (n\geqslant 4),$$

用枚举法易算出 $f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=2$，由上述递推关系便可算出数列 $\{f(n)\}$ 模 3 的余数依次为

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots$$

这个余数列以 8 为周期(不难用数学归纳法证明这一点)，而 $2011\equiv 251\times 8+3$，故 $f(2011)\equiv f(3)=2 \pmod 3$，所以 $f(2011)$ 不能被 3 整除.

例 7　是否存在无穷多对不同的正整数对 (a,b) 使 $a\mid b^2+1$ 且 $b\mid a^2+1$.

分析　先列举一些满足条件的正整数对 (a,b) 如下表：

a	1	2	5	13	34	…
a^2+1	2	5	26	170	1157	…
b	2	5	13	34	89	…
b^2+1	5	26	170	1157	7922	…

经过观察可以看出 a，b 的取值恰是下列递推数列的相邻两项：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n\,(n\in\mathbf{N}_+)$（这个递推关系也可这样求出，先设 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，再用 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=13$ 代入便可求出 $p=3$，$q=-1$）. 并且 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2+1=a_na_{n+2}$.

解　首先证明下列引理.

引理 1　设 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n\,(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $a_{n+1}^2+1=a_na_{n+2}$.

引理 1 的证明　$n=1$ 时，$a_3=3a_2-a_1=5$，$a_2^2+1=2^2+1=5=a_1a_3$. 设 $n=k$ 时 $a_{k+1}^2+1=a_ka_{k+2}$，那么 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}a_{k+2}^2+1&=a_{k+2}(3a_{k+1}-a_k)+1\\&=3a_{k+2}a_{k+1}-(a_{k+2}a_k-1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3a_{k+2}a_{k+1} - a_{k+1}^2 \\
&= a_{k+1}(3a_{k+2} - a_{k+1}) \\
&= a_{k+1}a_{k+3}.
\end{aligned}
$$

这就完成了引理 1 的证明.

取 $a = a_{n+1}$，$b = a_{n+2}(n \in \mathbf{N}_+)$，于是这样的$(a, b)$有无穷多个不同的对，且满足 $a^2 + 1 = a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2} = a_n b$ 被 b 整除并且 $b^2 + 1 = a_{n+2}^2 + 1 = a_{n+1}a_{n+3} = aa_{n+3}$ 被 a 整除.

注　熟悉斐波那契数列的读者不难发现 a，b 的取值数列恰是下列斐波那契数列的奇数项：

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，\cdots$$

由此可得本题的另一解法.

解法二　先证下列引理.

引理 2　设 $f_1 = 1$，$f_2 = 1$，$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n(n \in \mathbf{N}_+)$，则

$$f_{2n+1}^2 + 1 = f_{2n-1}f_{2n+3}.$$

事实上，因 $f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1} = f_{2n-1} + f_{2n-2} + f_{2n-1} = 2f_{2n-1} + (f_{2n-1} - f_{2n-3}) = 3f_{2n-1} - f_{2n-3}$. 于是同引理 1 可证引理 2 结论成立(只要令 $a_n = f_{2n-1}$，由引理 1 便可推出引理 2)，再取 $a = f_{2n+1}$，$b = f_{2n+3}(n \in \mathbf{N}_+)$ 便知存在无穷多对不同的正整数 a，b 满足 $a \mid b^2 + 1$ 且 $b \mid a^2 + 1$.

例 8　是否存在无穷多个三角形，其三边的长是互素的正整数，面积是完全平方数?

分析与解　若这种三角形存在，设其三边长为 x，y，z(x，y，z 为互素正整数)，记 $p = \dfrac{1}{2}(x + y + z)$，则三角形面积为

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, \qquad ①$$

为了简单起见，不妨令 $p - z = 1$，即 $z = x + y - 2$，$p = x + y - 1$，$p - x = y - 1$，$p - y = x - 1$，则①化为

$$S = \sqrt{(x-1)(y-1)(x+y-1)}, \qquad ②$$

再令 $y - 1 = (a-1)x(a \in \mathbf{N}_+)$ 则 $x + y - 1 = ax$，②化为

$$S = \sqrt{(x-1)(a-1)x \cdot ax} = x\sqrt{a(a-1)(x-1)}, \qquad ③$$

为了使 S 为正整数，我们自然会令 $x - 1 = a(a-1)$，则③化为

$$S=x(x-1)=a(a-1)[a(a-1)+1],$$

但这不保证 S 为完全平方数，改为令 $x-1=4a(a-1)$，即 $x=(2a-1)^2$，则③化为

$$S=a(2a-2)(2a-1)^2.$$

故只需要找出无穷多个正整数 a，使 a 和 $2a-2$ 都为完全平方数. $a=9$ 显然是一个解，一般地只要取 a 为下列递推数列的项即可：

$a_1=9$，$2a_{n+1}-2=4a_n(2a_n-2)$，即 $a_{n+1}=(2a_n-1)^2$.

这时对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，a_n 及 $2a_n-2$ 皆为完全平方数. 事实上，$a_1=9$ 及 $2a_1-2=16$ 为完全平方数设 a_k 及 $2a_k-2$ 为完全平方数，则 $a_{k+1}=(2a_k-1)^2$ 为完全平方数并且 $2a_{k+1}-2=4a_k(2a_k-2)$ 也为完全平方数，故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，a_n 及 $2a_n-2$ 都为完全平方数.

回到原题，取三角形三边的长分别为

$$\begin{aligned}&x=(2a_n-1)^2,\\&y=(a_n-1)x+1=(a_n-1)(2a_n-1)^2+1,\\&z=x+y-2=(2a_n-1)^2+(a_n-1)(2a_n-1)^2+1-2\\&\quad=a_n(2a_n-1)^2-1.\end{aligned}$$

则由 $(x,y)=1$，$(x,z)=1$，$(y,z)=1$ 知 x，y，z 互素，且

$$z-y=(2a_n-1)^2-2>0,$$
$$y-x=(a_n-2)(2a_n-1)^2+1>0,$$

即 $z>y>x$，又 $x+y=a_n(2a_n-1)^2+1>a_n(2a_n-1)^2-1=z$，故以 x，y，z 为边长可构成三角形，且这个三角形的面积为

$$S=a_n(2a_n-2)(2a_n-1)^2.$$

它是一个完全平方数，这就证明了存在无穷多个满足题目条件的三角形.

注 从例 7 和例 8 可以看出，在组合数论和组合几何中，常常要证明存在无穷多个数组或几何图形满足一定的条件（这些条件通常与正整数有关）. 为此，我们可先从一些特殊情形或简单情形做起，进行探索与归纳，构造对应的递推数列来完成证明.

习 题 8

1 运动会开了 $n(>1)$ 天，共发出 m 个奖牌，第 1 天发出 1 个加上余下奖牌

的$\frac{1}{7}$，第 2 天发出 2 个加上余下奖牌的$\frac{1}{7}$，如此继续下去，最后第 n 天刚好发出 n 个奖牌恰无剩余. 问运动会共开了几天？共发出多少个奖牌？（第 9 届 IMO 试题）

2 设 $n\geqslant 2$ 为正整数，问存在多少个$\{1, 2, \cdots, n\}$的排列$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$满足 i 整除 $a_i-a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n-1)$，并求出一切这种排列.

3 各项的值都等于 0 或 1 的数列称为 0，1 数列，设 A 是一个有限的 0，1 数列，$f(A)$表示在 A 中把每个 1 都改为 0，1，每个 0 都改为 1，0 所得到的 0，1 数列，例如

$$f((1, 0, 0, 1))=(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

试问 $f^{(n)}((1))$中连续两项是 0，0 的数对有多少个？这里 $f^{(1)}(A)=f(A)$，$f^{(k)}(A)=f(f^{(k-1)}(A))$，$k=2, 3, \cdots$.

4 设有 2009 个人站成一排，从第 1 名开始 1 至 3 报数，全部报完数后，凡是报到 3 的倍数的人就退出队伍，其余的人向前靠拢站成新的一排，再按此规则继续进行，直到经过 p 轮报数后只剩下 3 人为止，试问最后剩下的 3 人最初在什么位置？（2009 年湖南省高中数学竞赛试题）

5 一副纸牌共 52 张，其中“方块”、“梅花”、“红心”、“黑桃”每种花色的牌各 13 张，标号依次是 2，3，…，10，J，Q，K，A，其中相同花色、相邻标号的两张牌称为“同花顺牌”，并且 A 与 2 也算顺牌（即 A 可当成 1 使用）. 试确定，从这副牌中取出 13 张牌，使每种标号的牌都出现，并且不含“同花顺牌”的取牌方法数.（第 3 届中国东南地区数学奥林匹克试题）

6 在小于 10^4 的正整数中，有多少个正整数 n，使 2^n-n^2 被 7 整除.（第 6 届莫斯科数学奥林匹克试题）

7 是否存在无穷多组不同的正整数 a，b 使 a^2+b^2+1 被 ab 整除？

8 是否存在无穷多对不同的三数组(a, b, c)，满足：a，b，c 是成等差数列的正整数$(a<b<c)$且 $ab+1$，$ac+1$，$bc+1$ 都为完全平方数.

9 是否存在无穷多个$\triangle ABC$，使 AB，BC，CA 的长是成等差数列的互素的正整数$(AB<BC<CA)$，且 BC 边上的高及$\triangle ABC$ 的面积均为正整数？

9 染色方法和赋值方法

一、染色方法

染色方法就是根据问题的特点，对研究的对象用几种颜色染色，并通过对染色对象(点、线、区域，…)以及数种染色对象的组合结构(两边同色的角、两边异色的角、三边同色的三角形，三边不全同色的三角形、同色点对，异色点对，…)的数量和性质进行分析和比较，从而使问题的解答能够比较容易地、直观地给出的一种解题方法.

例1 用 1×1，2×2，3×3 的瓷砖铺满 23×23 的地(不允许重叠，也不留空隙)，问最少要用几块 1×1 的瓷砖？(假设每块瓷砖不允许分割成小的瓷砖)

解 将 23×23 的方格地面(已画成 1×1 的小方格)中第 1，4，7，…，19，22 列中小方格染成黑色，其余各列中小方格染成白色，则每块 2×2 的瓷砖或盖住了 2 个白色方格和 2 个黑色方格或盖住了 4 个白色方格，而每块 3×3 的瓷砖盖住了 3 个黑色方格和 6 个白色方格，如果不用 1×1 的瓷砖，无论用多少块 2×2 和 3×3 的瓷砖，盖住的白色方格数总是一个偶数，但一共有 15×23 个白色方格，而 15×23 是一个奇数，矛盾，故不用 1×1 的瓷砖不可能将 23×23 的正方形铺满.

其次，如图 9-1 表明用 2×2 和 3×3 的瓷砖可铺满 12×11 的矩形，如图 9-2 表明只要用 1 块 1×1 的瓷砖可将 23×23 的正方形铺满.

综上可知，最少要用 1 块 1×1 的瓷砖.

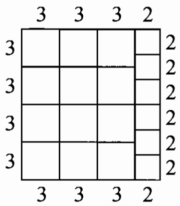


图 9-1

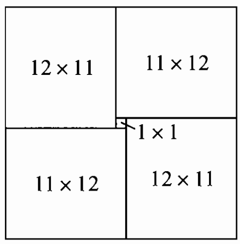


图 9-2

例 2　给定边长为 10 的正三角形，用平行于其边的直线将它全部剖分为边长为 1 的小正三角形. 现有 m 个如图 9－3 所示的三角形块且有 $25-m$ 个如图 9－4 所示的四边形块，问

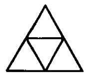


图 9－3

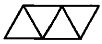


图 9－4

(1) 若 $m=10$，能否用它们拼出原三角形？

(2) 求能拼出原三角形的所有 m.

(第 26 届独联体数学奥林匹克 11 年级竞赛试题)

解　如图 9－5 把小正三角形块染上黑白相间的两种颜色. 设 m 个图 9－3 中能覆盖图 9－5 中 3 个白色小正三角形的有 x 个，则图 9－5 中白色小正三角形的个数为

$$3x+(m-x)+2(25-m)=2x+50-m.$$

而图 9－5 中共有 55 个白色小正三角形，若 m 个图 9－3 和 $25-m$ 个图 9－4 可以覆盖图 9－5，则

$$2x+50-m=55，即 2x=m+5.$$

由此可知 m 为奇数.

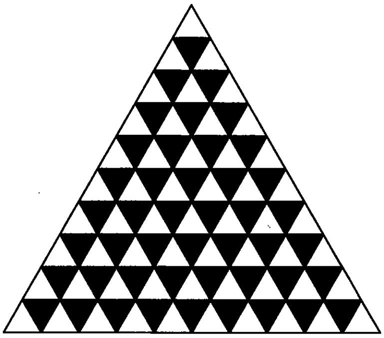


图 9－5

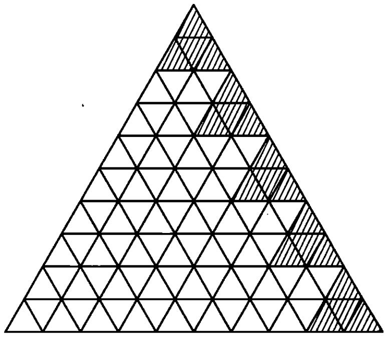


图 9－6

(1) 若 $m=10$，则 m 为偶数，故不能用 10 个如图 9－3 的三角形块及 15 个如图 9－4 的四边形块拼出原三角形；

(2) 显然 $m \geqslant x$，于是 $2m \geqslant 2x=m+5$，即 $m \geqslant 5$，又 $25-m \geqslant 0$，所以 $m \leqslant 25$. 故 $m \in M=\{n \mid 5 \leqslant n \leqslant 25,\ n \in \mathbf{N}_{+},\ n 为奇数\}$. 另一方面，对任意 $m=2k-1 \in M\ (3 \leqslant k \leqslant 13)$. 如图 9－6，我们先用 5 个如图 9－3 的正三角形块覆盖原三角形右侧的 5 个边长为 2 的正三角形(图 9－6 中画有阴影的正三角形). 再用 $m-5=2(k-3)$ 个如图 9－3 的正三角形块覆盖图 9－6 中 $k-3$ 个 2×2 的菱形. 最后余下的 $10-(k-3)=13-k$ 个 2×2 的菱形可用 $25-m=2(13-k)$ 个如图 9－4 的平行四边形覆盖.

综上可知，所求的一切 m 组成的集合为 M.

例 3 已知某议会共有 30 位议员，其中每两人或者是朋友，或者是政敌，每位议员恰有 6 个政敌. 每 3 个人组成一个 3 人委员会，如果一个委员会里 3 个人两两都是朋友或者两两都是政敌，则称之为好委员会. 求所有好委员会的个数.（第 24 届全苏数学奥林匹克试题）

解 用 30 个点代表 30 个委员（其中任意 4 点不共面），若两位议员是朋友，则对应两点连一红色线段，否则连一蓝色线段. 显然好委员的个数就是三边同色的三角形（简称同色三角形）的个数. 每个非同色三角形内有 2 个异色角（从一点出发的两条不同色线段组成的角）图中每点出发有 6 条蓝色线段，23 条红色线段可组成以该点为顶点的 $23\times 6=138$ 个异色角，图中共有 $138\times 30=4140$ 个异色角. 所以非同色三角形有 $\frac{1}{2}\times 4140=2070$ 个. 故同色三角形（即好委员会）的总数为 $C_{30}^{3}-2070=1990$ 个.

例 4 已知 8 个人中既不存在三个人互相认识，也不存在四个人两两互相不认识，问这 8 个人中最少有几对人互相认识？最少有几对人互相不认识？说明理由.

解 用 8 个点表示 8 个人，若两人互相认识，则对应点连线染红色，否则对应点连线染蓝色，得到一个 2 色完全图 K_8，由已知条件知其中既不存在红色三角形又不存在蓝色完全图 K_4.

若从某顶点 A 出发至少有 6 条蓝边，那么由 Ramsey 定理知这 6 条蓝边另一端为顶点的 2 色 K_6 中或者有红色三角形或者有蓝色三角形，后者又导致存在蓝色 K_4，都与已知矛盾. 由此可知，这个 K_8 中从每个顶点出发至少有 2 条红边，故图中至少有 $\frac{1}{2}\times 2\times 8=8$ 条红边.

若从某点 B 出发至少有 4 条红边，则以这 4 条红边的另一端为顶点的 K_4 中或者有一条红边，从而导致存在红色三角形，或者它本身就是一个蓝色 K_4，这都与已知矛盾，故知图中每点出发至多有 3 条红边，从而图中一共至多有 $\frac{1}{2}\times 3\times 8=12$ 条红边.

(1) 若 K_8 中恰有 8 条红边，则每点恰引出两条红边，从而 8 条红边必构成一个或两个圈（闭折线）. 因为每点都只引出 2 条红边，故当有两个圈时，这两个圈无公共顶点，又图中不存在三角形，故当有两个圈时，必然各有 4 条边. 当 8 条红边构成两个圈 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $A_5A_6A_7A_8$ 时，$A_1A_3A_5A_7$ 为蓝色 K_4，当 8 条红边构成一个圈 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 时，$A_1A_3A_5A_7$ 也构成蓝色 K_4，均与已知矛盾. 可见，K_8 中至少有 9 条红边.

(2) 设 K_8 中恰有 9 条红边时，由于其中没有红色三角形且每点至多引出 3 条红边，至少 2 条红边. 这样一来，K_8 只有下列图 9－7(a)，(b)两种可能(图中实线表红边，蓝边没有画出)，其中图 9－7(a)中虚线表示可将边 A_2A_7 去掉而代之以 A_2A_6. 容易看出，(a)和(b)中都有蓝色 K_4：$A_1A_3A_5A_7$，矛盾，故知 K_8 中至少有 10 条红线.

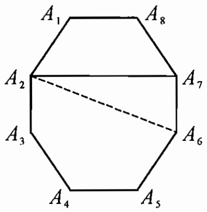


图 9－7(a)

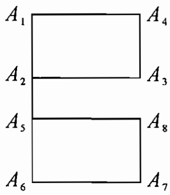


图 9－7(b)

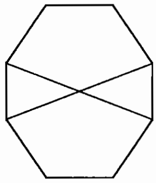


图 9－8(a)

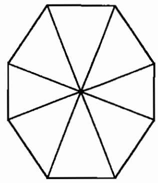


图 9－8(b)

在图 9－8(a)，(b)中都既无红色三角形又无蓝色 K_4，综上可知，2 色 K_8 中最少有 10 条红边，最多有 12 条红边，即 8 个人中最少有 10 对人互相认识，最多有 12 对人互相认识，从而最少有 $C_8^2-12=16$ 对人互相不认识.

二、赋值方法

赋值方法就是根据问题的特点，对研究的对象分别赋不同的数值，并通过对所赋的值进行分析、计算和比较，从而得到问题解答的一种解题方法.

例 5 由 2×2 的方格纸去掉一个方格余下的图形称为拐形. 用这种拐形去覆盖 5×7 的方格板，每个拐形恰覆盖 3 个方格，可以重叠但不能超出方格板的边界. 问能否使方格板上每个方格被覆盖的层数都相同？说明理由.(第 22 届全俄数学奥林匹克试题)

解 将 5×7 方格板的每一个小方格内填写数－2 和 1 如图 9－9 所示. 易见每个拐形覆盖的 3 个数之和非负. 因而无论用多少个拐形覆盖多少次，盖住的所有数字之和(一个数被覆盖了几层就计算几次)都是非负的.

另一方面，方格板上数字的总和为 $12\times(-2)+23\times1=-1$，当被覆盖 k 层时，盖住的数字之和等于 $-k$，这表明不存在满足题中要求的覆盖.

−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2

图 9－9

例 6 把正六边形分成 24 个全等的小正三角形，在 19 个交点处任意写

上互不相等的实数.证明:24 个小正三角形中至少存在 7 个三角形,其顶点上所写的 3 个实数可按顺时针方向排成递减数列.(第 19 届全苏数学奥林匹克试题)

解　将 24 个三角形分为两类:第Ⅰ类三角形的三个顶点上所写的 3 个实数可按顺时针方向排成递减数列,其余三角形为第Ⅱ类,并设第Ⅰ类正三角形有 N 个,从而第Ⅱ类正三角形有 $24-N$ 个,我们将小正三角形每条边按照从大数对应顶点到小数对应顶点的方向画一个箭头(表示递减!)并且每条边沿箭头方向在其右侧赋值 1,左侧赋值 -1(右侧表明箭头方向为顺时针的,左侧表明箭头方向为逆时针的),于是第Ⅰ类三角形内所赋 3 个数值之和为 $1+1+(-1)=1$,第Ⅱ类三角形内所赋 3 个数值之和为 $(-1)+(-1)+1=-1$(图 9-10)于是,24 个小正三角形内所赋数值的总和为

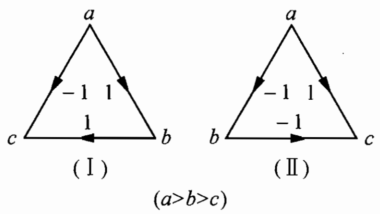


图 9-10

$$N+(-1)(24-N)=2N-24.$$

另一方面,位于正六边形内的小三角形的每边两侧所赋的值之和为 $1+(-1)=0$,而位于正六边形的边上的 12 条小正三角形的边中至少有一条边在正六边形内侧赋的值为 1,故正六边形内赋的值的总和至少为 $11\times(-1)+1=-10$.

综合上述两方面,得 $2N-24\geqslant-10$,解得 $N\geqslant 7$. 即符合题目要求的小正三角形至少有 7 个.

应用上述证题方法不难将上述问题作如下推广:将一个凸(或凹)的多边形完全剖分成三角形区域,要求每一个三角形的顶点不在另一个三角形的边的内部,假设一共剖分为 n 个三角形,其中有一边位于多边形边界位置的三角形有 m 个($n-m$ 为正偶数).如果在每一个三角形的顶点处任意写上一个互不相等的实数,证明其中至少有 $\frac{1}{2}(n-m)+1$ 个三角形,其顶点处所写的 3 个实数可按顺时针方向排成递减数列.

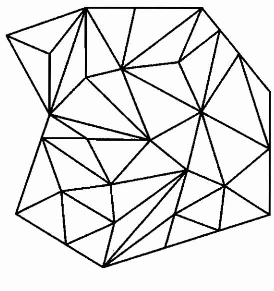


图 9-11

例 7　将 $m\times n$ 棋盘(由 m 行 n 列方格组成,$m\geqslant 3$,$n\geqslant 3$)的所有小方格都染上红、蓝二色之一.如果两个相邻(有公共边)的小方格异色,则称这两个小方格为一个"标准对".设棋盘中"标准对"的个数为 S.试问:S 是奇数还

是偶数？由哪些方格的颜色确定？什么情况下 S 为奇数？什么情况下 S 为偶数？说明理由.（第 4 届中国西部数学奥林匹克试题）

解　把所有方格分为 3 类. 第一类方格位于棋盘的四个角上，第二类方格位于棋盘的边界（不包括四个角）上，其余方格为第三类.

将所有红色方格填上数 1，所有蓝色方格填上数 -1. 记第一类方格的填数分别为 a，b，c，d. 第二类方格的填数分别为 x_1，x_2，…，$x_{2m+2n-8}$. 第三类方格的填数为 y_1，y_2，…，$y_{(n-2)(m-2)}$. 对任何两个相邻的方格，在它们的公共边上标上这两个方格内标数的乘积. 设所有公共边上的标数的积为 H.

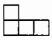
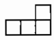
对每个第一类方格，它有两个邻格，所以它的标数在 H 中出现两次，对每个第二类方格，它有 3 个邻格，所以它的标数在 H 中出现 3 次，对于第三类方格，它有 4 个邻格，它的标数在 H 中出现 4 次，于是

$$\begin{aligned} H &= (abcd)^2(x_1x_2\cdots x_{2m+2n-8})^3(y_1y_2\cdots y_{(n-2)(m-2)})^4 \\ &= x_1x_2\cdots x_{2m+2n-8}. \end{aligned}$$

当 $x_1x_2\cdots x_{2m+2n-8}=1$ 时，$H=1$，此时有偶数个标准对，当 $x_1x_2\cdots x_{2m+2n-8}=-1$ 时，$H=-1$，此时有奇数个标准对，这表明：S 的奇偶性由第二类格的颜色确定. 当第二类格中有奇数个蓝色格时，S 为奇数，当第二类格中有偶数个蓝色格时，S 为偶数.

习　题　9

1 用 19 张 1×6 或 1×7 的矩形能否将一个 11×12 的矩形完全覆盖？

2 (1) 如果 $m\times n$ 棋盘能用形如  或  的 L 形骨牌完全覆盖，证明 mn 是 8 的倍数；

(2) 对怎样的正整数 m，n，$m\times n$ 棋盘能用(1)中规定的 L 形骨牌完全覆盖.（2000—2001 波兰数学奥林匹克试题）

3 求最小正整数 n，使得任意 n 个人中都存在 5 个人可分成两个恰有一个公共成员的 3 人组，并且每个 3 人组内的 3 个人都互相认识或者都互相不认识.

4 求最小正整数 n，使得任意 n 个人中都存在 4 个人可分成两个恰有 2 个公共成员的 3 人组，并且每组内的 3 个人都互相认识或互相都不认识.

5 9 名科学家在国际会议上相遇，他们中任何 3 人中至少有 2 人能讲同一种语言，而且每人最多能讲 3 种语言，证明必存在 3 位科学家，他们能讲同

一种语言.(第 7 届美国数学奥林匹克试题)

6 用赋值法给出例 2 的解.

7 设有两个完全相同的齿轮 A 和 B,B 被放在一个水平面上,A 放在 B 的上面,并使二者重合(从而两轮在水平面上的投影完全重合)然后任意敲掉 4 对重合的齿.

如果两轮原各有 14 个齿,问能否将 A 轮绕两轮的公共轴旋转到一个适当的位置使两轮在水平面上的投影是一个完整的齿轮的投影?

如果两轮原各有 13 个齿,又是怎样呢?证明你的结论.(第 5 届 CMO 选拔考试试题)

10 反证法和利用极端原理

一、反证法

当我们直接证明一个命题的结论成立感到困难时，可考虑用反证法. 即从结论的否定出发经过推理导致矛盾，从而推出结论成立.

例 1　在直角坐标平面内给定凸五边形 $ABCDE$，它的顶点都是整点（横坐标及纵坐标都为整数的点）. 证明：其对角线相交成的凸五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$（图 10－1）的内部或周界上至少有一个整点.（第 26 届俄罗斯数学奥林匹克试题）

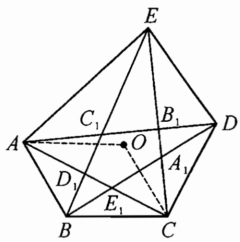


图 10－1

证明　为了说话简便，将“在内部或在边界上”统称为“在……中”，用反证法. 假设结论不成立，考虑不满足题目结论且具有最小面积 S 的凸五边形 $ABCDE$（因整点五边形的面积的 2 倍是正整数，故其中必存在面积最小的）并称凸五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 为 $ABCDE$ 的内五边形，不妨设$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle CDE$，$\triangle DEA$，$\triangle EAB$ 中以$\triangle ABC$ 的面积为最小. 为了导致矛盾，我们只需证明以 AB、BC 为邻边的平行四边形的另一个顶点 O（必为整点）在内五边形中，为此，我们先证明$\triangle AC_1D_1$ 中的整点除 A 外，只可能在线段 C_1D_1 上. 事实上若除了 A 或 C_1D_1 上的点外，$\triangle AC_1D_1$ 中还有一点 K 为整点，则凸五边形 $KBCDE$ 的面积小于凸五边形 $ABCDE$ 的面积，且 $KBCDE$ 的内五边形包含在 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 中，故 $KBCDE$ 的内五边形中也没有整点，这与 S 的最小性假设矛盾. 其次，因 $S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle BCD}$，故 D 到 BC 的距离$\geqslant A$ 到 BC 的距离，又 $S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle ABE}$，故 E 到 AB 的距离$\geqslant C$ 到 AB 的距离，所以，以 AB、BC 为邻边的平行四边形的另一顶点 O 必在$\triangle ACB_1$ 内，且由 A，B，C 为整点知 O 为整点，且 $O\neq A$，$O\neq C$. 若 O 在$\triangle AC_1D_1$ 中则由前面证明知 O 只能在 C_1D_1 上. 同理，若 O 在$\triangle CA_1E_1$ 中，则 O 只能在 A_1E_1 上，即 O 只能在内五边形

$A_1B_1C_1D_1E_1$ 中，这与 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 中无整点的假设矛盾. 于是命题结论成立.

注 用反证法证明涉及整点多边形的结论时，常常要取满足假设条件而且具有最小面积的整点多边形作为证明的出发点.

例 2 将 100 个互异实数分别放置在圆周上的不同地方. 求证：一定存在相邻的 4 个数使得两端的两数之和大于中间的两数之和.（2010 年第 36 届俄罗斯数学奥林匹克九年级试题）

证明 假设结论不成立，设圆周上 100 个实数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 且 $a_{n+100}=a_n$，则

$$a_n+a_{n+3}\leqslant a_{n+1}+a_{n+2},$$

即

$$a_{n+3}-a_{n+2}\leqslant a_{n+1}-a_n,\ n=1,2,\cdots,100.$$

由此可得

$$a_{100}-a_{99}\leqslant a_{98}-a_{97}\leqslant\cdots\leqslant a_2-a_1\leqslant a_{100}-a_{99}.$$

因此 $a_{2k}-a_{2k-1}=m$（m 为常数，$k=1,2,\cdots,50$）. 同理可得 $a_{2k+1}-a_{2k}=l$（l 为常数，$k=1,2,\cdots,50$）. 将所有这些等式相加得 $0=50m+50l$，于是 $m=-l$. 这推出

$$a_3-a_2=l=-m=a_1-a_2,$$

即 $a_1=a_3$，矛盾. 故题中结论成立.

例 3 证明：在任意 $n\,(\geqslant 4)$ 个人中都存在 2 人 A 和 B 使得其余 $n-2$ 人中至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 人满足：他们中每个人或者同 A，B 都互相认识或者同 A，B 都互相不认识.（当 $n=12$ 时，此题为第 48 届莫斯科数学奥林匹克试题）

证法一 用反证法. 假设结论不成立，那么对 n 个人中任意 2 个人 A 和 B，在其余 $n-2$ 人中同时与 A，B 互相认识以及同时与 A，B 互相不认识的人一共至多只有 $\left[\frac{n}{2}\right]-2$ 个. 再设在其余 $n-2$ 人中恰与 A，B 中一人互相认识的有 k 人. 则

$$n-2-k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]-2,$$

所以
$$k\geqslant n-\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2},$$

即对任意两人 A，B，恰与 A，B 中一个人互相认识的人至少有 $\frac{n}{2}$ 个. 若 C 恰与 A，B 中一个人互相认识，则将 (A, B, C) 组成一个三元组. 设这种三元组的个数为 S.

因为对任意两人 A，B，含 A，B 的三元组至少有 $\frac{n}{2}$ 个，而 (A, B) 对有 C_n^2 种取法，故

$$S \geqslant \frac{n}{2} C_n^2 = \frac{n^2(n-1)}{4}. \qquad ①$$

另一方面，对 n 个人中任何 1 人 C，设其余 $n-1$ 个人中有 h 个同 C 互相认识，$n-1-h$ 个人同 C 互相不认识. 故含 C 的三元组 (A, B, C) 的个数为 $h(n-1-h) \leqslant \left[\frac{h+(n-1-h)}{2}\right]^2 = \frac{(n-1)^2}{4}$. 而 C 有 n 种不同的取法，故

$$S \leqslant \frac{n(n-1)^2}{4}. \qquad ②$$

②与①矛盾. 于是题中结论成立.

证法二 用平面内 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 表示 n 个人(其中任意三点不共线). 若两人互相认识(互相不认识)，则对应两点的连线染红(蓝)色. 如果某点 C 与另两点 A，B 的连线同色，那么称 $\angle ACB$ 为从 C 点引出的同色角，也叫做点 C 对 (A, B) 所张的同色角，简称同色角. 因此原题结论等价于证明：存在两点 A，B，使其余 $n-2$ 点中至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 个点对 (A, B) 张有同色角.

如果结论不成立，那么对任意两点 A，B，对 (A, B) 张有同色角的点至多有 $\left[\frac{n}{2}\right]-2$ 个. 又 (A, B) 有 C_n^2 种不同取法，故图中同色角的个数 S 满足

$$S \leqslant \left(\left[\frac{n}{2}\right]-2\right) C_n^2 \leqslant \left(\frac{n}{2}-2\right) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-4)}{4}. \qquad ③$$

另一方面，设从 A_i 出发有 x_i 条红线，$n-1-x_i$ 条蓝线，那么从 A_i 引出的同色角的个数为

$$\begin{aligned} C_{x_i}^2 + C_{n-1-x_i}^2 &= \frac{1}{2} x_i(x_i-1) + \frac{1}{2}(n-1-x_i)(n-2-x_i) \\ &= x_i^2 - (n-1)x_i + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

$$= \left(x_i - \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \geqslant \frac{(n-1)(n-3)}{4}.$$

所以图中同色角的个数 S 满足

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{C}_{x_i}^2 + \mathrm{C}_{n-1-x_i}^2) \geqslant \frac{n(n-1)(n-3)}{4}, \tag{④}$$

④与③矛盾，故题中结论成立.

例 4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2010}$ 是圆周上依次排列的 2010 个点，最初 A_1 上标的数为 0，$A_2, A_3, \cdots, A_{2010}$ 上标的数为 1. 允许进行如下操作：任取一点 A_j，若 A_j 上所标的数为 1，则同时将 A_{j-1}, A_j, A_{j+1} 上标的数 a, b, c 分别改为 $1-a, 1-b, 1-c$.（这时 $A_0 = A_{2010}$, $A_{2011} = A_1$）问能否经过有限次这样的操作将所有点上标的数都变为 0?

解 不能. 现用反证法证明如下：若可以经过有限次（m 次）操作，使所有点上标的数都变为 0，则由于 $(1-a)+(1-b)+(1-c) = 3-(a+b+c)$ 与 $a+b+c$ 的奇偶性相反. 故每经过一次操作，标的 2010 个数之和的奇偶性都要改变一次，而最初 2010 个数之和为奇数 2009，所以 m 是奇数.

其次，设以 A_j 为出发点的操作次数为 x_j $(1 \leqslant j \leqslant 2010)$，在 A_j 上标的数改变的次数为 y_j，则 $\sum_{j=1}^{2010} x_j = m$，并且 y_1 为偶数，当 $j \in \{2, 3, \cdots, 2010\}$ 时 y_j 为奇数. 此外还有 $y_j = x_{j-1} + x_j + x_{j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant 2010)$，这里 $x_0 = x_{2010}$, $x_{2011} = x_1$，所以应有 $m = y_2 + y_5 + y_8 + \cdots + y_{2009}$. 而 $y_2, y_5, \cdots, y_{2009}$ 一共是 670 个奇数，它们之和 m 应为偶数，这与 m 为奇数矛盾，故不可能经过有限次操作使所有点上标的数都变为 0.

注 由上述证明即知，把 2010 改为 $6n$ $(n \in \mathbf{N}_+)$，其结论仍成立.

例 5 能否将全体整数分拆为 3 个不相交的集合，使得对任意整数 n，数 $n, n-50, n+2011$ 分别属于所分成的 3 个不同的子集?

解 不可能，现用反证法证明如下，假设存在符合题目要求的分拆方法. 我们用记号 $m \sim k$ 表示 m 与 k 属于同一子集. 若 3 个数 p, q, r 分别属于 3 个不同的子集则记为 $(p, q, r) \in \mathscr{M}$. 于是，由 $(n, n-50, n+2011) \in \mathscr{M}$ 出发，分别将 n 用 $n-50$ 和 $n+2011$ 代替得

$$(n-50, n-100, n+1961) \in \mathscr{M},$$
$$(n+2011, n+1961, n+2\cdot 2011) \in \mathscr{M}.$$

于是 $n+1961 \nsim n-50$, $n+1961 \nsim n+2011$，故只有 $n+1961 \sim n$. 故由 $(n-50, n-100, n+1961) \in \mathscr{M}$ 得 $(n-50, n-100, n) \in \mathscr{M}$. 再将其中 n

用 $n-50$ 代替得 $(n-100, n-150, n-50)\in\mathscr{M}$，于是由 $n\not\sim n-50$ 和 $n\not\sim n-100$ 得 $n\sim n-150$. 再从 $n\sim n+1961$ 和 $n\sim n-150$ 出发可推得

$$\begin{aligned}&0\sim 1961\sim 2\times 1961\sim\cdots\sim 50\times 1961\\&=654\cdot 150-50\sim 653\cdot 150-50\sim\cdots\sim 150-50\sim -50.\end{aligned}$$

这与 $n\not\sim n-50$ 从而 $0\not\sim -50$ 矛盾. 故满足题目要求的分拆子集方法是不存在的.

二、利用极端性原理

利用极端原理解题就是从极端元素（最大数或最小数，最大距离或最小距离，最大面积或最小面积，获胜场次最多的队（员）或获胜场次最少的队（员），等等）出发，经过推理得出结论，或从结论的否定出发，利用极端元素导致矛盾，从而推出结论成立.

例 6　在 $2\times n$ 方格表的每个 1×1 小方格内写上一个正实数，使得每列中两个数之和等于 1. 证明：可以从每列中删去一个数，使得每行中剩下的各数之和都不超过 $\frac{n+1}{4}$.（第 31 届俄罗斯数学奥林匹克十年级试题）

证明　假设第一行中的 n 个数从左到右依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，必要时交换列的位置可使得 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. 此时第二行中所写的数依次为 $b_1=1-a_1, b_2=1-a_2, \cdots, b_n=1-a_n$，于是 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$. 如果 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\frac{n+1}{4}$，那么就删去第二行中所有各数即可达到目的. 否则存在使 $a_1+a_2+\cdots+a_k>\frac{n+1}{4}$ 成立的最小正整数 k，这时我们只要删去 $b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}$ 及 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$，则由 k 的取法有 $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\leqslant\frac{n+1}{4}$，并且由于

$$a_k\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}>\frac{n+1}{4k},$$

所以

$$\begin{aligned}&b_k+b_{k+1}+\cdots+b_n\leqslant(n+1-k)b_k=(n+1-k)(1-a_k)\\&<(n+1-k)\left(1-\frac{n+1}{4k}\right)=\frac{5}{4}(n+1)-\left[\frac{(n+1)^2+(2k)^2}{4k}\right]\\&\leqslant\frac{5}{4}(n+1)-\frac{2(n+1)(2k)}{4k}=\frac{n+1}{4},\end{aligned}$$

从而证明了题中结论成立.

例 7 有男女青年共 1000 人围成一个圆圈. 如果有一个女孩 G,她沿任意方向依次数到任何人(包括她自己以及最后数到的人),女孩的数目总是大于男孩的数目,那么称 G 在一个好位置上,试问:要保证在任何情形下都至少有一个女孩在好位置上,女孩的人数的最小值是多少?

解 因为如果一个女孩的某一侧是一个男孩,那么这个女孩一定不在好位置上. 所以只要将圆圈上 1000 个位置分成 334 组,前 333 组都是 2 个女孩中间站 1 个男孩,最后一组只 1 个男孩,于是一共有 666 个女孩和 334 个男孩,但没有一个女孩站在好位置上. 故所求女孩人数的最小值不小于 667.

下面我们证明:如果 1000 个男女青年中至少有 667 个女孩,那么其中必有 1 个女孩站在好位置上. 实际上,我们可以证明下列一般性结论:如果 $3n+1(n\in \mathbf{N}_+)$ 个男女青年站在一个圆圈上,并且其中至少有 $2n+1$ 个女孩,那么必有一个女孩站在好位置上.

当 $n=1$ 时,一共有 $3\times 1+1=4$ 个男女青年,其中至少有 $2\times 1+1=3$ 个女孩,从而至多有 1 个男孩,站成一个圆圈时,必有一个女孩 G,她的两侧都为女孩,故 G 在好位置上.

设 $n=k$ 时结论成立,则当 $n=k+1$ 时,一共有 $3(k+1)+1=3k+4$ 个男女青年. 其中女孩至少有 $2(k+1)+1=2k+3$ 个. 任取一个男孩 A,并在 A 的两侧各找一个到 A 的距离最近的女孩 B 和 C. 先让 A、B、C 离开圆圈,则圆圈上共有 $3k+1$ 个男女青年. 其中女孩至少有 $2k+1$ 个. 由归纳假设知其中必有 1 个女孩 G 站在好位置上,并且由好位置的定义知 G 的两侧皆为女孩,然后让 A, B, C 站回去,则由 B、C 的取法知 G 不在 A, B, C 所在的圆弧上,从 G 出发沿任意方向计算男、女孩总人数时,必然是先数到 B(或 C)后才数到 A(如果要数到 A 的话). 由归纳假设知,数到的女孩总人数必定多于男孩的总人数,即 G 仍在好位置上,于是 $n=k+1$ 时结论成立. 故一般性命题得证. 特别 $n=333$ 时结论成立. 由此可知原题中所求女孩人数的最小值为 667.

例 8 在学校足球冠军赛中,要求每一个队都必须同其余各队进行一场比赛,每场比赛胜队得 2 分,平局各得 1 分,负队得 0 分. 已知有一队得分最多(其余每队得分都比这队少),但它胜的场次比任何一队都少,问最少有多少队参赛?(第 16 届全俄数学奥林匹克试题)

解 设 A 队是得分最多的队,它胜 n 场平 m 场,则 A 队的总分为 $2n+m$. 由已知,其余每队至少要胜 $n+1$ 场,得分不少于 $2(n+1)$ 分,于是

$$2n+m>2(n+1),\ m\geqslant 3.$$

即 A 至少平 3 场,故可找到一个队,它和 A 踢成平局,这个队得分至少为

$2(n+1)+1$ 分，从而有

$$2n+m>2(n+1)+1,\ m\geqslant 4.$$

设共有 S 个队参加比赛，则 A 队至少胜一场，否则 A 队的得分不超过 $S-1$，而任何其他队的得分都严格少于 $S-1$，这样所有参赛队的得分严格少于 $S(S-1)$ 这与 S 个队参赛所得的总分为 $2C_S^2=S(S-1)$ 矛盾. 于是 $m\geqslant 4$，$n\geqslant 1$，即 A 队至少要比赛 5 场，所以参加比赛的队不少于 6 个.

	A	B	C	D	E	F	得分
A		1	1	1	1	2	6
B	1		2	0	0	2	5
C	1	0		0	2	2	5
D	1	2	2		0	0	5
E	1	2	0	2		0	5
F	0	0	0	2	2		4

另一方面，如表中所示 A、B、C、D、E、F 六个队满足题目要求：A 队胜的场次最少，而得分最多.

综上可知，最少应有 6 个队参加比赛.

习　题　10

1 某个委员会有 $n(\geqslant 5)$ 个成员，并且有 $n+1$ 个三人委员会，其中没有两个三人委员会有完全相同的成员. 证明：存在两个三人委员会恰好有一个成员相同.（第 8 届美国数学奥林匹克试题）

2 设有 9 枚棋子放在 8×8 国际象棋棋盘的左下角，每小格内放一枚，组成 3×3 的正方形，规定每枚棋子可以跳过他邻格中的另一枚棋子到一个空着的方格. 即可以关于它有棋子的邻格中心作对称运动（可以横跳、竖跳或沿对角线斜跳）. 要求这些棋子跳到棋盘的另一角，且仍构成 3×3 正方形，如果达到的是：(1) 左上角，(2) 右上角，这一要求能否实现？

3 设 n 为奇数且大于 1，又 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是给定的整数，对 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n!$ 个排列中每一个排列 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，记 $S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$. 证明：存在两个排列 b 和 c，$b\neq c$，使 $S(b)-S(c)$ 被 $n!$ 整除.（第 42 届

IMO 试题)

4 某次聚会共 17 人，其中每个人都恰好认识另外 4 人，求证：存在两人，他们彼此不认识且没有共同认识的人.（第 26 届独联体数学奥林匹克试题）

5 设 n 为正整数，M 是具有下列性质的 n^2+1 个正整数构成的集合：M 中任意 $n+1$ 个数中必有 2 个数，使得其中一个数是另一个数的倍数，证明：M 中存在 $n+1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，使得对任意 $i=1, 2, \cdots, n$，都有 a_i 整除 a_{i+1}.（第 51 届波兰数学奥林匹克试题）

6 某地区网球俱乐部的 20 名成员进行了 14 场单打比赛，每人至少上场 1 次. 求证：必有 6 场比赛，上场的 12 名队员互不相同.（第 18 届美国数学奥林匹克试题）

7 有 20 个队参加全国足球冠军赛，为了使已比赛过的任何三个队中都有两个队互相比赛过，最少要进行多少场比赛？

11 局部调整方法

局部调整方法就是按照题目的要求逐步进行调整(或作变换)，以减少与目标的差别，而逐步逼近目标，从而保证经过有限步可以达到预定目标.

在组合数学中应用局部调整法可以解决下列几类问题：

(1) 证明给定的一种组合对象具有某种性质；

(2) 求解组合最值问题；

(3) 证明存在具有某种性质的组合对象；

(4) 求解单人操作达到预定目标的问题. 我们分别举例说明如下.

例 1 有 $n\times n(n\geqslant 4)$ 的一张空白方格表，在它的每一个方格内任意填入 $+1$ 或 -1 两个数中的一个. 现将表内 n 个两两既不同(横)行又不同(竖)列的方格中的数的乘积称为一个基本项.

试证：按上述所填成的每一方格表，它的全部基本项的和 S 总能被 4 整除.(1989 年全国高中数学联赛试题)

证明 显然不论用怎样的填法，所填成的表格总有 $n!$ 个基本项. 设第 i 行第 j 列的方格内填的数是 $a_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ n\geqslant 4)$. 当把方格表中某一个 a_{ij} 改变符号时(即把 $+1$ 换成 -1 或将 -1 换成 $+1$)，注意到 a_{ij} 出现在和式 S 的 $(n-1)!$ 个基本项中，故 S 中将有 $(n-1)!$ 个基本项变号，设其中有 h 项由 -1 变为 $+1$，有 $(n-1)!-h$ 项由 $+1$ 变成 -1. 所有基本项之和由 S 变为 S' 则 $S'-S=2h-2[(n-1)!-h]=4h-2\cdot(n-1)!$，因为 $n\geqslant 4$，所以 $S'-S$ 是 4 的倍数，即当某个数 a_{ij} 改变符号时，引起 S 的改变值一定是 4 的倍数.

若一张方格表内所有 a_{ij} 全为 $+1$，则全部基本项之和 $S=n!(n\geqslant 4)$ 显然能够被 4 整除. 若 a_{ij} 不全为 $+1$ 时，则可将其中 -1 逐个改成 $+1$，每次均使基本项之和的改变值能被 4 整除，于是经过有限步可使表中每个数都为 $+1$，并且最后得到的表格中所有基本项之和是 4 的倍数，所以一开始时，表中所有基本项之和也是 4 的倍数.

例 2 试将 1000 分成若干个互不相等的正整数之和，并且使得这些正整数的乘积为最大，求这个最大值.

解　因分法个数有限，故乘积最大的分法 S 必存在，设将 1000 分为不相等的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 之和时，其乘积为最大. 用 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 表示分法，$\sum S$ 表示 S 中各数之和. $\prod S$ 表示 S 中各数之积. S 中最小数为 a_1，最大数为 a_k 则 S 具有下列性质：

(1) S 中不属于 $[a_1, a_k]$ 的正整数至多只有一个. 事实上，若 $a, b \notin S$ $(a<b)$，但 $a-1 \in S$, $b+1 \in S$，则令 $S'=(S\backslash\{a-1, b+1\}) \cup \{a, b\}$. 于是 $\sum S'=\sum S=1000$，且

$$\frac{\prod S'}{\prod S}=\frac{ab}{(a-1)(b+1)}=\frac{ab}{ab-(b-a)-1}>1, \prod S'>\prod S.$$

这与 $\prod S$ 最大矛盾.

(2) $a_1 \neq 1$，因为若 $a_1=1$，则令 $S'=(S\backslash\{1, a_k\}) \cup \{1+a_k\}$，于是 $\sum S'=\sum S=1000$，且

$$\frac{\prod S'}{\prod S}=\frac{1+a_k}{1 \cdot a_k}>1,$$

这与 $\prod S$ 最大矛盾.

(3) $a_1=2$ 或 3.

(i) 若 $a_1=4$ 且 $5 \in S$，则令 $S'=(S\backslash\{5\}) \cup \{2, 3\}$，于是 $\sum S'=\sum S=1000$ 且 $\dfrac{\prod S'}{\prod S}=\dfrac{2\times 3}{5}>1$，矛盾.

(ii) 若 $a_1=4$，且 $j \notin S$ $(j=5, 6, \cdots, k-1)$，但 $k \in S(k \geqslant 6)$，则令 $S'=(S\backslash\{4, k\}) \cup \{2, 3, k-1\}$，于是 $\sum S'=\sum S=1000$，而 $\dfrac{\prod S'}{\prod S}=\dfrac{2\times 3\times(k-1)}{4k}=\dfrac{4k+2(k-3)}{4k}>1$，矛盾.

(iii) 若 $a_1 \geqslant 5$，则令 $S'=(S\backslash\{a_1\}) \cup \{2, a_1-2\}$，于是 $\sum S'=\sum S=1000$，而 $\dfrac{\prod S'}{\prod S}=\dfrac{2(a_1-2)}{a_1}=\dfrac{a_1+(a_1-4)}{a_1}>1$，矛盾.

由上述(1)，(2)，(3)知，若 $a_1=3$，则必有 $3+4+5+\cdots+n-k=1000$，即 $(n-2)(n+3)=2000+2k$，于是 $n=45$, $k=32$，即 $S=\{3, 4, \cdots, 30,$

31，33，34，…，44，45}. 令 $S'=(S\backslash\{34\})\cup\{2,32\})$，则 $\sum S'=\sum S=1000$，而 $\dfrac{\prod S'}{\prod S}=\dfrac{2\times 32}{34}>1$，矛盾. 故只有 $a_1=2$，这时 $S=\{2,3,\cdots,33,35,36,\cdots,45\}$，使乘积 $\prod S=\dfrac{45!}{34}$ 最大.

例 3　14 人进行一种日本棋循环赛，每人都与另外 13 人对弈. 在比赛中没有平局，求“三角联”个数的最大值(这里“三角联”指 3 人间的比赛每人皆一胜一负).(第 12 届日本数学奥林匹克试题)

解　用 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$ 表示 14 个人，并设 A_i 胜了 a_i 局 $(i=1,2,\cdots,14)$. 若 3 人不形成“三角联”，则一定是其中 1 人胜了其他两人，故不构成“三角联”的数目为 $\sum\limits_{i=1}^{14}C_{a_i}^2$（约定 $C_0^2=C_1^2=0$)，于是“三角联”的总数为 $S=C_{14}^3-\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$，要 S 最大，必须且只须 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$ 最小，下面我们证明当 $\sum\limits_{i=1}^{14}C_{a_i}^2$ 取最小值时必有 $|a_i-a_j|\leqslant 1\ (1\leqslant i<j\leqslant 14)$.

事实上，若存在 $a_i-a_j\geqslant 2\ (i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant 14)$. 则令 $a_i'=a_i-1$，$a_j'=a_j+1$，$a_k'=a_k(k\neq i,j,1\leqslant k\leqslant 14)$ 于是 $\sum\limits_{t=1}^{14}a_t'=\sum\limits_{t=1}^{14}a_t=C_{14}^2=91$，而 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t'}^2-\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2=C_{a_i-1}^2+C_{a_j+1}^2-(C_{a_i}^2+C_{a_j}^2)=-(C_{a_i-1}^1-C_{a_j}^1)=-[(a_i-1)-a_j]=-(a_i-a_j)+1\leqslant -2+1\leqslant -1$，从而 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t'}^2<\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$，这与 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$ 取最小值矛盾.

由 $\sum\limits_{t=1}^{14}a_t=91$ 及 $|a_i-a_j|\leqslant 1\ (1\leqslant i<j\leqslant 14)$ 得 $a_1,a_2,\cdots,a_{14}$ 中有 7 个 6 和 7 个 7，故 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$ 的最小值为 $7C_7^2+7C_6^2=252$，所以 $S=C_{14}^3-\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2$ 的最大值为 $C_{14}^3-252=112$.

另一方面，当 $1\leqslant i\leqslant 7$ 时，令 A_i 胜 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_{i+6}$ 这 6 个队而败于 $A_{i+7},A_{i+8},\cdots,A_{i+13}$（约定 $A_{j+14}=A_j$）这 7 个队，当 $8\leqslant i\leqslant 14$ 时，令 A_i 胜 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_{i+7}$ 这 7 个队而败于 $A_{i+8},A_{i+9},\cdots,A_{i+13}$ 这 6 个队(约定 $A_{14+j}=A_j$)，则这种安排可使 $\sum\limits_{t=1}^{14}C_{a_t}^2=252$ 成立.

综上可知，所求“三角联”数目的最大值为 112.

例 4　设圆周上放若干堆小球，每堆中的小球数都是 3 的倍数，但各堆中

的球数不必相等.按下列规则调整各堆中的球数;把各堆球三等分,本堆留一份,其余两份分别放入左、右两堆中,如果某堆球数不是3的倍数,则可从布袋中取出一球或两球补入,使该堆球数是3的倍数,然后按上述方法继续调整,问能否经过有限次调整使各堆的球数相等?

解 设某次调整前,球数最多的堆有 $3m$ 个球,最少的有 $3n$ 个球且 $m>n$,那么

(1) 经过调整后,各堆中的球数仍在 $3m$ 与 $3n$ 之间(包括 $3n$ 和 $3m$ 在内、下同).

事实上,设某堆有 $3l$ 个球,它的左、右两堆的球数分别为 $3k$ 和 $3h$ ($3m\geqslant 3l\geqslant 3n$, $3m\geqslant 3k\geqslant 3n$, $3m\geqslant 3h\geqslant 3n$) 于是调整后该堆球数为 $k+l+h$,满足 $3m\geqslant k+l+h\geqslant 3n$,若这堆球数不是3的倍数(即 $3m>k+l+h>3n$),则补充一个或两个球成为3的倍数,其球数仍在 $3n$ 与 $3m$ 之间.

(2) 原来球数大于 $3n$ 的堆,调整后的球数仍大于 $3n$.

事实上同(1)知道若 $3l>3n$, $3k\geqslant 3n$, $3h\geqslant 3n$,则 $k+l+h>3n$.

(3) 原来球数为 $3n$ 的堆中,经过调整,至少有一堆的球数大于 $3n$.

事实上,原来球数为 $3n$ 的堆中,至少有一堆,它的左或右堆中的球数大于 $3n$,同(1)记号不妨设 $3k>3n$, $3l=3n$, $3h\geqslant 3n$,则 $k+l+h>3n$.

于是,每调整一次,球数为 $3n$ 的堆至少减少一堆.故经过有限次调整,可使每堆球数都大于 $3n$.而含球数最多的堆中的球数不会增大,于是含球数最多的堆与含球数最少的堆所含球数之差 f 将严格地减少.故经过有限步,这个差数 f 必为零,即各堆球数相等.

注 在解单人操作能否达到预定目标的问题时,常常根据题目条件建立一个取非负整数值的目标函数 f,若没有达到目标,则证明经过适当调整后可使 f 严格减少一个正整数.于是由 f 恒取非负整数值知,这种调整过程不可能无限次继续下去,这就证明了可经过有限次操作达到预定目标,在本题中目标函数 $f=3m-3n$.

例5 $n(\geqslant 4)$ 个盘子里放有总数不少于4的糖块,从任意选出的两个盘子里各取一块糖放入另一个盘子中称为一次操作,问能否经过有限次操作,把所有的糖块集中到一个盘子里去?证明你的结论.(第9届CMO试题)

解法一 首先证明可经过有限步操作使所有糖块集中到2个或3个盘子中.

事实上,如果放糖的盘子不少于3个,任取其中3个盘子,分别记为 A、B、C,并设 A、B、C 中分别有 a、b、c ($0<a\leqslant b\leqslant c$) 块糖,于是可如下进行操作 a 次:

$(a, b, c) \to (a-1, b-1, c+2) \to \cdots \to (0, b-a, c+2a)$. 即放有糖块的盘子的总数减少 1 个（$a \neq b$时）或 2 个（$a = b$时）. 于是，这样继续下去，总可以将糖块集中在 2 个或 3 个盘子中.

其次，不妨设所有糖块集中在盘子 A, B, C 中，每个盘中放的糖块数分别为 a, b, c $(a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0)$. 另取一个空盘 D(因 $n \geqslant 4$，至少有 4 个盘子）上述状态简记为$(a, b, c, 0)$. 如果 a, b, c 有两个相等，那么由上述证明知可经有限步将糖果集中到一个盘子中，故只要考虑 $a > b > c \geqslant 0$ 的情形，又分为下列两种情形.

(1) 如果 $a = c+2$，则 $b = c+1$，因 $a+b+c = 3c+3 \geqslant 4$，所以 $c \geqslant 1$. 于是可按下列步骤操作，经过有限步将所有糖块集中到一个盘子中：

$$(c+2, c+1, c, 0) \to (c+1, c, c, 2) \to (c, c+2, c, 1) \to (c-1, c+2, c+2, 0) \to \overset{c+2\text{步}}{\cdots} \to (3c+3, 0, 0, 0).$$

(2) 如果 $a > c+2$ 时，那么先作如下一次操作：$(a, b, c) \to (a-1, b-1, c+2)$ 因 $a > b > c$ 及 $a > c+2$，所以 $a-1 > b-1 \geqslant c$，$a-1 \geqslant (c+3)-1 \geqslant c+2$，故经过调整后，三盘中所放糖块量的最大数减少 1，而最小数不减少，故经过有限步调整可归结为有两盘糖块数相等或前述情形(1). 于是由前面证明可知经过有限步操作可将糖块集中到一个盘子中.

解法二　设共有 m 块糖 $(m \geqslant 4)$. 我们对 m 用数学归纳法.

(1) $m = 4$ 时，4 块糖至多放在 4 个盘子中，其分布情况（不考虑顺序）只有以下 4 种：1°(1, 1, 1, 1)，2°(1, 1, 2, 0)，3°(1, 3, 0, 0)，4°(2, 2, 0, 0). 每种情形按下列步骤进行操作，都可以经过有限步将所有糖块集中到一个盘子中：

1° $(1, 1, 1, 1) \to (1, 3, 0, 0) \to (0, 2, 2, 0) \to (2, 1, 1, 0) \to (4, 0, 0, 0)$.

2° $(1, 1, 2, 0) \to (0, 0, 4, 0)$.

3° 同 1°中第 2 步以后操作.

4° $(2, 2, 0, 0) \to (1, 1, 2, 0) \to (0, 0, 4, 0)$.

(2) 设 $m = k$ 时结论成立，考虑 $m = k+1$ 的情形，这时我们只考虑其中 k 块糖，由归纳假设，总可以经过有限步操作将这 k 块糖集中到一个盘子中. 如果第 $k+1$ 块糖也在这个盘子中，那么结论已成立，否则只会出现这 k 块糖在一个盘子中，而第 $k+1$ 块糖在另一个盘子中的情形，这时，可按下列步骤，经过有限步操作将 $k+1$ 块糖集中到一个盘子中.

$$(k, 1, 0, 0) \to (k-1, 0, 2, 0) \to (k-2, 2, 1, 0) \to (k-3, 2, 0, 2) \to (k-1, 1, 0, 1) \to (k+1, 0, 0, 0).$$

于是 $m=k+1$ 时结论成立，这就证明了总可以经过有限步操作将所有糖块集中到一个盘子中.

习 题 11

1 在线段 AB 上关于它的中点 M 对称地放置 $2n$ 个点. 任意将这 $2n$ 个点中的 n 个染成红点，另 n 个染成蓝点. 证明：所有红点到 A 的距离之和等于所有蓝点到 B 的距离之和.

2 空间有1989个点，其中任何三点不共线，把它们分成点数各不相同的 30 组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形，问要使三角形的总数最大，各组的点数应是多少？（第 4 届 CMO 试题）

3 求最大正整数 m，使 $m\times m$ 的正方形可剖分为 7 个两两无公共内点的矩形且 7 个矩形的 14 条边长为 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14.

4 考虑 1，2，…，20 的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{20})$，对此排列进行如下的操作：对换其中某两个数的位置，目标是将此排列变为 $(1,2,\cdots,20)$，设对每一个排列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_{20})$，达到目标所需要进行操作次数的最小值记为 k_a，求 k_a 的最大值.

5 黑板上写着 1，2，…，20，某人任选两个差至少为 2 的数，将较小的数加 1，同时将较大的数减 1，再将所得的数写在黑板上代替选取的那两个数，直到这种操作不能再进行时为止. 试求其操作次数的最大值.（第 59 届白俄罗斯数学奥林匹克决赛试题）

12 构造方法

在组合数学的一些问题的证明中常常要用到构造方法，构造方法可分为直接构造和归纳构造两大类，当直接构造一个符合条件的对象有困难时，可考虑从下面几个方面入手.

(1) 分析要构造的对象应具有的一些结构，再根据这些结构来构造满足所有条件的对象(组合分析法)

(2) 先构造满足一部分条件的一些部件，再由这些部件来组成满足所有条件的对象(部件组成法)

(3) 先去掉一部分条件，构造满足其余条件的对象，再逐步调整使之满足所有条件(逐步调整法)

如果要构造的对象与正整数 n 有关，直接构造它又比较困难，那么可考虑用归纳法去构造它.

例 1 在平面直角坐标系中是否存在无穷多个圆组成的集合 M_0，满足

(1) M_0 中任意两个圆至多有一个公共点；

(2) x 轴上每一个有理点都在 M_0 中某个圆上.

解 对 x 轴上任意有理点 $(r,\ 0)$ $\left(r=\dfrac{p}{q},\ p、q \text{ 为互素整数}, q>0\right)$，在 x 轴上方作一个半径为 $R_r>0$ 的圆与 x 轴切于点 $(r,\ 0)$，并记这个圆为 $C_r(R_r)$，所有这些圆组成的集合记为 M_0，显然 M_0 满足条件(2)，为了使 M_0 满足条件(1)，我们来分析 R_r 的值应该是多少.

在 M_0 中任取两个圆 $C_{r_i}(R_{r_i})(i=1,\ 2)$，因为两个圆都在 x 轴上方并且都与 x 轴相切，所以它们相交的充要条件是圆心距小于两圆半径之和，即

$$\sqrt{(r_2-r_1)^2+(R_{r_2}-R_{r_1})^2}<R_{r_2}+R_{r_1},$$

这等价于 $(r_1-r_2)^2<4R_{r_1}R_{r_2}$. 令 $r_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ (p_i，q_i 为互素整数且 $q_i>0$，$i=1,\ 2$)，得

$$(p_1q_2-p_2q_1)^2<4q_1^2q_2^2R_{r_1}R_{r_2}.$$

若取 $R_{r_i}=\dfrac{1}{kq_{r_i}^2}\ (k\geqslant 2)$，则上式化为

$$(p_1q_2-p_2q_1)^2<\frac{4}{k^2}\leqslant 1.$$

当 $r_1\neq r_2$ 时，上式左端为正整数，矛盾. 可见，只要取 $R_r=\dfrac{1}{kq^2}\ (k\geqslant 2)$，所作圆集合 M_0 就满足题目的所有条件. 于是我们证明了存在无穷多个圆组成的集合

$$M_0=\left\{C_r(R_r)\,\middle|\, r=\frac{p}{q},\ R_r=\frac{1}{kq^2}\ (k\geqslant 2),p,\ q\text{ 为互素整数},q>0\right\}.$$

满足题目条件(1)、(2)，显然这样的 M_0 有无穷多个.

例 2 能否将正整数集合 $\mathbf{N}_+$ 分划为两个不相交的集合 A 和 B，满足：

(1) A 中任意三个数不成等差数列；

(2) 不能由 B 中元素组成一个非常数的无穷等差数列.

分析一 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}\ (a_1<a_2<a_3<\cdots)$ 及 $B=\mathbf{N}_+\setminus A$ 满足题目条件. 因为若三个 $a,b,c\,(a<b<c)$ 成等差数列，则 $2b=a+c>c$，故只要 $a_{i+1}\geqslant 2a_i\,(i=1,2,3,\cdots)$，则 A 中任意三个数不成等差数列，要构造这样的 A 是不困难的. 为了使 $B=\mathbf{N}_+\setminus A$ 满足条件(2)，只要满足对任意 $a,d\in\mathbf{N}_+$，等差数列 $\{a+nd\}\ (n=0,1,2,\cdots)$ 中至少有一项属于 A.

解法一 将首项为 a，公差为 d 的无穷等差数列用 (a,d) 表示. 易将所有正整数无穷等差数列（非常数列）"排序"如下：$(1,1)$，$(1,2)$，$(2,1)$，$(1,3)$，$(2,2)$，$(3,1)\cdots$，排序的规律是：先看 $a+d$ 的大小，小者排前，$a+d$ 相等的，a 较小的排前，按下列方式构造数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$. 设 $a_1=1$，如 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 已取出，则在第 $n+1$ 个等差数列中取大于 $2a_n$ 的某一项为 a_{n+1}.

令 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，则因 $a_{n+1}>2a_n\,(n=1,2,\cdots)$，故 A 中任何三个数不成等差数列，再令 $B=\mathbf{N}_+\setminus A$，则因为任何正整数的非常数列的无穷等差数列都有一项属于 A，故 B 中没有非常数列的无穷等差数列. 于是存在满足题目条件的集合 A 和 B.

分析二 同分析一知，易构造满足条件(1)的 A，为了使 $B=\mathbf{N}_+\setminus A$ 满足条件(2)，只须满足对任意 $a,d\in\mathbf{N}_+$，无穷等差数列 $\{a+rd\}\,(r=0,1,2,\cdots)$ 中至少有一项属于 A，这只要 A 中每一个数可写成 $a_i=b_i+c_i$ 的形式，使得对任意 $a,d\in\mathbf{N}_+$，b_i 可无穷多次取到 a 的值，且存在某个等于 a 的 b_i，它所对应的 c_i 是任意 d 的倍数. 这只要 A 中含有无穷多个形如 $a+m!$ 的数即可. 于是，存在正整数 $m\geqslant d$，取 $r_0=\dfrac{m!}{d}$，则 $a+m!=a+r_0d$ 为无穷等差数

列 $\{a+rd\}$ 中一项.

解法二　令 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，其中 $A_1=\{1!+1\}$，$A_2=\{2!+1,\ 3!+2\}$，$A_3=\{4!+1,\ 5!+2,\ 6!+3\}$，…，$A_n=\{m!+1,\ m!+2,\ \cdots,\ (m+n-1)!+n\}\left(\text{其中 } m=\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)$，…，$B=\mathbf{N}_+\setminus A$，则将 A 中数从小到大排列时，从第二项起，每一项大于前面一项的 2 倍，故 A 中任意三个数不成等差数列，其次 B 中没有非常数列的无穷等差数列.

事实上，若 $\{a+nd\}$，$n=0,1,2,\cdots$ 是 B 中一个非常数列的无穷等差数列，这里 $a,d\in\mathbf{N}_+$，由 A 的构造知，存在无穷多个 $m\in\mathbf{N}_+$ 使 $m!+a\in A$，故存在 $m\geqslant d$，使 $m!+a\in A$. 令 $n_0=\frac{m!}{d}$，则 $m!+a=a+n_0d\in A$，这与对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，$a+nd\in B$ 矛盾.

可见存在满足条件(1)，(2)的集合 A 与 B.

例 3　是否存在平面内一个有限点集，使得对于其中每个点，点集中恰有三个距离它最近的点.

分析　如图 12－1，由两个有公共底边的正三角形组成的图形共有 4 个顶点，其中有 2 个点恰有三个距离它最近的点，但另 2 个点却只有两个距离它最近的点，不满足要求.

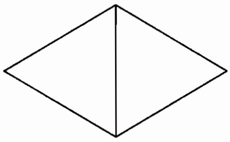


图 12－1

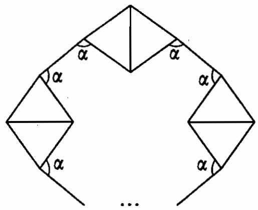


图 12－2

其次，如图 12－2 考虑用 m 条线段将 m 个这样的图形连起来看能否组成一个满足条件的图形. 图 12－2 中为了保证每个点恰有三个距离它最近的点，只要 $90^\circ<\alpha\leqslant120^\circ$，并且由凸多边形内角和公式有

$$m\cdot120^\circ+2m(\alpha+60^\circ)=(3m-2)\cdot180^\circ,$$

即 $\alpha=150^\circ-\frac{180^\circ}{m}$，代入 $90^\circ<\alpha\leqslant120^\circ$ 解得 $3<m\leqslant6$. 所以 $m=4$，5 或 6，当 $m=4$ 时 $\alpha=105^\circ$；$m=5$ 时 $\alpha=114^\circ$；$m=6$ 时 $\alpha=120^\circ$.

解　存在，如图 12－3 所示的三个点集都具有题目中要求的性质(图中已将每点与它距离最近的三个点相连)

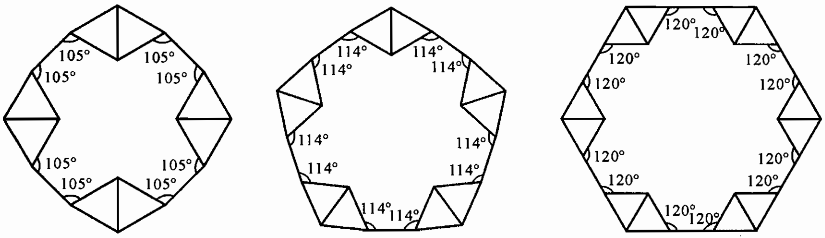


图 12-3

注 本例中我们用部件组成法得到了满足题目条件的点集，而且不止一个，显然若干个这样点集的并集（只要每两个这样点集之间点的最小距离大于原点集中任意两点之间距离的最小值）也满足题目的所有条件，而在解答中常常将组成的设计及探索过程省略，只写出了构造的结果.

例 4 平面内任给2000个点，证明：可以用一些圆形纸片盖住这2000个点，且满足：

(1) 这些圆形纸片直径之和不超过2000；

(2) 任意两张圆心纸片的距离大于 1.

证明 首先证明满足条件(1)的纸片存在. 事实上，取2000张直径为 1 的纸片，使每张纸片的中心恰在给出的一个点上，于是这2000张纸片盖住了2000个已知点，且这些纸片直径之和为2000.

其次，若这些纸片中有两张有公共点（如图 12-4 中圆 O_1 与圆 O_2），则进行一次调整. 如图可用一张直径较大的图形纸片 O_3 代替圆 O_1 和圆 O_2，满足 O_3 在直线 O_1O_2 上且圆 O_1 和圆 O_2 都内切于圆 O_3，显然圆 O_3 的直径不大于圆 O_1 和圆 O_2 的直径之和，并且圆 O_3 所包含的已知点到圆 O_3 周界的距离不小于$\frac{1}{2}$. 如果还有两张纸片有公共点，可以继续进行这样的调整，于是经过有限步可用有限张直径之和不大于2000且两两无公共点的圆形纸片盖住已知的2000个点，并且每个已知点到覆盖它的纸片周界的距离不小于$\frac{1}{2}$. 设这些圆纸片每两张之间的距离的最小值为 d，则 $d>0$.

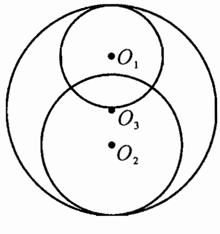


图 12-4

最后，若 $d>1$，则结论成立，若 $0<d\leqslant 1$，则再进行如下调整：将每张纸片用圆心相同，但半径缩小 $\frac{1}{2}-\frac{d}{3}$ 的纸片代替，则这些新纸片仍盖住了已知的2000个点，它们的直径之和小于2000且任意两张圆形纸片的距离至少为

$d+2\left(\frac{1}{2}-\frac{d}{3}\right)=1+\frac{d}{3}>1$，于是题目结论得证.

例 5 是否存在一个无穷正整数列 $a_1<a_2<a_3<\cdots$，使得对任意整数 A，数列 $\{a_n+A\}_{n=1}^{\infty}$ 中仅有有限个素数?

分析 若 $|A|\geqslant 2$，则只要 n 充分大时，a_n 含有因数 $|A|$，则 a_n+A 为合数，自然想到取 $a_n=n!$ 故当 $|A|\geqslant 2$ 时，数列 $\{n!+A\}$ 中至多只有有限个素数. 但 $A=\pm 1$ 时，$\{n!+1\}$，$\{n!-1\}$ 中的素数个数是否有限，则不好说了，为了使对 $A=\pm 1$ 情形也能证明 $a_n\pm 1$ 为合数，注意到因式分解的基本公式，我们只要改为取 a_n 等于 $n!$ 的奇次幂即可.

解 存在. 取 $a_n=(n!)^3$，则 $A=0$ 时 $\{a_n\}$ 中没有素数；当 $|A|\geqslant 2$ 时，只要 $n\geqslant |A|$，则 $a_n+A=(n!)^3+A$ 均为 A 的倍数，不可能为素数；当 $A=\pm 1$ 时，$a_n\pm 1=(n!\pm 1)[(n!)^2\mp n!+1]$. 当 $n\geqslant 3$ 时为合数. 从而对任何整数 A，$\{(n!)^3+A\}$ 中只有有限个素数.

注 从本例可以看出，用逐步调整法进行构造时，有时可将调整的过程省略，而直接根据调整的结果进行构造.

例 6 是否存在集合 M，满足

(1) M 内恰含有2011个正整数；

(2) M 内的每一个数以及任意多个数之和都能写成 m^k ($m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2$) 的形式.

分析 显然集合 $\{1, 2, \cdots, 2011\}$ 不满足条件(2)，我们考虑是否存在正整数 d 使集合 $M=\{d, 2d, 3d, \cdots, 2011d\}$ 满足条件(2). 因 M 中每个数及任意多个数之和都属于集合 $S=\left\{d, 2d, \cdots, \frac{1}{2}\times 2011\times 2012d\right\}$，故只要考虑是否存在正整数 d，使 S 中每个数能写成 m^k ($m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2$) 的形式. 进一步我们将 $\frac{1}{2}\times 2011\times 2012$ 用任意正整数 n 代替，然后用归纳构造法作出符合条件的集合 S.

解 首先证明下列引理.

引理 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，存在 $d_n\in\mathbf{N}_+$，使 $S_n=\{d_n, 2d_n, \cdots, nd_n\}$ 中每个数可写成 m^k ($m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2$) 的形式.

证明 $n=1$ 时，取 $d_1=3^2$ 知结论成立.

假设对 $n\in\mathbf{N}_+$ 结论成立，即存在 $d_n\in\mathbf{N}_+$，使 $id_n=m_i^{k_i}$ ($m_i, k_i\in\mathbf{N}_+, k_i\geqslant 2, i=1, 2, \cdots, n$)，取 $d_{n+1}=d_n[(n+1)d_n]^k$，其中 k 为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的公倍数，并设 $k=k_ip_i$ ($1\leqslant i\leqslant n$)，于是当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，有

$$id_{n+1}=id_n[(n+1)d_n]^k=m_i^{k_i}[(n+1)d_n]^{k_ip_i}$$

$$=\{m_i[(n+1)d_n]^{p_i}\}^{k_i},$$

及 $(n+1)d_{n+1}=[(n+1)d_n]^{k+1}$，即知对 $n+1$ 结论成立. 于是引理得证.

回到原题，设 $n_0=\frac{1}{2}\times 2011\times 2012$，于是由引理知存在 d_{n_0}，使 $S_{n_0}=\{d_{n_0}, 2d_{n_0}, \cdots, n_0d_{n_0}\}$ 中每个数可写成 $m^k(m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2)$ 的形式，从而 $M=\{d_{n_0}, 2d_{n_0}, \cdots, 2011d_{n_0}\}$ 满足题目条件(1)和(2).

注 上述证明中 d_{n+1} 的取法是这样想到的，为了使 $i=1, 2, \cdots, n$ 时能用归纳假设，d_{n+1} 中必含有因数 d_n，为了使 $(n+1)d_{n+1}$ 具有 $m^k(m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2)$ 的形式，d_{n+1} 应具有 $d_n[(n+1)d_n]^k$ 的形式，再为了使当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，$id_{n+1}=m_i^{k_i}[(n+1)d_n]^k$ 具有 $m^k(m, k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant 2)$ 的形式，必须 k 为 $k_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的倍数，从而 k 为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的公倍数.

习 题 12

1 证明：能将不同的完全平方数填满 $m\times n$ 的矩形方格表中的每一个小方格，使每行、每列的和也是完全平方数.（第 20 届全苏数学奥林匹克试题）

2 求证：对任意正整数 k，存在一个由有理数组成的等差数列 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_k}{b_k}$，其中 a_i 与 b_i 是互素正整数 $(i=1, 2, \cdots, k)$，且 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, b_k$ 互不相同.（第 21 届亚太地区数学奥林匹克试题）

3 能否将下列 $m\times n$ 矩形完全剖分为若干个形如 ⊞ 的“L 形”？

(1) $m\times n=2003\times 2005$；(2) $m\times n=2005\times 2007$.

4 平面内 4 条直线，其中任意 2 条不平行且任意 3 条不共点，从而每条直线上有 3 个点，在此条直线上截出两条线段. 问所得 8 条线段的长度能否为

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

(2) 互不相等的正整数?

5 证明：全体正整数可分成 100 个非空子集，使得任何 3 个满足关系式 $a+99b=c$ 的正整数 a、b、c，都可以从中找到两个数属于同一个子集.（第 26 届俄罗斯数学奥林匹克试题）

6 证明：存在无穷多个正整数 n，使得集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, 3n\}$ 可划分为三个不相交的集合：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 满足对任意 $i=1, 2, \cdots, n$ 都有 $a_i+b_i=c_i$.

7 证明：除了有限个正整数外，其他任何正整数 n 都可表示成为2004个不同的正整数之和：$n=a_1+a_2+\cdots+a_{2004}$ 满足 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{2004}$ 且 $a_i \mid a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, 2003)$（第 19 届 CMO 试题）

8 证明：对每一个正整数 n，存在一个十进制 n 位正整数 N，满足：

（1）N 的各位数字都不等于 0；

（2）N 能被它的各位数字之和整除.（第 39 届 IMO 预选题）

问题篇

13 组合计数问题

组合计数问题是高中数学竞赛中最常见的一类问题，解组合计数问题的基本方法有以下几种：

1. 枚举法(第五讲例 1 的后面一部分)；
2. 利用基本计数原理及基本公式(第一讲中例 1～9，第五讲中例 1)；
3. 配对法、映射方法和一般对应方法(第六讲例 1～4，8～15)；
4. 算二次方法(第七讲例 1～2，4～7)；
5. 递推方法(第八讲例 1～8)；
6. 利用容斥原理(第一讲例 10～12)；
7. 利用不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的非负整数解组的公式(第一讲例 7 的解法二，例 8～9).

对于某些较复杂的组合计数问题，有时要联合使用几种计数方法才能解决，而有些计数问题则分别可用几种不同的计数方法给出几种不同的解答.

例 1　有 6 个红球，3 个蓝球，3 个黄球. 将这些球放在一条直线上. 假设同色球没有区别，试问：有多少种不同的放法使得同色球不相邻？(第 19 届日本数学奥林匹克试题)

解　因为有 6 个红球和 6 个非红球，且任意两个红球之间至少有一个非红球，所以一个蓝球与一个黄球相邻最多出现一次.

若蓝球与黄球不相邻，则红球和非红球交替放着，这时红球的放法只有 2 种(即最左端为红球或非红球)，蓝球有 C_6^3 种放法，黄球有 C_3^3 种放法)，不同的放法有 $2C_6^3C_3^3=40$ 种.

若有一个蓝球和一个黄球相邻，可将其合并看成一个“花球”，则非红球由 2 个蓝球、2 个黄球和一个花球组成，于是任意两个相邻红球之间将有一个非红球，这样的放法有 $\dfrac{5!}{2!2!1!}=30$(种). 又因花球包含 2 种不同的放法，所以有一个蓝球与一个黄球相邻的放法有 $2\times30=60$ 种.

综上，满足题目条件的放法共有 $40+60=100$ 种.

例 2　从给定的 6 种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的 6 个

面染色，每面恰染一色，具有公共棱的两个面不同色，则不同的染色方案有________种.（约定经过翻滚或旋转可以变相同的染色方案是相同的染色方案）（1996 年全国高中数学联赛试题）

解　因有公共顶点的三个面互不同色，故至少要用 3 色，下分 4 种情形.

(1) 6 种颜色都用时，先将染某种固定颜色的面朝上，从剩下 5 色中取 1 色染下底面有 C_5^1 种方法，余下 4 色染余下的 4 个侧面（应是 4 种颜色的圆排列）有 $(4-1)!$ 种染法，所以 6 种颜色都用时，染色方案有 $C_5^1\cdot(4-1)!=30$ 种.

(2) 只用 5 种颜色时，从 6 色中取 5 色有 C_6^5 种方法，这时必有一组对面同色，从 5 色中取 1 色染一组对面，并将它们朝上和朝下，有 C_5^1 种方法，余下 4 色染余下的 4 个侧面（应是 4 粒不同颜色珠子的项链），有 $\frac{1}{2}\cdot(4-1)!$ 种方法，所以只用 5 种颜色时，染色方案有 $C_6^5\cdot C_5^1\cdot\frac{1}{2}\cdot(4-1)!=90$ 种.

(3) 只用 4 种颜色时，从 6 色中取 4 色有 C_6^4 种方法，这时必有 2 组对面同色，另一组对面不同色，从 4 色中取 2 色染一组对面，并将它们朝上和朝下（这时上、下底面无区别）有 C_4^2 种方法，其余 2 色染余下 4 个侧面且使 2 组对面同色（应是 2 粒不同颜色珠子的项链）只有 1 种染法，故只用 4 色时，染色方案有 $C_6^4C_4^2\cdot 1=90$ 种.

(4) 只用 3 色时，从 6 色中取 3 色有 C_6^3 种方法，这时 3 组对面同色，用 3 种颜色去给它们染色只有 1 种染法，所以只用 3 色时，染色方案有 $C_6^3\cdot 1=20$ 种.

综上可知，不同的染色方案共有 $30+90+90+20=230$ 种.

例 3　凸 n 边形的任意 3 条对角线不交于形内一点，求这些对角线将凸 n 边形分成的区域的个数.（第 5 届中国国家集训队试题）

解法一　设凸 n 边形被对角线分成的区域中边数最多的为 m 边形，其中三角形有 n_3 个，四边形有 n_4 个，…，m 边形有 n_m 个，于是凸 n 边形被分成的区域个数为

$$S=n_3+n_4+\cdots+n_m.$$

一方面各区域的顶点数的总和为 $3n_3+4n_4+\cdots+mn_m$，另一方面，对角线在形内有 C_n^4 个交点，每个交点是 4 个区域的公共顶点（因无 3 条对角线交于形内一点），又凸 n 边形有 n 个顶点，每个顶点是 $n-2$ 个区域的公共顶点，所以

$$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m=4C_n^4+n(n-2). \qquad ①$$

其次，各区域的内角总和为 $n_3\cdot180^\circ+n_4\cdot360^\circ+\cdots+n_m\cdot(m-2)\cdot180^\circ$，

另一方面，原凸 n 边形的 n 个顶点处的内角和为 $(n-2)\cdot 180^\circ$，又 C_n^4 个对角线交点处的内角和为 $C_n^4\cdot 360^\circ$，所以

$$\begin{aligned}&n_3\cdot 180^\circ+n_4\cdot 360^\circ+\cdots+n_m\cdot(m-2)\cdot 180^\circ\\=&(n-2)\cdot 180^\circ+C_n^4\cdot 360^\circ,\end{aligned}$$

即
$$n_3+2n_4+\cdots+(m-2)n_m=2C_n^4+(n-2),\qquad ②$$

[①－②]÷2，得

$$\begin{aligned}S=n_3+n_4+\cdots+n_m&=C_n^4+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\\&=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).\end{aligned}$$

解法二　每去掉一条对角线，则区域减少的个数为 a_i+1，这是 a_i 是该对角线与还没有去掉的对角线在形内的交点数，逐步将 C_n^2-n 条对角线去掉，最后，剩下一个区域，故所求区域数为 $S=1+\sum\limits_{i=1}^{C_n^2-n}(a_i+1)$，而 $\sum\limits_{i=1}^{C_n^2-n}a_i$ 恰等于对角线在形内的交点数 C_n^4，所以

$$S=1+C_n^4+C_n^2-n=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).$$

解法三　设凸 n 边形被对角线分成的区域数为 S，加上凸 n 边形外的区域，共有 $F=S+1$ 个区域，相当一个凸 F 面体，它的顶点数为 $V=C_n^4+n$，又设它的边数为 E，则从凸 n 边形内每一交点处出发有 4 条边，共 $4C_n^4$ 条边，另外，从凸 n 边形每一顶点出发有 $n-3$ 条对角线上的线段，故从 n 个顶点出发共有 $n(n-3)$ 条线段，但以上计算每条线段计算了 2 次，故对角线被交点分成的线段数为

$$\frac{1}{2}[4C_n^4+n(n-3)]=2C_n^4+\frac{1}{2}n(n-3),$$

加上凸 n 边形的 n 条边得

$$\begin{aligned}E&=2C_n^4+\frac{1}{2}n(n-3)+n\\&=2C_n^4+C_n^2.\end{aligned}$$

代入欧拉(Euler)公式 $V+F-E=2$ 得

$$\begin{aligned}S=F-1&=E-V+1\\&=2C_n^4+C_n^2-C_n^4-n+1\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).$$

解法四　设凸 n 边形被对角线分成的区域数为 a_n，于是 $a_3=1$，$a_4=4$.

在凸 $n-1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{n-1}$ 基础上增加一个顶点 P_n 得凸 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$，则增加 1 个区域 $\triangle P_1P_{n-1}P_n$，再增加从 P_n 出发的 $n-3$ 条对角线，则增加的区域数应为这 $n-3$ 条对角线上的交点数 $C_n^4-C_{n-1}^4$ 加上 $n-3$. 故得

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+(C_n^4-C_{n-1}^4)+(n-3)+1\\&=a_{n-1}+(C_n^4-C_{n-1}^4)+n-2\ (n\geqslant 5).\end{aligned}$$

如果约定 $a_2=0$，$C_2^4=C_3^4=0$，则上式当 $n=3$，4 时也成立. 所以

$$\begin{aligned}a_n&=a_2+\sum_{k=3}^{n}(a_k-a_{k-1})\\&=0+\sum_{k=3}^{n}\left[(C_k^4-C_{k-1}^4)+(k-2)\right]\\&=C_n^4+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\\&=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).\end{aligned}$$

例 4　设 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 是 1, 2, 3, 4, 5 的排列，满足：当 $i=1$, 2, 3, 4 时，$a_1a_2\cdots a_i$ 都不是 1, 2, …, i 的排列，求这种排列的个数.（2000 年上海数学奥林匹克试题）

解法一　显然 $a_1\neq 1$.

(1) $a_1=5$ 时，$a_2a_3a_4a_5$ 是 1, 2, 3, 4 的任何排列均满足题目要求，这时排列有 4! 个；

(2) $a_1=4$ 时，一共有 4! 个排列，其中形如 $4\times\times\times 5$ 的 3! 个排列不满足要求，故这时满足要求的排列有 $4!-3!$个；

(3) $a_1=3$ 时，一共有 4! 个排列，其中形如 $3\times\times\times 5$ 和 $3\times\times 54$ 的排列不满足要求，故这时满足要求的排列个数为 $4!-3!-2!$；

(4) $a_1=2$ 时，一共有 4! 个排列，其中形如 $215\times\times$，21453，$2\times\times 54$，$2\times\times\times 5$的排列不满足要求，故这时满足要求的排列有 $4!-2!-1-2!-3!$个.

综上可得，满足要求的排列共有

$$\begin{aligned}&4!+(4!-3!)+(4!-3!-2!)+(4!-2!-1-2!-3!)\\=&24+18+16+13=71(\text{个}).\end{aligned}$$

解法二　设 1，2，3，4，5 的所有排列组成的集合为 S，令

$$A_i=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mid(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in S,$$
$$\text{且}(a_1,a_2,\cdots,a_i)\text{ 是}(1,2,\cdots,i)\text{ 的排列}\}\ (1\leqslant i\leqslant 4)$$

于是所求排列个数为 $|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\complement_S A_3\cap\complement_S A_4|$，易知

$|S|=5!$，$|A_1|=4!$，$|A_2|=2!\cdot3!$，$|A_3|=3!\cdot2!$，

$|A_4|=4!$，$|A_1\cap A_2|=3!$，$|A_1\cap A_3|=2!2!$，$|A_1\cap A_4|=3!$，

$|A_2\cap A_3|=2!\cdot2!$，$|A_2\cap A_4|=2!\cdot2!$，$|A_3\cap A_4|=3!$，

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=2!$，$|A_1\cap A_2\cap A_4|=2!$，$|A_1\cap A_3\cap A_4|=2!$，

$|A_2\cap A_3\cap A_4|=2!$，$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=1$.

故由容斥原理可得符合条件的排列个数为

$$\begin{aligned}&|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\complement_S A_3\cap\complement_S A_4|\\=&|S|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant4}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\\&|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\\=&5!-(4!+2!\cdot3!+3!\cdot2!+4!)+(3!+2!\cdot2!+3!+2!\cdot2!+2!\cdot2!\\&+3!)-(2!+2!+2!+2!)+1\\=&120-72+30-8+1=71(\text{个}).\end{aligned}$$

注　$|A_1\cap A_3|=2!\cdot2!$ 的理由是 $A_1\cap A_3$ 中只含形如 $1\times\times45$ 和 $1\times\times54$的排列，$|A_1\cap A_4|=3!$ 的理由是 $A_1\cap A_4$ 中只含形如 $1\times\times\times5$ 的排列，其他各式可类似得出.

例 5　对每个正整数 n，求集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的数目，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足对于$k=1,2,\cdots,n$，均有 $2(a_1+a_2+\cdots+a_k)$ 可以被 k 整除.（第 49 届 IMO 预选题）

解　对于每个正整数 n，设 x_n 为集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 满足条件的排列的数目，并称这些排列是“好的”. 对 $n=1,2,3$，易知每个排列都是好的，因此，$x_1=1$，$x_2=2!=2$，$x_3=3!=6$.

对于 $n>3$，考虑$\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个好的排列$(a_1,a_2,\cdots a_n)$，由好的排列的定义知 $n-1$ 应是

$$\begin{aligned}2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})&=2(1+2+\cdots+n-a_n)\\&=n(n+1)-2a_n=(n-1)(n+2)-(2a_n-2)\end{aligned}$$

的因数，因此，$2a_n-2$ 可以被$n-1$ 整除. 而 $0\leqslant 2a_n-2\leqslant 2(n-1)$，于是，$2a_n-2=0$ 或 $n-1$，或 $2(n-1)$. 即$a_n=1$ 或$\frac{n+1}{2}$ 或 n.

(1) 若 $a_n=\dfrac{n+1}{2}$,则 $n-2$ 应是

$$\begin{aligned}2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})&=2[(1+2+\cdots+n)-a_n-a_{n-1}]\\&=n(n+1)-(n+1)-2a_{n-1}\\&=(n-2)(n+2)-(2a_{n-1}-3)\end{aligned}$$

的因数,因此,$2a_{n-1}-3$ 可以被 $n-2$ 整除,而 $-1\leqslant 2a_n-3\leqslant 2n-3$,于是 $2a_n-3=0$ 或 $n-2$ 或 $2n-4$. 由于 $2a_n-3$ 是奇数,故它不可能等于 0 或 $2n-4$,所以 $2a_n-3=n-2$,即 $a_{n-1}=\dfrac{n+1}{2}=a_n$ 矛盾;

(2) 若 $a_n=n$,则 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ 是 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的好的排列,这样的好的排列有 x_{n-1} 个,每一个这样的好排列的后面加上 n,使得到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个满足 $a_n=n$ 的好的排列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,这种对应是一一对应,故满足 $a_n=n$ 的好的排列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有 x_{n-1} 个;

(3) 若 $a_n=1$,则 $\{a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{n-1}-1\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的好的排列,这是因为对任意 $k\leqslant n-1$,有

$$2[(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_k-1)]=2(a_1+\cdots+a_k)-2k$$

被 k 整除. 因此,$\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的 x_{n-1} 个好的排列中任意一个 $(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})$ 对应于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个好排列 $\{b_1+1, b_2+1, \cdots, b_{n-1}+1, 1\}$,这种对应是一一对应,故满足 $a_n=1$ 的好的排列有 x_{n-1} 个.

综上知 $x_n=2x_{n-1}(n\geqslant 4)$. 由 $x_3=6$,得当 $n\geqslant 4$ 时,$x_n=3\times 2^{n-2}$,故满足题目条件的排列个数为 $x_n=\begin{cases}n & (n=1, 2),\\ 3\times 2^{n-2} & (n\geqslant 3).\end{cases}$

例 6 设 M 为平面上坐标为 $(p\times 1994, 7p\times 1994)$ 的点,其中 p 为素数,求满足下列条件的直角三角形的个数:

(1) 三角形的顶点都是整点,M 是直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点.(第 9 届 CMO 试题)

分析 如图 13-1,直角三角形 MAB 满足条件(1),(2),其内切圆半径为 r,过 O 分别作 MA, MB 的垂线,垂足分别为 C, D,则易知 $OC=OD=MC=MD=r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}OM$,故 $\mathrm{Rt}\triangle MAB$ 由 $BD=u$ 和 $AC=v$ 唯一确定. 为此,我们只要根据条件(1),(2)建立 u, v 满足的不定方程(组),再通过不定方程(组)的解数的计算就可得出所求直角三角形的个数. 这样就通过建立对应关系,将一

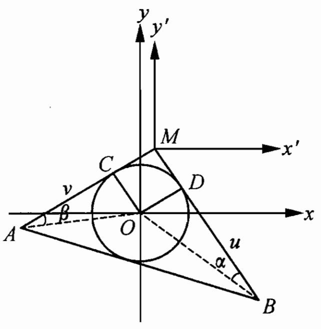


图 13-1

个复杂的不熟悉的问题转化为一个熟知的较易的问题来求解.

解法一 为了计算方便，将坐标原点平移到 M，建立新的直角坐标系 $x'My'$，于是在新的坐标系中，M 的坐标为 $(0,\ 0)$，内心 O 的坐标为 $(-p\times 1994,\ -7p\times 1994)$. 所以

$$\begin{aligned}|OM| &= \sqrt{(p\times 1994)^2+(7p\times 1994)^2}\\ &= p\times 1994\times 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

设$\triangle MAB$ 符合条件，其内切圆半径为 r，过 O 分别作 MA 和 MB 的垂线，垂足分别为 C 和 D，设 AM 的斜率为 k，易知 OM 的斜率为

$$k'=\frac{7p\times 1994}{p\times 1994}=7,$$

注意到 O 为 $\mathrm{Rt}\triangle MAB$ 的内心，$\angle OMA=45°$，故由两直线夹角公式得

$$1=\tan 45°=\frac{k'-k}{1+kk'}=\frac{7-k}{1+7k},$$

所以 $k=\frac{3}{4}$，而 $MB\perp MA$，故 MB 的斜率为 $k_1=-\frac{4}{3}$. 由此，可设 A，B 的坐标为 $A(-4t,\ -3t)$，$B(3t',\ -4t')$，因 $(3,\ 4)=1$，且 A，B 为整点，故 t，t'皆为正整数，于是 $MA=5t$，$MB=5t'$，并且 $MC=MD=r=MO\cos 45°=p\times 1994\times 5$.

记 $BD=u$，$AC=v$，则 $u=MB-MD=5(t'-p\times 1994)$，$v=MA-MC=5(t-p\times 1994)$. 记 $\angle OBD=\alpha$，$\angle OAC=\beta$，易知 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}(\angle MAB+\angle MBA)=45°$，$\tan\alpha=\frac{r}{u}$，$\tan\beta=\frac{r}{v}$ 且 $\frac{r}{u}=\tan\alpha=\tan(45°-\beta)=\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}=\frac{v-r}{v+r}$，所以 $u=\frac{r(v+r)}{v-r}$ 记 $v-r=m$，$\frac{2r^2}{m}=n$，则 $u=\frac{r(m+2r)}{m}=r+n$. 可见 m 及 n 均为 5 的正整数倍，且

$$mn=2r^2=2(p\times 1994\times 5)^2=2^3\times 5^2\times 997^2\times p^2. \qquad ①$$

因为对于 m，n 的一组正整数解 $(m,\ n)$，可求出唯一一组 u，v 的正整数解 $(u,\ v)=(n+r,\ m+r)$，从而唯一确定一个符合条件的 $\mathrm{Rt}\triangle MAB$，反之亦真. 故符合条件的 $\mathrm{Rt}\triangle MAB$ 的个数 S 等于不定方程①的满足条件 $5\mid m$ 和 $5\mid n$的正整数解组$(m,\ n)$的组数.

1. 若 $p\neq 2$，$p\neq 997$，则 $\frac{m}{5}\cdot\frac{n}{5}=2^3\times p^2\times 997^2$ 的一切解为

$$\begin{cases}\dfrac{m}{5}=2^i\times p^j\times 997^k \\ \dfrac{n}{5}=2^{3-i}\times p^{2-j}\times 997^{2-k}\end{cases}\quad \begin{bmatrix}i=0,1,2,3\\ j=0,1,2\\ k=0,1,2\end{bmatrix},$$

共有 $4\times 3\times 3=36$ 组解.

2. 若 $p=997$，则 $\dfrac{m}{5}\cdot\dfrac{n}{5}=2^3\times 997^4$ 的一切解为

$$\begin{cases}\dfrac{m}{5}=2^i\times 997^j \\ \dfrac{n}{5}=2^{3-i}\times 997^{4-j}\end{cases}\quad \begin{pmatrix}i=0,1,2,3\\ j=0,1,2,3,4\end{pmatrix},$$

共有 $4\times 5=20$ 组解.

3. 若 $p=2$，则 $\dfrac{m}{5}\cdot\dfrac{n}{5}=2^5\times 997^2$ 的一切解为

$$\begin{cases}\dfrac{m}{5}=2^i\times 997^j \\ \dfrac{n}{5}=2^{5-i}\times 997^{2-j}\end{cases}\quad \begin{pmatrix}i=0,1,2,3,4,5\\ j=0,1,2\end{pmatrix},$$

共有 $6\times 3=18$ 组解.

故符合条件的三角形个数为

$$S=\begin{cases}36,\ p\neq 2 \text{ 且 } p\neq 997 \text{ 时},\\ 20,\ p=997 \text{ 时},\\ 18,\ p=2 \text{ 时}.\end{cases}$$

解法二 记号同解法一，并且同解法一可得 $MA=5t$，$MB=5t'$（t，t' 为正整数），且 $r=p\times 1994\times 5$，记 $r_0=\dfrac{r}{5}=2\times 997\times p$（$2$，$997$，$p$ 皆为素数）于是 $AB=\sqrt{MA^2+MB^2}=5\sqrt{t^2+t'^2}$. 由平面几何知识，易知 $AB=MA+MB-2r$，即 $5\sqrt{t^2+t'^2}=5t+5t'-10r_0$，两边除以 5 后，再平方并经过整理可得

$$(t-2r_0)(t'-2r_0)=2r_0{}^2=2^3\times 997^2\times p^2.$$

记 $m_0=t-2r_0$，$n_0=t'-2r_0$，则

$$m_0n_0=2^3\times 997^2\times p^2. \quad ②$$

易知所求 $\mathrm{Rt}\triangle MAB$ 的个数 S 等于②的正整数解组 (m_0, n_0) 的个数，同

解法一可求得

$$S=\begin{cases}36,\ p\neq 2\text{ 且 }p\neq 997,\\ 20,\ p=997,\\ 18,\ p=2.\end{cases}$$

习 题 13

1 以一个正 $6n$（$n\in\mathbf{N}_+$）边形的顶点为顶点的互不全等的三角形有多少个？（2009 年哥伦比亚数学奥林匹克试题）

2 将正三角形每边 n 等分，过分点在正三角形内作边的平行线将正三角形剖分为小正三角形，问(1)其中有多少个正三角形（包括原来的正三角形在内）？(2)有多少个菱形？

3 某种比赛中每个队恰好与其他队各赛一场，每场比赛中胜者得 2 分，负者得 0 分，平局各得 1 分，比赛结束后发现，每队所得分数中恰有一半是该队同十个得分最低的队的比赛中得到的（十个得分最低的队所得分数中一半是他们彼此比赛中得到的），问共有几个队参加比赛？

4 平面内有 18 个点，其中任意 3 点不共线，每两点连一线段，这些线段用红蓝两色染色，每条线段恰染一色，其中从某点 A 出发的红色线段为奇数条，而从其他 17 个点出发的红色线段数互不相同，求以已知点为顶点各边为红色的三角形个数以及有两边为红色一边为蓝色的三角形个数.（1994 年湖南省集训队试题）

5 已知有三个委员会，对任意两个来自不同委员会的工作人员，第三个委员会中恰有 10 人都认识他们，也恰有 10 人都不认识他们，试求这三个委员会中工作人员的总数.（第 34 届俄罗斯数学奥林匹克（第四轮）试题）

6 设 $4\times4\times4$ 的大正方体由 64 个单位正方体组成，选取其中 16 个单位正方体涂成红色.使得大正方体中每个由 4 个单位正方体组成的 $1\times1\times4$ 的小长方体中都恰有 1 个红色正方体，问 16 个红色正方体有多少种不同取法？说明理由.（第 14 届 CMO 试题）

14 存在性问题及组合问题中的不等式的证明

在数学竞赛中常常要证明存在具有某些性质的组合结构，解这类问题的基本方法有下列几种.

1. 反证法和利用极端原理(第十讲例 1～8).

2. 利用抽屉原理、平均值原理或图形重叠原理(第二讲例 1～3，例 5～11 以及本讲中例 1).

3. 计数方法(第六讲例 2，例 12～14，第八讲例 7～8).

4. 染色方法与赋值方法(第九讲例 2(1)，例 5～6).

5. 数学归纳法(第五讲例 2，第十二讲例 6).

6. 组合分析法(第五讲例 3～6).

7. 构造法(第十二讲例 1～6).

8. 利用介值原理(参看本讲中例 7).

有时我们不仅要证明具有某些性质的组合结构是存在的，而且要证明其个数在一定的范围内，也就是要证明一个组合不等式，上述方法中的前 6 种都可用于组合不等式的证明，第六讲例 12，第七讲例 4，例 6 等等都是证明组合不等式的例子. 下面我们还将举出一些例子加以说明.

例 1　在面积为 1 的平面图形内任意放入 9 个面积为 $\frac{1}{5}$ 的小正方形. 证明：其中必有两个小正方形，它们重叠部分的面积不小于 $\frac{1}{45}$.

证明　设小正方形为 $A_1, A_2, \cdots, A_9$，并用 $|A_i|$ 表示 A_i 的面积 $(i=1, 2, \cdots, 9)$. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|=\frac{9}{5}>1$. 故必有两个小正方形的面积是重叠的，若对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 9$，$|A_i\cap A_j|<\frac{1}{45}$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 覆盖的面积为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_9|\geqslant\sum_{i=1}^{9}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 9}|A_i\cap A_j|>9\times\frac{1}{5}-C_9^2\times\frac{1}{45}=1.$$

这与 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 都在面积为 1 的图形内，应有 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_9|\leqslant 1$ 矛盾. 故存在 $1\leqslant i<j\leqslant 9$，使两个小正方形 A_i 与 A_j 重叠的面积

$|A_i \cap A_j| \geqslant \frac{1}{45}$.

注　本题证明中除用了反证法和容斥原理外，还用到了下列显然成立的图形重叠原理.

图形重叠原理　把面积分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的 n 个平面图形 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 以任意方式放入一个面积为 S 的平面图形 A 内.

(1) 若 $S_1+S_2+\cdots+S_n>S$，则存在两个平面图形 A_i 与 A_j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 有公共内点；

(2) 若 $S_1+S_2+\cdots+S_n<S$，则 A 内必存在一点不属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任何一个.

例 2　一个社团内，每两个人不是友好的就是敌对的. 设这个社团共有 n 个人和 q 个友好对子，并且任何三人中至少有两个人是敌对的. 证明：这个社团至少存在一个成员，他的敌人组成的集合中友好对子不多于 $q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$.（第 24 届美国数学奥林匹克试题）

证法一　只要证明存在一名成员 a 使得两人中有一人是 a 或有一人与 a 友好的友好对子个数不少于 $q-q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)=\frac{4q^2}{n^2}$.

设 n 个人为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，这 n 个人中友好对子组成的集合为 S，与 a_i 友好的人的个数为 d_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，于是 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2|S|=2q$，作 $n\times n$ 数表，其中第 i 行第 j 列处的数为

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\ i\neq j \text{ 且 } a_i \text{ 与 } a_j \text{ 友好},\\ 0,\ i=j \text{ 或 } i\neq j \text{ 且 } a_i \text{ 与 } a_j \text{ 敌对},\end{cases}\quad i, j=1, 2, \cdots, n.$$

则 $d_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n} x_{ji}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_j$ 表示这样一类友好对子的个数，这类对子中或有一人是 a_i 或有一人与 a_i 友好（因为任何三人中必有两人是敌对的，故此式中没有重复计数），于是 $|S|-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_j$ 表示 a_i 的敌人中友好对子的个数. 由柯西不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) d_j=\sum_{j=1}^{n} d_j^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} 1^2}=\frac{4q^2}{n},$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}d_j \geqslant \frac{4q^2}{n^2}$，故由平均值原理知道：存在 $i_0\ (1\leqslant i_0\leqslant n)$ 使得 $\sum_{j=1}^{n}x_{i_0j}d_j \geqslant \frac{4q^2}{n^2}$，故 a_{i_0} 的敌人集合中友好对子的个数为 $|S|-\sum_{j=1}^{n}x_{i_0j}d_j \leqslant q-\frac{4q^2}{n^2}=q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$.

证法二　用 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 表示社团内 n 个人，若两人友好，则对应点的连线染红色；若两人敌对，则对应点的连线染蓝色，得到一个 2 色完全图 K_n. 设从 A_i 出发有 d_i 条红边(即与 A_i 友好的人有 d_i 个)和 $n-1-d_i$ 条蓝边. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=2q. \qquad ①$$

设两边蓝一边红的三角形个数为 A，二边红一边蓝的三角形个数为 B. 依题目条件，不存在三边都为红色的三角形. 所以

$$B=\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\text{（当 } d_i=0 \text{ 或 } 1 \text{ 时，} C_{d_i}^2=\frac{1}{2}d_i(d_i-1)=0\text{）}. \qquad ②$$

以 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中点为顶点，两条不同色的边组成的角叫做异色角，则异色角的总数为

$$2(A+B)=\sum_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i). \qquad ③$$

由③并利用①、②和柯西不等式得

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i)-B\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i(d_i-1)\\&=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i-\sum_{i=1}^{n}d_i^2\leqslant\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}d_i\Big)^2\\&=nq-\frac{4q^2}{n}=nq\left(1-\frac{4q}{n^2}\right).\end{aligned} \qquad ④$$

设 A_i 的敌人集合中一个友好对子为 B_j, B_k，于是 $\triangle A_iB_jB_k$ 为两边蓝一边红的三角形. 将红边所对顶点为 A_i 的一边红两边蓝的三角形个数记为 x_i，则 x_i 也是 A_i 敌人集合中友好对子的个数，于是 $\sum_{i=1}^{n}x_i=A$，由④得

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}A\leqslant q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$. 由平均值原理知存在一个 x_i 满足 $x_i\leqslant q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$，即 A_i 的敌人集合中友好对子的个数不小于 $q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$.

例 3 设 S 是2002个元素组成的集合，N 为整数，满足 $0\leqslant N\leqslant 2^{2002}$. 证明：可将 S 的所有子集染成黑色或白色，使下列条件成立：

(1) 任何两个白色子集的并集是白色；

(2) 任何两个黑色子集的并集是黑色；

(3) 恰好有 N 个白色子集.（第 31 届美国数学奥林匹克试题）

证明 考虑 $S=S_n$ 中有 n 个元素的一般情形，这时 N 为满足 $0\leqslant N\leqslant 2^n$ 的整数，并设 $S_n=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，若 $N=0$，则将空集 $\varnothing$ 及 $\{a_1\}$ 都染成黑色，符合题目要求；若 $N=1$，则将 $\varnothing$ 染成黑色，$\{a_1\}$ 染成白色，符合题目要求；若 $N=2$，则将 $\varnothing$ 及 $\{a_1\}$ 都染成白色，$\{a_1, a_2\}$ 染成黑色，符合题目要求.

设对 n 元集合 S_n 及整数 $0\leqslant N\leqslant 2^n$，存在满足题目条件(1)，(2)，(3)的染色方法，考虑 $n+1$ 元集 $S_{n+1}=S_n\cup\{a_{n+1}\}$.

(i) 若 $0\leqslant N\leqslant 2^n$，则由归纳假设，存在一种染色方法将 S_n 的所有子集染成黑色或白色使得满足题目条件(1)，(2)，(3). 这时将 S_{n+1} 中所有含 a_{n+1} 的子集全染成黑色，于是仍满足题目条件.

(ii) 若 $2^n<N\leqslant 2^{n+1}$，不妨设 $N=2^n+k$ $(k=1, 2, \cdots, 2^n)$，则由归纳假设知存在 S_n 的子集的一种染色方法使得满足题目条件(1)(2)且恰有 k 个白色子集. 再 S_{n+1} 中将包含 a_{n+1} 的所有子集(共 2^n 个)染成白色，于是题目条件(1)，(2)仍然满足，且一共有 $N=2^n+k$ 个子集被染成白色，即条件(3)也满足，这就完成了对 S_n 的归纳证明，特别取 $n=2002$ 便知原题结论成立.

例 4 药房里有若干种药，其中一部分是烈性的，药剂师用这些药配成 68 副药方，每副药方里恰有 5 种药，其中至少有一种是烈性的，并且使得任选 3 种药都恰有一副药方包含它们. 试问：全部药方中是否一定有一副药方至少含有 4 种烈性药？(证明或否定).

解法一 设共有 n 种药，一共可形成 C_n^3 个"三药组". 另一方面每个"三药组"恰有一副药方包含它，每副药方可形成 $C_5^3=10$ 个"三药组"，68 副药方一共可形成 $68\times 10=680$ 副"三药组"，所以 $C_n^3=680$，故 $n=17$.

设共有 r 种烈性药，如果每副药方中至多含 3 种烈性药，并且考虑含 1 种烈性药 2 种非烈性药的"三药组"，并称之为"k—三药组"，那么一共有 $C_r^1C_{17-r}^2$ 个"k—三药组"，另一方面因为每 3 种烈性药恰有一副药方包含它，故有 C_r^3 副药方恰含有 3 种烈性药，每副这样的药方含有 $C_3^1C_2^2=3$ 个"k—三药组"，其余

$68-C_r^3$ 副药方只含 1 种或 2 种烈性药，它们中每一副可形成 $C_1^1C_4^2=6$ 或 $C_2^1C_3^2=6$ 种"k—三药组"，所以一共可形成 $3C_r^3+6(68-C_r^3)$ 个"k—三药组"，故得

$$3C_r^3+6(68-C_r^3)=rC_{17-r}^2,$$

整理得 $r^3-18r+137r=408$. 两边考虑模 5 同余得 $3\equiv r^3-3r^2+2r=r(r-1)(r-2)\pmod 5$. 但 $r\equiv 0,1,2,3,4\pmod 5$ 时，上式均不成立，矛盾. 这就说明假设每副药方中至多只有 3 种烈性药是不正确的，故必有一副药方中至少含 4 种烈性药.

解法二 同解法一可求出共有 17 种药. 设烈性药有 r 种：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 且假设任何一副药方里至多只含有 3 种烈性药. 设包含 α_i 的药方有 k_i 副 $(1\leqslant i\leqslant r)$，一方面含 α_i 的"三药组"有 $C_{16}^2=120$ 个. 另一方面，每副含 α_i 的药方中有 $C_4^2=6$ 个含 α_i 的"三药组"，所以 $6k_i=120$，$k_i=20\ (1\leqslant i\leqslant r)$. 设含 $\alpha_i,\alpha_j(1\leqslant i<j\leqslant r)$ 的药方有 k_{ij} 副. 一方面含 α_i,α_j 的"三药组"有 $C_{15}^1=15$ 个，另一方面每副含 α_i,α_j 的药方中包含有 $C_3^1=3$ 个含 α_i,α_j 的"三药组"，所以 $3k_{ij}=15$，故 $k_{ij}=5\ (1\leqslant i<j\leqslant r)$. 设同时含 $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_t(1\leqslant i<j<t\leqslant r)$ 的药方有 k_{ijt} 副，由已知条件得 $k_{ijt}=1$，且由假设知含有 $S\geqslant 4$ 种烈性药 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$ 的药方数 $k_{i_1i_2\cdots i_s}=0\ (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant r,\ S\geqslant 4)$. 于是，一方面，由已知条件知所有 68 副药方都至少含有一种烈性药，另一方面，由容斥原理，至少含一种烈性药的药方数目应为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}k_i-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}k_{ij}+\sum_{1\leqslant i<j<s\leqslant r}k_{ijs}&=20r-5C_r^2+C_r^3\\&=\frac{1}{6}(r^3-18r^2+137r).\end{aligned}$$

于是 $\frac{1}{6}(r^3-18r^2+137r)=68$，即 $r^3-18r^2+137r=408$.

下同解法一.

例 5 设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含. 试证：

(1) $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$；(2) $\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示从 n 个不同元素中取 $|A_i|$ 个元素的组合数.（1993 年全国高中数学联赛试题）

证明 (1) 所述不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n!. \quad ①$$

一方面，A 中 n 个不同元素的全排列有 $n!$ 个. 另一方面，对 A 的每个子集 A_i，作 A 中 n 个元素的全排列如下：

$$x_1x_2\cdots x_{|A_i|}y_1y_2\cdots y_{n-|A_i|}, \quad ②$$

其中 $x_1x_2\cdots\cdots x_{|A_i|}$ 是 A_i 中所有元素的全排列，而 $y_1y_2\cdots y_{n-|A_i|}$ 是 A_i 在 A 中补集 $\complement_A A_i$ 的所有元素的全排列，于是形如②的全排列有 $|A_i|!(n-|A_i|)!$ 个.

下面证明，当 $j\neq i$ 时，A_j 对应的全排列与 A_i 对应的全排列互不相同. 事实上，若 A_j 对应的某个全排列

$$x_1'x_2'\cdots x_{|A_j|}'y_1'y_2'\cdots y_{n-|A_j|}', \quad ③$$

与 A_i 对应的某个全排列②相同，则当 $|A_j|\leqslant|A_i|$ 时，$x_1'=x_1$，$x_2'=x_2$，$\cdots$，$x_{|A_j|}'=x_{|A_j|}$，即 $A_j\subseteq A_i$；而当 $|A_j|>|A_i|$ 时，有 $x_1=x_1'$，$x_2=x_2'$，$\cdots$，$x_{|A_i|}=x'_{|A_i|}$，即 $A_i\subset A_j$，这都与 A_1，A_2，$\cdots$，A_m 两两互不包含的假设矛盾，故

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n!,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$.

(2) 由(1)及柯西不等式得

$$\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\geqslant m^2.$$

注 本题来源于下列著名的 Sperner 定理：

Sperner 定理 设 A 为 n 元集，A_1，A_2，$\cdots$，A_m 为 A 的子集且两两互不包含，则 m 的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

证明 由上例(1)有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$，并且 C_n^0，C_n^1，C_n^2，$\cdots$，C_n^n 中以 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 为最大. 所以 $\dfrac{m}{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$，即 $m\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. 另一方面 A 的 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 元子集两两互不包含，故 m 的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

例 6 在某次竞赛中共有 a 个参赛选手和 b 个裁判，其中 $b\geqslant 3$ 为奇数. 设每一位裁判对每一位参赛选手的判决方式只有"通过"或"不通过". 已知任

意两个裁判至多对 k 个参赛选手有相同的判决. 证明：$\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$.（第 38 届 IMO 试题）

证明　设 a 个参赛选手为 $A_1, A_2, \cdots, A_a$，b 个裁判为 $B_1, B_2, \cdots, B_b$. 若两个裁判 B_i, B_j $(i\neq j)$ 对选手 A_m 的判决相同，则将 (B_i, B_j, A_m) 组成三元组，这种三元组的个数记为 S. 一方面，由已知条件知对任意一对裁判 B_i，B_j $(i\neq j)$，至多存在 k 个选手 A_j 组成 k 个“三元组”(B_i, B_j, A_m)，而 B_i，B_j 有 C_b^2 种取法，所以

$$S\leqslant k\mathrm{C}_b^2. \qquad ①$$

另一方面，假设对选手 A_m 有 r_m 个裁判对 A_m 的判决是“通过”，t_m 个裁判对 A_k 的判决是“不通过”，于是 $r_m+t_m=b$ 且含 A_m 的三元组恰有 $\mathrm{C}_{r_m}^2+\mathrm{C}_{t_m}^2$ 个，故

$$S=\sum_{m=1}^{a}(\mathrm{C}_{r_m}^2+\mathrm{C}_{t_m}^2).$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{r_m}^2+\mathrm{C}_{t_m}^2&=\frac{1}{2}(r_m^2-r_m+t_m^2-t_m)\\&=\frac{1}{2}[(r_m+t_m)^2-(r_m+t_m)-2r_mt_m]\\&=\frac{1}{2}(b^2-b-2r_mt_m).\end{aligned}$$

因 b 为奇数，且 $r_m+t_m=b$，所以 $r_mt_m\leqslant\frac{(b-1)(b+1)}{4}=\frac{b^2-1}{4}$，故

$$\mathrm{C}_{r_m}^2+\mathrm{C}_{t_m}^2\geqslant\frac{1}{2}\left[b^2-b-\frac{2}{4}(b^2-1)\right]=\frac{1}{4}(b-1)^2.$$

所以

$$S\geqslant a\cdot\frac{1}{4}(b-1)^2. \qquad ②$$

由①及②得 $k\cdot\mathrm{C}_b^2\geqslant a\cdot\frac{1}{4}(b-1)^2$，即 $\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$.

例 7　S 是由同一条直线上 $6n$ 个点构成的一个集合. 随机地选择其中 $4n$ 个点染成蓝色，其余 $2n$ 个点染成绿色. 证明：存在一条线段 l，使 l 上包含 S 中 $3n$ 个点，其中 $2n$ 个点为蓝色，n 个点为绿色.（第 30 届巴西数学奥林匹克

试题）

解 将直线上的点依次记为 x_1，x_2，…，x_{6n}. 定义函数 $f(i)(i=1, 2, \cdots, 3n+1)$ 表示 $\{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{3n-1+i}\}$ 中蓝色点的个数. 于是，我们只需证明存在 $j \in \{1, 2, \cdots, 3n+1\}$ 使 $f(j)=2n$.

事实上，一方面，我们考虑 $f(i)$ 与 $f(i+1)$ 的关系.

(1) 当 x_{i+3n} 与 x_i 同色时，$f(i)=f(i+1)$；

(2) 当 x_{i+3n} 为蓝色，x_i 为绿色时，$f(i+1)=f(i)+1$；

(3) 当 x_{i+3n} 为绿色，x_i 为蓝色时，$f(i+1)=f(i)-1$.

故总有 $|f(i+1)-f(i)| \leqslant 1$.

另一方面，所有蓝点个数为 $f(1)+f(3n+1)=4n$. 当 $f(1)=2n$ 时，结论成立；当 $f(1)<2n$ 时，$f(3n+1)>2n$；当 $f(1)>2n$ 时，$f(3n+1)<2n$，又已证 $|f(i+1)-f(i)| \leqslant 1\ (i \in \{1, 2, \cdots, 3n+1\})$，故必存在 $j \in \{1, 2, \cdots, 3n+1\}$ 使得 $f(j)=2n$. 于是 $\{x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+3n-1}\}$ 这 $3n$ 个点中恰有 $2n$ 个蓝点和 n 个绿点.

注 本题的证明应用了下列显然成立的离散介值原理.

离散介值原理 设由整数 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(m)$（m 为正整数）组成的数列及整数 A 满足：

(1) $|f(i+1)-f(i)| \leqslant 1\ (i=1, 2, \cdots, m-1)$；

(2) $f(1) \leqslant A \leqslant f(m)$ 或 $f(1) \geqslant A \geqslant f(m)$.

那么，存在整数 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使 $f(j)=A$.

证明 只证 $f(1) \leqslant A \leqslant f(m)$ 的情形. 如果 $f(1)=A$ 或 $f(m)=A$，则结论成立. 下设 $f(1)<A<f(m)$. 如果对任意 $i=2, 3, \cdots, m-1$ 有 $f(i) \neq A$，那么必有正整数 $k(1<k<m)$ 使 $f(k) \leqslant A-1$，$f(k+1) \geqslant A+1$，于是 $f(k+1)-f(k) \geqslant 2$，这与已知条件(1)矛盾. 从而结论成立.

除了离散介值原理外，还有下列连续介值原理.

连续介值原理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)<A<f(b)$（或 $f(a)>A>f(b)$），则存在 $c \in (a, b)$ 使 $f(c)=A$.

这个原理的证明要用到大学《数学分析》课程中的实数基本定理，但许多国家的竞赛题中已默许使用这一原理.

习 题 14

1 求一切正整数 $n \geqslant 5$，使存在一种染色方法至多用 6 种颜色给 n 边形的顶

点染色(每个顶点染一种颜色)，满足任意连续 5 个顶点互不同色.(2000 年澳大利亚——波兰数学奥林匹克试题)

2 100×100 方格表中每一个小方格被染成 4 种颜色之一，使得每行每列恰有每种颜色的小方格各 25 个.证明：可以在表中找到 2 行和 2 列，它们所交成的 4 个小方格分别染成了 4 种颜色.(第 26 届俄罗斯数学奥林匹克试题)

3 某国有1001个城市，每两个城市之间都有单向行车的道路相连，每个城市刚好有 500 条出城道路，也都刚好有 500 条入城的道路.由该国分裂出一个独立国家，它拥有 668 个城市.证明：由这个新独立国家的每个城市都可以到达它的其他任何一个城市，而无需越出自己的边界.(第 30 届俄罗斯数学奥林匹克试题)

4 在一所学校中有 n 名男生和 n 名女生($n>2000$).规定每名学生参加社团的数目不能超过 100 个.已知任意两名异性学生至少参加了一个共同的社团，证明：存在一个社团至少有 11 名男生和 11 名女生.(当 $n=2007$ 时，本题为第 10 届香港数学奥林匹克试题)

5 一次高难度数学竞赛试题由初试、复试两部分组成，共 28 个题目，每名竞赛者恰好解出其中 7 道题目，每对试题恰有两人解出.证明：必有一名参赛者，他至少解出了 4 道初试题或没有解出初试题.(第 23 届美国数学奥林匹克试题)

6 设空间给定 n 个点，其中任何 4 点不共面，它们之间连有 q 条线段，则这些线段至少构成 $\dfrac{4q}{3n}\left(q-\dfrac{n^2}{4}\right)$ 个不同的三角形.

7 由 n 个点和这些点之间的 l 条线组成一个空间图形，其中 $n=q^2+q+1$，$l\geqslant \dfrac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant 2$，$q\in \mathbf{N}_+$.已知图形中任意四点不共面，每点至少连一条线段，且存在一点至少连有 $q+2$ 条线段.证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点 A、B、C、D 和四条线段 AB、BC、CD、DA 组成的图形).(2003 年全国高中数学联赛试题)

8 凸 n 边形 p 中每条边和每条对角线被染为 n 种颜色中的一种.问：对怎样的 n，存在一种染色方式，使得对于这 n 种颜色中的任何三种不同颜色，都能找到一个三角形，其顶点为多边形 p 的顶点，且它的三边被染为这三种颜色？(2009 年第 24 届中国数学奥林匹克(CMO)试题)

15 组合最值问题

组合最值问题是各类数学竞赛中的热门话题之一.这类问题一般可描述为下列问题：

设$\mathscr{A}$是某类组合结构组成的集合，$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$中满足给定条件P的元素组成的子集，并且对$\mathscr{A}$中每一个元素A，都对应唯一一个确定的实数$m=f(A)$.我们的问题是：当$A\in\mathscr{B}$时，求$m=f(A)$的最小值或最大值.有些组合最值问题中$\mathscr{B}$和$\mathscr{A}$是同一集合.

在组合最值问题中自变量常常是正整数、集合、图等组合结构.它们都是一些离散的量，而且由于自变量与要求最大(小)值的量的函数关系常常不能用一个解析式表示，这就决定了求解组合最值问题与求解代数最值问题有许多不同的特点.

求解组合最大(小)值问题，一般按以下步骤进行：

(1) 探索所求的最大(小)值m_0；

(2) 证明：对一切$A\in\mathscr{B}$，都有$m=f(A)\leqslant m_0(\geqslant m_0)$；

(3) 构造一个$A_0\in\mathscr{B}$，使$f(A_0)=m_0$.于是，我们得到当$A\in\mathscr{B}$时$m=f(A)$的最大(小)值是m_0.

对于某些组合问题(2)，(3)步可用下列(2)′，(3)′步代替.

(2)′ 证明：满足$m=f(A)\leqslant m_0(\geqslant m_0)$的一切$A$都属于$\mathscr{B}$(即$A$满足给定的条件$P$)；

(3)′ 当$m=f(A)>m_0(<m_0)$时，构造一个$A_0\in\mathscr{A}$使$m=f(A_0)>m_0(<m_0)$，而$A_0\notin\mathscr{B}$(即A_0不满足给定的条件).

实际解答问题时，常常是第(1)(2)步(第(1)(3)′步)同时进行.也就是说，我们常常是在分析论证中探索和找出最大(小)值m_0，或在构造中探索和找出最大(小)值m_0.

如果$\mathscr{A}$(或$\mathscr{B}$)是一个有限集合，那么$m=f(A)$的取值集合也是有限集合，可见使$m=f(A)$取到最大(小)值的组合结构A_0必存在.这时，我们常常可用逐步调整方法来讨论当$m=f(A)$取最值时，A必须满足的一些必要条

件.若满足这些必要条件的 A 是唯一的，那么这个 A 就是要找的 A_0，对应的 $f(A)$ 就是要求的最值；若满足这些必要条件的 A 只有少数几个，则逐一算出它们对应 $f(A)$ 的值，其中最大(小)者，就是所求的最大(小)值.

从前面介绍可以看出，最值探索出来后，一般还要进行“论证”和“构造”.当然求解某些组合最值问题常常是结合“论证”(或“构造”)去探索最值的，一旦最值探索出来，“论证”(或“构造”)也就完成了，剩下的任务只是进行“构造”或“论证”.如何进行“构造”和“论证”，读者还可参看第十二讲和第十一讲、第十讲中介绍的各种方法，而探索最值的方法主要有以下几种：

1. 估值法.估计最值的常用方法有以下几种：构造特例估计，特殊情形估计，整体综合估计，极端情形估计，反面情形估计等等(第二讲例 4，第五讲例 5，第十讲例 7，习题二第 6 题)

2. 组合分析法.(第二讲例 2、例 7，第五讲例 1，第九讲例 1、例 4，第十讲例 8)

3. 计数方法.(第六讲例 4，第七讲例 2)

4. 调整法.(第十一讲例 2～3)

5. 归纳法.(习题十一第 3 题)

例 1 设 $M=\{1, 2, \cdots, 1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时 $15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是________.(1995 年全国高中数学联赛试题)

解 我们尽可能构造出一个满足条件且含元素最多的子集 A，因为要使当 $x\in A$ 时 $15x\notin A$，只要 $15x>1995$，即 $x>133$，可见 A 包含 $\{134, 135, \cdots, 1995\}$，并且要使当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，只要 $15x<134$，即 $x<9$，可见 A 又包含 $\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$，于是，我们取 M 的子集 $A=\{1, 2, \cdots, 8\}\cup\{134, 135, \cdots, 1995\}$，它满足题目条件且 $|A|=8+(1995-133)=1870$.

另一方面，任取 M 的一个满足条件的子集 A.因为 x 与 $15x$ $(x=9, 10, 11, \cdots, 133)$ 中至少有一个不属于 A，故 $|A|\leqslant 1995-(133-8)=1870$.

综上知 A 中元素最多有1870个.

例 2 将边长为正整数 m，n 的矩形划分为若干个边长均为正整数的正方形，每个正方形的边均平行矩形的相应边.试求这些正方形边长之和的最小值.(2001 年全国高中数学联赛试题)

分析 不妨设 $m\geqslant n$，我们构造一种特殊的划分情形，首先从较长边(边长等于 m 的边)上尽可能划出边长等于较短边的正方形，剩下一个 $n\times r_1$ $(0<r_1<n)$ 的矩形，再从较长的边(边长等于 n)上尽可能划出边长等于较短边长 r_1 的正方形，还剩一个 $r_1\times r_2$ $(0<r_2<r_1)$ 的矩形……这样一直划分下去，直

到全部划分为正方形为止. 我们来估计所有正方形边长之和的最小值. 显然上述划分过程等价于对 m, n 这两个正整数进行辗转相除的过程.

解 不妨设 $m \geqslant n$，记所求正方形边长之和的最小值为 $f(m, n)$，由辗转相除法知道存在正整数 $q_1, q_2, \cdots, q_{k+1}$ 和 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 满足

$$\begin{aligned}
&m = q_1 n + r_1,\ (0 < r_1 < n)\\
&n = q_2 r_1 + r_2,\ (0 < r_2 < r_1)\\
&r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ (0 < r_3 < r_2)\\
&\cdots\\
&r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k,\ (0 < r_k < r_{k-1})\\
&r_{k-1} = q_{k+1} r_k.
\end{aligned}$$

于是，我们首先从 $m \times n$ 矩形中划分出 q_1 个 $n \times n$ 的正方形，剩下一个 $n \times r_1$ 的矩形，再从 $n \times r_1$ 的矩形中划分出 q_2 个 $r_1 \times r_1$ 的正方形，剩下一个 $r_1 \times r_2$ 的矩形，…，第 k 步从 $r_{k-1} \times r_{k-2}$ 的矩形中划分出 q_k 个 $r_{k-1} \times r_{k-1}$ 的正方形，剩下一个 $r_k \times r_{k-1}$ 的矩形. 最后第 $k+1$ 步将 $r_k \times r_{k-1}$ 的矩形划分为 q_{k+1} 个 $r_k \times r_k$ 的正方形而没有剩余.

在这种划分下，所得各正方形边长之和为

$$\begin{aligned}
&q_1 n + q_2 r_1 + q_3 r_2 + \cdots + q_{k+1} r_k\\
=\ &(m - r_1) + (n - r_2) + (r_1 - r_3) + (r_2 - r_4) + \cdots +\\
&(r_{k-2} - r_k) + r_{k-1}\\
=\ &m + n - r_k\\
=\ &m + n - (m, n).
\end{aligned}$$

所以 $f(m, n) \leqslant m + n - (m, n)$.

另一方面，我们用数学归纳法证明对任何满足条件的划分，各正方形的边长之和为 $b_{m,n} \geqslant m + n - (m, n)$.

不妨设 $m \geqslant n$，$m = 1$ 时 $n = 1$. 这时只有一个边长为 1 的正方形，边长之和为 $1 = m + n - (m, n)$，其他划分的正方形边长之和显然大于 1，所以 $b_{1,1} \geqslant 1 = m + n - (m, n)$.

假设当 $m \leqslant k$ 时，对任意 $1 \leqslant n \leqslant m$，有 $b_{m,n} \geqslant m + n - (m, n)$，那么当 $m = k+1$ 时，若 $n = k+1$，则显然 $b_{m,n} \geqslant k+1 = m + n - (m, n)$. 当 $1 \leqslant n \leqslant k$ 时，设 $m \times n$ 矩形被分成 p 个正方形，其边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，并且不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_p$. 显然 $a_1 \leqslant n$. 若 $a_1 < n$，设矩形 $ABCD$ 中 $AB = CD = m$，$BC = AD = n$，于是 AD、BC 之间与 AD 平行的直线至少穿过 2 个正方形(或与其边界重合)，于是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ 不小于 AB 与 CD 之和，即

$$a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant 2m\geqslant m+n>m+n-(m,\ n).$$

若 $a_1=n$，则从 $m\times n$ 矩形中划分出一个边长为 $a_1=n$ 的正方形后，剩余部分组成一个 $(m-n)\times n$ 的矩形，且它被分成 $p-1$ 个边长分别为 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_p$ 的正方形，由归纳假设有

$$a_2+a_3+\cdots+a_p\geqslant(m-n)+n-(m-n,\ n)=m-(m,\ n),$$

从而 $b_{m,n}=a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant m+n-(m,\ n)$，所以 $f(m,\ n)=\min b_{m,n}\geqslant m+n-(m,\ n)$.

综上得所求正方形边长之和的最小值为 $f(m,\ n)=m+n-(m,\ n)$.

注　本题也可从具体尺寸的一些矩形出发作一些特殊的划分猜出最小值，那么 $f(m,\ n)\leqslant m+n-(m,\ n)$ 也可用数学归纳法去证明.

例 3　求最大正整数 n，使存在 n 个不同实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 满足：对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $(1+x_ix_j)^2\leqslant 0.99(1+x_i^2)(1+x_j^2)$.

分析　因为 $(1+x_ix_j)^2\leqslant 0.99(1+x_i^2)(1+x_j^2)\Leftrightarrow 100(1+x_ix_j)^2\leqslant 99(1+x_i^2)(1+x_j^2)\Leftrightarrow 99[(1+x_i^2)(1+x_j^2)-(1+x_ix_j)^2]\geqslant(1+x_ix_j)^2\Leftrightarrow 99(x_i-x_j)^2\geqslant(1+x_ix_j)^2\Leftrightarrow\left|\dfrac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}\right|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{99}}$.

由此联想到两角差的正切公式：$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

解　对任意 n 个实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，令 $x_i=\tan\theta_i\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta_i<\dfrac{\pi}{2},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{，且不妨设 }\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n\right)$.

那么，当 $\theta_n-\theta_1>\dfrac{n-1}{n}\pi=\pi-\dfrac{\pi}{n}$ 时，由 $\theta_n-\theta_1<\pi$ 可得 $\tan^2(\theta_n-\theta_1)<\tan^2\dfrac{\pi}{n}$；当 $\theta_n-\theta_1\leqslant\dfrac{n-1}{n}\pi$ 时，由 $\theta_n-\theta_1=(\theta_n-\theta_{n-1})+(\theta_{n-1}-\theta_{n-2})+\cdots+(\theta_2-\theta_1)\leqslant\dfrac{n-1}{n}\pi$ 知，存在 $i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 使 $0<\theta_{i+1}-\theta_i\leqslant\dfrac{\pi}{n}$，从而有 $\tan^2(\theta_{i+1}-\theta_i)\leqslant\tan^2\dfrac{\pi}{n}$. 由上可知，总存在 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 使 $\tan^2(\theta_j-\theta_i)\leqslant\tan^2\dfrac{\pi}{n}$ 即

$$\left(\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{x_j-x_i}{1+x_ix_j}\right)^2\leqslant\sin^2\frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)(1+x_ix_j)^2\geqslant\left(\cos^2\frac{\pi}{n}\right)(x_j-x_i)^2,$$

两边再加 $\left(\cos^2\dfrac{\pi}{n}\right)(1+x_ix_j)^2$ 得

$$\begin{aligned}(1+x_ix_j)^2 &\geqslant \left(\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left[(x_j-x_i)^2+(1+x_ix_j)^2\right]\\ &=\left(\cos^2\frac{\pi}{n}\right)(1+x_i^2)(1+x_j^2).\end{aligned}$$

而当 $n\geqslant 32$ 时，有

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{n}&=1-\sin^2\frac{\pi}{n}\geqslant 1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\\ &\geqslant 1-\left(\frac{\pi}{32}\right)^2>1-\left(\frac{1}{10}\right)^2=0.99.\end{aligned}$$

即当 $n\geqslant 32$ 时，对任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中必存在两个实数 x_i, x_j 使

$$(1+x_ix_j)^2>0.99(1+x_i^2)(1+x_j^2),$$

故 $n\geqslant 32$ 时，不存在 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足题目条件.

另一方面，取 31 个实数 $x_i=\tan(i\theta)$ $(i=1, 2, \cdots, 31)$，其中 $\theta=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{99}}$，则 $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{99}}=\dfrac{\sqrt{99}}{99}<\dfrac{10}{99}<\dfrac{\pi}{31}$，故 $0<\theta<\dfrac{\pi}{31}$，所以，当 $1\leqslant i<j\leqslant 31$ 时，$\theta\leqslant(j-i)\theta\leqslant 30\theta<\dfrac{30\pi}{31}=\pi-\dfrac{\pi}{31}<\pi-\theta$，故对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 31$ 有

$$\begin{aligned}\tan^2(j-i)\theta\geqslant\tan^2\theta=\frac{1}{99}&\Leftrightarrow\left(\frac{x_j-x_i}{1+x_ix_j}\right)^2\geqslant\frac{1}{99}\\ &\Leftrightarrow(1+x_ix_j)^2\leqslant 0.99(1+x_i^2)(1+x_j^2).\end{aligned}$$

可见存在 31 个不同实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{31}$ 满足题目条件.

综上知所求 n 的最大值为 31.

例 4 设 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 40\}$，求最小正整数 n，使可将 M 剖分成 n 个两两不相交的子集且同一子集内任取 3 个数 a, b, c（不必不相同）都有 $a\neq b+c$.

解 $n=4$ 时，将 M 分解为下列 4 个两两不相交的子集：$A=\{5, 6, 7, 8, 9, 32, 33, 34, 35, 36\}$，$B=\{14, 15, 16, \cdots, 25, 26, 27\}$，$C=\{2, 3, 11, 12, 29, 30, 38, 39\}$，$D=\{1, 4, 10, 13, 28, 31, 37, 40\}$，则同一子集内任取 3 个数 a, b, c（不必不相同）都有 $a\neq b+c$，故所求最小正整数 $n\leqslant 4$.

其次，假设可将 M 分成 3 个两两不相交的子集 A, B, C 使得在同一子集内任取 3 个数 a, b, c（不必不相同）都有 $a\neq b+c$. 不妨设 $|A|\geqslant|B|\geqslant|C|$，

且 A 中元素从小到大排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_{|A|}$. 于是 $a_1, a_2, \cdots, a_{|A|}$，以及 $a_2-a_1, a_3-a_1, \cdots, a_{|A|}-a_1$ 都是 M 中的两两不同的数(事实上，由 $0<a_i-a_1<a_i$ 知 $a_i-a_1\in M(i=1, 2, \cdots, |A|)$，且若 $a_i-a_1=a_j$ 则 $a_i=a_1+a_j$，这与假设矛盾). 因为这些数共有 $2|A|-1$ 个，所以 $2|A|-1\leqslant 40$，$|A|\leqslant 20$，其次 $3|A|\geqslant|A|+|B|+|C|=40$，所以 $|A|\geqslant 14$，并且 $|B|\geqslant\frac{1}{2}(|B|+|C|)=\frac{1}{2}(40-|A|)$. 从而元素对集合 $A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}$ 中元素个数为 $|A\times B|=|A|\cdot|B|\geqslant\frac{1}{2}|A|(40-|A|)$. 而对任意元素对 $(a, b)\in A\times B$，$a+b$ 至少为 2，至多为 80，至多只有 79 种可能，且 $14\leqslant|A|\leqslant 20$. 又二次函数 $f(t)=\frac{1}{2}t(40-t)$ 在区间$[14, 20]$上的最小值为 $\min\{f(14), f(20)\}=\min\left\{\frac{1}{2}\times 14\times(40-14), \frac{1}{2}\times 20\times(40-20)\right\}=182$. 故 $|A\times B|\geqslant 182$，由抽屉原理知 $A\times B$ 中至少有 $\left[\frac{182-1}{79}\right]+1=3$ 个不同元素 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_3) 满足 $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3$.

若 a_1, a_2, a_3 中有两个相等，则对应的 b_i 也相等. 这与 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_3) 两两不同矛盾，故 a_1, a_2, a_3 两两不同，从而 b_1, b_2, b_3 也两两不同. 不妨设 $a_1<a_2<a_3$，从而 $b_1>b_2>b_3$. 并且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 3$，$a_j-a_i$ 仍在 M 中但不在 A 中，同理对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 3$，$b_i-b_j\in M$，但 $b_i-b_j\notin B$，故三个差 $a_2-a_1=b_1-b_2$，$a_3-a_1=b_1-b_3$，$a_3-a_2=b_2-b_3\notin A\cup B$，从而它们都属于 $C=M\backslash(A\cup B)$. 令 $a=a_3-a_1$，$b=a_2-a_1$，$c=a_3-a_2$，则 $a=b+c$，矛盾，所以 n 的最小值 $\geqslant 4$.

综上可知，所求 n 的最小值为 4.

例 5 设 A 是有限集，且 $|A|\geqslant 2$，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 A 的子集且满足下述条件：

(1) $|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_n|=k$，$k>\frac{|A|}{2}$；

(2) 对任意 $a, b\in A$，存在 3 个集合 $A_r, A_s, A_t(1\leqslant r<s<t\leqslant n)$ 使得

$$a, b\in A_r\cap A_s\cap A_t;$$

(3) 对任意正整数 $i, j(1\leqslant i<j\leqslant n)$，有 $|A_i\cap A_j|\leqslant 3$.

求：当 k 取最大值时，正整数 n 的所有可能值. (2010 年第 51 届 IMO 中国国家集训队测试题)

解 不妨设 $A=\{1, 2, \cdots, m\}$，由条件(1)，(2) 知 $m\geqslant k\geqslant 2$，$n\geqslant 3$ 且

$m\leqslant 2k-1$.

假设 i 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中 r_i 个集合($i=1, 2, \cdots, m$). 如果 $i\in A_j$，那么将(i, A_j)配成一对($1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$)，并设这样的对子共有 x 个. 一方面对任意 $i\in A$，可形成 r_i 个含 i 的对子，又 $i=1, 2, \cdots, m$，所以 $x=\sum_{i=1}^{m} r_i$，另一方面，对任意 A_j，可形成 $|A_j|=k$ 个含 A_j 的对子，所以 $x=\sum_{j=1}^{n}|A_j|=nk$，于是我们得到

$$\sum_{i=1}^{m} r_i=nk. \qquad ①$$

如果 $i\neq j$ 都属于 A_t，那么将($i, j; A_t$)组成第一类三元组(前两个元不考虑顺序)，并设第一类三元组有 y 个. 于是由已知条件(2)知：对任意 $i\neq j$，至少可形成三个含 i, j 的第一类三元组，而 $i, j(i\neq j)$ 有 C_m^2 种不同取法，故 $y\geqslant 3C_m^2$. 另一方面由 $|A_t|=k$ 知：对任意 A_t，可形成 C_k^2 个含 A_t 的三元组，而 A_t 有 n 种不同取法，故 $y=nC_k^2$，于是我们得到 $nC_k^2\geqslant 3C_m^2$，即

$$n\geqslant\frac{3m(m-1)}{k(k-1)}. \qquad ②$$

如果 t 是 A_i 和 $A_j(i\neq j)$ 的公共元，那么将($t; A_i, A_j$)组成第二类三元组(后两个元不考虑顺序)，并设第二类三元组有 Z 个. 因为 t 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中 r_t 个集合，故对任意 t，可形成 $C_{r_t}^2$ 个含 t 的第二类三元组，而 $t=1, 2, \cdots, m$，所以 $Z=\sum_{t=1}^{m}C_{r_t}^2$. 另一方面，对任意 A_i 和 $A_j(i\neq j)$，可形成 $|A_i\cap A_j|\leqslant 3$ 个含 A_i 和 A_j 的第二类三元组. 又 $1\leqslant i<j\leqslant n$，所以 $Z=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\leqslant 3C_n^2=\frac{3}{2}n(n-1)$，于是得

$$\frac{3}{2}n(n-1)\geqslant\sum_{t=1}^{m}C_{r_t}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{m}r_t^2-\sum_{t=1}^{m}r_t\right).$$

由柯西不等式及①，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}n(n-1)&\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{m}r_t\right)^2-\sum_{t=1}^{m}r_t\right)\\&=\frac{1}{2m}\left(\sum_{t=1}^{m}r_t\right)\left[\left(\sum_{t=1}^{m}r_t\right)-m\right]\\&=\frac{1}{2m}(nk)(nk-m).\end{aligned}$$

整理得

$$(k^2-3m)n \leqslant (k-3)m. \qquad ③$$

考虑下列两种情形：

(i) 若 $m \geqslant \frac{k^2}{3}$，则结合已知条件 $m \leqslant 2k-1$，解得

$$3-\sqrt{6} \leqslant k \leqslant 3+\sqrt{6},$$

即 $1 \leqslant k \leqslant 5$.

(ii) 若 $m < \frac{k^2}{3}$，则由 ③ 及 ② 得

$$\frac{3m(m-1)}{k(k-1)} \leqslant n \leqslant \frac{(k-3)m}{k^2-3m}, \qquad ④$$

去分母整理得

$$9m^2-3(k^2+3)m+k(k^2-k+3) \geqslant 0,$$

即

$$(3m-k)[3m-(k^2-k+3)] \geqslant 0,$$

由于 $k^2-k+3>k$，所以 $m \leqslant \frac{k}{3}$（舍去，因为 $m \geqslant k$）或者

$$m \geqslant \frac{1}{3}(k^2-k+3),$$

由已知 $m \leqslant 2k-1$，故

$$2k-1 \geqslant m \geqslant \frac{1}{3}(k^2-k+3), \qquad ⑤$$

由此解出 $1 \leqslant k \leqslant 6$.

由(i)，(ii)，我们得到 $1 \leqslant k \leqslant 6$，故所求 k 的最大值不大于 6，并且由不等式 ⑤ 知 $k=6$ 当且仅当 $m=11$，再由 ④ 知 $k=6$ 且 $m=11$ 当且仅当 $n=11$.

其次，当 $k=6$，$m=11$，$n=11$ 时，存在满足条件(1)，(2)，(3)的实例如下：令

$$A_t=\{t, t+1, t+2, t+6, t+8, t+9\}, t=1, 2, \cdots, 11.$$

并且约定当 $j \equiv i \pmod{11}$ 时，j 与 i 表示同一个元素. 于是对任意 i，j（$1 \leqslant i < j \leqslant 11$），含 i 的集合有且只有以下 6 个：

$A_i=\{i,\ i+1,\ i+2,\ i+6,\ i+8,\ i+9\}$;

$A_{i+2}=\{i,\ i+2,\ i+3,\ i+4,\ i+8,\ i+10\}$;

$A_{i+3}=\{i,\ i+1,\ i+3,\ i+4,\ i+5,\ i+9\}$;

$A_{i+5}=\{i,\ i+2,\ i+3,\ i+5,\ i+6,\ i+7\}$;

$A_{i+9}=\{i,\ i+4,\ i+6,\ i+7,\ i+9,\ i+10\}$;

$A_{i+10}=\{i,\ i+1,\ i+5,\ i+7,\ i+8,\ i+10\}$.

上述 6 个集合中除了 i 出现 6 次以外，其他 $i+1$, $i+2$, $i+3$, $i+4$, $i+5$, $i+6$, $i+7$, $i+8$, $i+9$, $i+10$ 都恰出现 3 次. 故对任意 $i, j\in\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$, $i\neq j$，有且只有 3 个集合包含 i 与 j.

假设将周长为 11 的圆周分为 11 等分，将 11 个等分点按顺时针方向标记为 1, 2, …, 11. 假设这个圆周上按顺时针方向从点 i 到点 j 的距离为 d_{ij}，于是，对于圆周上的点集 A_i 可得下表(图 15－1)：

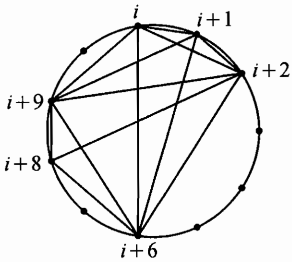


图 15－1

d_{ij} (j \ i)	i	$i+1$	$i+2$	$i+6$	$i+8$	$i+9$
i	11	1	2	6	8	9
$i+1$	10	11	1	5	7	8
$i+2$	9	10	11	4	6	7
$i+6$	5	6	7	11	2	3
$i+8$	3	4	5	9	11	1
$i+9$	2	3	4	8	10	11

由这个表可知在 $A_i=\{i,\ i+1,\ i+2,\ i+6,\ i+8,\ i+9\}$ 中，按顺时针方向距离为 1, 2, …, 10 的点各有 3 对，因为在圆周上将点集 A_i 按顺时针方向旋转长为 $j-i$ 的距离后便得到点集 A_j，故旋转后，A_i 中的且只有 3 个点到达的位置正是 A_j 中的三个点，从而 $|A_i\cap A_j|=3(1\leqslant i<j\leqslant 11)$(直接验证这点也可).

综上可得 k 的最大值为 6，这时 $n=11$.

注　本题可以等价地写成下列问题：某中学在三下乡的活动中派出一支文艺小分队到农村进行一次慰问演出(小分队中每人都是演员)，满足

(1) 每个节目都恰有相同的人数参加演出，且每个节目演出时，台上参加演出的演员人数总是多于台下没有参加演出的演员人数；

(2) 对任意两名演员，至少同台参加了三个不同节目的演出；

(3) 每两个不同节目，至多有三名相同的演员参加了演出.

求参加每个节目演出的演员人数取最大值时，一共演出了多少个节目.

例 6　设 A 为平面内一个有限点集，现将 A 中每个点染成三种颜色之一使得两个同色点所连线段上恰有一个另外颜色的点，试求 A 中所含点数的最大值.（2011 年湖南省中学生数学夏令营试题）

解　如图 15－2，存在含 6 个点的集合 $A=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ 满足题目条件，其中 A_1, A_4 为红色，A_2, A_5 为蓝色，A_3, A_6 为黄色.

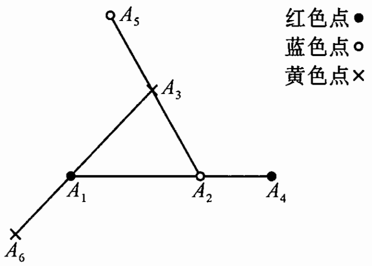


图 15－2

其次，如果存在点数不少于 7 的点集 A 满足题目的条件，那么由抽屉原理知其中必有 $\left[\frac{7-1}{3}\right]+1=3$ 个点同色，并且它们不共线.（否则，不妨设 A_1, A_2, A_3 同色且依次在一条直线上，则由已知条件知 A_1 与 A_2 之间有异色点 B，A_2 与 A_3 之间有异色点 C，于是 A_1 与 A_3 之间有 2 个异色点 B 和 C，这与已知条件矛盾!）. 从而存在一个 3 个顶点同色的三角形.

考察所有以 A 中点为顶点且 3 个顶点同色的三角形，因其个数有限，故其中必有一个 $\triangle A_1A_2A_3$，它的 3 个顶点同色（不妨设为红色，用"•"表示）且它的面积最小（图 15－3）.

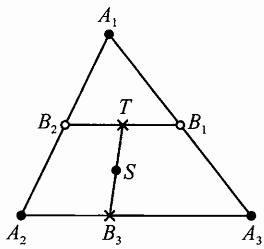


图 15－3

由已知条件知 $\triangle A_1A_2A_3$ 的每条边上必有一个不同于红色的点，若这 3 点同色，则以它们为顶点的三角形面积小于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的面积，这与假设矛盾. 故这 3 点不能全同色，不如设 B_1, B_2 为蓝色（用"∘"表示），B_3 为黄色（用"×"表示），如图 15－3 所示. 若线段 B_1B_2 上的异色点 T 为红色，则 $S_{\triangle TA_2A_3}<S_{\triangle A_1A_2A_3}$，矛盾！又同色的三个点不共线，故 T 为黄色. 若连线 TB_3 的异色点 S 为红色，则 $S_{\triangle SA_2A_3}<S_{\triangle A_1A_2A_3}$，矛盾！又 S 不能为黄色，故 S 为蓝色，于是 $S_{\triangle SB_1B_2}<S_{\triangle A_1A_2A_3}$，矛盾！因此，$A$ 中的点数不小于 7 是不正确的.

综上可知，A 中所含点数的最大值为 6.

例 7　MO 太空城由 99 个空间站组成，任意两个空间站之间有管形通道

相连，规定其中 99 条通道为双向通行的主干道，其余通道严格单向通行. 如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站，则称这四个站的集合为一个互通四站组.

试为 MO 太空城设计一个方案，使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数，并证明你的结论). (第 14 届 CMO 试题)

解 把问题一般化，下面讨论 n 个空间站和 n 条双向主干线的一般情形，其中 n 为大于 3 的奇数，并记 $m=\frac{1}{2}(n-3)$，本题中 $n=99$，$m=48$.

(1) 若在四个空间站中有一个空间站与另外三个站的通道都是从该站严格单向发出，则这四个站的集合不是互通四站组，把这样的非互通四站组归入 S 类，其余的非互通四站组归入 T 类，于是四通互站组的总数为

$$N_n=C_n^4-|S|-|T|.$$

用 $1, 2, \cdots, n$ 给 n 个空间站编号，设从第 i 号空间站发出的严格单向通道数为 x_i，则 S 类非互通四站组的个数为 $|S|=\sum_{i=1}^{n}C_{x_i}^3$，并且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C_n^2-n=\frac{1}{2}n(n-3)=nm.$$

要使 N_n 最大，必须 $|S|$ 和 $|T|$ 最小.

首先，我们证明 $|S|\geqslant nC_m^3$. 事实上，当 $|S|$ 取最小值时，必对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，$|x_i-x_j|\leqslant 1$. 这是因为若存在 $1\leqslant i, j\leqslant n$，使 $x_j-x_i\geqslant 2$，那么令 $x_i'=x_i+1$，$x_j'=x_j-1$，$x_k'=x_k(k\neq i, j)$，于是 $\sum_{i=1}^{n}x_i'=\sum_{i=1}^{n}x_i$，设 $|S'|=\sum_{i=1}^{n}C_{x_i'}^3$，则 $|S|-|S'|=C_{x_i}^3+C_{x_j}^3-C_{x_i'}^3-C_{x_j'}^3=C_{x_i}^3+C_{x_j}^3-C_{x_i+1}^3-C_{x_j-1}^3=C_{x_j-1}^2-C_{x_i}^2>0$ (因为 $(x_j-1)-x_i\geqslant 1$)，这与 $|S|$ 最小矛盾. 又 $x_1+x_2+\cdots+x_n=nm$，所以 $x_1=x_2=\cdots=x_n=m$ 时，S 取最小值. 故 $|S|\geqslant nC_m^3$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=m$ 时，等号成立，所以

$$N_n=C_n^4-|S|-|T|\leqslant C_n^4-nC_m^3-0=\frac{1}{48}n(n-3)(n^2+6n-31).$$

(2) 下面的设计方案表明 $N_n=C_n^4-nC_m^3$ 是可以成立的.

首先将编号为 $1, 2, \cdots, n$ 的空间站依顺时针方向排在一个圆周上的 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 处，圆周上相邻两空间站的通道为双向通行主干道，这样一共设置了 n 条双向通行的主干道：

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \cdots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1.$$

对任意 $i,\ j\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$，$i\neq j$，沿顺时针方向若从 A_i 到 A_j 的弧经过奇数个空间站，那么规定 A_i 与 A_j 之间的通道是从 A_i 到 A_j 的严格单向通行道：$A_i\to A_j$，因为 n 为奇数，从 A_i 到 A_j 的顺时针方向的弧与从 A_j 到 A_i 的顺时针方向的弧当中恰有一个经过奇数空间站，故上述规定不会导致矛盾.

按此规定，从每个 A_i 出发的严格单向通行道的数目都为 $m=\frac{1}{2}(n-3)$，所以 $|S|=nC_m^3$. 下面证明：此方案中必有 $|T|=0$.

如果四站组中有两个空间站之间的通道是双向主干道，那么易知这个四站组是互通四站组. 因此，如果四站组 A、B、C、D 不是互通的，那么它们中任何两站的通道都是严格单向通行道. 设 A 与 B，B 与 C，C 与 D，D 与 A 之间的空间站的个数分别为 $a,\ b,\ c,\ d$，于是 $a+b+c+d=n-4$ 为奇数，从而 $a,\ b,\ c,\ d$ 中奇数个数是 1 和 3.

(i) 若 a 为奇数，$b,\ c,\ d$ 为偶数，则 $A\to B\to D\to C\to A$. 即 A、B、C、D 为互通四站组(图 15-4).

(ii) 若 a 为偶数，$b,\ c,\ d$ 为奇数，则从 B 到 A、C、D 的通道都是从 B 出发的严格单向通道，这种非互通四站组属于 S 类(图 15-5).

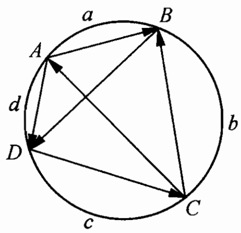


图 15-4

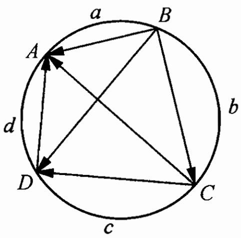


图 15-5

由以上讨论知此方案中 $|T|=0$，从而 $|S|=C_n^4-nC_m^3$.

综上可得，互通四站组个数的最大值为 $C_n^4-nC_m^3=\frac{1}{48}n(n-3)(n^2+6n-31)$，特别 $n=99$ 时，本题所求互通四站组个数的最大值为 $C_{99}^4-99C_{48}^3=2\,052\,072$.

例 8 对于整数 $n\geqslant 4$，求出最小正整数 $f(n)$，使得对任何正整数 m，集合 $\{m,\ m+1,\ \cdots,\ m+n-1\}$ 的任意 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素.（2004 年全国高中数学联赛加试试题）

解 设 $Z=\{2,\ 3,\ \cdots,\ n+1\}$，$T_n=A\cup B$，其中 A 和 B 分别为 Z 中 2 的倍数和 3 的倍数组成的子集，则

$$\begin{aligned}|T_n| &= |A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|\\ &= \left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right].\end{aligned}$$

且从 T_n 中任取 3 个数，其中必有 2 个数是 2 的倍数或 3 的倍数，它们不互素，所以

$$f(n)\geqslant |T_n|+1=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1, \quad ①$$

于是 $f(4)\geqslant 4$，$f(5)\geqslant 5$，$f(6)\geqslant 5$，$f(7)\geqslant 6$，$f(8)\geqslant 7$，$f(9)\geqslant 8$，又显然 $f(n)\leqslant n$，故 $f(4)=4$，$f(5)=5$. 下证 $f(6)=5$.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 为 $\{m, m+1, \cdots, m+5\}$ 中任意 5 个数，因为 $\{m, m+1, \cdots, m+5\}$ 由 3 个奇数和 3 个偶数组成，故 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 中至少有 2 个奇数且至多有 3 个奇数. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 中有 3 个奇数，则必是 3 个连续的奇数，它们两两互素；若 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 中有 3 个偶数，不妨设 x_1, x_2, x_3 为偶数，x_4, x_5 为奇数，则当 $1\leqslant i<j\leqslant 3$ 时 $|x_i-x_j|\in\{2, 4\}$，所以 x_1, x_2, x_3 中至多有一个是 3 的倍数且至多有一个是 5 的倍数，从而至少有一个既不被 3 整除也不被 5 整除，不妨设 $3\nmid x_3$ 且 $5\nmid x_3$，于是 x_3, x_4, x_5 两两互素（因为 $|x_3-x_4|$ 和 $|x_3-x_5|\in\{1, 3, 5\}$，$|x_4-x_5|\in\{2, 4\}$ 且 x_3 为偶数，x_4，x_5 为奇数）. 总之，$x_1, x_2, \cdots, x_5$ 中必有 3 个数两两互素，故 $f(6)\leqslant 5$，又 $f(6)\geqslant 5$，所以 $f(6)=5$.

再由 $\{m, m+1, \cdots, m+n\}=\{m, m+1, \cdots, m+n-1\}\cup\{m+n\}$ 得 $f(n+1)\leqslant f(n)+1$，于是 $f(7)\leqslant f(6)+1=6$，$f(8)\leqslant f(7)+1=7$，$f(9)\leqslant f(8)+1=8$，结合 $f(7)\geqslant 6$，$f(8)\geqslant 7$，$f(9)\geqslant 8$ 得 $f(7)=6$，$f(8)=7$，$f(9)=8$. 于是，我们已证当 $4\leqslant n\leqslant 9$ 时，下列算式成立：

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1. \quad ②$$

假设 $n\leqslant k(k\geqslant 9)$ 时，② 式成立，那么当 $n=k+1$ 时，由

$$\begin{aligned}\{m, m+1, \cdots, m+k\} &= \{m, m+1, \cdots, m+k-6\}\cup\\ &\quad \{m+k-5, m+k-4, \cdots, m+k\}\end{aligned}$$

知，从 $\{m, m+1, \cdots, m+k\}$ 中任取 $f(k-5)+f(6)-1$ 个数，则其中或者有 $f(k-5)$ 个数属于 $\{m, m+1, \cdots, m+k-6\}$，或者有 $f(6)$ 个数属于 $\{m+k-5, (m+k-5)+1, \cdots, (m+k-5)+5\}$，不论哪种情形，由归纳假设知取出的数中必有 3 个数两两互素，所以 $f(k+1)\leqslant f(k-5)+f(6)-1$，由归纳假设知 $n=k-5(k\geqslant 9)$ 时，② 式成立且 $f(6)=5$，故我们得到

$$\begin{aligned}
f(k+1) &\leqslant f(k-5)+f(6)-1 \\
&= \left[\frac{k-4}{2}\right]+\left[\frac{k-4}{3}\right]-\left[\frac{k-4}{6}\right]+1+5-1 \\
&= \left[\frac{k+2-6}{2}\right]+\left[\frac{k+2-6}{3}\right]-\left[\frac{k+2-6}{6}\right]+5 \\
&= \left(\left[\frac{k+2}{2}\right]-3\right)+\left(\left[\frac{k+2}{3}\right]-2\right)-\left(\left[\frac{k+2}{6}\right]-1\right)+5 \\
&= \left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{3}\right]-\left[\frac{k+2}{6}\right]+1. \qquad ③
\end{aligned}$$

由①及③得

$$f(k+1)=\left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{3}\right]-\left[\frac{k+2}{6}\right]+1.$$

故对一切 $n\geqslant 4$，有

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1.$$

注　用类似的方法我们可以证明对一切正整数 $n\geqslant 4$，有 $f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n-2}{6}\right]+2$ 成立，与上述解法不同之处是 B 的取法，这里 B 为 Z 内能被 3 整除的一切奇数，且可证 $|B|=\left[\frac{n-2}{6}\right]+1$. 详细证明留给读者作为练习题.

习　题　15

1 对于有限集 A，存在函数 f: $\mathbf{N}_+\to A$，具有以下性质：若 $i, j\in\mathbf{N}_+$，且 $|i-j|$ 为素数，则 $f(i)\neq f(j)$，问集合 A 中最少有几个元素？

2 设 M 是有限数集，若已知 M 的任何三个元素中总存在两个数，它们的和属于 M，试问 M 中最多有多少个数？（26 届俄罗斯数学奥林匹克试题）

3 设 n 为给定的正整数，求最大正整数 k，使得存在三个由非负整数组成的集合 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，$B=\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$，$C=\{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ 满足：对任意 $1\leqslant j\leqslant k$，都有 $x_j+y_j+z_j=n$.（2008 年第 8 届中国西部数学奥林匹克试题）

4 在一次由 n 个是非题构成的竞赛中，有 8 名选手参加. 已知对任意一对是非题 (A, B) 而言，（称 (A, B) 为有序对），恰有两人的答案为（对，对）；恰

有两人的答案为(对，错)；恰有两人的答案为(错，对)；恰有两人的答案为(错、错)，求 n 的最大值，并说明理由.

5 在一个圆周上给定 12 个红点，求 n 的最小值，使得存在以红点为顶点的 n 个三角形满足：以红点为端点的每条弦，都是其中某个三点均为红点的三角形的一条边.(2009 年第 6 届东南地区数学奥林匹克试题)

6 设 Z 是一个 56 元集合，求最小正整数 n，使得 Z 的任意 15 个子集，只要他们中任何 7 个的并的元素个数都不小于 n，则这 15 个子集中一定存在 3 个，它们的交非空.(第 21 届 CMO 试题)

7 设平面点集 $P=\{P_1, P_2, \cdots, P_{1994}\}$，$P$ 中任意 3 点不共线，将 P 中所有点任意分成 83 组，使每组至少 3 个点且每点恰属于一组，然后将同一组的任意两点用线段相连，不同组的任意两点不连线段，这样得到一个图案 G. 不同的分组方式得到不同的图案，将图案中以 P 中点为顶点的三角形个数记为 $m(G)$.(1)求 $m(G)$ 的最小值 m_0；(2)设 G^* 是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图案，若将 G^* 中线段(指以 P 中点为端点的线段)用四种颜色染色，每条线段恰染一色. 证明：存在一种染色方案，使 G^* 染色后，不存在以 P 中点为顶点的三边颜色相同的三角形.(1994 年全国高中数学联赛试题)

8 桌上放着2000张互不重叠的相同的圆纸片，某些圆纸片互相外切. 问最少要给这些纸片染上多少种颜色，才能使互相外切的圆纸片的颜色互不相同.(第 30 届 IMO 中国国家集训队考试试题)

习题解答

习　题　1

1. 由题意 n 个同学中恰有 1 人得 2 件，其余 $n-1$ 个人每人得 1 件，故发放奖品的方法数为 $C_{n+1}^2 A_n^n = \dfrac{(n+1)\cdot n\cdot n!}{2}$.

2. 不同的选法种数为 $C_5^1C_4^3 + C_5^2C_4^2 + C_5^3C_4^1 = 120$.

3. 设 k 位"吉祥数"的各位数字从高位到低位依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_k=7$ 其中 $x_1\geqslant 1$，$x_i\geqslant 0\ (2\leqslant i\leqslant k)$，令 $y_1=x_1-1$，$y_i=x_i(2\leqslant i\leqslant k)$，则 $y_1+y_2+\cdots+y_k=6$ 其中 $y_i\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant k)$　①，故 k 位"吉祥数"的个数 $p(k)$ 等于不定方程 ① 的非负整数解的个数，即 $p(k)=C_{k+5}^6$. 而 2005 是形如$\overline{2abc}$ 的"吉祥数"中最小的一个，且 $p(1)=C_6^6=1$，$p(2)=C_7^6=7$，$p(3)=C_8^6=28$，以及形如$\overline{1abc}$ 的"吉祥数"的个数等于不定方程 $a+b+c=6$ 的非负整数解的个数，即 $C_{6+3-1}^6=28$ 个. 故 2005 是第 $1+7+28+28+1=65$ 个"吉祥数"，即 $a_{65}=2005$，从而 $n=65$，$5n=325$. 又 $p(4)=C_9^6=84$，$p(5)=C_{10}^6=210$，$\sum\limits_{k=1}^{5}p(k)=330$ 即 $a_{330}=70\,000$，从而 $a_{329}=61\,000$，$a_{328}=60\,100$，$a_{327}=60\,010$，$a_{326}=60\,001$，$a_{325}=52\,000$，即 $a_{5n}=a_{325}=52\,000$.

4. 显然 $a, b, c\in\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$.　(1) 若构成等边三角形，则这样的三位数的个数为 $n_1=C_9^1=9$ 个；　(2) 若构成等腰(非等边) 三角形，设这样的三位数有 n_2 个. 当小数为底边长时，设小数为 i，则大数可以为 $i+1$，$i+2$，$\cdots$，9，有 $9-i\ (1\leqslant i\leqslant 8)$ 个. 这时三角形的个数为 $\sum\limits_{i=1}^{8}(9-i)=\dfrac{1}{2}(1+8)\cdot 8=36$ 个；当大数为底边时，可能构成三角形的数码如下表，共 16 种情况，

小数	2	3	4	5	6	7	8
大数	3	4，5	5，6，7	6，7，8，9	7，8，9	8，9	9

故等腰(非等边)三角形共有 $36+16=52$ 个，对应的三位数的个数为 $n_2=C_3^2\times 52=156$. 综上知满足题目条件的三位数 n 共有 $n_1+n_2=9+156=165$ 个.

5. 由 1，2，3，4，5，7，9 这 7 个数字中任取两个不同数字做成对数的底数和真数有 A_7^2 种方法，但 1 不能做底数，故应减去 A_6^1，又以 2，3，4，5，7，9 中任何一个做底数，1 做真数时，得到的对数值都等于 0，故又要减去 A_6^1-1 个，此外 $\log_2 4=\log_3 9$，$\log_4 2=\log_9 3$，$\log_3 2=\log_9 4$，$\log_2 3=\log_4 9$，故还应减去 4 个，因此，不同的对数值共有 $A_7^2-A_6^1-(A_6^1-1)-4=27$ 个.

6. 设共有 n 名选手，该 3 名选手之间比赛的场数为 r，则 $50=C_{n-3}^2+(3\times 2-r)$，即 $(n-3)(n-4)=88+2r$，经检验仅当 $r=1$ 时，$n=13$ 为正整数，故 3 名选手之间比赛了 1 场.

7. 设倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=-\dfrac{a}{b}>0$，由 a，b 取值集合的对称性，不失一般性可设 $a>0$，$b<0$. (1)当 $c=0$ 时，a 有 C_3^1 种取法，b 有 C_3^1 种取法，排除 2 个重复(因 $x-y=0$，$2x-2y=0$，$3x-3y=0$ 表示同一直线)，故这样的直线有 $C_3^1C_3^1-2=7$ 条；(2)当 $c\neq 0$ 时，a 有 C_3^1 种取法，b 有 C_3^1 种取法，c 有 C_4^1 种取法，故这样的直线有 $C_3^1C_3^1\cdot C_4^1=36$ 条，从而符合条件的直线共有 $7+36=43$ 条.

8. 如图：A 与 B 内栽种植物的方法有 A_6^2 种. 若 C 与 B 内栽种同一种植物，则 C 和 D 内栽种植物的方法有 C_5^1 种；若 C 与 B 内栽种不同的植物，则 C 与 D 内栽种植物的方法有 $C_4^1C_4^1$ 种，故 C 与 D 内栽种植物的方法有 $C_5^1+C_4^1C_4^1=21$ 种，同理 E 与 F 内栽种植物的方法也有 21 种，故符合条件的栽种方法共有 $A_6^2\times 21^2=13\,230$ 种.

A	C	E
B	D	F

(第 8 题)

9. 先考虑甲获胜的比赛过程的种数，设甲队第 i 号队员胜了 x_i 场 $(i=1,2,\cdots,7)$，于是 $x_1+x_2+\cdots+x_7=7$，且甲队获胜的比赛过程同不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=7$ 的非负整数解组 $(x_1,x_2,\cdots,x_7)$ 成一一对应，故甲队不同的比赛过程的数目等于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=7$ 的非负整数解组的数目为 C_{13}^6. 同理，乙获胜的不同比赛过程的数目也为 C_{13}^6，故不同的比赛过程共有 $2C_{13}^6=3432$ 种.

10. 随意射击 8 个靶子有 8! 种方法，由于每列靶子的顺序已经确定，故现在的射击方法共有 $\dfrac{8!}{3!2!3!}=560$ 种不同的顺序.

11. 因侧面三角形的三个顶点互不同色，故最少要用 3 种颜色. (1)使用 5 种颜色时，从 5 种颜色中取 1 种颜色染上顶点有 C_5^1 种方法，其余 4 色染底面 4 个顶点(4 个元素的圆排列)有 3! 种方法. 于是，这时不同的染色方法有 $C_5^1\cdot 3!=30$ 种；(2)使用 4 种颜色时，从 5 色中取出 4 色有 C_5^4 种方法，从取出的 4 色中取一种

颜色染上顶点有 C_4^1 种方法，其余 3 色染下底面的 4 个顶点，其中必有一对顶点同色，从 3 色中取 1 色染一对顶点有 C_3^1 种方法，其余 2 色染剩下 2 个顶点(2 个元素的圆排列)有 $1!$ 种方法，这时不同的染色方法有 $C_5^4C_4^1C_3^1\cdot 1!=60$ 种；(3)使用 3 种颜色时，从 5 色中取出 3 色有 C_5^3 种方法，从取出的 3 色中取出 1 色染上顶点有 C_3^1 种方法，其余 2 色染下底面的 4 个顶点，其中两对顶点分别同色，用 2 色染这两对顶点(2 个元素的圆排列)只有 $1!$ 种方法，这时不同的染色方法有 $C_5^3C_3^1\cdot 1!=30$ 种. 综上知满足题目要求的不同染色方法共有 $30+60+30=120$ 种.

12. 不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_{50}$，将 A 中元素按顺序分成 50 个非空子集，并设第 i 个非空子集中有 x_i 个数，则 $x_1+x_2+\cdots+x_{50}=100$ ($x_i\geqslant 1$, $i=1,2,\cdots,50$). 定义映射 $f:A\to B$，使得第 i 组元素在 f 下的象都是 b_i($i=1,2,\cdots,50$). 易知这样的 f 满足题目要求，并且每个这样的分组都一一对应满足条件的映射，于是满足题目要求的映射个数等于 A 按顺序分成 50 个非空子集的分法数. 从而也等于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{50}=100$ 的正整数解组的个数 $C_{100-1}^{50-1}=C_{99}^{49}$.

13. S 表示 n 对夫妻排成一行的所有全排列组成的集合，A_i 表示其中第 i 对夫妻相邻的全排列集合，则由容斥原理得所求排列的总数为 $|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n|=|S|-\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\cdots+(-1)^n\cdot|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=(2n)!-C_n^1\cdot 2(2n-1)!+C_n^2 2^2\cdot(2n-2)!-\cdots+(-1)^k C_n^k 2^k(2n-k)!+\cdots+(-1)^n C_{2n}^{2n}\cdot 2^n\cdot n!$.

14. (解法一)设这个数列的第1000项为 n，因 $105=3\times5\times7$，故依题意知道. n 不能被 3、5、7 中任何一个数整除，且在小于或等于 n 的正整数中不能被 3、5、7 中任何一个数整除的恰有1000个. 记 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A_i=\{m\mid m\in S, m$ 被 i 整除$\}$($i=3,5,7$)，于是由容斥原理得 $1000=|\complement_S A_3\cap\complement_S A_5\cap\complement_S A_7|=|S|-|A_3|-|A_5|-|A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|=n-\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n}{7}\right]+\left[\frac{n}{3\times5}\right]+\left[\frac{n}{3\times7}\right]+\left[\frac{n}{5\times7}\right]-\left[\frac{n}{3\times5\times7}\right]\cdots$①. 利用 $\alpha-1<[\alpha]\leqslant\alpha$，由①得 $1000>n-\left(\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\frac{n}{7}\right)+\left(\frac{n}{3\times5}-1+\frac{n}{3\times7}-1+\frac{n}{5\times7}-1\right)-\frac{n}{3\times5\times7}$ 和 $1000<n-\left(\frac{n}{3}-1+\frac{n}{5}-1+\frac{n}{7}-1\right)+\left(\frac{n}{3\times5}+\frac{n}{3\times7}+\frac{n}{5\times7}\right)-\left(\frac{n}{3\times5\times7}-1\right)$，即 $2178\frac{3}{4}<n<2194\frac{1}{16}$，又 n 与 105 互素，所以 n 只可能为2179，2182，2183，2186，2188，2189，2192，2194，经检验，其中只有 $n=$

2186 满足方程①，故此数列的第1000项为2186.

（解法二）记 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 105\}$，$A_i=\{m \mid m \in S$ 且 m 被 i 整除$\}$ $(i=3, 5, 7)$. 于是 S 内与 105 互素的数的个数等于 $|\complement_S A_3 \cap \complement_S A_5 \cap \complement_S A_7|=|S|-|A_3|-|A_5|-|A_7|+|A_3 \cap A_5|+|A_3 \cap A_7|+|A_5 \cap A_7|-|A_3 \cap A_5 \cap A_7|=105-\left[\frac{105}{3}\right]-\left[\frac{105}{5}\right]-\left[\frac{105}{7}\right]+\left[\frac{105}{3\times 5}\right]+\left[\frac{105}{3\times 7}\right]+\left[\frac{105}{5\times 7}\right]-\left[\frac{105}{3\times 5\times 7}\right]=48$. 设所有正整数中与 105 互质的正整数从小到大排成的数列为 $\{a_n\}$，于是 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$\cdots$，$a_{46}=101$，$a_{47}=103$，$a_{48}=104$，并记 $P=\{a_1, a_2, \cdots, a_{48}\}$. 一方面数列 $\{a_n\}$ 中的每一项 a_n 可表成为 $a_n=105k+r$ (k，r 为非负整数，$0 \leqslant r \leqslant 105$)，由 $(a_n, 105)=(105k+r, 105)=(r, 105)=1$，知 $r \in P$. 另一方面，对任意非负整数 k 及任意 $r \in P$，由 $(105k+r, 105)=(r, 105)=1$ 知数列 $\{a_n\}$ 中必有某一项 $a_n=105k+r$. 可见，数列 $\{a_n\}$ 由且仅由形如 $105k+r$ (k 为非负整数，$r \in P$) 的数组成. 因为每一个固定的 k，当 r 取遍 P 中的数时，形如 $105k+r$ 的数有 48 个，即得到数列中 48 个项. 又因为 $1000=48\times 20+40$，所以 $a_{1000}=105\times 20+a_{40}$，而 $a_{48}=104$，$a_{47}=103$，$a_{46}=101$，$a_{45}=97$，$a_{44}=94$，$a_{43}=92$，$a_{42}=89$，$a_{41}=88$，$a_{40}=86$，所以 $a_{1000}=105\times 20+86=2186$.

15. 设由 1，2，3 组成的 n 位数全体构成的集合为 S. $A_i=\{m \mid m \in S$，m 的各位数字中不出现 $i\}$ $(i=1, 2, 3)$. 于是所求 n 位数的个数等于 $|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \complement_S A_3|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=3^n-(2^n+2^n+2^n)+(1^n+1^n+1^n)-0=3^n-3\cdot 2^n+3$.

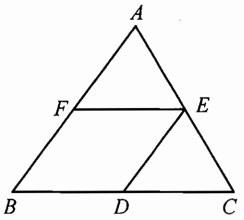
习 题 2

1. 在圆周上任取 17 个点代表 17 位科学家，互相通信讨论的 3 个题目分别用对应两点连线染成红、蓝、黄 3 种颜色来表示，因为从其中一点 A_1 出发的 16 条线段被染成了 3 种颜色，由抽屉原理知其中至少有 $\left[\frac{16-1}{3}\right]+1=6$ 条同色，不妨设 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5，A_1A_6，A_1A_7 同为红色. 若 A_2，A_3，$\cdots$，A_7 这 6 点中有 2 点 A_i，A_j $(2 \leqslant i < j \leqslant 7)$ 的连线染红色，则存在三边同为红色的三角形 $A_1A_iA_j$，否则 A_2，A_3，$\cdots$，A_7 这 6 点间的连线只染成了蓝、黄两种颜色，由 Ramsey 定理知也存在三边同色的三角形. 这都表示对应的 3 位科学家，他们之间讨论的是同一个题目.

2. (1)1，3，7，9 满足要求；(2)考虑任意 5 个数被 3 除的余数，若 0，1，

2 这三种余数都出现，则这 3 个数之和被 3 整除，不是素数；若 0，1，2 这三种余数中至多出现 2 种，则由抽屉原理知至少有 $\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$ 个数被 3 除的余数相等，从而这三个数之和也是 3 的倍数，不是素数. 故不存在 5 个不同的正整数，它们中任意三个数之和为素数.

3. 如图：将△*ABC* 分成一个平行四边形 *BDEF* 和两个三角形：△*CDE*，△*AFE*，(其中 *D*、*E*、*F* 分别为三边 *BC*、*AC*、*AB* 的中点) 由抽屉原理知至少在 $\left[\frac{7-1}{3}\right]+1=3$个点落在同一个图形内，以这 3 点为顶点的三角形面积不大于$\frac{1}{4}$.



(第 3 题)

4. 令 $M=\{3k+1 \mid k=0, 1, 2, \cdots, 670\}$，则 $M \subsetneq S$ 且 $|M|=671$，M 中任意两数之差均是 3 的倍数但两数之和则不是 3 的倍数，故 M 中任意两数之和都不被它们的差整除，所以，所求的最大值不小于 671. 其次，将 S 中的数分为下列 671 个子集：$\{1, 2, 3\}$，$\{4, 5, 6\}$，$\{7, 8, 9\}$，…，$\{2008, 2009, 2010\}$，$\{2011\}$，从 M 中任取 672 个数，其中必有 $\left[\frac{672-1}{671}\right]+1=2$ 个数属于同一组，这两个数之差不大于 2，设这两个数为 a 和 b 且 $a>b$. 若 $a-b=1$，则显然有 $a+b$ 被 $a-b$ 整除；若 $a-b=2$，则 a 与 b 同为奇数或同为偶数，即 $a+b$ 必为偶数，从而 $a+b$ 也被 $a-b$ 整除. 综上可知从 S 中最多可选出 671 个数，使其中任意两数之和都不能被它们的差整除.

5. 首先证明 S 中任意 13 个连续正整数中最多有 6 个属于 M. 以 $T=\{1, 2, \cdots, 13\}$ 为例进行证明. 考虑 T 的下列 13 个子集：$\{1, 6\}$，$\{2, 7\}$，$\{3, 8\}$，$\{4, 9\}$，$\{5, 10\}$，$\{6, 11\}$，$\{7, 12\}$，$\{8, 13\}$，$\{1, 9\}$，$\{2, 10\}$，$\{3, 11\}$，$\{4, 12\}$，$\{5, 13\}$且 T 中每个数恰属于 2 个子集. 任取 T 中 7 个元素，它们属于上述 13 个子集中 14 个子集，由抽屉原理知其中必有 2 个元素属于同一个子集，它们之差等于 5 或 8. 因此 T 中任何 7 个元素都不能同时属于 M. 另一方面 $T'=\{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$ 中任何两个数之差不等于 5 或 8，它们可以同时属于 M，故 T 中最多有 6 个数属于 M. 因为 $2000=13\times154-2$，故 S 中最多有 $154\times6=924$ 个数属于 M. 又因为集合$\{1, 2, 4, 5, 8, 11, 14, 15, 17, 18, 21, 24\}$中任何两个数之差不等于 5 或 8，故集合 $\{13n+k \mid k=1, 2, 4, 5, 8, 11, n=0, 1, 2, \cdots, 153\}$ 中任何两个数之差不等于 5 或 8，并且它有 924 个数. 综上可知 M 内最多有 924 个数.

6. 注意到 $C_{15}^{3}=455$. 若有 $2C_{15}^{3}=910$ 名学生参赛，将这 910 名学生分

为 455 组，每组 2 人，并且每组恰答对同样的 3 个题并且不同的组答对的 3 个题不全相同，此时不满足题设条件，故所求 n 的最小值不小于 911. 另一方面若至少有 911 名学生参赛，则只有下列两种情形：(1) 当每个学生至少答对 3 个题时，而每个学生答对 3 个题的不同情况只有 $C_{15}^3=455$ 种，故由抽屉原理知至少有 $\left[\dfrac{911-1}{455}\right]+1=3$ 名学生答对了同样的 3 个问题；(2) 当有一名学生 A 答对的题数不多于 2 时，其他学生中答对不超过 3 个题的学生人数不超过 10 人(否则他们中 11 人与第一个学生 A 共 12 人的得分总和不多于 $2\times1+3\times11=35<36$，这与已知条件矛盾). 故至少有 $911-11=900$ 名学生，他们中每一个至少答对了 4 个问题，由于 $C_4^3=4$，故由抽屉原理知这时至少有 $\left[\dfrac{4\times900-1}{455}\right]+1=8$ 名学生答对了同样的 3 个问题. 总之，当参赛学生人数不少于 911 人中，其中至少有 3 人答对了至少 3 个同样的问题. 综上可得所求 n 的最小值为 911.

7. 设 A 是 10 人之一，由已知 A 共买了 3 种书，且其余 9 人所买的书中都至少有一种与 A 买的书相同，于是由抽屉原理知，9 人中至少有 $\left[\dfrac{9-1}{3}\right]+1=3$ 人，加上 A 共 4 人买了同一种书，因而所求最小值不小于 4. 若购买人数最多的一种书共有 4 人购买，则可以证明每种书恰有 4 人购买. 设 10 人共买下了 n 种不同的书，则有 $4n=30$，但因 4 不整除 30，此不可能，故知所求的最小值不小于 5. 另一方面，我们用数字表示书种的号码，并使 10 人分别买书如下：$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,4,5\}$，$\{1,6,7\}$，$\{2,4,6\}$，$\{2,4,6\}$，$\{2,5,7\}$，$\{3,4,7\}$，$\{3,5,6\}$，$\{3,5,6\}$. 容易验证，他们买的书满足题中要求且购买人数最多的一种书有 5 人购买，故知所求最小值等于 5.

8. (1) 首先证明：对任意实数 a，存在距离等于 $2a$ 且同色的两点. 事实上，取一个红点 A，以 A 为中心，$2a$ 为半径作圆. 若该圆上有一红点 B，则结论成立，否则该圆上所有的点全为蓝点. 于是该圆的内接正六边形的一边的两个端点的距离等于 $2a$ 且全为蓝点，结论也成立. 其次设 $AB=2a$ 且 A 与 B 同色，不妨设 A 与 B 同为红色，以 AB 为直径作圆，并且设该圆的六等分点依次为 A, C, D, B, E, F. 若 C、D、E、F 中有一点为红点，例如 C 为红点，则直角$\triangle ABC$ 的 3 个顶点同为红色且 $BC=a$, $CA=\sqrt{3}a$, $AB=2a$. 结论得证，否则直角$\triangle CDE$ 的 3 个顶点同为蓝色且 $CD=a$, $DE=\sqrt{3}a$, $EC=2a$，结论也得证.

(2) (证法一) 在(1)中分别取 $a=1$, $a=1995$ 所得两个直角三角形即为所求.

(证法二) 以任意一点 O 为圆心，分别以 1 和1995为半径作两个同心圆.

在内圆上任取 9 个点，由抽屉原理知其中至少有 $\left[\frac{9-1}{2}\right]+1=5$ 个点同色，不妨设内圆上的 5 个点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 同色，作射线 OA_i 交外圆于 B_i（$i=1,2,3,4,5$），再由抽屉原理知 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5 中至少有 3 个点 B_i，B_j，B_k（$1\leqslant i<j<k\leqslant 5$）同色，于是$\triangle B_iB_jB_k$ 与$\triangle A_iA_jA_k$ 是相似比为1995的两个相似三角形并且每个三角形的三个顶点同色.

9. 设凸多面体有 F 个面，又已知它的顶点数为 $V=6$，棱数为 $E=12$，代入 Euler 公式 $V+F-E=2$，得 $F=E+2-V=12+2-6=8$. 设第 i 个面上有 x_i 条棱（$i=1,2,\cdots,8$），于是 $x_i\geqslant 3$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_8=2E=24$，平均值 $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=3$. 若有某个 $x_{i_0}>3$，则 $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i>3$，矛盾. 所以 $x_1=x_2=\cdots=x_8=3$，即每个面均为三角形.

10. 对 n 用归纳法. $n=4$ 时，已知这 4 点中有 $\frac{1}{2}\times 4\times(4-3)+4=6$ 对点之间的距离是确定的，但 4 个点一共只能形成 $C_4^2=6$ 对点，所以这 4 点组成的点集 M_4 是稳定的. 假设 $n=k$（$k\geqslant 4$）时结论成立，即当 M_k 中已有 $\frac{1}{2}k(k-3)+4$ 对点间的距离是确定的时，M_k 是稳定的. 那么 $n=k+1$ 时，假设 M_{k+1} 中已有 $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4$ 对点之间的距离是确定的. 那么从这 $k+1$ 个点出发有确定距离的点对数之和为$(k+1)(k-2)+8$，由平均值原理知，其中必有一个点 A，从它出发的有确定距离的点对数 $l\leqslant\frac{1}{k+1}\{(k+1)(k-2)+8\}=k-1+\frac{7-k}{k+1}$，而 $\frac{7-k}{k+1}<1$，所以 $l\leqslant k-1$. 去掉点 A，于是还剩下 k 个点，这 k 个点中至少有 $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4-(k-1)=\frac{1}{2}k(k-3)+4$ 对点之间的距离是确定的. 由归纳假设知，这 k 个点所组成的点集是稳定的且 A 至少与这 k 个点中 $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4-C_k^2=3$ 个点之间的距离是确定的. 不妨设这 3 个点为 B、C、D，且 $AB=x$，$AC=y$，$AD=z$（x，y，z是确定的正数）. 这时点 A 也唯一确定，否则存在另一点 $A'\neq A$，使 $A'B=x$，$A'C=y$，$A'D=z$，于是 B、C、D 都在线段 AA'的垂直平分线上，这与已知条件无 3 点共线矛盾，所以 M_{k+1} 也是稳定的，这就完成了归纳证明.

习　题　3

1. (1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，则

$$-3xf(x)=\quad -3a_0x-3a_1x^2-\cdots-3a_{n-1}x^n-\cdots,$$
$$2x^2f(x)=\qquad 2a_0x^2+\cdots+2a_{n-1}x^n+\cdots.$$

三式相加，并利用 $a_0=2$，$a_1=5$，$a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=0$ $(n=2,3,\cdots)$ 得 $(1-3x+2x^2)f(x)=2-x$，所以 $f(x)=\dfrac{2-x}{1-3x+2x^2}=\dfrac{3(1-x)-(1-2x)}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{3}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}=3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3\cdot 2^n-1)x^n$，所以 $a_n=3\cdot 2^n-1$.

(2) 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，则

$$-xf(x)=\quad -a_0x-a_1x^2-\cdots-a_{n-1}x^n-\cdots,$$
$$-6x^2f(x)=\qquad -6a_0x^2-\cdots-6a_{n-2}x^n-\cdots,$$
$$\frac{12}{1-x}=12+12x+12x^2+\cdots+12x^n+\cdots.$$

四式相加，并利用 $a_0=\frac{1}{6}(a_2-a_1+12)=4$，$a_1=3$，$a_n-a_{n-1}-6a_{n-2}+12=0$ $(n=2,3,\cdots)$ 得 $(1-x-6x^2)f(x)+\dfrac{12}{1-x}=16+11x$，$f(x)=\dfrac{4-5x-11x^2}{(1-x-6x^2)(1-x)}=\dfrac{4-5x-11x^2}{(1-x)(1+2x)(1-3x)}=\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{1+2x}+\dfrac{C}{1-3x}$，于是 $A=\left.\dfrac{4-5x-11x^2}{(1+2x)(1-3x)}\right|_{x=1}=2$，$B=\left.\dfrac{4-5x-11x^2}{(1-x)(1-3x)}\right|_{x=-\frac{1}{2}}=1$，$C=\left.\dfrac{4-5x-11x^2}{(1-x)(1+2x)}\right|_{x=\frac{1}{3}}=1$，所以 $f(x)=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1-3x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^n+(-2)^n+2)x^n$，故得 $a_n=3^n+(-2)^n+2$.

2. (1) 一方面 $(1+x)^{2n}=\sum\limits_{k=0}^{2n}C_{2n}^kx^k$ 中 x^{n+1} 的系数为 C_{2n}^{n+1}，另一方面 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^ix^i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{n}C_n^jx^j\right)$ 中 x^{n+1} 的系数为 $\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kC_n^{n+1-k}$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kC_n^{n+1-k}=C_{2n}^{n+1}$.

(2) 一方面 $(1+x)^{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kx^k$ 中 x^n 的系数为 $C_{n+1}^n=n+1$，另一方面 $(1+x)^{n+1}=\dfrac{(1-x^2)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}=\left(\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_{n+1}^kx^{2k}\right)\cdot\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n+j}^nx^j\right)$ 中 x^n 的系数为 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n+1}^k\cdot C_{n+(n-2k)}^n=\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n+1}^kC_{2n-2k}^n$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n+1}^kC_{2n-2k}^n=$

$n+1$.

(3) 注意到 $C_{n+k+1}^{2k+1}=C_{n+k+1}^{n-k}$ 及 $(2-x)^{n+k+1}=\sum\limits_{i=0}^{n+k+1}(-1)^iC_{n+k+1}^i\cdot 2^{n+k+1-i}x^i$ 中 x^{n-k} 的系数为 $(-1)^{n-k}C_{n+k+1}^{n-k}\cdot 2^{n+k+1-(n-k)}=(-1)^{n-k}2^{2k+1}C_{n+k+1}^{2k+1}$，所以 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-x+2)^{n+k+1}\cdot x^k$ 中 x^n 的系数为 $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k+1}C_{n+k+1}^{2k+1}$，另一方面，$f(x)=(2-x)^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(2x-x^2)^k=(2-x)^{n+1}\cdot\dfrac{1-(2x-x^2)^{n+1}}{1-(2x-x^2)}=(2-x)^{n+1}(1-x)^{-2}-x^{n+1}(2-x)^{2n+2}(1-x)^{-2}$ 中含 x^n 的项仅在 $(2-x)^{n+1}(1-x)^{-2}$ 中，而 $(2-x)^{n+1}(1-x)^{-2}=[1+(1-x)]^{n+1}(1-x)^{-2}=C_{n+1}^0(1-x)^{n-1}+C_{n+1}^1(1-x)^{n-2}+C_{n+1}^2(1-x)^{n-3}+\cdots+C_{n+1}^n(1-x)^{-1}+(1-x)^{-2}$ 中，仅最后两项含有 x^n，且这两项中 x^n 的系数之和为 $C_{n+1}^n+C_{n+1}^1=2(n+1)$，故 $A_n=2(n+1)$，即 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k+1}C_{n+k+1}^{2k+1}=2(n+1)$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k+1}^{2k+1}=n+1$.

(4) 注意到当 $k\geqslant p$ 时 $(1+x)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^ix^i$ 中 x^p 的系数为 C_k^p；当 $0\leqslant k<p$ 时 $(1+x)^k$ 中 x^p 的系数为零，所以 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(1+x)^k$ 中 x^p 的系数为 $\sum\limits_{k=p}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^p$. 另一方面 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(1+x)^k=[1-(1+x)]^n=(-1)^nx^n$ 中 x^p 的系数为 $(-1)^n\delta_{pn}=\begin{cases}0,\ p\neq n,\\(-1)^n,\ p=n\end{cases}$，故 $\sum\limits_{k=p}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^p=(-1)^n\delta_{pn}$.

3. (1) 设各位数字之和等于 n 的三位数有 a_n 个，则 $a_n=\sum\limits_{a+b+c=n}1$ (a, b, c 均为整数且 $1\leqslant a\leqslant 9$, $0\leqslant b\leqslant 9$, $0\leqslant c\leqslant 9$). a_n 的母函数为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{a+b+c=n}1\right)x^n=\sum\limits_{a=1}^{9}\sum\limits_{b=0}^{9}\sum\limits_{c=0}^{9}x^{a+b+c}=\left(\sum\limits_{a=1}^{9}x^a\right)\left(\sum\limits_{b=0}^{9}x^b\right)\left(\sum\limits_{c=0}^{9}x^c\right)=\dfrac{x(1-x^9)(1-x^{10})^2}{(1-x)^3}=(x-x^{10}-2x^{11}+2x^{20}+x^{21}-x^{30})\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{i+2}^2x^i\right)$. 其中 x^{17} 的系数为 $a_{17}=C_{18}^2-C_9^2-2C_8^2=61$，即各位数字之和等于 17 的三位数有 61 个； (2) 类似于(1) 可知所求方法数为下列多项式中 x^n 的系数 a_n: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\left(\sum\limits_{a=0}^{\infty}x^a\right)\left(\sum\limits_{b=0}^{\infty}x^{2b}\right)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)=\dfrac{1}{(1+x)(1-x)^2}=\dfrac{1}{4(1+x)}+\dfrac{1}{2(1-x)^2}+\dfrac{1}{4(1-x)}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^1x^n+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1+(-1)^n}{4}\right)x^n$，故所求兑换方法数

为 $a_n=\frac{n+1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}=\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

习 题 4

1. (1)式两边除以 $\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ 得 $\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$，令 $b_n=\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}(n\geqslant 1)$，则 $b_n=1+2b_{n-1}$，即 $b_n+1=2(b_{n-1}+1)$. 从而 $b_n+1=(b_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=(2^n-1)^2$. 所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2\cdots(2^2-1)^2\cdot(2^1-1)$.

2. 两边除以 2^{n+1} 得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{3}{2}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$，令 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则 $b_{n+1}=-\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$，即 $b_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{3}{2}\left(b_n-\frac{1}{5}\right)$（注意，这是$\frac{1}{5}$ 是 $f(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 的不动点，即方程 $f(x)=x$ 的根）. 于是 $b_n-\frac{1}{5}=\left(b_0-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\left(a_0-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^n$，所以 $a_n=2^nb_n=2^n\left[\left(a_0-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^n+\frac{1}{5}\right]=(-3)^n\left[\left(a_0-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$. 因为当 n 足够大时，$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 趋于 0，于是，若 $a_0-\frac{1}{5}\neq 0$，则上式中括号内的数在 n 足够大时与 $a_0-\frac{1}{5}$ 同号，但$(-3)^n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 轮流为正、负数，从而不可能严格递增，因此，当且仅当 $a_0-\frac{1}{5}=0$，即 $a_0=\frac{1}{5}$ 时，$a_n=\frac{2^n}{5}$ 严格递增.

3. 令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，解得 $a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$. 所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$.

4. 特征方程为 $r^2-2r-1=0$，特征根为 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$，所以 $a_n=c_1(1+\sqrt{2})^n+c_2(1-\sqrt{2})^n$，由 $a_0=0$, $a_1=1$，得 $c_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$，故 $a_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$. 令$(1+\sqrt{2})^n=A_n+B_n\sqrt{2}$, $(A_n, B_n\in\mathbf{N}_+)$，则$(1-\sqrt{2})^n=A_n-B_n\sqrt{2}$，于是 $a_n=B_n$, $A_n^2-2B_n^2=(-1)^n$，从而 A_n 为奇数. 设 $n=2^k(2t+1)$ (k, t 均为非负整数)，要证题中结论成立，只要证 $2^k\mid B_n$

并且 $2^{k+1}\nmid B_n$，对 k 用归纳法. $k=0$ 时，$n=2t+1$ 为奇数. 又 A_n 为奇数，所以 $2B_n^2=A_n^2+1\equiv 2(\bmod 4)$，所以 B_n 为奇数，故 $2^0\mid B_n$ 并且 $2^1\nmid B_n$，设 $k=m$ 时，$2^m\mid B_n$ 并且 $2^{m+1}\nmid B_n$，则 $k=m+1$ 时，由 $(A_n+\sqrt{2}B_n)^2=(1+\sqrt{2})^{2n}=A_{2n}+B_{2n}\sqrt{2}$ 得 $B_{2n}=2A_nB_n$. 又 A_n 为奇数，故 $2^{m+1}\mid B_{2n}$ 并且 $2^{m+2}\nmid B_{2n}$，而 $2n=2^{k+1}(2t+1)$，这就证明了 $k=m+1$ 时结论成立. 于是，我们证明了当且仅当 $2^k\mid n$ 时 $2^k\mid a_n$.

5. 设共有 a_n 种不同的覆盖方法，显然 $a_1=1$，$a_2=2$. 对于 $2\times n$ 的棋盘，若一开始用一张 1×2 的纸片竖方向盖住最左边一列的 2 格，则剩下的 $2\times(n-1)$ 个方格有 a_{n-1} 种覆盖方法，若一开始用 2 张 1×2 的纸片横方向盖住最左边的 2×2 的方格，则剩下 $2\times(n-2)$ 个方格有 a_{n-2} 种覆盖方法. 所以 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$. 可见 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列，由例 6 得 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ $(n\geqslant 1)$.

6. 显然 $a_1=2$，球面上 $n-1$ 个大圆将球面分成 a_{n-1} 个区域，再加上第 n 个大圆，它同前 $n-1$ 个大圆无三圆交于一点，故有 $2(n-1)$ 个不同的交点，将第 n 个圆分成 $2(n-1)$ 段弧，每段弧将原有区域一分为二，故增加了 $2(n-1)$ 个区域，故 $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，所以 $a_n=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=2+\sum\limits_{k=2}^{n}2(k-1)=2+2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2$.

7. 首位数字为 1 时，余下 $n-1$ 位数是含奇数个 1 的 $n-1$ 位数有 $4^{n-1}-a_{n-1}$ 个；首位数字不为 1 时，首位数字有 3 种不同取法余下 $n-1$ 余数字有 a_{n-1} 种取法，这样的 n 位数有 $3a_{n-1}$ 个，故 $a_n=4^{n-1}-a_{n-1}+3a_{n-1}=2a_{n-1}+4^{n-1}$ 并且显然 $a_1=3$. 于是 $\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a_{n-1}}{4^{n-1}}+\dfrac{1}{4}$，令 $b_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ 则 $b_n=\dfrac{1}{2}b_{n-1}+\dfrac{1}{4}$，即 $b_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(b_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $b_n-\dfrac{1}{2}=\left(b_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$，故 $a_n=4^nb_n=4^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2^n+4^n)$.

8. (1) 依题意 $(2a_{n+1}-7a_n)^2=45a_n^2-36$. 即 $a_{n+1}^2-7a_{n+1}a_n+a_n^2+9=0\cdots$①，$n$ 用 $n-1$ 代替得 $a_n^2-7a_na_{n-1}+a_{n-1}^2+9=0\cdots$②，②－① 分解因式得 $(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0$ 由已知条件用数学归纳法易证 $a_{n+1}>a_n>0$. 从而 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}\cdots$③. 又 $a_0=1$，$a_1=\dfrac{7+\sqrt{45-36}}{2}=5$ 为正整数且 $a_{n+1}>a_n$. 用数学归纳法及 ③ 式便知对一切 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为正

整数；（2）由①得 $a_na_{n+1}-1=\left(\dfrac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2$. 并且由 $a_0+a_1=6$ 是3的倍数，以及 $a_{n+1}+a_n=9a_n-(a_n+a_{n-1})$ 用数学归纳法可知对一切 $n\in\mathbf{N}$，$a_{n+1}+a_n$ 是3的倍数，故对一切 $n\in\mathbf{N}$，$a_na_{n+1}-1$ 是完全平方数.

9. 设 $a_n=(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=(1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^n$，$b_n=\dfrac{a_n}{2^{n+1}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n\quad n=0,1,\cdots$. 于是数列 $\{b_n\}$ 对应的特征根为 $2\pm\sqrt{3}$，特征方程为 $[r-(2+\sqrt{3})][r-(2-\sqrt{3})]=0$，即 $r^2-4r+1=0$，所以 b_n 满足递推关系 $b_n=4b_{n-1}-b_{n-2}(n\geqslant 2)$，因 $b_0=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=1$ 和 $b_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})=5$ 为整数. 设 b_{n-2}，b_{n-1} 为整数. 则 b_n 为整数，故对一切非负整数 n，$b_n=\dfrac{a_n}{2^{n+1}}$ 为整数，即 a_n 被 2^{n+1} 整除，而 $0<-(1-\sqrt{3})^{2n+1}<1$，故 $a_n=(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$，所以 $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ 被 2^{n+1} 整除.

10. 令 $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}$，$y_n=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}$，于是 $x_n+y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{8}+1)^{2n+1}$，$x_n-y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{8}-1)^{2n+1}$，所以 $x_n=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}[(\sqrt{8}+1)^{2n+1}+(\sqrt{8}-1)^{2n+1}]=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}[(\sqrt{8}+1)(9+4\sqrt{2})^n+(\sqrt{8}-1)(9-4\sqrt{2})^n]$，可见数列 $\{x_n\}$ 的特征根为 $r_{1,2}=9\pm4\sqrt{2}$，由 $r_1+r_2=18$，$r_1r_2=49$ 知 $\{x_n\}$ 对应的特征方程为 $r^2-18r+49=0$，所以 x_n 满足递推关系 $x_n=18x_{n-1}-49x_{n-2}$，从而 $2x_{n-1}=36x_{n-2}-98x_{n-3}$，两式相减整理得 $x_n=20x_{n-1}-85x_{n-2}+98x_{n-3}\equiv 3x_{n-3}\pmod 5$. 可见5整除 x_n 的充要条件是5整除 x_{n-3}. 但 $x_0=1$，$x_1=C_3^1 2^0+C_3^3 2^3=11$ 和 $x_2=C_5^1 2^0+C_5^3\cdot 2^3+C_5^5 2^6=149$ 都不被5整除. 故对一切非负整数 n，$x_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ 不被5整除，又 $x_n=18x_{n-1}-49x_{n-2}\equiv 4x_{n-1}\pmod 7$，可见 $7\mid x_n\Leftrightarrow 7\mid x_{n-1}$，但 $x_0=1$，$7\nmid x_0$，所以 $7\nmid x_n$. 又 $(5,7)=1$，故对一切非负整数 n，$x_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ 不被35整除.

习 题 5

1. $\overline{abcd}$ 中恰有2个不同数字时，从4个数字中取2个数字有 C_4^2 种方法，其中较小的数字放在第1，3位，较大的数字放在第2，4位，只能组成一

个四位数，故这时不同的四位数有 $C_4^2=6$ 个；$\overline{abcd}$中恰有 3 个不同数字时，从 4 个数字中取 3 个数字有 C_4^3 种取法.组成第 1，3 位数字相同的四位数有 A_2^2 个，组成第 2，4 位数字相同的四位数也有 A_2^2 个，故这时不同的四位数有 $C_4^3(A_2^2+A_2^2)=16$ 个；$\overline{abcd}$中恰有 4 个数字不同时，取最小的数字放在第 1 位，其余 3 个数字任意排列，这时不同的四位数有 $A_3^3=6$ 个.综上可得不同的四位数的个数为 $6+16+6=28$ 个.

2. 设 S 为由 1，2，3，4，5，6 组成的 5 位数集合，A 是其中至多由两个不同数码组成的 5 位数构成的集合，B 为其中 1，6 相邻的 5 位数构成的集合.于是所求 5 位数的个数为 $m=|\complement_S A\cap\complement_S B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$，其中 $|S|=6^5$，$|A|=6+C_6^2(C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4)=456$，$|A\cap B|=C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=30$，设 b_n 为 1，6 相邻的 n 位数的个数，c_n 为首位为 1 或 6 且 1，6 相邻的 n 位数个数，则 $b_n=c_n+4b_{n-1}$.再根据前二位为 16 或 61；前二位为 11 或 66；第一位为 1 或 6 第二位不为 1，6，三种情形得 $c_n=2\times6^{n-2}+c_{n-1}+8b_{n-2}$，代入上式得 $b_n=2\times6^{n-2}+4b_{n-2}+5b_{n-1}$，结合 $b_1=0$，$b_2=2$.可算出 $|B|=b_5=1470$，故所求 5 位数的个数为 $m=6^5-456-1470+30=5880$ 个.

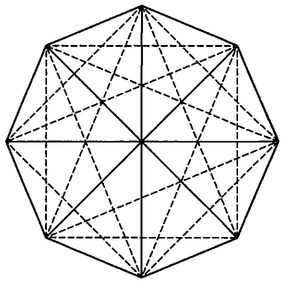
3. 使 2 个 a 既不同行也不同列的填法有 $C_4^2A_4^2=72$ 种，同理，使 2 个 b 既不同行也不同列的填法也有 $C_4^2A_4^2=72$ 种，故由乘法原理，这样的填法共有 72^2 种，其中不符合要求的填法有两种情况：2 个 a 所在方格内都填有 b 的情况有 72 种；2 个 a 所在方格内仅有 1 个方格内填有 b 的情况有 $C_{16}^1\cdot A_9^2=16\times72$ 种.所以符合题设条件的填法共有 $72^2-72-16\times72=3960$ 种.

4. 设分成的 n 条线段的长度分别是 a_1，a_2，…，a_n.若有某个 $a_k>1$，则 1，2，a_k 可组成三角形，故不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant1$.若 $a_{n-1}>\frac{1}{2}$，则 $a_{n-1}+a_n>1$，从而 1，a_{n-1}，a_n 可组成三角形；若 $a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2}$，且存在 k 使 $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$，则 a_k，a_{k+1}，a_{k+2} 可组成三角形；若 $a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2}$ 且对任何 k 有 $a_k+a_{k+1}\leqslant a_{k+2}$，则 $a_k\leqslant\frac{1}{2}a_{k+2}$，从 $a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2}$ 出发推出，当 n 为奇数时，$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant2(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})+a_n\leqslant2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right)+1<3$.当 n 为偶数时，$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant2(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+1\leqslant2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)+1<3$.矛盾.故命题得证.

5. 由于 S 中有 2^n 个子集，故当 $X\neq Y$ 时，从 S 中有序选取两个不同子集 X 和 Y 有 $A_{2^n}^2=2^n(2^n-1)$ 种方法. 从这总的选法中减去 $X\subsetneqq Y$ 和 $Y\subsetneqq X$ 的情况，即为所求的数 m. 当 $X\subsetneqq Y$ 时，设 $|Y|=i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 Y 有 C_n^i 种取法，而 X 是 Y 的真子集，X 有 (2^i-1) 种取法，故 $X\subsetneqq Y$ 的取法种数为 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i(2^i-1)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i(2^i-1)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i2^i-\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i=3^n-2^n$，由对称性，$Y\subsetneqq X$ 的取法也有 3^n-2^n 种，故得 $m=2^n(2^n-1)-2(3^n-2^n)=2^{2n}-2\cdot3^n+2^n$.

6. 易知，5 个整数中必有 3 个之和被 3 整除. 又知 $\triangle A_iA_jA_k$ 的重心坐标为 $\left(\dfrac{x_i+x_j+x_k}{3},\ \dfrac{y_i+y_j+y_k}{3}\right)$. (1)若 A_i 的横坐标中有 5 个对模 3 同余，不妨设 $x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv x_5\pmod 3$，由于 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5$ 中必有 3 个数之和能被 3 整除. 不妨设这 3 个数是 $y_i,\ y_j,\ y_k(1\leqslant i<j<k\leqslant 5)$，则 $\triangle A_iA_jA_k$ 即为所求；(2)若 A_i 的横坐标中任 5 个均对模 3 不全同余，但有 5 个纵坐标对模 3 同余，则结论同样成立；(3)若 A_i 的横坐标中任 5 个对模 3 不全同余，纵坐标中也任 5 个对模 3 不全同余，则 x_i 被 3 除的余数取遍 0，1，2，y_i 被 3 除时余数也取遍 0，1，2. 从而 x_i(或 y_i)中至少有两种余数出现 3 次，不妨设 $x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv 0\pmod 3$，$x_4\equiv x_5\equiv x_6\equiv 1\pmod 3$. 这时若 $y_1\equiv y_2\equiv y_3\pmod 3$ 或 $y_4\equiv y_5\equiv y_6\pmod 3$ 有一个成立，则结论也成立. 否则 $y_1,\ y_2,\ y_3$ 对模 3 的余数至少取两种不同的值 $\alpha,\ \beta\,(\alpha\neq\beta,\ \alpha,\ \beta\in\{0,\ 1,\ 2\})$，并设 $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}=\{0,\ 1,\ 2\}$，同样 $y_4,\ y_5,\ y_6$ 对模 3 的余数也至少取两种不同的值，或为 α 与 β 或为 α 与 γ 或为 β 与 γ. 也就是说 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6$ 对模 3 的余数只有两种可能：(i)包括全部 $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$；(ii)只包括 $\alpha,\ \beta$，但每个重复 2 至 4 次. 此时取 $k\in\{7,\ 8,\ 9\}$ 使 $x_k\equiv 2\pmod 3$，则存在 $1\leqslant i\leqslant 3<j\leqslant 6$，使 $x_i+x_j+x_k\equiv 0+1+2\equiv 0\pmod 3$ 且 $y_i+y_j+y_k\equiv\alpha+\beta+\gamma\equiv 0\pmod 3$，或者 $y_i+y_j+y_k\equiv\alpha+\alpha+\alpha\equiv 0\pmod 3$ 或者 $y_i+y_j+y_k\equiv\beta+\beta+\beta\equiv 0\pmod 3$，从而 $\triangle A_iA_jA_k$ 的重心仍为整点.

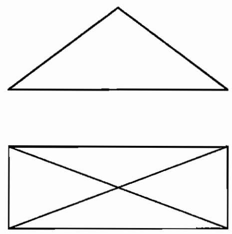
7. 用 n 个点(其中任意 4 点不共面)表示 n 个人，若两人互相不认识，则对应两点连实线，否则连虚线，得到图 G. 于是图中不存在三边为实线的三角形，要求最小正整数 n 使图中存在 4 点，每两点间连有虚线. 首先，如图 8 个点，每两点间连有实线或虚线，图中既不存在实线三角形，也不存在 4 点，每两点间连有虚线. 若从中去掉一些点以及从该点出发的所有实线和虚线，图中更不存在实线三角形，也不存在 4



(第 7 题)

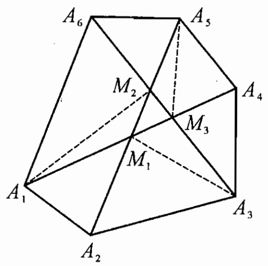
点，每两点间连有虚线，故所求最小正整数 $n\geqslant 9$. 当 $n=9$ 时，分为下列 3 种情形：(1)存在一点 A_1，从 A_1 出发至少有 4 条实线，不妨设 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5 为实线. 由已知条件知 A_2，A_3，A_4，A_5 任意两点间的连线不能为实线而只能为虚线，结论成立；(2)存在一点 A_1，从 A_1 出发至多有 2 条实线，从而从 A_1 出发至少有 6 条虚线. 考虑以这 6 条虚线另一端为顶点的图，由 Ramsey 定理(第二章例 1)知其中必存在一个三边同为实线或同为虚线的三角形，而由已知条件知不存在实线三角形，故必存在虚线三角形，设为 $\triangle A_2A_3A_4$. 于是存在 4 点 A_1，A_2，A_3，A_4 使得其中每两点间的连线为虚线，结论也成立；(3)从每点出发都恰有 3 条实线，于是图中的实线数为 $\frac{1}{2}\times 9\times 3=\frac{27}{2}$，这不是整数，矛盾，即情形(3)不可能出现. 综上得所求 n 的最小值为 9.

8. 如图所示 7 点间连有 9 条线段可保证条件(1)被满足. 下面证明任何 8 条连线都不满足条件(1)，即存在三个点，它们之间无连线. 因从各点出发的线段数之和为 $2\times 8=16$，故由第二抽屉原理(或平均值原理)知有一点 A，从它出发至多有 $\left[\frac{16}{7}\right]=2$ 条线段. (i)若从 A 出发至多有 1 条连线，则至少有 5 点与 A 没有连线，这 5 点间至少有 $C_5^2-8=2$ 对点没有连线，设 C 与 D 没有连线，于是 A、C、D 3 点间无连线；(ii)若从 A 出发有两条连线 AB 和 AC，考察其余 4 点 D、E、F、G 之间的连线情况. (a)若有 6 条连线，则 B、C 之间以及 B、C 与后 4 点的任何一点间没有连线，从而 B、C、D 之间无线相连. (b)若至多有 5 条连线，则至少有 $C_4^2-5=1$ 对点之间没有连线，设 D 与 E 没有连线，于是 A、D、E 之间无线相连. 综上可知，满足要求的连线法最少要 9 条线.



(第 8 题)

9. 设 3 条对角线 A_1A_4 与 A_2A_5，A_2A_5 与 A_3A_6，A_3A_6 与 A_1A_4 的交点分别为 M_1，M_2，M_3. 连接 A_1M_2，A_3M_1，A_5M_3. 我们首先证明 6 个三角形：$\triangle A_1A_2M_2$，$\triangle A_2A_3M_1$，$\triangle A_3A_4M_1$，$\triangle A_4A_5M_3$，$\triangle A_5A_6M_3$，$\triangle A_6A_1M_2$ 中必有一个的面积 $\leqslant\frac{1}{6}S$. 事实上，这 6 个三角形的面积之和 $\leqslant S_{六边形A_1A_2A_3A_4A_5A_6}=S$. 由平均值原理知其中必有一个三角形的面积 $\leqslant\frac{1}{6}S$，不妨设 $S_{\triangle A_1A_2M_2}\leqslant\frac{1}{6}S$. 其次我们证明题中结论成立. (a)若 $A_1A_2\ /\!/\ A_3A_6$，则 $S_{\triangle A_1A_2A_6}=S_{\triangle A_1A_2M_2}\leqslant$



(第 9 题)

$\frac{1}{6}S$. (b)若 $A_1A_2 \not\parallel A_3A_6$，则 $\min\{S_{\triangle A_1A_2A_6}, S_{\triangle A_1A_2A_3}\} < S_{\triangle A_1A_2M_2} \leqslant \frac{1}{6}S$.

习 题 6

1. 考察下列91个数对：$\{i, i+9\}$，$i=1, 2, 3, \cdots, 91\cdots$①. 易见，1, 2, …, 9和92, 93, …, 100这18个数中每个数恰属于上述数对中之一对，而其余82个数中每个数恰属于上述数对中两对. 因此55个数至少属于①中 $18+(55-18)\times 2=92$ 个数对，由抽屉原理知其中必有两个数属于①中同一数对，即两数之差等于9. 而当所取55个数为1, 2, …, 11；23, 24, …, 33；45, 46, …, 55；67, 68, …, 77；89, 90, …, 99时，其中任何两数之差不等于11.

2. 设 $n=4m+1(m\in\mathbf{N}_+)$，对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意排列 $p=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，由 k_P 定义得 $a_1+a_2+\cdots+a_{k_p}<a_{k_p+1}+a_{k_p+2}+\cdots+a_n\cdots$①，且 $a_1+a_2+\cdots+a_{k_p+1}\geqslant a_{k_p+2}+a_{k_p+3}+\cdots+a_n\cdots$②. 首先②中等号不可能成立，否则，$2(a_1+a_2+\cdots+a_{k_p+1})=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{2}n(n+1)=(4m+1)(2m+1)$. 上式左端为偶数，而右端为奇数，矛盾. 故②应为 $a_1+a_2+\cdots+a_{k_p+1}>a_{k_p+2}+a_{k_p+3}+\cdots+a_n\cdots$③. 于是对于 P 的反序排列 $P'=\{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1\}$. 由①及③得 $k_{P'}=n-(k_P+1)$，即 $k_P+k_{P'}=n-1$. 将 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n!$ 个排列两两配对，每对中两个排列 P 与 P' 互为反序，它们对应的 k_P 与 $k_{P'}$ 之和为 $n-1$，又一共可配成 $\frac{n!}{2}$ 对，故对一切不同的排列 P，所对应的 k_P 之和为 $\frac{1}{2}(n-1)(n!)$.

3. 不妨设 M 中红点最多，由抽屉原理知红点的数目不少于 $\left[\frac{12\times 12-1}{3}\right]+1=48$ 个. 设纵坐标为 i 的红点有 a_i 个 $(i=1, 2, \cdots, 12)$ 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}\geqslant 48$. 将第 i 行的 a_i 个红点两两配对，可配成 $\mathrm{C}_{a_i}^2=\frac{1}{2}a_i(a_i-1)$ 对，$i=1, 2, \cdots, 12$，从而各行红点组成的点对数之和为 $\sum_{i=1}^{12}\mathrm{C}_{a_i}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{12}a_i^2-\sum_{i=1}^{12}a_i\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12}a_i\right)^2-\sum_{i=1}^{12}a_i\right]=\frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{12}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{12}a_i-12\right)\geqslant\frac{1}{24}\times 48\times(48-12)=72\cdots$①. 如果不存在四顶点同为红色的符合条件的矩形，那么各行中红色点对在 x 轴上的投影两两互不重合，因此各行中红色点对数之和不超过 x 轴上的12个点 $(x, 0)$ $(x=1, 2, \cdots, 12)$ 形成的点对个数 $\mathrm{C}_{12}^2=66$. 这与①矛盾，故结论成立.

4. 若车站 A 在线路 l 上，则将 A 与 l 配成对 (A, l)，并设这样的对子共有 x 个. 再设共有 m 个车站. 因为每一站至多在 3 条线路上，故 $x \leqslant 3m$. 若每条线路上至少有 3 个车站，则 $x \geqslant 3n$，于是 $3m \geqslant x \geqslant 3n$，从而有 $m \geqslant n > \frac{5}{6}(n-5)$，结论成立. 下设有一条线路 l 上只有两个车站 A 和 B，因为过每个车站至多只有 3 条线路，故过 A, B 的线路除 l 外，至多还有 4 条，我们称过 A, B 的线路为红线（至多 5 条），其余至少有 $n-5$ 条线称为蓝线，并将红线上的站称为红站，个数为 r；其余站称为蓝站，其个数为 b，于是 $m=r+b$. 现在考察所有（站，蓝线）的对数. 一方面，每条蓝线至少过 2 个站，故所设对数 $\geqslant 2(n-5)$. 另一方面，任意一个红站至多在两条蓝线上. 故（红站，蓝线）的对数 $\leqslant 2r$；而每个蓝站至多有 3 条蓝线经过，故（蓝站，蓝线）的对数 $\leqslant 3b$. 因此 $2(n-5) \leqslant$（站，蓝线）的对数 $=$（红站，蓝线）的对数 $+$（蓝站，蓝线）的对数 $\leqslant 2r+3b$. 此外，每条蓝线，可经过一条线路与红线 l 相连，因此，每条蓝线上至少有 1 个红站. 故（红站，蓝线）的对数 $\geqslant n-5$. 于是，$n-5 \leqslant 2r$. 因此，站的总数 $m=r+b=\frac{1}{3}(2r+3b)+\frac{1}{6}\cdot 2r \geqslant \frac{1}{3}\cdot 2(n-5)+\frac{1}{6}\cdot(n-5)=\frac{5}{6}(n-5)$.

5. (1) 明显的配对方法是将相邻两格配对，即用 1×2 的骨牌铺砌棋盘. 保持每步可在同一骨牌内部走的人必胜. 当 $2\mid mn$ 时，骨牌可铺满棋盘，先走的甲第一步可在同一块骨牌内部走，故甲必胜. 当 $2\nmid mn$ 时，可用骨牌铺满除左下角格子外的其余棋盘，故先走的甲第一步只能走入相邻的一块骨牌内，乙总可以在甲进入的这块骨牌内再走一格，故乙有必胜策略；

(2) 无论 m, n 的奇偶性如何，总是先走的甲有必胜策略. 当 $2\mid mn$ 时，理由同(1)；当 $2\nmid mn$ 时，仍用骨牌铺满除左下角格子以外的其余棋盘，并且将所有棋盘用黑白两色染色，使任何相邻两格不同色，且不妨设左下角格子是白色，它没有同其他格子配对，先走的甲每一步总可以在同一骨牌内从黑格走入白格，而乙只能从白格走入黑格而进入一块的新的骨牌，左下角的方格始终没有棋子进入，形同虚设，故甲有必胜策略.

6. 设凸 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，符合条件的一个凸 k 边形为 $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}$，则只有下列两种可能(1) $i_1=1$, $3\leqslant i_2<i_3<\cdots<i_k\leqslant n-1$, $i_{j+1}-i_j\geqslant 2$ $(j=2, 3, \cdots, k-1)$；(2) $2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$, $i_{j+1}-i_j\geqslant 2$ $(j=1, 2, \cdots, k-1)$. 仿照例 8 可求出满足(1)的凸 k 边形有 C_{n-k-1}^{k-1} 个，以及满足(2)的凸 k 边形有 C_{n-k}^{k} 个. 故符合条件的凸 k 边形共有 $C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}=\frac{n}{k}C_{n-k-1}^{k-1}$（当 $n<2k$ 时，$C_{n-k-1}^{k-1}=C_{n-k}^{k}=0$）.

7. 由于 $p(M)=5$. 令 $M'=\{x-5 \mid x\in M\}=\{-4, -3, -2, -1, 0,$

1，2，3，4}，则 $p(M')=0$. 依照平移关系，M 与 M' 的平衡子集可一一对应. 用 $f(k)$ 表示 M' 的含 k 个元素的均衡子集的个数. 注意到若 $B\neq M'$ 且 B 是 M' 的均衡子集，则 B 的补集 $B'=C_{M'}B$ 也是 M' 的均衡子集，二者一一对应. 因此，$f(9-k)=f(k)$. $k=1, 2, 3, 4$. 显然 $f(9)=1$，$f(1)=1$（因 M' 的 9 元均衡子集只有 M'，一元均衡子集只有 $\{0\}$）. 并且用分类枚举法不难求出 $f(2)=4$，$f(3)=8$，$f(4)=12$. 故 M 的均衡子集的个数 $=M'$ 的均衡子集的个数 $=f(9)+2\sum_{k=1}^{4}f(k)=1+2(1+4+8+12)=51$.

8. 设有朋友最多的人是 A，他有 k 个朋友 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，记 $S=\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$，显然 $k\geqslant m$. 若 $k>m$，设 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 是 S 的任意 $m-1$ 元子集. 于是 A，$B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 有唯一的公共朋友 C_i. 因 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i\in S$. 我们令 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 与 C_i 对应，构成从 S 的所有 $m-1$ 元子集构成的集族 $\mathscr{B}$ 到 S 的一个映射. 下面证明 f 为单射，若不然，则存在 S 的两个不同的 $m-1$ 元子集 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 和 $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 它们对应的元素 C_i 与 C_j 相同.（记为 C），因 $C\in S$，故 $C\neq A$，于是 $\{B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}\cup\{B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 中至少有 m 位旅客，但他们却有两个公共朋友 A 和 C，这与已知矛盾. 故 f 是单射. 所以 $|\mathscr{B}|\leqslant|S|$ 即 $C_k^{m-1}\leqslant k$，但已知 $m\geqslant 3$ 且 $k>m$，即 $k-2\geqslant m-1\geqslant 2$. 故 $C_k^{m-1}\geqslant C_k^{k-2}=C_k^2>k$，这与 $C_k^{m-1}\leqslant k$ 矛盾. 于是得到 $k=m$，即有朋友最多的人有 m 个朋友.

9. 考虑从集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 到集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 的所有满足下列条件的映射 f：$f(i)\in A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 构成的集合 $\mathscr{M}$，于是 $\mathscr{M}$ 中共有 $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_n|$ 个映射，下面证明其中至少有一个单射. 如果 $\mathscr{M}$ 中任何映射都不是单射，那么对任意 $f\in\mathscr{M}$，存在 $i, j\in S$ 使得 $i\neq j$ 而有 $f(i)=f(j)$，这时 $f(i)=f(j)\in A_i\cap A_j$，$f(i)=f(j)$ 的取值最多有 $|A_i\cap A_j|$ 种，当 $k\neq i$，$k\neq j$ 时 $f(k)$ 的取值最多有 $|A_k|$ 种. 故对固定的 $i\neq j$，满足 $f(i)=f(j)$ 的映射最多有 $|A_i\cap A_j|\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}|A_k|=\dfrac{|A_i\cap A_j|}{|A_i|\cdot|A_j|}\prod_{k=1}^{n}|A_k|$ 个，

所以 $\mathscr{M}$ 中最多有 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\dfrac{|A_i\cap A_j|}{|A_i||A_j|}\cdot\prod_{k=1}^{n}|A_k|<\prod_{k=1}^{n}|A_k|$ 个映射. 这与 $\mathscr{M}$ 中共有 $\prod_{k=1}^{n}|A_k|$ 个映射矛盾. 故 $\mathscr{M}$ 中至少有一个单射 f_0. 令 $a_i=f_0(i)(i=1, 2, \cdots, n)$，则 $a_i\in A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 并且当 $i\neq j$ 时，$a_i=f_0(i)\neq f_0(j)=a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

10. 作映射 f 如下：对数列中每一项 a_i，令它与一个二元有序正整数组

(x_i, y_i)对应，其中x_i是以a_i为首项的最长的递增子列的长度，y_i是以a_i为首项的最长的递减子列的长度，这里约定只有一项的子列既是递增的又是递减的. 如果结论不成立，那么$1 \leqslant x_i \leqslant n$，$1 \leqslant y_i \leqslant m$. 记$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_{nm+1}\}$，$Y = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant x_i \leqslant n, 1 \leqslant y_i \leqslant m, x_i, y_i \in \mathbf{N}_+\}$，则$|X| = nm+1 > nm = |Y|$，所以$f$不是单射，于是存在$a_i, a_j \in X (i \neq j)$使$(x_i, y_i) = f(i) = f(j) = (x_j, y_j)$，但若$a_i < a_j$，则应有$x_i \geqslant x_j + 1$矛盾，若$a_i > a_j$则应有$y_i \geqslant y_j + 1$也矛盾，于是命题得证.（注：本题结论也可用抽屉原理去证明，这里就省略了）

11. 将连续出现的几个a合并成一个(a)，连续出现的几个b合并为一个(b)，于是符合条件的序列只可能缩写为下列两种形式：（Ⅰ）$(a)(b)(a)(b)(a)(b)(a)$；（Ⅱ）$(b)(a)(b)(a)(b)(a)(b)$，并设符合条件的序列中（Ⅰ）、（Ⅱ）类序列集合分别为B_1，B_2.（Ⅰ）、（Ⅱ）类序列都保证出现3个“ab”和3个“ba”，根据条件“有5个aa，3个bb”知，集合B_1与下述放法的全体E_1之间可建立一一对应：5个a分放进（Ⅰ）中4个(a)的括号内，3个b分放进（Ⅰ）中3个(b)的括号内. 由第一讲中可重复的组合数公式得$|E_1| = \mathrm{C}_{4+5-1}^{5} \cdot \mathrm{C}_{3+3-1}^{3} = \mathrm{C}_8^5\mathrm{C}_5^3 = 560$，所以$|B_1| = |E_1| = 560$，同理可得$|B_2| = |E_2| = \mathrm{C}_{3+5-1}^{5}\mathrm{C}_{4+3-1}^{3} = \mathrm{C}_7^5\mathrm{C}_6^3 = 420$. 于是满足题目条件的序列共有$560 + 420 = 980$个.

12. 不妨设$a > b > d$，由$a + c = b + d$得$d > c$. 考虑从$1, 2, \cdots, n$中选3个数$a > b > c$且满足$a + c - b \neq b$的选法：从n个数中选三个数$a > b > c$有C_n^3种选法，其中满足$a + c - b = b$，即$a + c = 2b$的，a与c同奇偶的选法有$2\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}^2$种. 故三元数组$B = \{(a, b, c) \mid n \geqslant a > b > c \geqslant 1, a + c - b \neq b\}$的个数为$|B| = \mathrm{C}_n^3 - 2\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}^2 = \dfrac{1}{12}n(n-2)(2n-5)$. 对任意三元数组$(a, b, c) \in B$，令$a + c - b = d$，则四元组$(a, b, c, d)$满足题目条件. 但每个四元数组$(a, b, c, d)$对应两个三元数组$(a, b, c)$与$(a, d, c)$（因为$d > c$）. 故所求的选取方法有$\dfrac{1}{2}|B| = \dfrac{1}{24}n(n-2)(2n-5)$种.

13. 对任意一个长为$n+1$二元序列$y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1})$令它与一个长为$n$的二元序列$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$对应，其中$x_i \equiv y_i + y_{i+1} \pmod 2$，$i = 1, 2, \cdots, n$…①. 显然这样的$x$由$y$唯一确定. 反过来，对任意一个长为$n$的二元序列$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$及$y_1 = 0$或1，有一个长为$n+1$的二元序列$y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1})$，其中$y_{i+1} \equiv y_i + x_i \pmod 2$，$i = 1, 2, \cdots, n$…②. 由于$y_j + y_{j+1} = y_j + y_j + x_j \equiv x_j \pmod 2$，所以由②定义的对应恰好是①的对应的逆对应. 在由①定义的对应中连续4项0011或1100产生连续3项010，反之由②定义的对应，连续3项010产生连续4项0011或1100. 于

是 a_n 个所述长为 n 无连续 3 项成 010 的二元序列，每个恰好与 2 个无连续 4 项成 0011 或 1100 的所述长为 $n+1$ 的二元序列对应，从而 $b_{n+1}=2a_n$.

习 题 7

1. 设高二的学生有 n 人，每人得 k 分，于是所有学生得分的总和为 $8+nk$，另一方面，一共比赛了 C_{n+2}^2 场，每场队员得分的总和为 1 分，所有学生得分的总和为 C_{n+2}^2，所以 $C_{n+2}^2=8+nk$，即 $n^2-(2k-3)n-14=0$，因此，14 应被 n 整除，于是 $n=1,2,7$ 或 14. 但 $n=1,2$ 时，$k<0$，不可能；$n=7$ 时，$k=4$，$n=14$ 时，$k=8$ 均可实现. 故参赛的高二学生有 7 人，每人得 4 分或有 14 人，每人得 8 分.

2. 如果老师 t_r 同时教两名学生 s_i 与 s_j，那么将 t_r 与 s_i，s_j 组成三元组 (t_{rj}, s_i, s_j)，并设这样的三元组共有 M 个. 一方面，对任意一位老师 t_r，他恰教了 k 位学生，可形成 C_k^2 个含 t_r 的三元组，而 t_r 有 b 种取法，所以 $M=bC_k^2$，另一方面，对任意两名学生 s_i，s_j，恰有 h 位老师教他们，可形成 h 个含 s_i，s_j 的三元组，而 s_i，s_j 有 C_c^2 种取法，所以 $M=hC_c^2$，综上可得 $bC_k^2=hC_c^2$，所以

$$\frac{b}{h}=\frac{C_c^2}{C_k^2}=\frac{\frac{1}{2}c(c-1)}{\frac{1}{2}k(k-1)}=\frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

3. 作 2010×30 数表，其中第 i 行第 j 列处的数为 $a_{ij}=\begin{cases}1 & (若\ i\in A_j)\\ 0 & (若\ i\notin A_j)\end{cases}$，$(i=1,2,\cdots,2010,\ j=1,2,\cdots,30)$，并记 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{30}a_{ij}$，$l_j=\sum\limits_{i=1}^{2010}a_{ij}$，则 r_i 表示 i 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$ 中 r_i 个集合 $l_j=|A_j|$ 表示 A_j 中元素个数. 由已知条件得 $\sum\limits_{i=1}^{2010}r_i=\sum\limits_{i=1}^{2010}\sum\limits_{j=1}^{30}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{30}\sum\limits_{i=1}^{2010}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{30}l_j=\sum\limits_{j=1}^{30}|A_j|\geqslant 30\times 335\cdots$①. 若 $t\in A_i\cap A_j(1\leqslant i<j\leqslant 30)$，则将 (t_j, A_i, A_j) 组成三元组并设这样的三元组共有 S 个. 一方面对任意 $t\in M$，t 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$ 中 r_t 个子集，可形成 $C_{r_t}^2$ 个含 t 的三元组，又 t 可以为 $1,2,\cdots,2010$. 所以 $S=\sum\limits_{t=1}^{2010}C_{r_t}^2\cdots$②. 另一方面对任意 A_i，$A_j(1\leqslant i<j\leqslant 30)$，它们有 $|A_i\cap A_j|$ 个公共元，可形成 $|A_i\cap A_j|$ 个含 A_i，$A_j(1\leqslant i<j\leqslant 30)$ 的三元组故 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 30}|A_i\cap A_j|$，所以 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 30}|A_i\cap A_j|=\sum\limits_{t=1}^{2010}C_{r_t}^2=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{t=1}^{2010}r_t^2-\sum\limits_{t=1}^{2010}r_t\right)\cdots$③. 由 ① 和 ③ 并利用Cauchy不等式得 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 30}|A_i\cap A_j|\geqslant$

$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2010}\left(\sum_{t=1}^{2010} r_t\right)^2-\sum_{t=1}^{2010} r_t\right]=\frac{1}{2\times 2010}\left(\sum_{t=1}^{2010} r_t\right)\left(\sum_{t=1}^{2010} r_t-2010\right)\geqslant\frac{1}{2\times 6\times 335}\times$ $(30\times 335)\times(30\times 335-6\times 335)$，由平均值原理知存在 $1\leqslant i<j\leqslant 30$ 使得 $|A_i\cap A_j|\geqslant\frac{1}{C_{30}^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 30}|A_i\cap A_j|\geqslant\frac{30\times 335\times 24\times 335}{30\times 29\times 6\times 335}=\frac{335\times 4}{29}=\frac{1340}{29}=46\frac{6}{29}$. 即 $|A_i\cap A_j|\geqslant 47$.

4. 记 $I=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 为已知 n 个点组成的集合，设 I 中距离为单位长的点对数为 E. 以 P_i 为中心，单位长为半径作圆 $C_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 并设 C_i 上有 I 中 e_i 个点 $(i=1, 2, \cdots, n)$，于是 $\sum_{i=1}^{n} e_i=2E$. 我们称以 I 中点为端点的线段为好线段，一方面好线段共有 C_n^2 条. 另一方面，圆 C_i 上有 $C_{e_i}^2$ 条弦是好线段，n 个圆上一共有 $\sum_{i=1}^{n} C_{e_i}^2$ 条弦为好线段，但其中有些公共弦被重复计数了，而 n 个圆的公共弦至多有 C_n^2 条，故不同的好线段数至少为 $\sum_{i=1}^{n} C_{e_i}^2-C_n^2$. 所以 $\sum_{i=1}^{n} C_{e_i}^2-C_n^2\leqslant C_n^2$. 由柯西（Cauchy）不等式得 $2C_n^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2-\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n} e_i\right]=\frac{1}{2n}[4E^2-2nE]$，即 $2E^2-nE-n^2(n-1)\leqslant 0$，所以 $E\leqslant\frac{n+n\sqrt{8n-7}}{2\times 2}<\frac{n+n\sqrt{8n}}{4}=\frac{n}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}$.

5. 记 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，把 A 中元素 a_i 看成平面内的点. A 中元素对 $\{a_i, a_j\}$ 看成连接 a_i 与 a_j 的线段，于是问题归结为证明 A 中每一点恰是 P 中两条线段的公共端点. 设从 a_i 出发恰有 d_i 条线段 $(i=1, 2, \cdots, n)$ 于是 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2|P|=2n\cdots$①. 若 A 中点 a_k 是 P 中两条线段 p_i，p_j 的公共端点，则将 $(a_k; p_i, p_j)$ 组成三元组，这种三元组的集合记为 S. 则 $|S|=\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2$. 另一方面，当且仅当 a_i 与 a_j 连有线段时，p_i 与 p_j 有公共端点 a_k，组成一个三元组 $(a_k; p_i, p_j)$，故三元组的个数等于所连线段数 n，即 $|S|=n$. 于是 $n=\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2-\sum_{i=1}^{n} d_i\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n} d_i\right]=\frac{1}{2n}[4n^2-2n^2]=n$，可见这个不等式的等号成立. 由柯西（Cauchy）不等式中等号成立的充要条件得 $d_1=d_2=\cdots=d_n$，再结合①得 $d_1=d_2=\cdots=d_n=2$. 即 A 中每点恰是 P 中两条线段的公共端点. 证毕.

6.（证法一）一方面 $(1+x)^{2n}=\sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i$ 中 x^n 的系数为 C_{2n}^n. 另一方面

$(1+x)^{2n}=(1+2x+x^2)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^{n-k}(2x)^{n-k}(1+x^2)^k$，而 $C_n^{n-k}(2x)^{n-k}(1+x^2)^k=C_n^{n-k}2^{n-k}x^{n-k}\left(\sum\limits_{j=0}^{k}C_k^jx^{2j}\right)$ 中仅当 k 为偶数时才会有 x^n 的项，且当 $k=2i$ 时，所含 x^n 的系数为 $C_n^{n-2i}2^{n-2i}C_{2i}^i$. 因 $0\leqslant 2i\leqslant n$，故 $0\leqslant i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，所以 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数又为 $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{n-2i}2^{n-2i}C_{2i}^i$. 综合上述两个方面得 $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{n-2i}2^{n-2i}C_{2i}^i=C_{2n}^n$.

（证法二）一方面从 n 对夫妇中选出 n 人为代表有 C_{2n}^n 种选法. 另一方面可将选法分为 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 类，其中第 i 类 $\left(i=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 的选法中恰有 i 对夫妇被同时选出，这共有 C_n^i 种选法，其余 $n-2i$ 人选自余下 $n-i$ 对夫妇中的 $n-2i$ 对夫妇（每对夫妇恰选出一人），这有 $C_{n-i}^{n-2i}2^{n-2i}$ 种选法，故第 i 类共有 $C_n^iC_{n-i}^{n-2i}\cdot 2^{n-2i}=C_n^{n-2i}C_{2i}^i\cdot 2^{n-2i}$ 种选法. 又 $i=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$，故总共有 $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{n-2i}C_{2i}^i2^{n-2i}$ 种选法. 综合两方面得 $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{n-2i}C_{2i}^i2^{n-2i}=C_{2n}^n$.

习　题　8

1. 设第 k 天共发出 a_k 个奖牌. 则 $a_1=1+\frac{1}{7}(m-1)=\frac{1}{7}(m+6)$，$a_k=k+\frac{1}{7}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}-k)$，$a_{k+1}=k+1+\frac{1}{7}[m-a_1-a_2-\cdots-a_k-(k+1)]$，两式相减得 $a_{k+1}-a_k=1+\frac{1}{7}(-a_k-1)$，即 $a_{k+1}-6=\frac{6}{7}(a_k-6)$，所以 $a_k-6=(a_1-6)\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}=\frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}(m-36)$，于是 $m=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{7}(m-36)\left[1+\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right]+6n=(m-36)\left[1-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right]+6n$，解出 m 得 $m=\frac{7^n}{6^{n-1}}(n-6)+36$. 因 7^n 与 6^{n-1} 互素，且 m，n 为正整数，所以 $6^{n-1}\mid n-6$. 又 $n>1$ 时易证 $6^{n-1}>|n-6|$. 故只能 $n=6$，从而 $m=36$. 即运动会共开了 6 天，一共发出 36 个奖牌.

2. 将符合题目条件的排列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 称为长度等于 n 的好排列，并设其个数为 S_n. 因为 $n-1\mid a_{n-1}-a_n$ 又 $|a_{n-1}-a_n|\leqslant n-1$，故只有 $|a_{n-1}-a_n|=n-1$，

所以 (a_{n-1}, a_n) 只可能为$(1, n)$或$(n, 1)$. 当 $(a_{n-1}, a_n)=(1, n)$ 时，$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ 是长度等于 $n-1$ 的好排列；当 $(a_{n-1}, a_n)=(n, 1)$ 时，$(a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{n-1}-1)$ 是长度为 $n-1$ 的好排列，可见每一个长度为 n 的好排列对应于一个长度为 $n-1$ 的好排列，反之亦然，上述对应是一一对应，所以 $S_n=S_{n-1}$. 而 $S_2=2$（因$\{1, 2\}$的好排列有 2 个：$(1, 2)$和$(2, 1)$），故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant 2$ 符合条件的排列个数都为 $S_n=2$. 当 $n=2m$ 时长为 $2m$ 的好排列有下列 2 个：$(m, m+1, m-1, m+2, m-2, m+3, \cdots, 2, 2m-1, 1, 2m)$ 与 $(m+1, m, m+2, m-1, m+3, m-2, \cdots, 2m-1, 2, 2m, 1)$. 当 $n=2m+1$ 时长为 $2m+1$ 的好排列有下列 2 个：$(m+1, m, m+2, m-1, m+3, m-2, \cdots, 2, 2m, 1, 2m+1)$ 与 $(m+1, m+2, m, m+3, m-1, m+4, \cdots, 2m, 2, 2m+1, 1)$.

3. 记 $f^{(n)}((1))$为 A_n，且 A_n 中连续两项是 0，0 的数对个数为 b_n，连续两项是 0，1 的数对个数记为 c_n. 依题意，A_n 中的 0，0 数对仅能由 A_{n-1} 中的 0，1 数对经变换 f 而得到，故 $b_n=c_{n-1}$. 又 A_{n-1} 中的 0，1 数对，必须由 A_{n-2} 中的 1 或 0，0 数对经变换 f 而得到. 因为 A_{n-2} 中共 2^{n-2} 项，其中恰有一半的项是 1，并且恰有 b_{n-2}个 0，0 数对，所以 $b_n=c_{n-1}=2^{n-3}+b_{n-2}$，逐步递推得 $b_n=2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+\begin{cases}2^0+b_1, & 2\nmid n,\\ 2^1+b_2, & 2\mid n.\end{cases}$ 其中 $b_1=0$，$b_2=1$. 由此可得 $b_n=\dfrac{1}{3}[2^{n-1}+(-1)^n]$，即 $f^{(n)}((1))$中连续两项为 0，0 的数对的个数为 $b_n=\dfrac{1}{3}[2^{n-1}+(-1)^n]$.

4. p 轮报数后只剩下的 3 人中前两人最初的位置显然是原来队伍中的第 1 和第 2 位置. 设第 3 人的最初位置是第 a_{p+1}个位置，则第 1 次报数后他站到第 a_p 个位置上，……，第 p 次报数后他站在第 a_1 个位置上，显然 $a_1=3$. 由于 $a_2, a_3, \cdots, a_{p+1}$ 都没有被淘汰，可见这些数都不是 3 的倍数，且由 a_{p+1} 到 a_p 变动的数目 $a_{p+1}-a_p$ 恰等于从 1 到 a_{p+1} 内 3 的倍数的个数，即 $a_{p+1}-a_p=\dfrac{1}{3}(a_{p+1}-r)$（$r$ 等于 1 或 2），故 $a_{p+1}=\dfrac{3a_p-r}{2}$，因 a_p, a_{p+1} 均为正整数，所以当 a_p 为奇数时 $r=1$，当 a_p 为偶数时 $r=2$. 由此可得 $a_1=3$，$a_{p+1}=\left[\dfrac{3a_p-1}{2}\right]$ $(p=1, 2, \cdots)\cdots$①，并且 $a_{p+1}\leqslant 2009<a_{p+2}$. 按 ① 式可逐次算出 $a_2=\left[\dfrac{3\times 3-1}{2}\right]=4$，$a_3=\left[\dfrac{3\times 4-1}{2}\right]=5$，$a_4=\left[\dfrac{3\times 5-1}{2}\right]=7$，$a_5=\left[\dfrac{3\times 7-1}{2}\right]=10$，$a_6=\left[\dfrac{3\times 10-1}{2}\right]=14$，$a_7=\left[\dfrac{3\times 14-1}{2}\right]=20$，$a_8=\left[\dfrac{3\times 20-1}{2}\right]=29$，$a_9=\left[\dfrac{3\times 29-1}{2}\right]=43$，$a_{10}=\left[\dfrac{3\times 43-1}{2}\right]=64$，$a_{11}=$

$\left[\frac{3\times 64-1}{2}\right]=95$，$a_{12}=\left[\frac{3\times 95-1}{2}\right]=142$，$a_{13}=\left[\frac{3\times 142-1}{2}\right]=212$，$a_{14}=\left[\frac{3\times 212-1}{2}\right]=317$，$a_{15}=\left[\frac{3\times 317-1}{2}\right]=475$，$a_{16}=\left[\frac{3\times 475-1}{2}\right]=712$，$a_{17}=\left[\frac{3\times 712-1}{2}\right]=1067$，$a_{18}=\left[\frac{3\times 1067-1}{2}\right]=1600<2009$，$a_{19}=\left[\frac{3\times 1600-1}{2}\right]=2399>2009$. 综上可知，最后剩下 3 人的最初位置是第 1，第 2 和第 1600 个位置.

5. 将一个圆盘分成 13 个相等的扇形，每个扇形依次代表标号为 2，3，…，10，J，Q，K，A 的一张牌. 而"方块"、"梅花"、"红心"、"黑桃"分别用 4 种不同颜色表示. 于是原问题等价于下列问题中 $n=13$，$m=4$ 的情形：把圆分成 $n(\geqslant 2)$ 个扇形，设用 $m(\geqslant 2)$ 种颜色给这些扇形染色，每个扇形恰染一种颜色，并且要求相邻的扇形的颜色互不相同，设共有 $a_n(m)$ 种不同的染色方法，求 $a_n(m)$. 解答如下：(1) 求初始值，$n=2$ 时，给 S_1 染色有 m 种方法，继而给 S_2 染色只有 $m-1$ 种方法(因 S_1 与 S_2 不同色)，所以 $a_2(m)=m(m-1)$. (2) 求递推关系，因 S_1 有 m 种染色方法，S_2 有 $m-1$ 种染色方法，…，S_{n-1} 有 $m-1$ 种染色方法，S_n 仍有 $m-1$ 种染色方法(不保证 S_n 与 S_1 不同色)，这样共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种染色方法，但这 $m(m-1)^{n-1}$ 种染色方法可分为两类：一类是 S_n 与 S_1 不同色，此时的染色方法有 $a_n(m)$ 种，另一类是 S_n 与 S_1 同色. 则将 S_n 与 S_1 合并成一个扇形，并注意此时 S_{n-1} 与 S_1 不同色，故这时的染色方法有 $a_{n-1}(m)$ 种，由加法原理得 $a_n(m)+a_{n-1}(m)=m(m-1)^{n-1}(n\geqslant 2)$…①. (3) 求 $a_n(m)$，令 $b_n(m)=\frac{a_n(m)}{(m-1)^n}$，则由①可得 $b_n(m)+\frac{1}{m-1}b_{n-1}(m)=\frac{m}{m-1}$，即 $b_n(m)-1=-\frac{1}{m-1}(b_{n-1}(m)-1)$，所以 $b_n(m)-1=(b_2(m)-1)\cdot\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-2}=\left[\frac{a_2(m)}{(m-1)^2}-1\right]\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-2}=\left[\frac{m(m-1)}{(m-1)^2}-1\right]\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-2}=(-1)^n\frac{1}{(m-1)^{n-1}}$ 所以 $a_n(m)=(m-1)^nb_n(m)=(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$. 即共有 $(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$ 种不同的染色方法. 于是原问题中所求取牌方法数为 $a_{13}(4)=3^{13}-3$.

6. 设 $b_n=2^n$，$c_n=n^2$，$a_n=b_n-c_n=2^n-n^2$. 因为 $b_{n+3}=2^{n+3}=8\cdot 2^n\equiv 2^n=b_n \pmod 7$，$c_{n+7}=(n+7)^2\equiv n^2=c_n \pmod 7$，所以 $a_{n+21}=b_{n+21}-c_{n+21}\equiv b_n-c_n=a_n \pmod 7$，而 a_1，a_2，…，a_{21} 中只有 6 项 $a_2=0$，$a_4=0$，$a_5=7$，$a_6=28$，$a_{10}=924$，$a_{15}=32\,543$ 被 7 整除. 又 $9999=476\times 21+3$

且 a_1，a_2，a_3 中只有 a_2 被 7 整除. 故小于 10^4 的正整数中使 2^n-n^2 被 7 整除的正整数 n 的个数为 $476\times6+1=2857$ 个.

7. 类似于例 7 可以先用数学归纳法证明下列命题：设 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $3a_na_{n+1}=a_n^2+a_{n+1}^2+1(n\in\mathbf{N}_+)$（证明留给读者自己完成）然后令 $a=a_n$，$b=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$ 便知存在无穷多对不同的正整数 a，b 满足 a^2+b^2+1 被 ab 整除.

8. （解法一）作递推数列 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n(n\geqslant1)$，$b_n=2a_{n+1}$，$c_n=a_{n+2}$，则 $c_n-b_n=a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-a_n=b_n-a_n$，故 a_n，b_n，c_n 成等差数列. 其次，我们证明 $a_nc_n+1=a_na_{n+2}+1=a_{n+1}^2$. 事实上，$a_3=4a_2-a_1=15$，$a_1c_1+1=a_1a_3+1=15+1=16=a_2^2$. 设 $a_{n-1}c_{n-1}+1=a_{n-1}a_{n+1}+1=a_n^2$，那么 $a_nc_n+1=a_na_{n+2}+1=a_n(4a_{n+1}-a_n)+1=4a_na_{n+1}-a_n^2+1=4a_na_{n+1}-(a_{n-1}a_{n+1}+1)+1=a_{n+1}(4a_n-a_{n-1})=a_{n+1}^2$，故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，$a_nc_n+1=a_{n+1}^2$. 并且 $a_nb_n+1=a_n\cdot2a_{n+1}+(a_{n+1}^2-a_na_{n+2})=a_{n+1}^2-a_n(a_{n+2}-2a_{n+1})=a_{n+1}^2-a_n(2a_{n+1}-a_n)=(a_{n+1}-a_n)^2$，$b_nc_n+1=2a_{n+1}a_{n+2}+1=2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2-a_na_{n+2}=2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2-(4a_{n+1}-a_{n+2})a_{n+2}=(a_{n+2}-a_{n+1})^2$. 故存在无穷多组三数组 $(a,b,c)=(a_n,b_n,c_n)$ 满足题目条件.

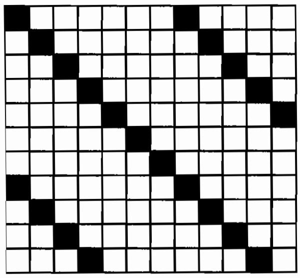
（解法二）设 $(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n\sqrt{3}$（$A_n$，$B_n$ 为正整数，$n\in\mathbf{N}_+$），则 $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}$，$A_n^2-3B_n^2=1$. 取 $a=2B_n-A_n$，$b=2B_n$，$c=2B_n+A_n$，则 a，b，c 成等差数列并且可证 $ab+1=(A_n-B_n)^2$，$ac+1=B_n^2$，$bc+1=(A_n+B_n)^2$，故存在无穷多组三数组 $(a,b,c)=(2B_n-A_n,2B_n,2B_n-A_n)$ 满足题目条件.

9. 设 $AB=a-d$，$BC=a$，$CA=a+d(a,d\in\mathbf{N}_+$ 且 $a>d)$. $\triangle ABC$ 的面积为 S，BC 边上的高为 h_a，则 $S=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+d\right)\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-d\right)}=\frac{1}{2}a\sqrt{3\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-d^2\right]}$. 要使 S 为正整数，a 必须为偶数. 令 $a=2x(x\in\mathbf{N}_+)$，则 $S=x\sqrt{3(x^2-d^2)}$，$h_a=\frac{2S}{a}=\sqrt{3(x^2-d^2)}$，$h_a^2=3(x^2-d^2)$，故 h_a 必须为 3 的倍数. 设 $h_a=3y(y\in\mathbf{N}_+)$，则 $x^2-3y^2=d^2$. 为简单起见，取 $d=1$，则 $x^2-3y^2=1\cdots$①，于是 $(x,y)=(2,1)$ 为①的一个解. 令 $(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$（$x_n$，$y_n$ 为正整数，$n\in\mathbf{N}_+$），则 $(2-\sqrt{3})^n=x_n-y_n\sqrt{3}$，于是 $x_n^2-3y_n^2=1$，即 $(x,y)=(x_n,y_n)(n\in\mathbf{N}_+)$ 都为①的正整数解. 由 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{3}$

$=(2+\sqrt{3})^{n+1}=(2+\sqrt{3})(x_n+y_n\sqrt{3})=(2x_n+3y_n)+(x_n+2y_n)\sqrt{3}$ 得 $\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n,\\ y_{n+1}=x_n+2y_n.\end{cases}$ 且 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1.\end{cases}$ 消去 y_n 可得 $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$，$x_1=2$，$x_2=7$. 于是可取 $AB=2x_n-1$，$BC=2x_n$，$CA=2x_n+1$，$(n=1, 2, \cdots)$，则 AB，BC，CA 是成等差数列的互素的正整数($AB<BC<CA$). 且$\triangle ABC$ 的面积为 $S=x_n\sqrt{3(x_n^2-1)}=3x_ny_n$ 及 BC 边上的高 $h_a=3y_n$ 均为正整数,故存在无穷多个满足题目条件的$\triangle ABC$.

习 题 9

1. 因为 11×12 的矩形中有 $11\times12=132$ 个 1×1 的方格,且 $126=7\times18<132<7\times19=133$,所以,如果用 19 张 1×6 或 1×7 的矩形能够完全覆盖 11×12 矩形,则要用 18 张 1×7 矩形和 1 张 1×6 矩形. 如图对 11×12 的矩形用黑白两种颜色染色,使得任意两个黑色格都无法被 1 张 1×7 的矩形同时覆盖. 图中共有 20 个黑格,18 张 1×7 的矩形只能盖住其中 18 个黑格,还剩下两个黑格,那张 1×6 的矩形无法把他们都盖住. 这就证明了用 19 张 1×6 或 1×7 的矩形不可能完全覆盖 11×12 的矩形.

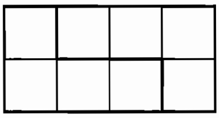


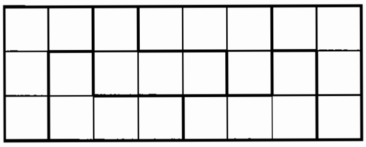
(第 1 题)

2. (1) 设 $m\times n$ 棋盘能用若干张 L 型骨牌完全覆盖,则显然有 $m\geqslant2$，$n\geqslant2$. 又因每张 L 型骨牌含 4 个方格,所以 mn 是 4 的倍数. 不妨设 m 为偶数,将 $m\times n$ 棋盘奇数行中每行 n 个小方格都染成黑色,偶数行中每行 n 个小方格染成白色. 于是每张 L 型骨牌或者盖住 3 个白格和一个黑格或者盖住 3 个黑格和一个白格. 总之盖住的黑格是奇数个,白格也是奇数个,如果 mn 不是 8 的倍数,那么 $mn=4(2k+1)$,若 $m\times n$ 棋盘可用 L 型骨牌完全覆盖,则必须用 $2k+1$ 张 L 型骨牌,奇数个奇数之和仍为奇数,这表明 $m\times n$ 棋盘有奇数个黑格和奇数个白格. 但棋盘上黑格与白格各占一半都为 $2(2k+1)$ 格,矛盾. 因此,mn 是 8 的倍数.

(2) 由(1)知 $m\times n$ 矩形可用 L 型骨牌完全覆盖的必要条件是 $m\geqslant2$，$n\geqslant2$,且 mn 是 8 的倍数,下面我们证明这一条件也是充分的. 分两种情形:情形 1:m 与 n 均为偶数. 因 mn 是 8 的倍数,所以 m，n 中必有一个是 4 的倍数. 不妨设 $m=2m_1$，$n=4n_1$. 于是 $m\times n$ 棋盘可分成 m_1n_1 个 2×4 的棋盘,而每个 2×4 的棋盘可用 2 张 L 型骨牌覆盖(如图(a)),故 $m\times n$ 棋盘可用 $2m_1n_1$ 张 L 型骨牌完全覆盖. 情形 2:m，n 中有一个为奇数,另一个为

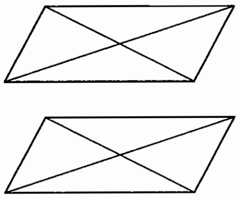
8 的倍数. 不妨设 $m=2m_1+1$，$n=8n_1$，于是 $m\times n$ 棋盘可分成两部分，一个是 $2(m_1-1)\times 8n_1$ 棋盘，另一个是 $3\times 8n_1$ 棋盘，其中第一部分可分成 $(m_1-1)\times 2n_1$ 个 2×4 的棋盘，从而可用 $4(m_1-1)n_1$ 块 L 型骨牌覆盖. 第二部可分成 n_1 个 3×8 的棋盘，而 3×8 的棋盘可用 6 张 L 型骨牌覆盖(图(b))，从而第 2 部分可用 $6n_1$ 张 L 型骨牌覆盖. 因此总个 $m\times n$ 棋盘可用 L 型骨牌完全覆盖.


(a)


(b)

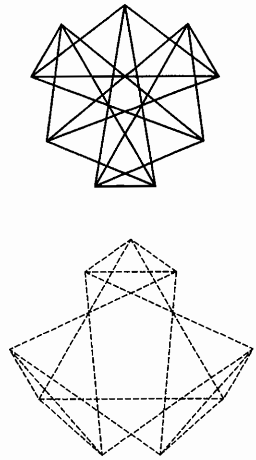
(第 2 题)

3. 用 n 点表示 n 个人，如果两人互相认识，那么对应点连一条红线，否则连一条蓝线，问题化为：求最小正整数 n，使得 2 色完全图 K_n 中存在两个恰有一个公共顶点的同色三角形. 如图 2 色完全图 K_8 中(图中画的实线表红线，蓝线没有画出)没有蓝色三角形，共有 8 个红色三角形，且任何两个红色三角形或者有公共边或者无公共顶点. 故所求最小正整数 $n\geqslant 9$. 设 2 色 K_9 的 9 个顶点为 A_1，A_2，…，A_9，从 A_i 出发有 x_i 条红边和 $8-x_i$ 条蓝边 $(i=1, 2, \cdots, 9)$. 我们称从一点出发的一条红边和一条蓝边组成的角为异色角，于是以 A_i 为顶点的异色角有 $x_i(8-x_i)$ 个. 我们称既有红边又有蓝边的三角形为异色三角形，因每个异色三角形中有 2 个异色角，故 2 色 K_9 中异色三角形的个数为 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}x_i(8-x_i)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{x_i+8-x_i}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times 9\times 16=72$，从而 2 色 K_9 中同色三角形至少有 $C_9^3-72=84-72=12$ 个. 12 个三角形共 36 个顶点，但一共只有 9 点，故由抽屉原理知其中必有 $\left[\frac{36-1}{9}\right]+1=4$ 个三角形有公共顶点，若这 4 个三角形中有 2 个恰有 1 个公共顶点，则结论成立，否则这 4 个三角形有 1 条公共边，从而这 4 个同色三角形的边都同色，不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_5$，$\triangle A_1A_2A_6$ 都是红色三角形. 考察以 A_3，A_4，A_5，A_6 为顶点的 2 色 K_4，若其中有 1 条红边，不妨设为 A_3A_4，则 $\triangle A_1A_3A_4$ 和 $\triangle A_1A_2A_5$ 是两个恰有 1 个公共顶点 A_1 的红色三角形. 结论成立；若其中全是蓝色边，则红色 $\triangle A_1A_2A_3$ 与蓝色 $\triangle A_3A_4A_5$ 是两个恰有一个公共顶点的同色三角形. 这就证明了 2 色 K_9 中必存在两个恰有一个公共顶点的同色三角形. 综上知所求最小正整数 $n=9$.



(第 3 题)

4. 同第 3 题可知本题等价于求最小正整数 n，使得 2 色 K_n 中必存在两个恰有一条公共边的同色三角形. 如图 K_9 中(为了清楚起见，我们把红线(实线)、蓝线(虚线)分别画在两个图中)，有 6 个红色三角形和 6 个蓝色三角形. 图中 18 条红边和 18 条蓝边恰好每边都是一个同色三角形的一条边，任何两个同色三角形没有公共边. 可见，所求最小正整数 $n \geqslant 10$，同第 3 题方法可证 2 色 K_{10} 中至少有 20 个同色三角形. 每个三角形 3 条边，共 60 条边，而 K_{10} 中一共只有 $C_{10}^3 = 45$ 条边，故至少有 $\left[\frac{60-1}{45}\right]+1=2$ 个同色三角形恰有 1 条公共边. 综上可知，所求最小正整数 $n=10$.



(第 4 题)

5. 用 9 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 表示 9 名科学家，若两人能同时讲第 i 种语言. 则对应点的连线染第 i 种颜色 ($i=1, 2, \cdots$)，否则对应点的连线不染色. (1)若任意两点的连线都染了某种颜色. 则因为从每点出发的线段至多只有 3 种颜色，故由抽屉原理知从一点 A_1 出发至少有 $\left[\frac{8-1}{3}\right]+1=3$ 条线段同色，不妨设 A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 同色. 于是 A_1, A_2, A_3 能讲同一种语言. (2)存在两点 A_1 和 A_2，它们之间的连线没有染色. 由已知条件知任何 3 点中必有 2 点间的连线染了某种颜色. 因此对其余 7 点中任一点 A_i($i=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) A_iA_1 与 A_iA_2 这两条线中至少有一条染了颜色. 由抽屉原理，知 A_1 和 A_2 中必有一点，例如 A_1，从它出发的线段中至少有 $\left[\frac{7-1}{2}\right]+1=4$ 条染了色，但这 4 条线段至多只能染 3 种颜色，故其中必有 $\left[\frac{4-1}{3}\right]+1=2$ 条同色. 不妨设 A_1A_3, A_1A_4 同色，于是 A_1, A_3, A_4 能讲同一种语言.

6. 将图 9－5 中的每个黑色小正三角形内填入数字－1，每个白色小正三角形内填入数字 1. 因为每一行中黑色小正三角形比白色小正三角形少一个. 故图中所填入的数字总和等于 10. 设 m 个图 9－3 中能覆盖三个 1 和一个－1 有 x 个，其余 $m-x$ 个能覆盖三个－1 和一个 1. 而每个图 9－4 能覆盖二个 1 和二个－1. 故 m 个图 9－3 和 $25-m$ 个图 9－4 能覆盖的数字总和为 $[3\times1+(-1)]x+[3\times(-1)+1](m-x)+[2\times1+2\times(-1)](25-m)=2(2x-m)$. 于是，$2(2x-m)=10$，即 $2x=m+5$. 所以 m 为奇数. 余下部分同例 2.

7. 两轮各有 14 个齿时，设 $A(B)$ 轮按顺时针方向每个齿对应一个数 $a_i(b_i)$，$i=1, 2, \cdots, 14$. 对于敲掉的齿，令 $a_i(b_i)=1$，对于没有敲掉的

齿，令 $a_i(b_i)=0$. 旋转 A 轮，使 A 轮的第 1 齿转到与 B 轮的第 i 齿重合，作和 $S_i=a_1b_i+a_2b_{i+1}+\cdots+a_{14}b_{i+13}(i=1,2,\cdots,14,b_{j+14}=b_j)$. 于是 $S_i=0$ 表明两轮的投影是一个完整的齿轮的投影. 若对任意 $i(1\leqslant i\leqslant 14)$ 有 $S_i\neq 0$，则 $S_1=4$，$S_i\geqslant 1(2\leqslant i\leqslant 14)$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{14}S_i\geqslant 17$. 而 $\sum\limits_{i=1}^{14}S_i=\left(\sum\limits_{i=1}^{14}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{14}b_i\right)=4\times 4=16$，矛盾. 故必存在 $i_0(2\leqslant i_0\leqslant 14)$ 使 $S_{i_0}=0$，即 A 轮的第 1 齿转到与 B 轮的第 i_0 齿重合时，两轮的投影是一个完整的齿轮的投影. 两轮原各有 13 齿时，结论不再成立. 事实上，依次编号后，假设敲掉的是第 1，2，5，7 对重合的齿. 并设 A 轮第 i 齿转到 B 轮第 j 齿需要转动的齿数为 $C_{ij}(i,j=1,2,5,7)$，则可得到下表. 从表中可以看出，无论 A 轮转动多少个齿(从 1 个到 13 个)，都会出现 A 轮被敲掉的齿与 B 轮某个被敲掉的齿重合的情况. 从而两轮在水平面上的投影不可能是一个完整的齿轮的投影.

A \ C_{ij} \ B	1	2	5	7
1	13	1	4	6
2	12	13	3	5
5	9	10	13	2
7	7	8	11	13

习　题　10

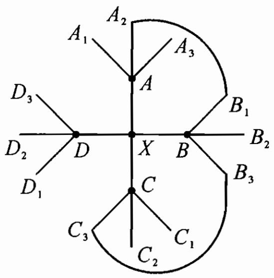
1. 用反证法. 假设任何两个三人委员会或者有两个成员相同，或者没有成员相同. 如果委员会 A 和 B 有公共成员，那么它们恰有两个公共成员 a 和 b. 如果委员会 B 又和 C 有两个公共成员，那么 a 和 b 中至少有一个属于 C，从而 C 与 A 也应有两个公共成员. 于是，我们可将所有三人委员会进行分类：使同一类的两个委员会都恰有两个公共成员，不同类的委员会没有公共成员. 下面证明：同一类中委员会的个数 k 不大于这类中委员的人数 h，显然 $h\geqslant 3$. 当 $h=3$ 时 $k=1$；当 $h\geqslant 4$ 时 $k\geqslant 2$，设 $\{x,a,b\}$，$\{y,a,b\}$ 是其中两个委员会，则其他同类的委员会只能是 $\{x,y,a\}$，$\{x,y,b\}$ 或 $\{a,b,z\}$ 的形式，这里 z 最多有 $h-4$ 种选择. 所以 $k\leqslant 4+(h-4)=h$. 于是委员会的总数 $n+1\leqslant$ 总人数 n，矛盾. 这表明，至少有两个委员会恰有一个公共成员.

2. 均不能实现. 将棋盘上的行自下而上编号、列自左向右编号为 1，2，…，8. 第 i 行第 j 列的方格记为 (i,j)，考察 9 枚棋子的纵坐标之和 S. 如果它们能跳到左(右)上角 3×3 正方形中，那么和 S 将增加 $3(6+7+8-1-2-$

$3)=45$，即 S 的奇偶性发生了变化，但另一方面，某棋子跳一次，和 S 增加 2（竖跳或斜跳）或 0（横跳）. 因此，棋子在跳动过程中和 S 的奇偶性不变，矛盾. 这表明题中两个要求均不能实现.

3. 用反证法. 假设对任意排列 b 和 c，$b\neq c$ 都有 $S(b)-S(c)\not\equiv 0(\bmod n!)\cdots$①，于是由①知当 a 遍历 1，2，…，n 的 $n!$ 个排列时，$S(a)$ 遍历模 $n!$ 的一个完全剩余系. 记 1，2，…，n 的所有排列集合为 σ，于是 $\sum\limits_{a\in\sigma}S(a)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n!}k=\frac{1}{2}(n!)(n!+1)(\bmod n!)$. 又 $n>1$ 为奇数，故 $\sum\limits_{a\in\sigma}S(a)\equiv\frac{1}{2}n!\not\equiv 0(\bmod n!)\cdots$②. 另一方面 $\sum\limits_{a\in\sigma}S(a)=\sum\limits_{a\in\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_i=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i(\sum\limits_{a\in\sigma}a_i)=\frac{(n!)(n+1)}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\equiv 0(\bmod n!)$；这与②矛盾. 故命题结论得证.

4. 用 17 个点 A_1，A_2，…，A_{17} 表示 17 个人，若两人互相认识，则对应点连一线段，否则不连线段. 若两人互相认识（即对应点间连有线段）或两人有共同的熟人（即对应两点与同一点连有线段，这时称这两点张有角）则称这两人对应的两点是关联的. 问题归结为存在不关联的两点. 用反证法. 假设图中所有的点都是两两关联的，即任意两点或连有线段或张有角. 已知图中共连有 $\frac{1}{2}\times17\times4=34$ 条线段，所张的角有 $17C_4^2=102$ 个，且 $34+102=136=C_{17}^2$ 恰等于两点组数. 因此，任意两点或连有线段或张有唯一一个角，二者必居之一. 可见图中既不存在三角形（否则连有线段的两点又张有角）也不存在四边形（否则有两点张有两个角）. 考察其中任意一点 X，它与 4 点 A、B、C、D 连有线段. 由上述讨论知 A、B、C、D 两两之间没有连线. 从 A、B、C、D 出发，除 X 外各自都与 3 个点连有线段（如图所示）. 这样一共有 17 个点，连有 16 条线段. 从 A、B、C、D 所连出的 4 个 3 点组，同组内任何两点不连线，每点都只能与其他组内的点连有线段，每连一条线段，使得到一个含点 X 的 5 点圈（如图中 XAA_2B_1BX 和 XBB_3C_3CX 等）. 由于还要连 $34-16=18$ 条线，故包含点 X 的 5 点圈有 18 个，由于 X 是任意的，因此，每一点都包含在 18 个 5 点圈内，故图中的 5 点圈应有 $\frac{17\times18}{5}$ 个，但 $\frac{17\times18}{5}$ 不是整数，矛盾！因此，图中的点不可能是两两关联的，故一定存在不关联的两点，即存在两人彼此不认识且没有共同认识的人.



（第 4 题）

5. 对任意 k 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，若对 $i=1, 2, \cdots, k-1$ 均有 x_i 整除 x_{i+1}，则称 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 为一条长为 k 的链，且称 x_1 为该链的首元. 对 M 中每个元 $x_i(1\leqslant i\leqslant n^2+1)$，考虑取自 M 的以 x_i 为首元的链中最长的链，并记这个最长的链的链长为 $l_i(i=1, 2, \cdots, n^2+1)$. 下面我们只需证明：$l_1, l_2, \cdots, l_{n^2+1}$ 中至少有一个数不小于 $n+1$. 若对任意 $1\leqslant i\leqslant n^2+1$ 均有 $l_i\leqslant n$，则由抽屉原理 $l_1, l_2, \cdots, l_{n^2+1}$ 中至少有 $\left[\frac{(n^2+1)-1}{n}\right]+1=n+1$ 个相等. 不妨设 $l_1=l_2=\cdots=l_{n+1}=r$，而由 M 的性质知 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 中必有一个数是另一个数的倍数. 不妨设 x_1 整除 x_2. 于是将 x_1 置于以 x_2 为首元的那条最长的链的前面，我们得到一条长为 $l_2+1=r+1$ 且以 x_1 为首元的链，这与以 x_1 为首元的最长链的长为 $l_1=r$ 矛盾. 故 $l_1, l_2, \cdots, l_{n^2+1}$ 中必有一个数不小于 $n+1$. 不妨设 $l_1\geqslant n+1$，即存在 M 中 $n+1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 使 a_i 整除 $a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n)$.

6. 记参加第 i 场比赛的选手为 $(a_i, b_i)(i=1, 2, \cdots, 14)$，并记 $M=\{(a_i, b_i)\mid i=1, 2, \cdots, 14\}$. 我们称 M 的一个子集为好子集，如果该子集所含选手对中出现的所有选手互不相同. 显然好子集是存在的(例如只含一对选手的子集)且个数有限. 故存在一个含选手对最多的好子集 M_0，设 M_0 中含有 r 对选手，只要证 $r\geqslant 6$，反设 $r\leqslant 5$. 于是 M_0 中没有出现过的 $20-2r$ 名选手之间没有进行比赛(因为若有一对选手 a 和 b 比了赛，则 $M_0\cup\{(a, b)\}$ 仍然是好子集，这与 M_0 是含选手对最多的，假设矛盾). 这表明这 $20-2r$ 名选手参加的比赛一定是同 M_0 中的 $2r$ 名选手进行的. 又已知每名选手至少参加一场比赛，故这 $20-2r$ 名选手至少参加了 $20-2r$ 场比赛，加上 M_0 中的 r 场比赛，故总的比赛场次至少为 $(20-2r)+r=20-r\geqslant 15$，这与一共只有 14 场比赛矛盾，所以 $r\geqslant 6$. 即至少有 6 场比赛，参赛的 12 名选手互不相同.

7. 设经过 S 场比赛可使已经比赛过的任何三个队中都有两个队互相比赛过. 我们选出其中一个比赛场次最少的队 A，设 A 队比赛了 k 场，于是与 A 比赛过的 k 个队 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 都至少比赛了 k 场，从与 A 没有比赛过的 $19-k$ 个队 $C_1, C_2, \cdots, C_{19-k}$ 中任取两队 $C_i, C_j\ (1\leqslant i<j\leqslant 19-k)$，则 A, C_i, C_j 中必有两队比赛过一场. 但 A 与 C_i，A 与 C_j 没有比赛过，故只可能 C_i 与 C_j 比赛一场. 因此 $C_1, C_2, \cdots, C_{19-k}$ 中每个队至少与其余 $18-k$ 个队比赛过一场. 从而 20 个队比赛场次的总和至少为 $k(k+1)+(19-k)(18-k)$，上述计数中每场比赛计算了两次. 所以 $S\geqslant\frac{1}{2}[k(k+1)+(19-k)(18-k)]=(k-9)^2+90\geqslant 90$. 另一方面，如果将 20 个队平分为两组，同组 10 个队中任何两队安排一场比赛，不同组的任何两队不安排比赛，则一共比赛了

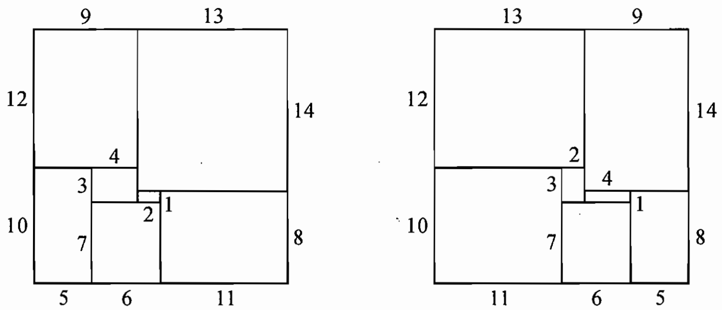
$2C_{10}^2=90$ 场，任何三个队中必有 $\left[\dfrac{3-1}{2}\right]+1=2$ 个队属于同一组，它们互相比赛过一队. 综上可知，最少要安排 90 场比赛.

习　题　11

1. 记所有红(蓝)点到 $A(B)$ 的距离之和为 $S_{红}(S_{蓝})$. 首先考察一个极端情形：n 个蓝点均在中点 M 的左边，n 个红点均在中点 M 的右边. 此时显然有 $S_{红}=S_{蓝}$. 对于一般情形，即 M 的左边至少有一个红点 C，M 的右边至少有一个蓝点 D. 我们取左边任一红点 C 改为蓝点，右边任意蓝点 D 改为红点，其余点的颜色不变，则涂红色的点到 A 的距离的总和 $S_{红}'=S_{红}+CD$，涂蓝色的点到 B 的距离的总和 $S_{蓝}'=S_{蓝}+CD$，从而 $S_{红}'-S_{蓝}'=S_{红}-S_{蓝}$ 是常量. 于是，经过有限次调整，可将 $2n$ 个点调整到前述极端情形，因而结论成立.

2. 设 30 组的点数为 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$，则 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 各不相同，且 $n_1+n_2+\cdots+n_{30}=1989$，三角形总数为 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$. 因为分组的方法数是有限的，所以 S 的最大值是存在的. 由对称性，不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$. 首先证明：使 S 取最大值的分组方式具有下列性质：(1) $n_{k+1}-n_k\leqslant 2(k=1,2,\cdots,29)$. 事实上，若存在 k_0 使 $n_{k_0+1}-n_{k_0}\geqslant 3$，$(1\leqslant k_0\leqslant 29)$. 不妨设 $k_0=1$，即 $n_2-n_1\geqslant 3$，这时令 $n_1'=n_1+1$，$n_2'=n_2-1$，$n_k'=n_k(3\leqslant k\leqslant 30)$，对应于分法 $\{n_1',n_2',\cdots,n_{30}'\}$ 的三角形总数为 S'. 则由 $S=n_1n_2\sum\limits_{3\leqslant k\leqslant 30}n_k+(n_1+n_2)\sum\limits_{3\leqslant i<j\leqslant 30}n_in_j+\sum\limits_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$ 及 $n_1+n_2=n_1'+n_2'$ 易得 $S'-S=(n_1'n_2'-n_1n_2)\sum\limits_{3\leqslant k\leqslant 30}n_k=[n_2-(n_1+1)]\sum\limits_{3\leqslant k\leqslant 30}n_k>0$，即 $S'>S$. 这与 S 的最大性假设矛盾；(2) 使 $n_{k+1}-n_k=2$ 的 k 至多只有一个. 事实上，若存在 $k_1<k_2$，使 $n_{k_1+1}-n_{k_1}=2$，$n_{k_2+1}-n_{k_2}=2$，这时取 $n_{k_1}'=n_{k_1}+1$，$n_{k_2}'=n_{k_2}-1$，$n_i'=n_i(i\neq k_1,k_2,1\leqslant i\leqslant 30)$ 则同上可得出对应于分组 $\{n_1',n_2',\cdots,n_{30}'\}$ 的三角形总数 S' 也大于 S 矛盾. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{30}n_i=1989$. 故不可能全有 $n_{k+1}-n_k=1(k=1,2,\cdots,30)$. 否则 $n_1,\cdots,n_{30}$ 是公差为 1 的等差数列，于是 $1989=\sum\limits_{i=1}^{30}n_i=15(n_1+n_{30})$，即 15 整除 1989，矛盾. 因而恰有一个 k_0 使 $n_{k_0+1}-n_{k_0}=2$. 即 30 个数为 $n_1,n_1+1,\cdots,n_1+(k_0-1),n_1+(k_0+1),\cdots,n_1+30$. 于是 $1989+k_0=\dfrac{1}{2}\times 30\times(n_1+1+n_1+30)=15(2n_1+31)$，所以 $k_0=6$，$n_1=51$. 故所求各组中所含点数为 $51,52,\cdots,56,58,59,\cdots,81$ 时三角形的总数为最大.

3. 考虑一般情形：设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是 $1, 2, \cdots, 2n$ 的任意排列，求 $S_n = a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n}$ 的最大值. 对 n 用归纳法，$n=1$ 时，$S_1 = 1\times 2$，$n=2$ 时，$S_2 \leqslant \max\{1\times 2+3\times 4, 1\times 3+2\times 4, 1\times 4+2\times 3\} = 1\times 2+3\times 4$. 设 $S_k \leqslant 1\times 2+3\times 4+\cdots+(2k-1)(2k)$，那么 $n=k+1$ 时，设 $S_{k+1} = a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_{2k+1}a_{2k+2}$，分两种情形：(1)若 $2k+1$，$2k+2$ 出现在 S_{k+1} 中同一项中，不妨设 $a_{2k+1}a_{2k+2} = (2k+1)(2k+2)$，则由归纳假设有 $S_{k+1} = a_1a_2+\cdots+a_{2k-1}a_{2k}+(2k+1)(2k+2) \leqslant 1\times 2+3\times 4+\cdots+(2k-1)(2k)+(2k+1)(2k+2)$；(2)若 $2k+1$ 与 $2k+2$ 出现在 S_{k+1} 的两个不同的项中，不妨设 $a_{2k-1} = 2k+1$，$a_{2k+1} = 2k+2$，注意到 $[a_{2k}a_{2k+2}+(2k+1)(2k+2)]-[(2k+1)a_{2k}+(2k+2)a_{2k+2}] = [a_{2k}-(2k+2)][a_{2k+2}-(2k+1)] > 0$，所以 $S_{k+1} < a_1a_2+\cdots+a_{2k-3}a_{2k-2}+a_{2k}a_{2k+2}+(2k+1)(2k+2) \leqslant 1\times 2+3\times 4+\cdots+(2k-1)(2k)+(2k+1)(2k+2)$. 这就证明了，对一切 $n\in \mathbf{N}_+$，有 $S_n \leqslant 1\times 2+3\times 4+\cdots+(2n-1)(2n)$. 回到原题，若满足题目条件的分割存在，则 $m^2 \leqslant 1\times 2+3\times 4+\cdots+13\times 14 = 504$，所以 $m \leqslant [\sqrt{504}] = 22$. 下面两个图形都说明 $m=22$ 可以达到. 故所求 m 的最大值为 22.



(第 3 题)

4. 首先，对任意排列 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_{20})$，显然可以在 19 次操作之内，将它变为 $(1, 2, \cdots, 20)$，故 $k_a \leqslant 19$. 下面证明：当 $a=(2, 3, \cdots, 20, 1)$ 时，至少要操作 19 次操作，才能变为 $(1, 2, \cdots, 20)$. 为此，引入循环圈的概念：设排列中第 b_1 个位置上的数是 b_2，第 b_2 个位置上的数是 b_3，…，第 b_{k-1} 个位置上的数是 b_k，第 b_k 个位置上的数是 b_1，则将 $b_1\to b_2\to\cdots\to b_k\to b_1$ 称为一个循环圈，特别第 b_1 个位置上的数是 b_1 时，则 $b_1\to b_1$ 也是一个循环圈. 于是每个排列可以分拆为若干个不相交的循环圈. 设排列 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_{20})$ 中循环圈的个数记为 $f(a)$，我们考察每次操作后 $f(a)$ 的变化. (1)当操作是将同一循环圈内两数 b_i，b_j $(i<j)$ 交换时，则循环圈 $b_1\to b_2\to\cdots\to b_k\to b_1$ 被分拆成两个循环圈：$b_1\to b_2\to\cdots\to b_i\to b_{j+1}\to\cdots\to b_k\to b_1$ 和 $b_{i+1}\to b_{i+2}\to$

$b_{j-1}\to b_j\to b_{i+1}$；(2)当操作将两个循环圈 $b_1\to b_2\to\cdots\to b_k\to b_1$ 和 $c_1\to c_2\to\cdots\to c_m\to c_1$ 中两个数 b_1 与 c_1 交换时，这两个循环圈合并成一个循环圈 $b_1\to c_2\to c_3\to\cdots\to c_m\to c_1\to b_2\to b_3\to\cdots\to b_k\to b_1$. 因此，每次操作后，$f(a)$ 总是增加 1 或减少 1. 注意到 $a=(2,3,\cdots,20,1)$ 只有一个循环圈 $1\to2\to3\to\cdots\to20\to1$，而 $(1,2,\cdots,20)$ 有 20 个圈 $(1,1)$，$(2,2)$，$\cdots$，$(20,20)$. 因此，从 a 变到 $(1,2,3,\cdots,20)$ 至少要作 19 次操作，于是所求 k_a 的最大值为 19.

5. 注意到每次操作后，所有数的和不变，都为 $1+2+3+\cdots+20=210$. 考虑黑板上所写各数的平方和 f. 设此人所选数为 m，n $(m-n\geqslant2)$，则 $(m-1)^2+(n+1)^2=m^2+n^2+2-2(m-n)\leqslant m^2+n^2-2$，即每次操作后，黑板上各数的平方和 f 至少减少 2，当且仅当 $m-n=2$ 时，f 恰减少 2，并且操作停止的充要条件是黑板上任意两个数之差的绝对值最大为 1. 由于各数之和恒为 210 易知这种情况只在黑板上恰有 10 个数为 10，恰有 10 个数为 11 时出现. 开始时各数的平方和为 $f_0=1^2+2^2+\cdots+20^2=\frac{1}{6}\times20\times21\times41=2870$. 假设最多经过 k 次操作后，操作无法继续进行，这时各数的平方和为 $f_k=10\times10^2+10\times11^2=2210$. 而每次操作后平方和至少减少 2，所以操作次数 $k\leqslant\frac{1}{2}(2870-2210)=330$. 下面证明：此人可以恰操作 330 次，即只要保证每次操作选取的两个数的差的绝对值恰等于 2. 若黑板上的最大数和最小数之间的所有数至少出现一次，则称黑板上的这些数是“恰当的”. 开始时，黑板上的数是恰当的，记其中最大数为 b，最小数为 $a(b-a\geqslant2)$. 此人先对 a 与 $a+2$ 进行操作，再对 $a+1$ 与 $a+3$ 进行操作，然后对 $a+2$ 与 $a+4$ 进行操作，$\cdots$，直到对 $b-2$ 与 b 进行操作，经过这样一轮操作后，黑板上等于 a 和 b 的个数减少 1，等于 $a+1$，$b-1$ 的数个数增加 1，并且黑板上得到的数仍然是恰当的. 从开始情形起反复地进行如上操作，直到不能操作为止. 因每次操作恰使各数的平方和减少 2. 故操作的次数恰为 330 次. 综上可得所求操作次数的最大值为 330.（注，本题中选择的目标函数 f 为各数的平方和.）

习 题 12

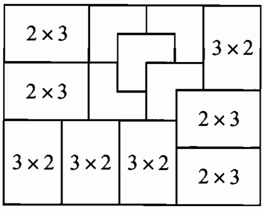
1. $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2$ 与 $b_1^2,b_2^2,\cdots,b_m^2$ 可组成 mn 个乘积，分别填入 $m\times n$ 的矩形表的各格内(如图). 为了保证各行、各列的和都为平方数，只要 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 及 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$ 为完全平方数. 联想到 $(2k+1)+k^2=(k+1)^2$，可取 a_1 为奇数，$a_j(j=2,3,\cdots,n-1)$ 均为偶数且 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$. 记 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_j^2=2M+1$，再令 $a_n=M$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=(M+1)^2$. 为了保证表中各数不等，可加大表中各行数的“距离”. 例如取 $b_1>2a_n$ 为奇数，

$b_i(i=2,3,\cdots,m-1)$为偶数且$b_{i+1}>b_i\cdot a_n(i=2,3,\cdots,m-2)$. 记$\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i^2=2S+1$，再取$b_m=S$，则$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=(S+1)^2$. 不难验证，上述填法符合题目要求.

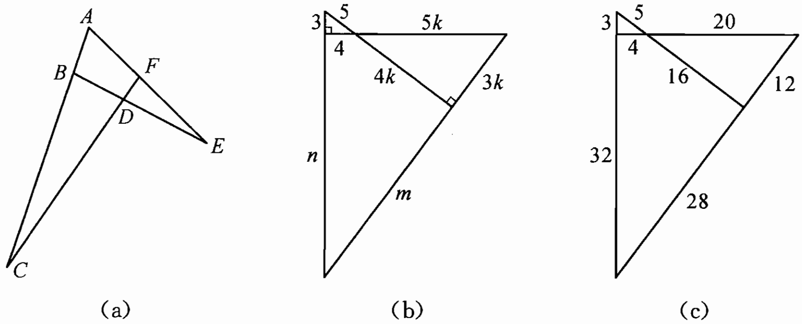
$a_1^2b_1^2$	$a_2^2b_1^2$	$\cdots$	$a_j^2b_1^2$	$\cdots$	$a_{n-1}^2b_1^2$	$a_n^2b_1^2$
$a_1^2b_2^2$	$a_2^2b_2^2$	$\cdots$	$a_j^2b_2^2$	$\cdots$	$a_{n-1}^2b_2^2$	$a_n^2b_2^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_1^2b_i^2$	$a_2^2b_i^2$	$\cdots$	$a_j^2b_i^2$	$\cdots$	$a_{n-1}^2b_i^2$	$a_n^2b_i^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_1^2b_{m-1}^2$	$a_2^2b_{m-1}^2$	$\cdots$	$a_j^2b_{m-1}^2$	$\cdots$	$a_{n-1}^2b_{m-1}^2$	$a_n^2b_{m-1}^2$
$a_1^2b_m^2$	$a_2^2b_m^2$	$\cdots$	$a_j^2b_m^2$	$\cdots$	$a_{n-1}^2b_m^2$	$a_n^2b_m^2$

2. 取$a_i=\dfrac{(k!)^2+i}{i}$，$b_i=\dfrac{k!}{i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，则$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{(k!)^2+1}{k!}$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{(k!)^2+2}{k!}$，$\cdots$，$\dfrac{a_k}{b_k}=\dfrac{(k!)^2+k}{k!}$是公差为$\dfrac{1}{k!}$的等差数列. 因为$((k!)^2+i,k!)=i$，故$(a_i,b_i)=\left(\dfrac{(k!)^2+i}{i},\dfrac{k!}{i}\right)=1$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 又$a_i>b_i(i=1,2,\cdots,k)$且对任意$1\leqslant i<j\leqslant k$，$a_i=\dfrac{(k!)^2+i}{i}>a_j=\dfrac{(k!)^2+j}{j}>b_i=\dfrac{k!}{i}>b_j=\dfrac{k!}{j}$，此时，数列$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$，$\cdots$，$\dfrac{a_k}{b_k}$满足题中条件.

3. (1) 因2003×2005不被3整除，而每个L型含3个方格，故2003×2005矩形不能完全剖分成若干个L形. (2)因L形既可拼成2×3的矩形又可拼成7×9的矩形(如图)，而$2005\times2007=1998\times2007+7\times2007=(2\times3)\times(999\times669)+(7\times9)\times223$. 故知$2005\times2007$的矩形可完全剖分为若干个L形.



(第3题)



(a)　(b)　(c)

(第4题)

4. (1) 不能. 事实上,设如图(a)所得 8 条线段的长分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 因为三角形中任意一边大于其余两边之差的绝对值,所以边长为正整数的非等腰三角形中任何一边的长均大于 1,故图中长为 1 的线段只可能是 AB 或 AF. 不妨设 $AB=1$, 由 $1=AB>|BE-AE|$, 得 $BE=AE$. 在$\triangle ABE$ 中由余弦定理得 $\cos E=\dfrac{BE^2+AE^2-AB^2}{2BE\cdot AE}=1-\dfrac{1}{2AE^2}$. 又在$\triangle DEF$ 中应用余弦定理得 $DF^2=DE^2+EF^2-2DE\cdot EF\cos E=DE^2+EF^2-2DE\cdot EF\cdot\left(1-\dfrac{1}{2AE^2}\right)=DE^2+EF^2-2DE\cdot EF+\dfrac{EF}{AE}\cdot\dfrac{DE}{BE}$. 上式中 $\dfrac{EF}{AE}\cdot\dfrac{DE}{BE}$ 为小于 1 的正分数,其余各项为正整数,矛盾! 故不存在 4 条满足要求的直线.

(2) 能. 如图(b)我们从边长为 3, 4, 5 的直角三角形出发,适当找出正整数 $k>1$ 及 m, n 使图形符合要求. 从相似三角形性质得 $(5+4k):m:(n+3)=(4+5k):n:(m+3k)=3:4:5$. 这要求 $5+4k$ 及 $4+5k$ 均为 3 的倍数,不难得到 $k=4$, $m=28$, $n=32$ 时满足要求. 即如图(c)所示的图形满足题目要求.

5. 构造 100 个子集如下:

$A_i=\{k\mid k\equiv i-1 \pmod{99}$ 且 $k\in\mathbf{N}_+$ 为偶数$\}$, $i=1, 2, \cdots, 99$.

$A_{100}=\{k\mid k\in\mathbf{N}_+$ 为奇数$\}$.

注意到当正整数 a、b、c 满足 $a+99b=c$ 时,a、b、c 中奇数的个数或为 0 或为 2 且 $a\equiv c\pmod{99}$. 若 a、b、c 中有 2 个数为奇数时,那么它们都属于 A_{100} 结论成立. 若 a、b、c 中奇数个数为 0,即 a、b、c 全为偶数时,又因为 $a\equiv c\pmod{99}$,故 a 和 c 属于同一子集 A_{i_0} $(1\leqslant i_0\leqslant 99)$.

6. (证明一) $n=1$ 时,取 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$ 知结论成立. 设对 $n\in\mathbf{N}_+$,结论成立. 即 $S_n=\{1, 2, \cdots, 3n\}$ 可剖分为三个不相交的子集: $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 满足 $a_i+b_i=c_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 那么对 $4n\in\mathbf{N}_+$,将集合 $S_{4n}=\{1, 2, 3, \cdots, 12n\}$ 剖分为三个集合: $A'=\{a_1', a_2', \cdots, a_{4n}'\}$, $B'=\{b_1', b_2', \cdots, b_{4n}'\}$, $C'=\{c_1', c_2', \cdots, c_{4n}'\}$. 其中 $a_i'=2i-1(i=1, 2, \cdots, 3n)$, $a_{3n+k}'=2a_k(k=1, 2, \cdots, n)$, $b_i'=9n+1-i(i=1, 2, \cdots, 3n)$, $b_{3n+k}'=2b_k(k=1, 2, \cdots, n)$, $c_i'=9n+i(i=1, 2, \cdots, 3n)$, $c_{3n+k}'=2c_k(k=1, 2, \cdots, n)$, 则对任意 $i(1\leqslant i\leqslant 4n)$ 都有 $a_i'+b_i'=c_i'$. 因此,存在无穷多个 $n=1, 4, 4^2, 4^3, \cdots$ 满足题目要求.

(证明二) $n=1$ 时结论成立. 设对 $n\in\mathbf{N}_+$,结论成立. 即 $S_n=\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ 可剖分为不相交的三个子集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots,$

$b_n\}$，$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$，使 $a_i+b_i=c_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 于是对 $3n+1$，$S_{3n+1}=\{1, 2, \cdots, 3(3n+1)\}$ 可剖分为三个不相交的子集 $A'=\{a_1', a_2', \cdots, a_{3n+1}'\}$，$B'=\{b_1', b_2', \cdots, b_{3n+1}'\}$，$C'=\{c_1', c_2', \cdots, c_{3n+1}'\}$，其中 $a_i'=3a_i-1$，$b_i'=3b_i$，$c_i'=3c_i-1(i=1, 2, \cdots, n)$，$a_{n+i}'=3a_i$，$b_{n+i}'=3b_i+1$，$c_{n+i}'=3c_i+1(i=1, 2, \cdots, n)$，$a_{2n+i}'=3a_i+1$，$b_{2n+i}'=3b_i-1$，$c_{2n+i}'=3c_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$a_{3n+1}'=1$，$b_{3n+1}'=9n+2$，$c_{3n+1}'=9n+3$. 则 $a_i'+b_i'=c_i'(i=1, 2, \cdots, 3n+1)$，这就证明了存在无穷多个 $n=1, 4, 13, 40, 121, \cdots$，即 $n=\frac{1}{2}(3^k-1)(k=1, 2, \cdots)$ 满足题目要求.

7. 我们先证明下列一般性结论：对任意正整数 $m\geqslant 2$，存在正整数 t_m，当 $n\geqslant t_m$ 时，正整数 n 可表成 m 个不同的正整数之和：$n=a_1+a_2+\cdots+a_m$ 满足 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$ 且 $a_i\mid a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, m-1)$. 事实上，$m=2$ 时，取 $t_2=3$，则为 $n\geqslant t_2=3$ 时，令 $n=1+(n-1)=a_1+a_2$ 则满足命题要求. 设对 $m=k$ 时，存在正整数 t_k 使命题结论成立. 那么 $m=k+1$ 时，取 $t_{k+1}=2^{2(2t_k+1)}$，则当 $n\geqslant t_{k+1}$ 时，可将 n 写成下列形式 $n=2^r(2t+1)$（r, t 为非负整数). 由 $n=2^r(2t+1)\geqslant 2^{2(2t_k+1)}$ 知 2^r 及 $2t+1$ 中必有一个不小于 $\sqrt{2^{2(2t_k+1)}}=2^{2t_k+1}$. (1)若 $2t+1\geqslant 2^{2t_k+1}>2t_k+1$，则 $t>t_k$，由归纳假设 t 可表成 k 个不同正整数之和：$t=b_1+b_2+\cdots+b_k$ 满足 $1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_k$ 且 $b_i\mid b_{i+1}(i=1, 2, \cdots, k-1)$. 于是 $n=2^r(2t+1)=2^r+2^{r+1}t=2^r+2^{r+1}b_1+2^{r+1}b_2+\cdots+2^{r+1}b_k=a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$，其中 $a_1=2^r$，$a_i=2^{r+1}b_{i-1}(i=2, 3, \cdots, k+1)$ 满足 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{k+1}$ 且 $a_i\mid a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, k)$. (2)若 $2^r\geqslant 2^{2t_k+1}$，则 $r\geqslant 2t_k+1$，存在 $r_1=0$ 或 1 使 $r-r_1=2p$ 为偶数，($p\in\mathbf{N}_+$). 由 $r=2p+r_1\geqslant 2t_k+1$ 知 $p\geqslant t_k$. 从而 $2^p\geqslant 1+p\geqslant t_k+1$，$2^p-1\geqslant t_k$. 由归纳假设 2^p-1 可写成 k 个不同的正整数之和 $2^p-1=b_1+b_2+\cdots+b_k$ 满足 $1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_k$ 且 $b_i\mid b_{i+1}(i=1, 2, \cdots, k-1)$. 于是 $n=2^r(2t+1)=2^{r_1}(2t+1)+2^{r_1}(2t+1)(2^p+1)(2^p-1)=2^{r_1}(2t+1)+2^{r_1}(2t+1)\cdot(2^p+1)(b_1+b_2+\cdots+b_k)=a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$，其中 $a_1=2^{r_1}(2t+1)$，$a_i=2^{r_1}(2t+1)(2^p+1)b_{i-1}(i=2, 3, \cdots, k+1)$ 满足 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{k+1}$ 且 $a_i\mid a_{i+1}$ $(i=1, 2, \cdots, k+1)$，于是一般性命题得证. 在一般性命题中取 $n=2004$，即得要证题目结论.

8. 先证下列两个引理. 引理 1. 对任意正整数 t，$\underbrace{11\cdots1}_{3^t\text{个}}$ 能被它的各位数字之和整除. 事实上，当 $t=1$ 时 $111=3\times 37$ 能被 3^1 整除，设 $\underbrace{11\cdots1}_{3^k\text{个}}$ 能被 3^k 整除. 那

么$\underbrace{11\cdots1}_{3^{k+1}个}=\frac{1}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{3^{k+1}个}=\frac{1}{9}(10^{3^{k+1}}-1)=\frac{1}{9}\times(10^{3^k}-1)(10^{2\times3^k}+10^{3^k}+1)=$ $\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}\times(10^{2\times3^t}+10^{3^t}+1)$，由归纳假设知$\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}$能被$3^k$整除，又$10^{2\times3^t}+10^{3^t}+1$能被3整除(因为它的各位数字之和等于3)，故$\underbrace{11\cdots1}_{3^{k+1}个}$能被$3^{k+1}$整除. 于是引理1得证. 引理2. 对任意个位数字不为零的j位正整数$\overline{a_1a_2\cdots a_j}=a_1\times10^j+a_2\times10^{j-1}+\cdots+a_{j-1}\times10+a_j$，其中$a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$ $(i=1,2,\cdots,j)$，$a_1\neq0$，$a_j\neq0$. 当$k\geqslant j$时，$\overline{a_1a_2\cdots a_j}\times\underbrace{99\cdots9}_{k个}$的各位数字之和等于$9k$. 事实上，$\overline{a_1a_2\cdots a_j}\times\underbrace{99\cdots9}_{k个}$ $=\overline{a_1a_2\cdots a_{j-1}(a_j-1)\underbrace{99\cdots9}_{k-j个}(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{j-1})(10-a_j)}$的各位数字之和为$a_1+a_2+\cdots+a_{j-1}+(a_j-1)+\underbrace{9+\cdots+9}_{k-j个}+(9-a_1)+(9-a_2)+\cdots+(9-a_{j-1})+(10-a_j)=9k$. 回到原题. 对任意正整数$n$，存在唯一非负整数$t$使$3^t\leqslant n<3^{t+1}$. (1) 若$n=3^t$，则由引理1知$N=\underbrace{11\cdots1}_{3^t个}$满足题目条件；(2) 若$3^t<n\leqslant2\times3^t$，则设$k=3^t$，$1\leqslant j=n-k\leqslant2\times3^t-3^t=3^t$，选择$\overline{a_1a_2\cdots a_j}=\underbrace{11\cdots1}_{j-1个}2$，则由引理2知各位数字都不为0的$n=k+j$位数$N=\underbrace{11\cdots1}_{j-1个}2\times\underbrace{99\cdots9}_{k个}$的各位数字之和为$9k=3^{t+2}$，而由引理1知$\underbrace{11\cdots1}_{3^t个}$被$3^t$整除，从而$\underbrace{99\cdots9}_{3^t个}=9\times\underbrace{11\cdots1}_{3^t个}$被$9\times3^t=3^{t+2}=9k$整除. 故$N$能被它的各位数字之和整除； (3) 若$2\times3^t<n<3^{t+1}$，则设$k=2\times3^t$，$1\leqslant j=n-k<3^{t+1}-2\times3^t=3^t<k$，由引理2知各位数字都不为0的$n$位数$N=\underbrace{11\cdots1}_{j-1个}2\times\underbrace{99\cdots9}_{k个}$的各位数字之和为$9k=2\times3^{t+2}$，且同前一种情形知$\underbrace{99\cdots9}_{k个}=9\times\underbrace{11\cdots1}_{3^t个}\times(10^{3^t}+1)$能被$9\times3^t=3^{t+2}$整除，又$N$为偶数，故$N$能被它的各位数字之和$2\times3^{t+2}=9k$整除. 综上知题目结论成立.

习题 13

1. 将正$6n$边形的顶点沿顺时针方向标号为$1,2,\cdots,6n$. 对以i,j,k为顶点的三角形，定义i,j之间的距离为i,j之间(不含k的一侧)正$6n$边形的边数. 显然，一个三角形顶点间的3个距离之和为$6n$，其中最小距离不大于$2n$. (1) 当最小距离为偶数$2k$ $(k=1,2,\cdots,n)$时. 中间距离不小于$2k$且不大于$\frac{1}{2}(6n-2k)=3n-k$. 这时共有$(3n-k)-(2k-1)=3n-3k+1$个互

不全等的三角形；（2）当最小距离为奇数 $2k-1$（$k=1,2,\cdots,n$）时，中间距离不小于 $2k-1$ 且不大于 $\left[\frac{1}{2}(6n-(2k-1))\right]=3n-k$，这时共有 $3n-k-(2k-2)=3n-3k+2$ 个互不全等的三角形. 由(1)，(2)得互不全等的三角形个数为 $m=\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1+3n-3k+2)=\sum_{k=1}^{n}(6n-6k+3)=6n^2-6\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3n=3n^2$（个）.

2. (1) 边长为 k 且"头朝上"的正三角形个数为 $x_k=1+2+\cdots+[n-(k-1)]=\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)=\frac{1}{6}[(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)-(n-k)(n-k+1)(n-k+2)]$，故"头朝上"的正三角形个数为 $S_1=\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}[(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)-(n-k)(n-k+1)(n-k+2)]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. 边长为 l 且"头朝下"的正三角形个数为 $y_l=1+2+3+\cdots+(n-2l+1)=\frac{1}{2}(n-2l+1)(n-2l+2)\left(1\leqslant l\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

当 $n=2m$ 为偶数时，"头朝下"的正三角形个数为 $S_2=\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}y_l=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}[(2m-2l+2)^2-(2m-2l+2)]=\sum_{l=1}^{m}[2(m-l+1)^2-(m-l+1)]=2\sum_{l=1}^{m}l^2-\sum_{l=1}^{m}l=2\times\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)=\frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)=\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)$，当 $n=2m-1$ 时，类似可得 $S_2=\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}y_l=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}(2m-2l)(2m-2l+1)=2\sum_{l=1}^{m-1}(m-l)^2+\sum_{l=1}^{m-1}(m-l)=\frac{1}{3}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m=\frac{1}{6}(m-1)m(4m+1)=\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)$，故当 n 为偶数时正三角形总个数为 $S=S_1+S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)=\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)$；当 n 为奇数时，正三角形总个数为 $S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)=\frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1)$.

(2) 因边不平行 BC 的菱形的下半部分正好是一个"头朝下"的正三角

形，这种对应是一一对应. 故边不平行 BC 的菱形个数等于"头朝下"的正三角形个数 S_2. 于是由(1)知当 n 为偶数时，菱形的个数为 $3S_2=\frac{3}{8}n(n+2)(2n-1)$，$n$ 为奇数时，菱形的个数为 $3S_2=\frac{3}{8}(n-1)(n+1)(2n+3)$.

3. 设有 n 个队，则 n 个队共得了 $2C_n^2=n(n-1)$ 分. 而 10 个得分最低的队彼此之间对局共得 $2C_{10}^2=90$ 分. 因为这是他们得分的一半，故这 10 个队共得 180 分；其余 $n-10$ 个队彼此之间比赛共得 $2C_{n-10}^2=(n-10)(n-11)$ 分，这也是他们得分的一半，所以他们共得 $2(n-10)(n-11)$ 分. 于是 $n(n-1)=180+2(n-10)(n-11)$，即 $(n-16)(n-25)=0$，解得 $n_1=25$，$n_2=16$（舍去，因必须 $2(n-10)(n-11)\div(n-10)>180\div 10$）.

4. 设所有三角形中三边为红色、两边红色一边蓝色、两边蓝色一边红色、三边为蓝色的三角形个数分别为 m,n,p,q. 因除 A 外，从其余各点出发的红色线段数互不相同，它们只可能是 $0,1,2,\cdots,16$ 或 $1,2,\cdots,17$. 若为前者，设从 A 出发有 $2k-1$ 条红线，则图中红线总数为 $\frac{1}{2}(0+1+2+\cdots+16+2k-1)=17\times 4+k-\frac{1}{2}$ 矛盾，故只能为后者情形. 设除 A 外，其余 17 个点为 $B_1,B_2,\cdots,B_{17}$，从 B_i 出发有 i 条红线 $(i=1,2,\cdots,17)$. 于是 B_{17} 与其余 17 点连有红线，B_1 仅与 B_{17} 连有红线，进一步不难得出对 $i=1,2,\cdots,8$，B_{17-i} 仅与除 $B_1,B_2,\cdots,B_i$ 外的 $17-i$ 个点连有红线，而 B_i 仅与 $B_{17},B_{16},\cdots,B_{18-i}$ 这 i 个点连有红线. 从而 A 仅与 $B_{17},B_{16},\cdots,B_9$ 这 9 个点连有红线，其余所连线段均为蓝线. 设从一点出发的两条红色线段叫做红色角. 从一点出发的两条蓝色线段叫做蓝色角，于是红色角的总数为 $3m+n=\sum_{i=2}^{17}C_i^2+C_9^2=C_3^3+\sum_{i=3}^{17}(C_{i+1}^3-C_i^3)+C_9^2=C_{18}^3+C_9^2=852\cdots$①，蓝色角的总数为 $p+3q=\sum_{k=1}^{15}C_{17-k}^2+C_8^2=C_{17}^3+C_8^2=708\cdots$②，图中红色线段数为 $\frac{1}{16}(3m+2n+p)=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+17+9)=81\cdots$③，蓝色线段数为 $\frac{1}{16}(n+2p+3q)=\frac{1}{2}(16+15+\cdots+1+8)=72\cdots$④. 联立①，②，③，④解得 $m=204$，$n=240$，$p=204$，$q=168$. 即三边为红色的三角形有 204 个，两边红一边蓝的三角形有 240 个.

5. 将每个工作人员对应平面上一个点(任何三点不共线)，将三个委员会

的人员所对应的点集分别记为 A、B、C. 在任何不属于同一点集的两点之间连一条线段：若两人互相认识，就连红线；若不认识，就连蓝线，这样所得到的图称为三部图. 设三部图 $A-B-C$ 的顶点数为(a, b, c). 根据题意知 $A-B$ 之间的每条红色线段上恰有 10 个红色三角形，每条蓝色线段上恰有 10 个蓝色三角形. 由于每个同色三角形恰有一边为 $A-B$ 之间的一条线段，故全图中同色三角形个数为 $10ab$. 同理，它也等于 $10bc$，$10ca$. 因此 $a=b=c$. 这样一来，即知同色三角形个数为 $10a^2$. 于是异色三角形个数为 a^3-10a^2. 由于每个异色三角形恰有一个同色角，而每个同色三角形有三个同色角. 故同色角的总数为 $3\times10a^2+a^3-10a^2=a^3+20a^2$. 另一方面，每条线段上张有 20 个同色角，故同色角的总数又等于 $20\times3a^2=60a^2$. 故 $a^3+20a^2=60a^2$，解得 $a=40$，因此，总人数为 $3a=120$.

6. 以 $4\times4\times4$ 大正方体的底面为基准面，将大正方体划分为平行基准面的 4 层(每层为 $4\times4\times1$ 的长方体)依次用 1，2，3，4 给各层编号. 将各红色正方体投影到基准面上，并在基准面的投影方格内填上该红色正方体所在的层号，这样得到一个 4×4 的方格表. 依题意，每格内恰填$\{1, 2, 3, 4\}$中一个数，并且填同样数的方格既不在同一行又不在同一列，这样的 4×4 的方格表被称为一个 4 阶拉丁方，反之每一个 4 阶拉丁方唯一决定了一种符合条件的涂色法. 因此，题目转化为确定：总共有多少个不同的 4 阶拉丁方？用 a_{ij} $(i, j=1, 2, 3, 4)$ 表示 4×4 方格表内第 i 行第 j 列处小方格内填入的数. 对$(1, 2, 3, 4)$的任意排列(a, b, c, d)，先考虑 $a_{11}=a$，$a_{12}=a_{21}=b$，$a_{13}=a_{31}=c$，$a_{14}=a_{41}=d$ (如图)时拉丁方的个数. (1) $a_{22}=a$ 时，a_{23} 与 a_{32} 只可能为 d，a_{24} 与 a_{42} 只可能为 c. 然后 a_{33} 可以等于 a 或 b，当 a_{33} 选定后，a_{34}，a_{43}，a_{44} 的值是唯一的. 因此，这种情形下对应的拉丁方恰有 2 个；(2) $a_{22}=c$ 时，只有 $a_{24}=a_{42}=a$，$a_{23}=a_{32}=d$，$a_{34}=a_{43}=b$，$a_{44}=c$，$a_{33}=a$，这种情形下对应的拉丁方只有 1 个；(3) $a_{22}=d$ 时同(2)可证这时拉丁方只有 1 个，故如图所示的拉丁方恰有 4 个. 因(a, b, c, d)这种排列共 $4!=24$ 个，当(a, b, c, d)确定后，如图所示拉丁方通过交换第 2，3，4 行一共可形成 $3!$ 个不同的拉丁方. 所以 4 阶拉丁方的总数为 $4!\cdot3!\cdot4=576$ 个. 故题目所述 16 个红色正方体的不同取法共有 576 种.

a	b	c	d
b	a_{22}	a_{23}	a_{24}
c	a_{32}	a_{33}	a_{34}
d	a_{42}	a_{43}	a_{44}

(第 6 题)

注　设 n 阶拉丁方的个数为 L_n，则 $L_n=n!((n-1)!)l_n$，现已有的结论为 $l_1=l_2=l_3=1$，$l_4=4$，$l_5=56$，$l_6=9408$，$l_7=16\,942\,080$，…. 当 $n\geqslant5$ 时，要分很多情形才能算出 l_n，不可能在短时间内做到. 因此，作为试题选择 $n=4$ 是恰当的.

习 题 14

1. 设 6 种颜色是 a, b, c, d, e, f，并记 $S_1=(a, b, c, d, e)$，$S_2=(a, b, c, d, e, f)$ 为两个序列. 若 n 可表示成为 $5x+6y$（x, y 为非负整数）的形式，且 $n\geqslant 5$，则我们将 n 边形的 n 个顶点按 x 个 S_1 序列，y 个 S_2 序列着色，就满足了题目要求. 令 $y=0, 1, 2, 3, 4$ 就得到 n 可以等于形如 $5x$，$5x+6$，$5x+12$，$5x+18$，$5x+24$（x 为非负整数）的正整数. 而大于 4 不具有上述形式的数只有 7，8，9，13，14 和 19 等 6 个数. 下面我们证明这 6 个数都不满足要求. 假设 n 边形存在满足题目要求的染色方法，那么存在正整数 k 使 $6k<n\leqslant 6(k+1)$. 由抽屉原理，n 边形至少有 $\left[\frac{n-1}{6}\right]+1=k+1$ 个顶点同色，这些同色顶点中每两个顶点之间至少有其他 4 个顶点（因连续 5 个顶点不同色）故至少有 $5k+5$ 个顶点，所以 $n\geqslant 5k+5$，然而这个不等式与不等式 $6k<n\leqslant 6(k+1)$ 不可能对 $n=7, 8, 9, 13, 14$ 和 19 中任何一个同时成立，故所求 n 为不小于 5 且不等于 7，8，9，13，14，19 中任何一个的任意正整数.

2. 用 A、B、C、D 表示 4 种颜色，我们称位于同一行且异色的一对小方格为“异色对”，则每行有 $C_4^2\cdot 25^2=6\cdot 25^2$ 个“异色对”，于是各行一共有 $100\cdot 6\cdot 25^2$ 个“异色对”. 另一方面，每行中每对“异色对”位于一对不同的列中，因共有 $C_{100}^2=99\cdot 50$ 对不同的列，故存在两列，其中至少有 $\left[\frac{100\cdot 6\cdot 25^2-1}{99\cdot 50}\right]+1=76$ 对“异色格”. 下面我们不问其他的行和列，总可以假定在这两列 76 对异色格组成的 76×2 的长方形表中每小格被染成 4 色之一，每列中每种颜色小方格至多 25 个，且同一行的两个小方格不同色. 若 $\{A, B\}$，$\{C, D\}$ 每对颜色分别出现在两行中，则结论成立. 类似地，若 $\{A, C\}$，$\{B, D\}$ 或 $\{A, D\}$，$\{B, C\}$ 分别出现在 2 行中结论也成立. 因此我们假设这三组中，每组至多只有一对出现在某行中，不妨设含颜色 A 的“异色对”出现得最多. 这本质上只有两种情形①$\{A, B\}$，$\{A, C\}$，$\{A, D\}$；②$\{A, B\}$，$\{A, C\}$，$\{B, C\}$. 在情形①下，每行都有一个 A 色小方格，于是必有一列中至少在 $\left[\frac{76-1}{2}\right]+1=38$ 个 A 色方格，这与每列至多 25 个 A 色方格矛盾. 在情形②下，每列至多含 A、B、C 这 3 种颜色，故至少有一列有 $\left[\frac{76-1}{3}\right]+1=26$ 个方格同色，矛盾. 于是，命题得证.

3. 假设题中断言不成立. 例如，由该新独立国家的城市 X 不能通过该国

内部的通道到达另一个城市 Y. 我们将由城市 X 可以沿该国内通道到达的该国的所有城市的集合记作 A(其中包括城市 X 本身)，而该国其余城市的集合记作 B(显然有 $Y\in B\neq\varnothing$). 不难看出，连接这两个集合中城市的所有道路都是由 B 中城市驶往 A 中城市的(否则存在一条从 X 到达 A 中某城市 X_1 再到 B 中某城市 Y_1 的单向通道，这与从 X 不能到达 B 中城市的假设矛盾). 分别记 A，B 中城市的个数为 a 和 b. 于是 $a+b=668$，若 $a\geqslant b$，则 $a\geqslant 334\geqslant b$. 因 B 中城市间共有 C_b^2 条单向通道，所以 B 中存在一个城市 Z，由它出发至少有 $\frac{1}{b}C_b^2=\frac{1}{2}(b-1)$ 条单向道路通向 B 中其他城市，并且由 Z 出发有 a 条道路通向 A 中城市. 这样一来 Z 的出城道路不少于 $a+\frac{b-1}{2}=\frac{a+(a+b)-1}{2}\geqslant\frac{334+668-1}{2}>500$，导致与已知条件矛盾. 若 $a<b$，则 $a<334<b$. 因 A 中城市间共有 C_a^2 条单向入城通道，故必存在 A 中一座城市 W，它的入城通道至少有 $\frac{1}{a}C_a^2=\frac{1}{2}(a-1)$ 条. 又从 B 中城市进入 W 的入城通道有 b 条. 故 W 的入城通道至少有 $\frac{1}{2}(a-1)+b=\frac{b+(a+b)-1}{2}>\frac{334+668-1}{2}=500$，也导致与已知条件矛盾，故题中结论成立.

4. 假设每个社团要么最多有 10 名男生，要么最多有 10 名女生. 下面用算二次方法导出矛盾. 设 m 是形如 (b, g, c) 的三元组的数目，其中 b 表示一名男生，g 表示一名女生，c 表示一个他们都参加的社团. 由于任意两名异性学生至少参加了一个共同的社团，故 $m\geqslant n^2$. 另一方面，设 X 是最多有 10 名男生的社团的集合，Y 是最少有 11 名男生的社团的集合(这样的社团最多有 10 名女生). 于是，对 $c\in X$，三元组 (b, g, c) 的数目不超过 $n\times 10\times 100=1000n$，其中，对于 b 最多有 10 种选择，对于 g 有 n 种选择，对于 c 最多有 100 种选择(每名学生最多参加 100 个社团). 用同样的方法可得对于 $c\in Y$，三元组 (b, g, c) 至多有 $1000n$ 个，故 $m\leqslant 1000n+1000n=2000n$，从而 $n^2\leqslant 2000n$，$n\leqslant 2000$，这与已知条件 $n>2000$ 矛盾，这就证明了题中结论成立.

5. 设共有 n 名参赛者，m 道初试题，将每个人与他解出的二道题组成一个"三元组"，这种三元组的集合为 S，则由已知条件可得 $|S|=n\cdot C_7^2=2\cdot C_{28}^2$，于是 $n=36$. 其次任取一道题目 A，假设它被 r 个人 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 解出这 r 个人每人还解出了其他 6 道试题，于是 S 中包含 A 的三元组有 $6r$ 个. 另一方面将 A 与其他 27 题中每个题配对，每对题恰有 2 人解出(因这两人解出了题目 A，故他们必是 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 中两人)从而可形成 2×27 个含 A 的三

元组，所以 $6r=2\times27$，即 $r=9$，也就是说每道题恰有 9 人解出. 如果结论不成立，那么，每人解出的初试题目只可能为 1，2，3. 设解出 1，2，3 道初试题的人数分别为 x，y，z，则 $x+y+z=36$…①. 将每个人与他解出的一道初试题配对，这种对子个数为 $x+2y+3z$，又为 $9m$（因每道题恰有 9 人解出），所以 $x+2y+3z=9m$…②. 又通过计算 S 中恰含 2 道初试题的"三元组"可得 $\mathrm{C}_2^2y+\mathrm{C}_3^2z=2\mathrm{C}_m^2$，即 $y+3z=m(m-1)$③. 由①，②，③可解出 $x=m^2-19m+108$，$y=-2m^2+29m-108$，$z=m^2-10m+36$，其中 $y=-2\left(m-\dfrac{29}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}<0$，这与 y 为非负整数矛盾. 于是题目结论成立.

6. 设图中 n 个点为 A_1，A_2，…，A_n，若 A_i 与 A_j 连有线段，则将该线段染红色，若 A_i 与 A_j 没有连线，则将 A_i 与 A_j 连一条蓝色线段，得到一个 2 色完全图 K_n. 由已知条件知图 K_n 有 q 条红边. 要证明图中至少有 $\dfrac{4q}{3n}\left(q-\dfrac{n^2}{4}\right)$ 个红色三角形（三边为红色的三角形）. 设从 A_i 出发有 d_i 条红线，$n-1-d_i$ 条蓝线（$i=1,2,\cdots,n$）于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=2q$…①. 设图中有 α 个红色三角形，β 个两边红一边蓝的三角形，γ 个二边蓝一边红的三角形，并称从一点出发的两条红线组成的角叫做红色角，从一点出发的一条红线和一条蓝线组成的角叫做异色角，于是红色角的个数为 $3\alpha+\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{C}_{d_i}^2$…②，异色角的个数为 $2(\beta+\gamma)=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i)$…③. 由③得 $\beta\leqslant\beta+\gamma=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i)$，代入②并利用柯西不等式及①得 $\alpha=\dfrac{1}{3}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{C}_{d_i}^2-\beta\right]\geqslant\dfrac{1}{3}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2}d_i(d_i-1)-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(n-1-d_i)\right]=\dfrac{1}{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^2-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\right)\geqslant\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\right)^2-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\right]=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n}(2q)^2-\dfrac{n}{2}(2q)\right]=\dfrac{4q}{3n}\left(q-\dfrac{n^2}{4}\right)$，于是原命题得证.

7. 设 n 个点的集合为 $V=\{A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}\}$，记 A_i 的所有邻点（即与 A_i 连有线段的点）的集合为 B_i，B_i 中点的个数为 $|B_i|=b_i$. 显然 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i=2l$，且 $b_i\leqslant n-1(i=0,1,2,\cdots,n-1)$. (1)若存在 $b_i=n-1$，不妨设 $b_0=n-1$，于是 B_0 中 $n-1$ 个点之间的连线数 $l-b_0\geqslant\dfrac{1}{2}q(q+1)^2+1-(n-$

$1)=\frac{1}{2}(q+1)(n-1)+1-(n-1)\geqslant\frac{3}{2}(n-1)+1-(n-1)=\frac{n-1}{2}+1\geqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]+1$. 故 B_0 中必存在一点 A_i 与 B_0 中另两点 A_j 与 A_k 都连有线段. 于是存在四边形 $A_0A_jA_iA_k$，结论成立. 因此，下面是讨论 $b_i\leqslant n-2(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的情形. (2) 不妨设 $q+2\leqslant b_0\leqslant n-2$ 及 $b_i\leqslant n-2(i=1,2,\cdots,n-1)$. 若图中不存在四边形，则当 $i\neq j$ 时，$|B_i\cap B_j|\leqslant 1(0\leqslant i<j\leqslant n-1)$ 记 $\overline{B}_0=\complement_V B_0$. 则 $|B_i\cap\overline{B}_0|\geqslant b_i-1(i=1,2,\cdots,n-1)$. 并且当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时 $B_i\cap\overline{B}_0$ 与 $B_j\cap\overline{B}_0$ 没有公共的点对(否则存在四边形)，所以 $\overline{B}_0$ 中点对的个数 $\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{(B_i\cap\overline{B}_0)$ 中点对的个数$\}$，即 $C_{n-b_0}^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n-1}C_{b_i-1}^2$(当 $b_i=1$ 或 2 时 $C_{b_i-1}^2=0$)，也就是 $\frac{1}{2}(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{n-1}(b_i^2-3b_i+2)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{l=1}^{n-1}b_i\right)^2-3\sum\limits_{l=1}^{n-1}b_i+2(n-1)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}(2l-b_0)^2-3(2l-b_0)+2(n-1)\right]=\frac{1}{2(n-1)}(2l-b_0-n+1)(2l-b_0-2n+2)\geqslant\frac{1}{2(n-1)}[(n-1)(q+1)+2-b_0-n+1][(n-1)(q+1)+2-b_0-2n+2]=\frac{1}{2(n-1)}(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$，故 $(n-1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$，即 $q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)\cdots$①，但 $(nq-q-n+3-b_0)-q(n-b_0-1)=(q-1)b_0-n+3\geqslant(q-1)(q+2)-n+3=0\cdots$②，$(nq-q+2-b_0)-(q+1)(n-b_0)=qb_0-q-n+2\geqslant q(q+2)-q-n+2=1>0\cdots$③. 因 $(n-b_0)(q+1)$，$(n-b_0-1)q$ 皆为正数. 因②③联合起来与①矛盾. 故原命题成立.

8. 当 $n(\geqslant 3)$ 为奇数时，存在符合要求的染法；当 n 为偶数时，不存在所述的染法. 因为每 3 个顶点确定一个三角形，一共确定 C_n^3 个三角形，而 n 种颜色的三三搭配也刚好有 C_n^3 种. 所以，本题只要证明不同的三角形对应于不同的颜色组合，即形成一一对应. 以下将多边形的边和对角线都称为线段. 对于每一种颜色，其他 $n-1$ 种颜色形成 C_{n-1}^2 种不同的搭配，每种颜色的线段(边或对角线)都应出现在 C_{n-1}^2 个三角形中，而每一条线段都是 $n-2$ 个三角形的公共边，因此，在满足要求的染法中，每种颜色的线段都应有 $\frac{C_{n-1}^2}{n-2}=\frac{n-1}{2}$(条).

当 n 为偶数时，$\frac{n-1}{2}$ 不是整数，因此不可能存在满足条件的染法. 下面设 $n=2m+1$ 为奇数，我们给出一种染法，并证明它满足题中条件. 将凸 n 边形的顶点依次记为 A_1，A_2，…，A_{2m+1}，对于整数 $i\notin\{1, 2, \cdots, 2m+1\}$，若 $i\equiv j\pmod{2m+1}$ 且 $j\in\{1, 2, \cdots, 2m+1\}$，则认为 A_i 就是 A_j. 再将 $2m+1$ 种颜色分别记为颜色 1，2，…，$2m+1$. 现将边 A_iA_{i+1} 染颜色 i $(i=1, 2, 3, \cdots, 2m+1)$，再对每个 i，将对角线 $A_{i-k}A_{i+1+k}$ $(k=1, 2, \cdots, m-1)$ 也染颜色 i，于是每种颜色的线段（边或对角线）都恰有 m 条. 值得注意的是：在规定的染色方法下，当且仅当 $i_1+j_1\equiv i_2+j_2\pmod{2m+1}$…① 时，线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色.（[注] 如果 n 为奇数且凸 n 边形为正 n 边形，那么当且仅当 $A_{i_1}A_{j_1}\parallel A_{i_2}A_{j_2}$ 时，$A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色.）因此，对任何 $i\not\equiv j\pmod{2m+1}$，$k\not\equiv 0\pmod{2m+1}$，线段 A_iA_j 不与 $A_{i+k}A_{j+k}$ 同色，即如果 $i_1-j_1\equiv i_2-j_2\pmod{2m+1}$…②，那么线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 必不与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色. 任取两个三角形：$\triangle A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 和 $\triangle A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$，如果它们中至多只有一条对应线段同色，当然它们不会含有相同的颜色组合. 如果它们有 2 条对应线段同色，我们证明：它们的第 3 条线段必不同色. 为确定起见，不妨设 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色. 下面分两种情形讨论：(1) 若 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 同色，则由式 ① 知 $i_1+j_1\equiv i_2+j_2\pmod{2m+1}$，$j_1+k_1\equiv j_2+k_2\pmod{2m+1}$，两式相减得 $i_1-k_1\equiv i_2-k_2\pmod{2m+1}$，故由式 ② 知 $A_{k_1}A_{i_1}$ 与 $A_{k_2}A_{i_2}$ 不同色；(2) 若 $A_{i_1}A_{k_1}$ 与 $A_{i_2}A_{k_2}$ 同色，则由式 ① 得 $i_1+j_1\equiv i_2+j_2\pmod{2m+1}$，$i_1+k_1\equiv i_2+k_2\pmod{2m+1}$，两式相减得 $j_1-k_1\equiv j_2-k_2\pmod{2m+1}$，故由式 ② 知 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 不同色. 总之，$\triangle A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $\triangle A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$ 对应不同的颜色组合. 这就证明了当且仅当 n 为奇数时，存在满足题目要求的染色方法.

习　题　15

1. 因 1，3，6，8 中任意两个之差的绝对值为素数，由题意知 $f(1)$，$f(3)$，$f(6)$，$f(8)$ 为 A 中两两不同的数，从而 $|A|\geqslant 4$，另一方面，假设 $A=\{0, 1, 2, 3\}$ 且对任意 $x\in\mathbf{N}_+$，$x=4k+r(k\in\mathbf{N}, r=0, 1, 2, 3)$，定义 $f(x)=r$. 于是，对任意 x，$y\in\mathbf{N}_+$，若当 $|x-y|$ 为素数时有 $f(x)=f(y)$，则 $4\mid|x-y|$，这与 $|x-y|$ 为素数矛盾. 故所作 $f:\mathbf{N}_+\to A$ 满足题目条件且 $|A|=4$，所以 A 中最少有 4 个元素.

2. 首先易验证 $M=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中任取 3 个数，其中必有两个数之和属于 M. 另一方面，设 $M=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$a_1>a_2>\cdots>a_m$，且 $m\geqslant 8$. 因为每个数乘 -1 不会改变 M 是否满足题目条件的性质，故可

设 $a_4>0$. 于是 $a_1+a_2>a_1+a_3>a_1+a_4>a_1$，从而 a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4 都不属于 M，并且 a_2+a_3 与 a_2+a_4 不可能都属于 M(因 $a_2+a_3>a_2$，$a_2+a_4>a_2$ 且 $a_2+a_3\neq a_2+a_4$，而 M 中只有一个数 $a_1>a_2$)，这样 (a_1, a_2, a_3) 或 (a_1, a_2, a_4) 至少有一组中任何两个数之和不属于 M. 即 $m\geqslant 8$ 时，M 不满足题目要求. 综上可知 M 中最多有 7 个数.

3. 由已知条件可知 $kn=\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i+z_i)\geqslant 3\sum\limits_{i=1}^{k}(i-1)=\dfrac{3k(k-1)}{2}$，因此，$k\leqslant\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$. 下面给出一个 $k=\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$ 的例子：令 $m\in\mathbf{N}_+$，若 $n=3m$，则 $k=2m+1$，对 $1\leqslant j\leqslant m+1$，令 $x_j=j-1$，$y_j=m+j-1$，$z_j=2m-2j+2$；对 $m+2\leqslant j\leqslant 2m+1$，令 $x_j=j-1$，$y_j=j-m-2$，$z_j=4m-2j+3$ 即可；若 $n=3m+1$，则 $k=2m+1$，对 $1\leqslant j\leqslant m$，令 $x_j=j-1$，$y_j=m+j$，$z_j=2m-2j+2$；对 $m+1\leqslant j\leqslant 2m$，令 $x_j=j+1$，$y_j=j-m-1$，$z_j=4m+1-2j$；而 $x_{2m+1}=m$，$y_{2m+1}=2m+1$，$z_{2m+1}=0$；当 $n=3m+2$ 时，$k=2m+2$，对 $1\leqslant j\leqslant m+1$ 令 $x_j=j-1$，$y_j=m+j$，$z_j=2m-2j+3$；对 $m+2\leqslant j\leqslant 2m+1$，令 $x_j=j$，$y_j=j-m-2$，$z_j=4m-2j+4$，而 $x_{2m+2}=2m+2$，$y_{2m+2}=m$，$z_{2m+2}=0$ 即可.

4. 设 8 名选手为 $p_1, p_2, \cdots, p_8$，n 道是非题为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 作 $8\times n$ 表格，其中第 i 行第 j 列处的数为 $x_{ij}=\begin{cases}1, & p_i\text{ 对 }A_j\text{ 的答案是“对”},\\ 0, & p_i\text{ 对 }A_j\text{ 的答案是“错”}\end{cases}$ $(i=1, 2, \cdots, 8;\ j=1, 2, \cdots, n)$. 于是，第 i 行各数之和为 $a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}$ 表示 p_i 对 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的答案为“对”的个数. 又依题意，每列中恰有 4 个 1 和 4 个零，所以 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_{ij}=4$. 从而 $\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=\sum\limits_{i=1}^{8}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{8}x_{ij}=4n\cdots$①. 注意到，由已知条件知，对表中任何一列，将其中 1 全部换为 0，并且将 0 全部换为 1 后，表中各数仍具有题设性质. 故不失一般性，可设表中第一行的数全等于 1，从而 $a_1=n$，$\sum\limits_{i=2}^{8}a_i=3n$. 如果 p_i 对题目 $(A_j, A_k)(j\neq k)$ 的答案为(对，对)，则将 (p_i, A_j, A_k) 组成三元组. 依题目条件可得这种三元组的个数既为 $\sum\limits_{i=1}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2$，又为 $2\mathrm{C}_n^2=n(n-1)$. 于是(并利用①和柯西不等式) $n(n-1)=\sum\limits_{i=1}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2=\mathrm{C}_{a_1}^2+\sum\limits_{i=2}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2=\mathrm{C}_n^2+\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=2}^{8}a_i^2-\sum\limits_{i=2}^{8}a_i\right)\geqslant \dfrac{1}{2}n(n-1)+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{7}\left(\sum\limits_{i=2}^{8}a_i\right)^2-\sum\limits_{i=2}^{8}a_i\right]=\dfrac{1}{2}n(n-1)+\dfrac{1}{14}[(3n)^2-$

$7(3n)] = \frac{2}{7}n(4n-7)$，解得 $n \leqslant 7$. 如表中所示例子表明 n 可以等于 7. 故所求 n 的最值为 7.

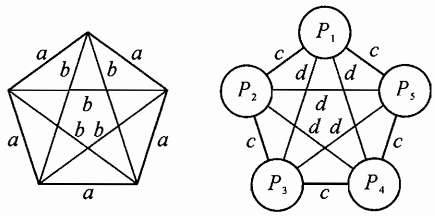
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
p_1	1	1	1	1	1	1	1
p_2	1	0	0	0	0	1	1
p_3	1	0	0	1	1	0	0
p_4	1	1	1	0	0	0	0
p_5	0	1	0	1	0	1	0
p_6	0	1	0	0	1	0	1
p_7	0	0	1	1	0	0	1
p_8	0	0	1	0	1	1	0

5. 设红点集为 $A=\{A_1, A_2, \cdots, A_{12}\}$，过 A_1 的弦有 11 条，而任意含 A_1 的三角形恰含过 A_1 的两条弦，故这 11 条过 A_1 的弦至少要分布于 6 个含顶点 A_1 的三角形中，同理知，过点 $A_i(i=2, 3, \cdots, 12)$ 的弦，也各要分布在 6 个含顶点 A_i 的三角形中，这样就需要 $12\times 6=72$(个) 三角形，而每个三角形含有三个顶点，故都被重复计算了三次. 因此，至少需要 $\frac{72}{3}=24$ 个不同的三角形. 另一方面，下面实例表明 $n=24$ 可以被取到. 不失一般性，考虑周长为 12 的圆周，其十二等分点为红点，以红点为端点的弦共有 $C_{12}^2=66$(条). 如果弦所对的劣弧长为 k，就称该弦的刻度为 k，于是红端点的弦的刻度的弦只有 6 种，其中刻度为 1, 2, 3, 4, 5 的弦各有 12 条，刻度为 6 的弦有 6 条. 如果刻度为 a, b, c 的三条弦构成一个三角形的三条边，则必须满足下列两个条件之一：或者 $a+b=c$，或者 $a+b+c=12$. 下面是刻度组的一种搭配：以(1, 2, 3)，(1, 5, 6)，(2, 3, 5)型各 6 个，(4, 4, 4)型 4 个，这时恰好得 66 条弦，其中含刻度为 1, 2, 3, 4, 5 的弦各 12 条，刻度为 6 的弦恰有 6 条. 今构造如下：先作刻度为(1, 2, 3)，(1, 5, 6)，(2, 3, 5)型的三角形各 6 个，(4, 4, 4)型的三角形三个，再用三个(2, 4, 6)型的三角形来补充. 刻度为(1, 2, 3)型的 6 个，其顶点标号为{2, 3, 5}，{4, 5, 7}，{6, 7, 9}，{8, 9, 11}，{10, 11, 1}，{12, 1, 3}；刻度为(1, 5, 6)型的 6 个，其顶点标号为{1, 2, 7}，{3, 4, 9}，{5, 6, 11}，{7, 8, 1}，{9, 10, 3}，{11, 12, 5}；刻度为(2, 3, 5)型的 6 个，其顶点标号为{2, 4, 11}，{4, 6, 1}，{6, 8, 3}，{8, 10, 5}，{10, 12, 7}，{12, 2, 9}；刻度为(4, 4,

4) 型的 3 个，其顶点标号为 $\{1, 5, 9\}$，$\{2, 6, 10\}$，$\{3, 7, 11\}$；刻度为 $(2, 4, 6)$ 型的 3 个，其顶点标号为 $\{4, 6, 12\}$，$\{8, 10, 4\}$，$\{12, 2, 8\}$.（注意，每种情况下的其余三角形都可由前一个三角形绕圆心适当旋转而得到）. 这样共得 24 个三角形，且满足题目条件. 综上可知，所求 n 的最小值为 24.

6. 设 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 56\}$，令 $A_i=\{i, i+7, i+14, i+21, i+28, i+35, i+42, i+49\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, 7)$，$B_j=\{j, j+8, j+16, j+24, j+32, j+40, j+48\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, 8)$. 显然 $|A_i|=8$ $(1\leqslant i\leqslant 7)$，$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(1\leqslant i<j\leqslant 7)$，$|B_j|=7$ $(1\leqslant j\leqslant 8)$，$B_i\cap B_j=\varnothing$ $(1\leqslant i<j\leqslant 8)$. $|A_i\cap B_j|=1$ $(1\leqslant i\leqslant 7, 1\leqslant j\leqslant 8)$ 于是从 X 的 15 个子集 $A_i(1\leqslant i\leqslant 7)$，$B_j(1\leqslant i\leqslant 8)$ 中任取 3 个，必有 2 个同为 A_i 或者有 2 个同为 B_j，其交为空集，并且对其中任意 7 个子集：A_{i_1}，A_{i_2}，$\cdots$，A_{i_s}，B_{j_1}，B_{j_2}，$\cdots$，B_{j_t} $(s+t=7)$ 有 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_s}\cup B_{j_1}\cup B_{j_2}\cup\cdots\cup B_{j_t}|=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_s}|+|B_{j_1}|+|B_{j_2}|+\cdots+|B_{j_t}|-st=8s+7t-st=8s+7(7-s)-s(7-s)=(s-3)^2+40\geqslant 40$，故所求最小正整数 $n\geqslant 41$. 其次，我们证明 $n=41$ 符合条件. 用反证法. 假设存在 X 的 15 个子集，它们中任何 7 个子集的并不少于 41 个元素，而任何 3 个的交为空集. 于是每个元素至多属于 2 个子集. 不妨设每个元素恰属于 2 个子集（否则在一些子集中适当添加一些元素，上述各条件仍成立）. 由抽屉原理，必有一个子集，设为 A，至少含有 $\left[\dfrac{2\times 56-1}{15}\right]+1=8$ 个元素. 又设其他 14 个子集为 A_1，A_2，$\cdots$，A_{14}. 这 14 个子集中任何 7 个子集的并集都至少包含 X 中 41 个元素. 这 14 个子集的所有“7 子集组”一共包含 X 中 $41\mathrm{C}_{14}^7$ 个元素. 另一方面，对 X 内任意元 a，若 $a\notin A$，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_{14} 中有 2 个包含 a，于是 a 被计算了 $\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{12}^7$ 次；若 $a\in A$，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_{14} 中只有 1 个含有 a，于是 a 被计算了 $\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{13}^7$ 次. 所以 $41\mathrm{C}_{14}^7\leqslant(56-|A|)(\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{12}^7)+|A|(\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{13}^7)=56(\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{12}^7)-|A|(\mathrm{C}_{13}^7-\mathrm{C}_{12}^7)\leqslant 56(\mathrm{C}_{14}^7-\mathrm{C}_{12}^7)-8(\mathrm{C}_{13}^7-\mathrm{C}_{12}^7)$，由此可得 $533\leqslant 532$，矛盾. 故 $n=41$ 满足条件. 综上所述，所求 n 的最小值为 41.

7. (1) 因分组方法有限，故使 $m(G)=m_0$ 的图案 G 存在. 设图案 G 满足 $m(G)=m_0$. G 由分组 X_1，X_2，$\cdots$，X_{83} 组成. 其中 X_i 为第 i 组点构成的集合，并记 $|X_i|=x_i$，于是 $x_1+x_2+\cdots+x_{83}=1994$，$m_0=\sum\limits_{i=1}^{83}\mathrm{C}_{x_i}^3$. 同例 7 可用调整法证明这时，对任意



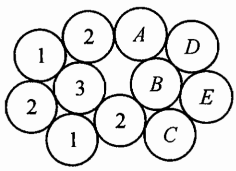
(a)　　(b)

（第 7 题）

$1 \leqslant i < j \leqslant 83$，有 $|x_i - x_j| \leqslant 1$. 又因为 $1994 = 83 \times 24 + 2 = 81 \times 24 + 2 \times 25$，故使 $m(G) = m_0$ 的 $x_1, x_2, \cdots, x_{83}$ 中有 81 等于 24，2 个等于 25，所以 $m_0 = 81C_{24}^3 + 2C_{25}^3 = 168\,544$.

(2) 由(1)知 G^* 可分为 83 个互相没有线段相连的子图 $G_1^*, G_2^*, \cdots, G_{83}^*$，其中 $G_1^*, \cdots, G_{81}^*$ 含 24 个点，G_{82}^*，G_{83}^* 含 25 个点，设 G_i^* 所含点集为 $X_i(i=1, 2, \cdots, 83)$，对于 G_{83}^*，令 $X_{83} = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_5$，$P_i \cap P_j = \varnothing(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$ 且 $|P_i| = 5(1 \leqslant i \leqslant 5)$. 每个 P_i 用图(a)所示方法染色，而不同的 P_i 与 P_j 所连线段用如图(b)所示方法染色，其中 a, b, c, d 表示 4 种不同颜色. 这样染好色的 G_{83}^* 显然不包含三边颜色相同的三角形. 对 G_{82}^* 可同染 G_{83}^* 的方法去染色. 而对 G_i^* $(1 \leqslant i \leqslant 81)$，可先增加一点并与原 24 个点都连一线段，然后按染 G_{83}^* 的方法染好色后，再去掉该点及从该点连出的线段，这样染好色的 G_i^* 显然不含三边颜色相同的三角形. 综上便知结论成立.

8. 如图：若仅用 3 色，假设 11 张圆形纸片中有 6 张圆纸片的颜色如图标号，则 A, B, C 三圆纸片只能染 1 色或 3 色. 并且 A 和 C 同色，但 A、C 与 B 不同色，于是 D 与 A、B 不同色，故 D 染 2 色. 同理 E 与 B、C 不同色，从而 E 也染 2 色，这与 D 和 E 互相外切不同色矛盾. 其次，我们证明染上 4 色就够了. 我们对 n 张圆纸片来证明，$n \leqslant 4$ 时显然成立. 设对 $k \geqslant 4$ 张圆纸片，染上 4 色就够了. 对 $k+1$ 张圆纸片，则这 $k+1$ 张圆纸片中心的凸包为凸多边形，取某一个顶点 A，则 A 是某圆纸片的中心，易证该纸片最多与 3 张圆形纸片相切，去掉 A 纸片，余下 k 张纸片，由归纳假设知可染上 4 色使任何两张相切的纸片不同色，放回 A 纸片，必可将它染上同它相切的 3 张纸片不同色的第 4 种颜色. 于是对 $k+1$，结论也成立. 故对一切 $n \in \mathbf{N}_+$，染上 4 色就够了，特别对 $n = 2000$ 张纸片，染上 4 色就够了. 综上可知，最少要染上 4 种颜色.



(第 8 题)

"奥数"联赛冲刺篇——《高中数学联赛考前辅导》

- 选题经典且贴近高中联赛
- 知识上查漏补缺，能力上全面提升
- 全新模拟题让你提前感受考场氛围

读者对象：参加联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

"奥数"IMO终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

- 从2009年起，每年出版一册
- 以国家集训队测试题和国家队训练题为主
- 收集了国内主要竞赛：全国联赛、联赛加试、冬令营、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克、东南地区数学奥林匹克
- 附有美国、俄罗斯、罗马尼亚和国际数学奥林匹克

读者对象：参加联赛、冬令营等赛事的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

"奥数"域外篇——《全俄中学生数学奥林匹克(1993－2006)》

俄罗斯是世界上开展数学活动最早、最广泛、也是影响最大的国家之一。俄罗斯是世界上竞赛试题的最大生产国，不仅产量高，而且质量好，其中最出色的当数组合题。

本书收录1993－2006年俄罗斯9—11年级数学奥林匹克第四轮(联邦区域竞赛)和第五轮(全俄决赛)竞赛的所有试题和解答。

读者对象：参加数学竞赛的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

更多图书信息及免费资料请登录：
http://www.hdsdjf.com/downloadfileinfor.aspx? classid=69

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 组合数学/张垚编著. —2版. —上海：华东师范大学出版社，2011. 12
ISBN 978-7-5617-9168-4

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 261946 号

数学奥林匹克小丛书（第二版）·高中卷
组合数学(第二版)

编　　著　张　垚
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　黄　侠
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　12.75
字　　数　224 千字
版　　次　2012 年 7 月第二版
印　　次　2013 年 3 月第二次
印　　数　11001-16100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9168-4/G·5472
定　　价　25.00 元

出 版 人　朱杰人