数学奥林匹克小丛书　高中卷

第二版

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

集合

刘诗雄　编著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 元素与集合

一、集合的概念

集合是一个原始的概念，是数学中一个不定义的概念. 尽管如此，对一个具体的集合而言，很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.

用描述法表示一个集合基于下面的概括原则：

概括原则 对任给的一个性质 P，存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象，即

$$S=\{x \mid P(x)\},$$

其中 $P(x)$ 表示"x 具有性质 P".

由此，我们知道集合的元素是完全确定的，同时它的元素之间具有互异性和无序性.

集合的元素个数为有限数的集合称为有限集，元素个数为无限数的集合称为无限集. 如果有限集 A 的元素个数为 n，则称 A 为 n 元集，记作 $|A|=n$. 空集不含任何元素.

例 1 设集合 $M=\left\{x \left\lvert\, \dfrac{ax-5}{x^2-a}<0,\ x\in\mathbf{R}\right.\right\}$.

(1) 当 $a=4$ 时，化简集合 M；

(2) 若 $3\in M$，且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

分析 化简集合 M，实际上就是解不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$.

解 (1) 当 $a=4$ 时，有

$$\frac{4x-5}{x^2-4}<0,$$

即
$$\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+2)(x-2)<0.$$

由图 1-1 知，$x<-2$ 或 $\frac{5}{4}<x<2$.

所以　$M=(-\infty,\ -2)\cup\left(\frac{5}{4},\ 2\right)$.

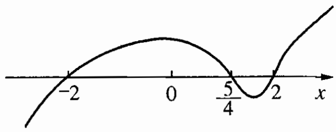


图 1-1

(2) 由 $3\in M$，得 $\frac{3a-5}{3^2-a}<0$，即 $\left(a-\frac{5}{3}\right)(a-9)>0$，所以

$$a<\frac{5}{3} \text{ 或 } a>9. \qquad ①$$

由 $5\notin M$ 得，$\frac{5a-5}{5^2-a}\geqslant 0$ 或 $5^2-a=0$，所以

$$1\leqslant a\leqslant 25. \qquad ②$$

由 ①、② 得，$a\in\left[1,\ \frac{5}{3}\right)\cup(9,\ 25]$.

说明　$5\notin M$ 隐含了条件 $5^2-a=0$，这是容易被忽视的.

由概括原则我们知道，判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素，等价于判断 x 是否具有性质 P.

例 2　设 A 是两个整数平方差的集合，即 $A=\{x\mid x=m^2-n^2,\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$. 证明：

(1) 若 $s,\ t\in A$，则 $st\in A$.

(2) 若 $s,\ t\in A,\ t\neq 0$，则 $\frac{s}{t}=p^2-q^2$，其中 p、q 是有理数.

分析　想办法将 st 表示为两个整数的平方差.

证明　(1) 由 $s,\ t\in A$，可设

$$s=m_1^2-n_1^2,\ t=m_2^2-n_2^2,$$

其中 m_1、n_1、m_2、n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2-n_1^2)(m_2^2-n_2^2) \\ &= m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1^2n_2^2-m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2-m_2^2n_1^2 \\ &= (m_1m_2+n_1n_2)^2-(m_1n_2+m_2n_1)^2, \end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方差，故 $st\in A$.

(2) 由于 $s,\ t\in A$，由(1)知 $st\in A$. 令 $st=m^2-n^2$，m、n 是整数. 又 $t\neq$

0，因此

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2-\left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而$\frac{m}{t}$、$\frac{n}{t}$均为有理数，故命题得证.

二、集合与集合的关系

在两个集合的关系中，子集是一个重要的概念，它的两个特例是真子集和集合相等.从下面“充分必要条件”的角度来理解子集、真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的：

子集：$A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，恒有 $x\in B$；

真子集：$A\subsetneqq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B,\\ \text{且存在 } x'\in B,\text{但 } x'\notin A;\end{cases}$

集合相等：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

容易证明两个集合关系的如下性质：

1. $\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneqq A\ (A\neq\varnothing)$；
2. $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

例3　设函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A\subseteq B$；

(2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，求集合 B.

分析　欲证 $A\subseteq B$，只需证明方程 $x=f(x)$ 的根必是方程 $x=f(f(x))$ 的根.

解　(1) 对任意的 $x_0\in A$，有 $x_0=f(x_0)$，$x_0\in\mathbf{R}$.

于是

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

故 $x_0\in B$，所以 $A\subseteq B$.

(2) 因 $A=\{-1,3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1,\\ 3^2+a\cdot 3+b=3,\end{cases}$$

解之得 $a=-1$，$b=-3$，故 $f(x)=x^2-x-3$.由 $x=f(f(x))$ 得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

即
$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0,$$
解得 $x=-1, 3, \pm\sqrt{3}$.

所以，$B=\{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

例 4　设关于 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 和 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ $(a\in\mathbf{R})$ 的解集依次为 A、B，求使 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

分析　要由 $A\subseteq B$ 求出 a 的范围，必须先求出 A 和 B.

解　由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$，得
$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},$$
解之，得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$. 所以，$A=\{x \mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，得
$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0.$$

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$；当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

因为 $A\subseteq B$，所以
$$\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{3},\\2a\geqslant 2,\\a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a<\frac{1}{3},\\2a\geqslant 3a+1,\\a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$$

解之，得 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

所以，a 的取值范围是 $[1, 3]\cup\{-1\}$.

说明　上述解答是通过对参数 a 的分类讨论完成的，其实还有更直接的解法. 从方程的角度看，$A\subseteq B$ 等价于方程 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$ 在区间 $(-\infty, 2a]$ 和 $[a^2+1, +\infty)$ 内各有一个实根. 设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，由 $A\subseteq B$，得
$$\begin{cases}f(2a)\leqslant 0,\\f(a^2+1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3 \text{ 或 } a=-1.$$

例 5　设实数 $a<b$，$D=[a, b]$，函数 $f(x)=k-\sqrt{x+2}$，$x\in D$ 的值

域为 E. 若 $D=E$，求实数 k 的取值范围.

解　易知，当 $x\geqslant -2$ 时 $f(x)=k-\sqrt{x+2}$ 为减函数. 所以 $D=E=[a,b]$ 等价于方程组

$$\begin{cases}k-\sqrt{a+2}=b, & ①\\ k-\sqrt{b+2}=a & ②\end{cases}$$

有实数解，且 $a<b$.

①−②得

$$\sqrt{b+2}-\sqrt{a+2}=b-a,$$

即
$$\frac{b-a}{\sqrt{b+2}+\sqrt{a+2}}=b-a.$$

因为 $a<b$，所以

$$\sqrt{b+2}+\sqrt{a+2}=1, \qquad ③$$

即
$$\sqrt{a+2}=1-\sqrt{b+2}.$$

代入式①得

$$k=b+1-\sqrt{b+2}.$$

令 $\sqrt{b+2}=t$. 由式③知 $0\leqslant t\leqslant 1$. 于是，有

$$k=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

故所求 k 的范围是 $-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant -1$.

如果 A、B 是两个相等的数集，那么可以得到 $A=B$ 的两个非常有用的必要条件：

（1）两个集合的元素之和相等；

（2）两个集合的元素之积相等.

例 6　求所有的角 α，使得集合

$$\{\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \sin 3\alpha\}=\{\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 3\alpha\}.$$

解　设 $\alpha\in[0,2\pi)$. 由已知得

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha,$$

即
$$2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha(2\cos\alpha+1)=\cos 2\alpha(2\cos\alpha+1).$$

所以 $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$(舍去).

从而
$$\begin{aligned}0&=\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\\&=\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\\&=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

于是 $\alpha=\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5\pi}{8},\ \dfrac{9\pi}{8},\ \dfrac{13\pi}{8}$.

又 $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$,且 $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$,因此
$$\cos 4\alpha=0,$$
$$\alpha=\frac{(2k-1)\pi}{8},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8.$$

经验证,$\alpha=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 满足题意.

说明 元素之和(积)相等只是两个集合相等的必要条件,因此这里还必须检查集合的元素是否互异.

三、相关问题举例

我们来研究一些与元素和集合有关的稍难的问题,解决这些问题需要借助其他数学工具.

例 7 设 S 为非空数集,且满足:(i) $2\notin S$;(ii) 若 $a\in S$,则$\dfrac{1}{2-a}\in S$.

证明:

(1) 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 3$,有$\dfrac{n}{n-1}\notin S$;

(2) S 或者是单元素集,或者是无限集.

分析 对于(1),因为 $n\in\mathbf{N}^*$,可以考虑采用数学归纳法.

证明 (1) 因为 S 非空,所以存在 $a\in S$,且 $a\neq 2$.

我们用数学归纳法证明下面的命题:

若 $a\in S$,则对 $k\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}\in S$,且 $a\neq\dfrac{k+1}{k}$.

当 $k=1$ 时,显然 $a\in S$,且 $a\neq 2$ 成立.

设 $k\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}\in S$ 且 $a\neq\dfrac{k+1}{k}$ 成立.

由(ii)得

$$\frac{1}{2-\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}}\in S,$$

化简得
$$\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\in S.$$

又$\dfrac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\neq 2$,所以 $a\neq\dfrac{k+2}{k+1}$.

综上,由归纳原理知,对 $k\in\mathbf{N}^*$ 命题成立.从而,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，$\dfrac{n}{n-1}\notin S$ 成立.

(2) 由(1)知,若 $a\in S$，$a\neq\dfrac{m}{m-1}$ $(m\in\mathbf{N}^*,\ m\geqslant 3)$，则 $\dfrac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}\in S$.

所以,当 $n\geqslant 2$，$m\geqslant 2$，$m\neq n$ 时,

$$\frac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}=\frac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}$$

$$\Leftrightarrow m(n-1)-(n-1)(m-1)a-m(n-2)a+(m-1)(n-2)a^2$$

$$=n(m-1)-(n-1)(m-1)a-n(m-2)a+(n-1)(m-2)a^2$$

$$\Leftrightarrow n-m+2(m-n)a+(n-m)a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(1-2a+a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow a=1\ (\text{因为 } n\neq m).$$

因为 $\mathbf{N}^*$ 是无限集,所以 S 或者为单元素集$\{1\}$(当且仅当 $a=1$),或者为无限集.

例 8 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和.设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$ 是正整数的集合,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$;又设对每个正整数 $n\leqslant 1500$,都存在 A 的子集 S,使得 $\sigma(S)=n$.求 a_{10} 的最小可能值.

分析 要求 a_{10} 的最小值,显然应使 $\sigma(A)=1500$.又由题设,应使 a_{11} 尽可能大,且前10个数之和不小于750,故取 $a_{11}=750$.考虑整数的二进制表示,由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知,前8个数应依次为1，2，4，8，16，32，64，128.这

时 $a_9+a_{10}=495$，从而有 $a_{10}=248$.

解　取 $A_0=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}$，易知 A_0 满足题目要求，且 $a_{10}=248$. 故 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面，a_{10} 不可能比 248 更小. 这是因为前 10 个数之和不能小于 750，否则设 $\sum_{i=1}^{10} a_i=m, m<750$，则 $a_{11}=1500-m$，对 $n\in(m, 1500-m)$，显然不存在 A 的子集 S，使 $\sigma(S)=n$. 因 $1+2+\cdots+2^7=255$，由整数的二进制表示知，其前 8 个数之和最大为 255. 故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495，从而 a_{10} 至少为 248.

综上知，a_{10} 的最小可能值为 248.

说明　本例采用了构造法. 直接构造一个符合题设的 A_0，然后证明 A_0 具有所要求的性质. 这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

例 9　设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证：其中必定有两个人，他们的公共朋友的个数为偶数.

证明　用反证法：设 S 为一个由 $2n$ 个人组成的集合，S 中每两个人的公共朋友数为奇数.

对 S 中的任意一个人 A，记 $M=\{F_1, \cdots, F_k\}$ 为 A 的朋友集，可以证明：对每个 A，k 都为偶数.

事实上，对每个 $F_i\in M$，考虑他在 M 中的朋友数，所有这 k 个 F_i 的这些朋友数之和为偶数(因为朋友是相互的)，而对 A、F_i 而言，其公共朋友数为奇数，故每个 F_i 的这样的朋友数为奇数，故 k 为偶数.

设 $k=2m$，现在考虑每个 $F_i\in M$，他的所有朋友集不包括 A，但不局限于 M 中，他的这样的朋友数为奇数(因为 F_i 的朋友数为偶数，而 A 不算在内). 因此，所有 $2m$ 个这样的朋友集的元素个数之和为偶数. 从而在 $2n-1$ 个人(A 除外)中，必有一个人在偶数个这样的朋友集中出现，他与 A 的公共朋友数为偶数.

这个矛盾表明：有两个 S 中的人，他们的公共朋友数为偶数.

说明　上述解法采用了奇偶性分析来“制造”矛盾.

例 10　设 n 是大于 1 的正整数，证明存在一个集合 $A\subsetneqq\{1, 2, \cdots, n\}$，使得

(1) $|A|\leqslant 2[\sqrt{n}]+1$；

(2) $\{|x-y| \mid x, y\in A, x\neq y\}=\{1, 2, \cdots, n-1\}$.

分析　由 $|A|\leqslant 2[\sqrt{n}]+1$ 想到，设 $n=k^2+b$, $0\leqslant b\leqslant 2k$.

证明　设 $n=k^2+b$, $0\leqslant b\leqslant 2k$.

① 当 $b\leqslant k$ 时，考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$|A|=2k \leqslant 2[\sqrt{n}]+1=2k+1,$$

而易知 $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

② 当 $b>k$ 时，考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+k, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

同样有

$$|A|=2k+1 \leqslant 2[\sqrt{n}]+1,$$

且 $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

综上知，原命题成立.

习 题 1

1 已知三元实数集 $A=\{x, xy, x+y\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $x^{2005}+y^{2005}=$________.

2 设集合 $S=\left\{(x, y) \,\middle|\, x-\frac{1}{2}y^2 \text{ 为奇数}, x, y \in \mathbf{R}\right\}$，$T=\{(x, y) \mid \sin(2\pi x)-\sin(\pi y^2)=\cos(2\pi x)-\cos(\pi y^2), x, y \in \mathbf{R}\}$. 则 S 与 T 的关系是________.

3 集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l, m, n, l \in \mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u \mid u=20p+16q+12r, p, q, r \in \mathbf{Z}\}$ 的关系为________.

4 设 $A=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$，$B=\{(x, y) \mid x \leqslant 10, y \geqslant 2, y \leqslant x-4\}$ 是直角坐标平面 xOy 上的点集. 则 $C=\left\{\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \,\middle|\, (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\right\}$ 所成图形的面积是________.

5 已知非空数集 $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则满足条件“若 $x \in M$，则 $6-x \in M$”的集合 M 的个数是________.

6 设 $a \in \mathbf{R}^+$，$A=\left\{(x, y) \mid (x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant \frac{4}{5}\right\}$ 与 $B=\left\{(x, y) \,\middle|\right.$

$|x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$ 是直角坐标平面 xOy 内的点集. 则 $A\subseteq B$ 的充要条件是________.

7 集合 $\left\{x \middle| -1\leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},\ x>1 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\right\}$ 的真子集的个数是________.

8 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0,\ x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

9 已知 $M=\{x\mid x=a^2+1,\ a\in\mathbf{N}^*\}$，$N=\{x\mid x=b^2-4b+5,\ b\in\mathbf{N}^*\}$，则 M 与 N 的关系是________.

10 非空集合 S 满足：

(1) $S\subseteq\{1,2,\cdots,2n+1\}$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(2) 若 $a\in S$，则有 $2n+2-a\in S$.

那么，同时满足(1)、(2)的非空集合 S 的个数是________.

11 设由模为 1 的 n（$2<n<6$）个复数组成的集合 S 满足下面两条：

(1) $1\in S$；

(2) 若 $z_1\in S$，$z_2\in S$，则 $z_1-2z_2\cos\theta\in S$，其中 $\theta=\arg\frac{z_1}{z_2}$.

则集合 $S=$________.

12 集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，计算 A 中的二元子集两元素之和组成集合 $B=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,13\}$. 则 $A=$________.

13 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$，$G=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\}\subseteq E$，且 G 具有下列两条性质：

(1) 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有 $a_i+a_j\neq 201$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10\,080$.

试证明：G 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 G 中所有数字的平方和为一个定数.

14 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数"，给定数集 $M=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{100}\right\}$. 求集 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"之和.

15 考虑实数 x 在 3 进制中的表达式. K 是区间$[0,1]$内所有这样的数 x 的集合，并且 x 的每位数字是 0 或 2. 如果 $S=\{x+y\mid x,y\in K\}$，求证：$S=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 2\}=[0,2]$.

16 设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 项的数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有如下性质：对于 S 的任何一个非空子集 B（B 的元素个数记为 $|B|$），在该数列中有相邻的 $|B|$

项恰好组成集合 B. 求 n 的最小值.

17 设集合 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$，现对 M 的任一非空子集 X，令 α_X 表示 X 中最大数与最小数之和. 求所有这样的 α_X 的算术平均值.

18 设 S 为满足下列条件的有理数集合：

(1) 若 $a \in S$，$b \in S$，则 $a+b \in S$，$ab \in S$；

(2) 对任一个有理数 r，3 个关系 $r \in S$、$-r \in S$、$r=0$ 中有且仅有一个成立.

证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

19 S_1、S_2、S_3 为非空整数集合，对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k，若 $x \in S_i$，$y \in S_j$，则 $y-x \in S_k$.

(1) 证明：3 个集合中至少有两个相等.

(2) 3 个集合中是否可能有两个集合无公共元素？

20 若 $x \geqslant 1$，$x^x = x_0$，$x_0 \in (k^k, (k+1)^{(k+1)}) \cap \mathbf{Q}$，其中 $k \in \mathbf{N}^*$. 求证：$x \in \mathbf{Q}^C$.（其中，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{Q}^C$ 为无理数集）

2 集合的运算

集合的交集、并集、补集三种基本运算是通过元素与集合的关系来定义的：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\},$$

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\},$$

$$\complement_U A=\{x\mid A\subseteq U,\ x\in U,\text{且 } x\notin A\}.$$

请注意这里的逻辑关联词"且"、"或"，它们在集合运算的定义中起了决定性的作用.

有时，我们还要用到集合的差集的概念.

定义 由属于集合 A 但不属于集合 B 的全体元素组成的集合叫做集合 A 对 B 的差集，记作 $A\backslash B$（或 $A-B$），即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\notin B\}.$$

由这个定义可以看出，补集只是差集的一种特殊情况.

记 U 为全集，容易证明集合的运算满足如下法则：

(1) **等幂律**：$A\cap A=A,\ A\cup A=A$；

(2) **同一律**：$A\cap U=A,\ A\cup U=U$，
$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup\varnothing=A$；

(3) **互补律**：$A\cap\complement_U A=\varnothing,\ A\cup\complement_U A=U$；

(4) **交换律**：$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$；

(5) **结合律**：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

(6) **分配律**：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(7) **吸收律**：$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$；

(8) **反演律(摩根律)**：$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，
$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

利用维恩图可以清晰地理解集合的交、并、补、差运算及其运算律. 维恩图为集合问题的解决提供了一个直观的工具.

例 1 已知 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x \mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

分析 关键是如何理解和运用 $A\cup B=A$ 这个条件. 注意到 $A\cup B=A \Leftrightarrow B\subseteq A$，用列举法表示 A，即可写出 B 的各种情形，但不要忘了 $B=\varnothing$ 的情形！

解 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}=\{-3, 2\}$. $B=\{x \mid mx+1=0\}$ 至多有一个元素.

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$. 因此，$B=\{-3\}$，或 $B=\{2\}$，或 $B=\varnothing$，即

$$-3m+1=0，或\ 2m+1=0，或\ m=0，$$

解得 $m=\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 或 0.

故实数 $m\in\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

例 2 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2+px+q<0\}$，若 $A\cap B=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$. 求 p、q 的取值范围.

解 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=[-1, 3]$.

设 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1、x_2，$x_1<x_2$. 则

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$
$$B=(x_1, x_2).$$

由 $A\cap B=[-1, 3]\cap(x_1, x_2)=[-1, 2)$，得

$$\begin{cases} x_1<-1, \\ x_2=2. \end{cases}$$

由韦达定理，得

$$x_1+x_2=x_1+2=-p,$$
$$x_1x_2=2x_1=q.$$

因为 $x_1<-1$，所以

$$-p-2<-1,$$
$$\frac{q}{2}<-1.$$

故所求 p、q 的范围分别是 $p>-1$、$q<-2$.

例 3　设 A、B 都是不超过 9 的正整数组成的全集 U 的子集，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$，求 $A\backslash B$.

分析　直接进行集合间的运算和推理似乎较难入手，但我们可从维恩图 2-1 中得到解题思路的提示.

解　因为 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，所以

$$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}.$$

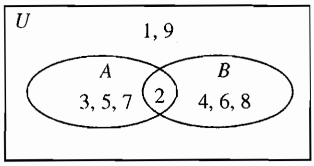


图 2-1

又
$$A\cap B=\{2\},$$
$$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\},$$

所以
$$\begin{aligned}B&=U\cap B=(A\cup\complement_U A)\cap B\\&=(A\cap B)\cup((\complement_U A)\cap B)\\&=\{2,4,6,8\}.\end{aligned}$$

所以，$A\backslash B=(A\cup B)\backslash B=\{3,5,7\}$.

例 4　已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问：

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

分析　因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，故可从解 $A\cap C$ 及 $B\cap C$ 对应的方程组入手.

解　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

$$\text{(i)}\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}\qquad\text{(ii)}\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

的解集.

由(i)解得 $(x,y)=(0,1)$，$\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；

由(ii)解得 $(x,y)=(1,0)$，$\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

$$①\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\[2mm]\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}\qquad②\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\[2mm]\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$$

由①得 $a=0$；由②得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

例 5 已知集合 $A=\left\{(x,\ y)\left|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$，$B=\{(x,\ y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的值.

分析 当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$，这时 $A\cap B=\varnothing$；当 $a\neq 1$ 时，$A\cap B=\varnothing$，即 A、B 对应的直线无公共点.

解 由 $\frac{y-3}{x-2}=a+1$，得

$$(a+1)x-y-2a+1=0,\ 且\ x\neq 2. \quad ①$$

这表明集合 A 表示一条缺一个点的直线. 而

$$(a^2-1)x+(a-1)y=15, \quad ②$$

当 $a\neq 1$ 时，表示一条直线；当 $a=1$ 时，满足等式的点 $(x,\ y)$ 不存在.

因此，当且仅当以下三种情况之一发生时，$A\cap B=\varnothing$.

(1) 当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$，显然有 $A\cap B=\varnothing$.

(2) 当 $a=-1$ 时，A 表示直线 $y=3\ (x\neq 2)$，B 表示直线 $y=-\frac{15}{2}$，它们互相平行. 所以，$A\cap B=\varnothing$.

(3) 当 $a\neq\pm 1$ 时，直线 ① 与 ② 相交. 但直线 ① 上缺一点 $(2,\ 3)$，令 $(2,\ 3)\in B$，得

$$(a^2-1)\cdot 2+(a-1)\cdot 3=15,$$

解得 $a=-4$ 或 $a=\frac{5}{2}$.

综上所述，$a\in\left\{-4,\ -1,\ 1,\ \frac{5}{2}\right\}$.

说明 $a\neq 1$ 时，$A\cap B=\varnothing$，并不表明直线 ① 与 ② 必须平行，由于直线 ① 上缺了一个点 $(2,\ 3)$，当直线 ② 穿过点 $(2,\ 3)$ 时，同样有 $A\cap B=\varnothing$.

例 6 设 $n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 15$，A、B 都是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，且 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}=A\cup B$. 证明：$A$ 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

证明 由题设，$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的任何元素必属于且只属于它的真子集 A、

B 之一. 假设结论不真，则存在如题设的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集 A、B，使得无论是 A 还是 B 中的任何两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1 \in A$，则 $3 \notin A$. 否则 $1+3=2^2$，与假设矛盾，所以 $3 \in B$. 同样，$6 \notin B$，所以 $6 \in A$. 这时 $10 \notin A$，即 $10 \in B$. 因 $n \geqslant 15$，而 15 或者在 A 中，或者在 B 中，但当 $15 \in A$ 时，因 $1 \in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15 \in B$ 时，因 $10 \in B$，$10+15=5^2$，仍然矛盾. 因此假设不真，即 A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

说明 由 A、B 地位对称，在上面的解法中我们采用了"不妨设 $1 \in A$"这种技巧，有效简化了解题过程.

例 6 实际上给出了一个关于集合的方程组：

$$\begin{cases} A \cup B = \{1, 2, \cdots, n\}, \\ A \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

如果交换 A、B 算两组解（有序解），那么这个方程组有多少组有序解呢？

设 $U=\{1, 2, \cdots, n\}$，由 $A \cup B = U$，$A \cap B = \varnothing$，知 A 与 B 互补，对于 $A \subseteq U$，可取 $B = \complement_U A$. 故上述集合方程的有序解的个数为 2^n.

下面来看一个稍为复杂的例子.

例 7 已知集合 A、B、C（不必相异）的并集

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, \cdots, 2005\},$$

求满足条件的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

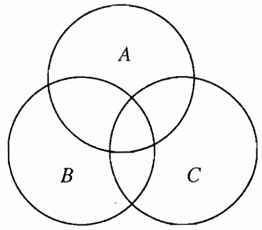


图 2－2

解 由图 2－2 知，表示集合 A、B、C 的 3 个圆交出了 7 个区域. 这表明，在求 $A \cup B \cup C$ 时，1，2，…，2005 中每一个数都有 7 种选择. 所以，所求的有序三元组的个数为 7^{2005}.

例 8 设集合 S 含有 n 个元素，A_1，A_2，…，A_k 是 S 的不同子集，它们两两的交集非空，而 S 的其他子集不能与 A_1，A_2，…，A_k 都相交. 求证：$k=2^{n-1}$.

分析 S 有 2^n 个子集，将两个互为补集的子集作为一组，则可将 2^n 个子集分成 2^{n-1} 个组，记为 $\{A'_i, B'_i\}$，$i=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，显然 A_i 只能选取每组中的一个子集.

证明 设 $a \in S$. 因为 $|S|=n$，故 S 的子集中含 a 的子集有 2^{n-1} 个. 显然它们两两的交非空. 所以，$k \geqslant 2^{n-1}$.

又可将 S 的 2^n 个子集分成 2^{n-1} 组，每组有两个集合，它们互为补集. 若 $k > 2^{n-1}$，则必有两个集合 A_i、A_j $(i \neq j)$ 来自上述同一组，但 $A_i \cap A_j = \varnothing$，与

题意不符.所以，$k=2^{n-1}$.

例 9　有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素？

分析　由每个集合有 45 个元素，且任意两个集合的并集有 89 个元素知，任意两个集合有且只有一个公共元素.

解　显然可以由题设找到这样的 1987 个集合，它们都含有一个公共元素 a，而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.

下面，我们来排除其他可能性.

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知，1987 个集合中的任意两个集合有且只有一个公共元素，则容易证明这 1987 个集合中必有一个集合 A 中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中，设为 A_1，A_2，…，A_{45}，其余的设为 A_{46}，A_{47}，…，A_{1986}.

设 B 为 A_{46}，…，A_{1986} 中的任一个集合，且 $a\notin B$，由题设 B 和 A，A_1，A_2，…，A_{45} 都有一个公共元素，且此 46 个元素各不相同，故 B 中有 46 个元素，与题设矛盾.所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1987\times44+1=87\,429$，即这1987个集合的并集有87 429个元素.

说明　在这里我们先设计一种符合题设的特殊情形，然后再排除其他可能的情形，从而达到解题目的.这是一种“先猜后证”的解题策略.

例 10　设 A 是集合 $S=\{1,2,\cdots,1\,000\,000\}$ 的一个恰有 101 个元素的子集.证明：在 S 中存在数 t_1，t_2，…，t_{100}，使得集合

$$A_j=\{x+t_j \mid x\in A\},\ j=1,2,\cdots,100$$

中，每两个的交集为空集.

分析　先弄清楚在什么情况下 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$.设 $a\in A_i\cap A_j$，则 $a=x+t_i=y+t_j$，x，$y\in A$.于是 $t_i-t_j=y-x$.这说明选取 t_1，t_2，…，t_{100} 时，只要保证其中任意两个之差不等于 A 中任二元素之差即可.

证明　考虑集合 $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$，则

$$|D|\leqslant 101\times100+1=10\,101.$$

若 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$，设 $a\in A_i\cap A_j$，则 $a=x+t_i$，$a=y+t_j$，其中 x，$y\in A$，则 $t_i-t_j=y-x\in D$.

若 $t_i-t_j\in D$，即存在 x，$y\in A$，使得 $t_i-t_j=y-x$，从而 $x+t_i=y+t_j$，即 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

所以，$A_i\cap A_j\neq\varnothing$ 的充要条件是 $t_i-t_j\in D$.于是，我们只需在集 S 中取

出 100 个元素，使得其中任意两个的差都不属于 D.

下面用递推方法来取出这 100 个元素.

先在 S 中任取一个元素 t_1，再从 S 中取一个 t_2，使得 $t_1 \notin t_2 + D = \{t_2 + x \mid x \in D\}$，这是因为取定 t_1 后，至多有 10 101 个 S 中的元素不能作为 t_2，从而在 S 中存在这样的 t_2，若已有 $k(\leqslant 99)$ 个 S 中的元素 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 满足要求，再取 t_{k+1}，使得 $t_1, \cdots, t_k$ 都不属于 $t_{k+1} + D = \{t_{k+1} + x \mid x \in D\}$. 这是因为 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 取定后，至多有 $10\,101k \leqslant 999\,999$ 个 S 中的数不能作为 t_{k+1}，故在 S 中存在满足条件的 t_{k+1}. 所以，在 S 中存在 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$，其中任意两个的差都不属于 D.

综上所述，命题得证.

说明　条件 $|S| = 10^6$ 可以改小一些. 一般地，我们有如下更强的结论：

若 A 是 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个 k 元子集，m 为正整数，且 m 满足条件 $n > (m-1)\cdot(\mathrm{C}_k^2 + 1)$，则存在 S 中的元素 $t_1, \cdots, t_m$，使得 $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$，$j = 1, \cdots, m$ 中任意两个的交集为空集.

有兴趣者可自己证明.

习　题　2

1 已知集合 $M = \{2, |a|\}$ 是全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a + 2\}$ 的一个子集，且 $\complement_U M = \{5\}$，则实数 a 的值等于________.

2 已知全集 $I = \mathbf{Z}$，$M = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$，$S = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{Z}\}$，则 $M \cap \complement_{\mathbf{Z}} S =$________.

3 已知 $M = \{(x, y) \mid y = \sqrt{16 - x^2}, y \neq 0\}$，$N = \{(x, y) \mid y = x - a\}$，如果 $M \cap N \neq \varnothing$，那么 a 的范围是________.

4 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$，且 $\{x \mid x > 0\} \cap A = \varnothing$，则实数 p 的取值范围是________.

5 若 $M = \{(x, y) \mid |\tan \pi y| + \sin^2 \pi x = 0\}$，$N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$，则 $M \cap N$ 的元素个数是________.

6 已知两个复数集合 $M = \{z \mid z = \cos\alpha + (4 - \cos^2\alpha)\mathrm{i}, \alpha \in \mathbf{R}\}$，$N = \{z \mid z = \cos\beta + (\lambda + \sin\beta)\mathrm{i}, \beta \in \mathbf{R}\}$. 当 $M \cap N \neq \varnothing$ 时，实数 λ 的取值范围是________.

7 若集合 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$，$B = \{x \mid m + 1 \leqslant x \leqslant 2m - 1\}$，且 $A \cap B = B$，则实数 m 的取值范围是________.

8 设全集 $U=\{x \mid x=2n-1,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\leqslant 7\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{3,7\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{9,13\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,11\}$. 则 $A=$________，$B=$________.

9 设集合 $A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$. 则实数 $a=$________.

10 集合 $A=\{(x,y) \mid \sin(3x+5y)>0$，且 $x^2+y^2\leqslant\pi^2\}$ 所构成的平面图形的面积是________.

11 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m>n$，集合 $A=\{1,2,\cdots,m\}$，$B=\{1,2,\cdots,n\}$，又 $C\subset A$，$B\cap C\neq\varnothing$. 则这样的集合 C 的个数是________.

12 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，d 为公差，且 a_1 和 d 均为实数，$d\neq 0$，它的前 n 项和记作 S_n. 设集合 $A=\left\{\left(a_n,\dfrac{S_n}{n}\right)\middle| n\in\mathbf{N}^*\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{1}{4}x^2-y^2=1,\ x,y\in\mathbf{R}\right\}$. 下列结论是否正确？如果正确，请给出证明；如果不正确，请举一个例子说明：

(1) 以集合 A 中的元素为坐标的点都在同一直线上；

(2) $A\cap B$ 至多有一个元素；

(3) $a_1\neq 0$ 时，一定有 $A\cap B\neq\varnothing$.

13 已知 $A=\{(x,y) \mid x=n,\ y=na+b,\ n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y) \mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是坐标平面内的三个点集. 试问，是否存在实数 a、b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$、点 $(a,b)\in C$ 同时成立？若存在，请求出 a、b 的值；若不存在，则说明理由.

14 给定自然数 $a\geqslant 2$，集合 $A=\{y \mid y=a^x,\ x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y \mid y=(a+1)x+b,\ x\in\mathbf{N}\}$. 在区间 $[1,a]$ 上是否存在 b，使得 $C=A\cap B\neq\varnothing$？如果存在，试求 b 的一切可能值及相应的集合 C；如果不存在，试说明理由.

15 设 Z 表示所有整数的集合. 对于固定的 $A,B,C\in\mathbf{Z}$，令

$$M_1=\{x^2+Ax+B \mid x\in\mathbf{Z}\},$$

$$M_2=\{2x^2+2x+C \mid x\in\mathbf{Z}\},$$

求证：对任何 $A,B\in\mathbf{Z}$，都可选取 $C\in\mathbf{Z}$，使得集合 M_1 与 M_2 互不相交.

16 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 Z 是 S_n 的子集，把 Z 中的所有数的和称为 Z 的“容量”（规定空集的容量为 0）. 若 Z 的容量为奇（偶）数，则称 Z 为 S_n 的奇（偶）子集.

(1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等；

(2) 求证：当 $n \geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等；

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

17 已知一族集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 具有性质：

(1) 每个 A_i 含 30 个元素；

(2) 对每一对 i、j，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，$A_i \cap A_j$ 恰含有一个元素；

(3) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \varnothing$.

求使这些集合存在的最大的正整数 n.

18 设 $M = \{1, 2, \cdots, 20\}$，对于 M 的任一 9 元子集 S，函数 $f(S)$ 取 1～20 之间的整数值. 求证：不论 f 是怎样的一个函数，总存在 M 的一个 10 元子集 T，使得对所有的 $k \in T$，都有

$$f(T-\{k\}) \neq k \ (T-\{k\} \text{ 为 } T \text{ 对 } \{k\} \text{ 的差集}).$$

19 设 $k \geqslant 6$ 为自然数，$n = 2k-1$. T 为所有 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合，其中 $x_i \in \{0, 1\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in T$，定义

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

特别地有 $d(x, x) = 0$. 设有一个由 T 的 2^k 个元素组成的子集 S，使对任何 $x \in T$，都存在惟一的 $y \in S$，使得 $d(x, y) \leqslant 3$. 求证：$n = 23$.

20 设 $n \in \mathbf{N}^*$，而 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是集合 B 的一族子集且满足条件：

(1) 每个 A_i 中恰含有 $2n$ 个元素；

(2) $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ 恰含有一个元素；

(3) B 中每个元素至少属于两个子集 A_{i_1} 和 A_{i_2}，$1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2n+1$.

试问：对怎样的 $n \in \mathbf{N}^*$，可以将 B 中的每一个元素贴上一张写有 0 或 1 的标签，使得每个 A_i 中恰好有 n 个元素贴有标签 0？试说明理由.

3 有限集元素的数目

我们知道集合可以分为有限集和无限集两类. 研究无限集元素的"数目"是一个困难而有趣的问题，最出名的就是所谓"连续统假设"，但它不是我们的话题. 我们要讨论的问题仅与有限集有关.

一、有限集的阶

有限集 A 的元素的数目叫做这个集合的阶，记作 $|A|$（或 $n(A)$）.

例 1 设集合 $A=\left\{(x, y, z) \middle| \log_{\frac{1}{4}}(x^4+y^4+z^4+1) \geqslant \log_4 \frac{1}{x}+\log_4 \frac{1}{y}+\log_4 \frac{1}{z}-1\right\}$. 求 $|A|$.

分析 无疑应从考察 (x, y, z) 满足的条件入手.

解 由 $\log_{\frac{1}{4}}(x^4+y^4+z^4+1) \geqslant \log_4 \frac{1}{x}+\log_4 \frac{1}{y}+\log_4 \frac{1}{z}-1$ 得

$$x^4+y^4+z^4+1 \leqslant 4xyz, \ x, y, z>0.$$

又由算术几何平均不等式，得

$$x^4+y^4+z^4+1 \geqslant 4xyz,$$

其中等号当且仅当 $x=y=z=1$ 时成立. 于是

$$x^4+y^4+z^4+1=4xyz.$$

从而 $$x=y=z=1.$$

所以，$|A|=1$.

例 2 设集合 $A=\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 2000, a=4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{b \mid 1 \leqslant b \leqslant 3000, b=3k-1, k \in \mathbf{Z}\}$. 求 $|A \cap B|$.

分析 令 $4k+1=3m-1$，得 $m=\frac{4k+2}{3}=k+1+\frac{k-1}{3}$. 因 $m \in \mathbf{Z}$，所以 $3 \mid k-1$. 令 $k-1=3r, r \in \mathbf{Z}$，得 $m=4r+2$. 这时 $b=12r+5$，故 $A \cap B$

的元素是形如 $12r+5$ 的整数.

解　形如 $4k+1$ 的数可分为 3 类：

$$12l+1,\ 12l+5,\ 12l+9\ (l\in\mathbf{Z}),$$

其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数. 令

$$1\leqslant 12l+5\leqslant 2000\ (l\in\mathbf{Z}),$$

得 $0\leqslant l\leqslant 166$. 所以，$A\cap B=\{5,\ 17,\ \cdots,\ 1997\}$.

所以，$|A\cap B|=167$.

以上两例，我们都是采用列举出集合的全部元素的办法来求其元素的数目. 对于一些较为复杂的集合，这种方法是很难奏效的，这时必须另辟蹊径.

例 3　设 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 是集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中 n 个元素的一个排列，记所有满足

$$k\mid 2(a_1+a_2+\cdots+a_k),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

的排列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 的集合为 A_n. 求 $|A_n|$ 的值.

分析　显然 $1\mid 2a_1$，$n\mid 2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，我们需要研究当 $2\leqslant k\leqslant n-1$ 时，$k\mid 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)$ 应满足的条件. 对于一般的 k，我们没有更好的办法来表示 $a_1+a_2+\cdots+a_k$，但当 $k=n-1$ 时，显然有 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=1+2+\cdots+n-a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$，于是 $n-1\mid 2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$ 等价于 $n-1\mid n(n+1)-2a_n$，问题转化为对 a_n 的研究.

解　设 $F_n=|A_n|$. 容易算出 $F_1=1$，$F_2=2$，$F_3=6$.

当 $n>3$ 时，对于任意 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in A_n$，有

$$\begin{aligned}&2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\\=&\ n(n+1)-2a_n\equiv 2-2a_n(\bmod\ (n-1)).\end{aligned}$$

由 A_n 的定义，必有

$$n-1\mid 2-2a_n.$$

故 $a_n=1$，或 $a_n=n$，或 $a_n=\dfrac{n+1}{2}$.

(1) 若 $a_n=\dfrac{n+1}{2}$，则

$$\begin{aligned}2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})&=n(n+1)-2a_{n-1}-(n+1)\\&=n^2-1-2a_{n-1}\\&\equiv 3-2a_{n-1}(\bmod(n-2)).\end{aligned}$$

从而有

$$n-2 \mid 3-2a_{n-1}.$$

解得 $a_{n-1}=\dfrac{n+1}{2}$. 于是 $a_{n-1}=a_n$，矛盾.

(2) 若 $a_n=n$，则$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, n)$与 A_{n-1} 的元素$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$形成一一对应关系. 所以，这样的排列共有 F_{n-1}种.

(3) 若 $a_n=1$，则$(a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{n-1}-1)$是集合$\{1, 2, \cdots, n-1\}$中 $n-1$ 个元素的一个排列. 由

$$\begin{aligned}&2[(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_k-1)]\\&=2(a_1+a_2+\cdots+a_k)-2k\\&\equiv 0(\bmod k)\\&\Leftrightarrow(a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{n-1}-1)\in A_{n-1}\end{aligned}$$

知$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 1)$与 A_{n-1} 的元素$(a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{n-1}-1)$之间也形成一一对应关系. 故这样的排列也有 F_{n-1}种.

由(2)、(3)，可建立递推关系

$$F_n=2F_{n-1}, n>3.$$

由 $F_3=6$，得 $F_n=3\cdot 2^{n-2}(n\geqslant 3)$.

综上，当 $n=1$ 时，$F_1=1$；当 $n=2$ 时，$F_2=2$；当 $n\geqslant 3$ 时，$F_n=3\cdot 2^{n-2}$.

说明 这里，我们通过建立 F_n 与 F_{n-1}之间的联系(递推关系)来达到求解的目的。

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，$f_k=|\{a_i \mid a_i<a_k, i>k\}|$，$g_k=|\{a_i \mid a_i>a_k, i<k\}|$，其中 $k=1, 2, \cdots, n$. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n} g_k=\sum_{k=1}^{n} f_k.$$

分析 一般来说 $f_k\neq g_k$，且分别计算 f_k、g_k 是困难的. 令 $A_k=\{a_i \mid a_i<a_k, i>k\}$，对 A_k 换一种写法：$A_k=\{(a_i, a_k) \mid a_i<a_k, i>k\}$，显然是合理的. 易知 $k\neq k'$ 时，$A_k\cap A_k'=\varnothing$. 所以，$\sum_{k=1}^{n} f_k=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|\{(a_i, a_j) \mid a_i<a_j, i>j\}|$.

证明 考虑集合 $A=\{(a_i, a_j) \mid a_i<a_j, i>j\}$ 的元素的数目 $|A|$.

一方面，固定 a_j 时，a_i 的个数为 f_j. 所以

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}f_j.$$

另一方面，固定 a_i 时，a_j 的个数为 g_i，所以

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}g_i.$$

所以，$\sum_{k=1}^{n}g_k=\sum_{k=1}^{n}f_k$.

说明 在这里，我们没有直接证明 $\sum_{k=1}^{n}g_k=\sum_{k=1}^{n}f_k$，而是引入一个中间量 $|A|=|\{(a_i,a_j)\mid a_i<a_j,i>j\}|$ 来过渡.

二、有关集合阶的不等式

有些集合虽然不能准确求出其元素的数目，但是我们可以利用不等式来估计其阶的范围.

例5 设 $p\geqslant 5$ 是一个素数，$S=\{1,2,\cdots,p-1\}$，$A=\{a\mid a\in S,a^{p-1}\not\equiv 1\pmod{p^2}\}$. 证明：$|A|\geqslant\frac{p-1}{2}$.

分析 如果 $1\leqslant a\leqslant p-1$，显然 $1\leqslant p-a\leqslant p-1$. 将 a 与 $p-a$ 配对，如果 a^{p-1} 与 $(p-a)^{p-1}$ 模 p^2 不同余，则结论成立.

证明 设 $a\in S$，则 $p-a\in S$. 由二项式定理，有

$$(p-a)^{p-1}-a^{p-1}\equiv-(p-1)a^{p-2}\cdot p\not\equiv 0\pmod{p^2}.$$

于是，a 和 $p-a$ 中至少有一个在 A 中，从而有

$$|A|\geqslant\frac{p-1}{2}.$$

例6 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,2003\}$ 的子集，且 $|A_i|\geqslant 660$，$i=1,2,\cdots,30$. 证明：存在 $i\neq j$，$i,j\in\{1,2,\cdots,30\}$，使得 $|A_i\cap A_j|\geqslant 203$.

证明 不妨设每一个 A_i 的元素都为 660 个（否则去掉一些元素）. 作一个集合、元素的关系表：表中每一行（除最上面的一行外）分别表示 30 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$，表的 n 列（最左面一列除外）分别表示 2003 个元素 1，2，…，2003. 若 $i\in A_j(i=1,2,\cdots,2003,1\leqslant j\leqslant 30)$，则在 i 所在的列与 A_j 所在行的交叉处写上 1，若 $i\notin A_j$，则写上 0.

	1	2	3	…	2003
A_1	×	×	×	…	×
A_2	×	×	×	…	×
…	×	×	×	…	×
A_{30}	×	×	×	…	×

表中每一行有 660 个 1，因此共有 30×660 个 1. 设第 j 列有 m_j 个 1 $(j=1, 2, \cdots, 2003)$，则

$$\sum_{j=1}^{2003} m_j = 30\times 660.$$

由于每个元素 j 属于 $C_{m_j}^2$ 个交集 $A_s\cap A_t$，因此

$$\sum_{j=1}^{2003} C_{m_j}^2 = \sum_{1\leqslant s<t\leqslant 30} |A_s\cap A_t|.$$

由柯西不等式，得

$$\sum_{j=1}^{2003} C_{m_j}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right).$$

所以，必有 $i\neq j$，满足

$$|A_i\cap A_j| \geqslant \frac{1}{C_{30}^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right)$$

$$= \frac{660(30\times 660-2003)}{29\times 2003} > 202,$$

从而

$$|A_i\cap A_j| \geqslant 203.$$

说明　本题中所作的表，称为元素、集合从属关系表. 它在讨论涉及多个集合的问题时非常有用.

例 7　设 $n, k\in \mathbf{N}^*$，且 $k\leqslant n$. 并设 S 是含有 n 个互异实数的集合，$T=\{a \mid a=x_1+x_2+\cdots+x_k,\ x_i\in S,\ x_i\neq x_j(i\neq j),\ 1\leqslant i,\ j\leqslant k\}$. 求证：$|T|\geqslant k(n-k)+1$.

分析　设 $S_n=\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$，且 $s_1<s_2<\cdots<s_{n-1}<s_n$. 作 S_n 的子集 $S_{n-1}=\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\}$，设 S_{n-1}、S_n 分别对应 T_{n-1}、T_n. 对固定的 k $(k\leqslant n-1)$，由 $s_{n-1}+s_{n-2}+\cdots+s_{n-k}<s_n+s_{n-2}+\cdots+s_{n-k}<s_n+s_{n-1}+s_{n-3}$

$+\cdots+s_{n-k}<\cdots<s_n+s_{n-1}+\cdots+s_{n-k+1}$，知 $|T_n|\geqslant|T_{n-1}|+k$. 而 $k(n-k)+1=k(n-1-k)+k+1$，这提示我们对 n 进行归纳证明.

证明 设 $s_1<s_2<\cdots<s_n$ 是 S 的 n 个元素. 对元素数目 n 使用数学归纳法.

首先，当 $k=1$ 和 $k=n$ 时，结论显然成立. 设 $k\leqslant n-1$，且结论对 $S_0=\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\}$ 成立，并设 T_0 是当把 S 换成 S_0 时与 T 相应的集合. 于是有

$$|T_0|\geqslant k(n-k-1)+1.$$

令 $x=s_n+s_{n-1}+\cdots+s_{n-k}$，并令

$$y_i=x-s_{n-i},\ i=0, 1, \cdots, k.$$

显然 $y_i\in T$，且有 $y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k$. 因为 y_0 是 T_0 中的最大元素，所以

$$y_i\in T,\ y_i\notin T_0,\ i=1, 2, \cdots, k.$$

故有

$$|T|\geqslant|T_0|+k\geqslant k(n-k-1)+1+k=k(n-k)+1.$$

这就完成了归纳证明.

三、有关集合阶的最大(小)值

对于满足一定条件的一组集合，如何确定集合元素数目的最大(小)值，这也是一类常见的问题.

例8 设 S 是一个由正整数组成的集合，具有如下性质：对任意 $x\in S$，在 S 中去掉 x 后，剩下的数的算术平均值都是正整数，并且 $1\in S$，2002 是 S 中的最大元. 求 $|S|$ 的最大值.

分析 显然 1 是 S 中的最小元. 设 S 的元素为 $1=x_1<x_2<\cdots<x_n=2002$，由 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-x_j}{n-1}\in\mathbf{N}^*$，我们来估计 $|S|$ 的范围.

解 设 S 中的元素为

$$1=x_1<x_2<\cdots<x_n=2002,$$

则对于 $1\leqslant j\leqslant n$，均有

$$y_j=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)-x_j}{n-1}\in\mathbf{N}^*.$$

从而，对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有

$$y_i - y_j = \frac{x_j - x_i}{n-1} \in \mathbf{N}^*.$$

特别地，应有 $n-1 \mid (2002-1)$，即

$$n-1 \mid 2001.$$

另一方面，对于 $1 < j \leqslant n$，均有

$$x_j - 1 = (y_1 - y_j)(n-1),$$

从而
$$n-1 \mid (x_j - 1).$$

又 $x_j - x_{j-1} = (x_j - 1) - (x_{j-1} - 1)$，所以

$$(n-1) \mid (x_j - x_{j-1})\ (j = 2, \cdots, n),$$

于是
$$\begin{aligned} x_n - 1 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - 1) \\ &\geqslant (n-1) + (n-1) + \cdots + (n-1) = (n-1)^2, \end{aligned}$$

即 $(n-1)^2 \leqslant 2001$，$n \leqslant 45$. 结合 $n-1 \mid 2001$，知 $n = 2, 4, 24, 30$，故 $n \leqslant 30$.

另一方面，令 $x_j = 29j - 28$，$1 \leqslant j \leqslant 29$，$x_{30} = 2002$，则 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_{30}\}$ 具有题述性质.

所以，$|S|$ 的最大值为 30.

说明 先估计 $|S| = n$ 的上界，即 $n \leqslant 30$，再构造一个实例说明 $n = 30$ 是可以达到的，从而知 n 的最大值为 30. 这种“先估计，再构造”的方法在解决离散型最值问题时经常被用到.

例 9 试求出同时满足下列条件的集合 S 的元素个数的最大值：

(1) S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数；

(2) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数等于 1；

(3) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数大于 1.

分析 若 $a+b$ 为质数，则条件(3)无法满足. 而 101 就是一个质数，这说明数组 $\{1, 100\}$，$\{2, 99\}$，$\cdots$，$\{50, 51\}$ 中，每组的两个数不同时在 S 中. 那么在每组数中各取一个数组成的集合是否满足所有条件呢?

解 构造 50 个数组：

$$\{1, 100\}, \{2, 99\}, \cdots, \{50, 51\},$$

每个数组中的两个数之和是 101.

由于 101 是质数，在 S 中不存在元素 c，使得 101 与 c 的最大公约数大于 1. 因此，在 S 中不可能同时含有上述数组中的同一数组中的两个数. 由抽屉原理可知，集合 S 中元素的个数不大于 50.

另一方面，我们构造集合 $A=\{2, 1, 3, 5, 7, \cdots, 95, 97\}$. 此集合含有 2 和小于 98 的 49 个奇数.

下面说明集合 A 满足题设条件.

对于集合 A 中的任意两个元素 a 和 b：

(i) 若 $a=2$，则 b 是奇数.

若 $b=1$，易见 A 中存在元素 c 满足题设条件；

若 $3\leqslant b\leqslant 95$，则 A 中元素 1 与 $a+b$ 的最大公约数等于 1，A 中元素 $b+2$ 与 $a+b$ 的最大公约数是 $b+2$ 大于 1；

若 $b=97$，易见 A 中存在元素 c 满足题设条件.

(ii) 若 a、b 都不等于 2，则 a、b 都是奇数，$a+b$ 是偶数. 于是，$a+b$ 与 2 的最大公约数是 2 大于 1，且 $a+b$ 与 1、89、91 中的某个数必互质.

所以，集合 A 满足题设条件.

因此，集合 S 的元素个数的最大值是 50.

例 10 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ 是 20 个两两不同的整数，且集合 $\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant 20\}$ 中有 201 个不同的元素. 求集合 $\{|a_i-a_j| \mid 1\leqslant i<j\leqslant 20\}$ 中不同元数个数的最小可能值.

分析 从 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ 中任取两个(可以相等)相加，至多有 $C_{20}^2+20=210$ 个不同的和，由题设知，所有 a_i+a_j 中有些和数相等. 另一方面，应使所有的 $|a_i-a_j|$ 中出现尽可能多的相等的情况. 由此，可构造一组特殊的数：$a'_1, a'_2, \cdots, a'_{20}$.

解 所给集合的元素个数的最小值为 100.

首先，令 $a_i=10^{11}+10^i$，$a_{10+i}=10^{11}-10^i$，$i=1, 2, \cdots, 10$. 则 $\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant 20\}$ 中共有 $(20+19+\cdots+1)-10+1=201$ 个不同的元素，而 $\{|a_i-a_j| \mid 1\leqslant i<j\leqslant 20\}=\{2\times 10^i \mid i=1, 2, \cdots, 10\}\cup\{|10^i\pm 10^j| \mid 1\leqslant i<j\leqslant 10\}$ 共有 $10+2C_{10}^2=100$ 个不同的元素.

下面用反证法证明：所给集合的不同元素的个数不小于 100.

若存在一个使所给集合的元素个数小于 100 的集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_{20}\}$. 我们计算 S 的“好子集”$\{x, y, z, w\}$ 的个数，这里 $x<y\leqslant z<w$，且 $x+w=y+z$.

对 S 中满足 $b>c$ 的数对 (b, c)（共 190 对），考虑它们的差 $b-c$，由于至多

有 99 个不同的差(这里用到反证法假设)，故必有至少 91 个数对 (b, c)，使得存在 $b', c' \in S$，满足 $b' < b$，$c' < c$，且 $b - c = b' - c'$. 对这样的 91 个数对 (b, c)，它与其相应的 b'，c' 形成 S 的一个 4 元集 $\{b, c, b', c'\}$，可得到 S 的一个"好子集" $\{x, y, z, w\}$，且至多两个数对 (b, c) 形成相同的子集 $\{x, y, z, w\}$（只能是 $(b, c) = (w, z)$ 和 (w, y)）. 故 S 的"好子集"至少有 46 个.

另一方面，S 的"好子集" $\{x, y, z, w\}$ 的个数等于 $\sum \frac{1}{2} s_i(s_i - 1)$，这里 s_i 为 S 中满足 $b + c = i$，$b \leqslant c$ 的数对 (b, c) 的个数，其中 i 为正整数.

注意到，对每个 i，S 中的每个元素 s 至多出现在上面的一个数对 (b, c) 中（事实上，当 $s \leqslant i - s$ 时，s 出现在数对 $(s, i - s)$ 中，其余情况出现在 $(i - s, s)$ 中），于是 $s_i \leqslant 10$. 从而在 $s_i \neq 0$ 时，$1 \leqslant s_i \leqslant 10$，故 $\frac{1}{2} s_i(s_i - 1) \leqslant 5s_i - 5$. 由于集合 $\{a_i + a_j \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 20\}$ 中有 201 个不同的元素，故使得 $s_i \geqslant 1$ 的正整数 i 有 201 个，设 T 为这样的 i 组成的集合. 易知 S 中有 C_{20}^2 对 (b, c) 满足 $b < c$，有 20 对 (b, c) 满足 $b = c$，所以 $\sum\limits_{i \in T} s_i = \mathrm{C}_{20}^2 + 20 = 210$. 于是，

$$\sum_{i \in T} \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) \leqslant \sum_{i \in T} (5s_i - 5) = 5 \times (210 - 201),$$

这与 S 的"好子集"至少有 46 个矛盾.

所以，所给集合中，至少有 100 个不同的元素.

习 题 3

1 设 $f(x) = x^2 + x - 2$，$A = \{n \mid 1 \leqslant n \leqslant 100, n \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{y \mid y = f(n), n \in A\}$，则集合 $B \cap \{2m \mid m \in \mathbf{Z}\}$ 的元素的个数是________.

2 设 $M = \{1, 2, \cdots, 1995\}$，$A$ 是 M 的子集，且满足条件：当 $x \in A$ 时，$15x \notin A$. 则 A 中元素个数最多是________.

3 把集合 $\{1, 2, \cdots, 10^6\}$ 划分成两个不交的子集，一个是所有可以表示为一个完全平方数与一个完全立方数之和的数所成的子集，另一个是集合中所有其余的数所成的子集. 问哪一个子集元素较多？说明理由.

4 集合 $\{00, 01, \cdots, 98, 99\}$ 的子集 X 满足：在任一无穷的数字序列中均有 2 个相邻数字构成 X 的元素. X 最少应含多少个元素？

5 设 S 是 n 个不同实数的集合，A_s 是由 S 中所有互不相同的两元素的平均值所组成的集合. 对给定 $n \geqslant 2$，A_s 最少可能有多少个元素？

6 集 $A=\{z \mid z^{18}=1\}$，$B=\{w \mid w^{48}=1\}$ 都是 1 的复单位根的集合，$C=\{zw \mid z \in A, w \in B\}$ 也是 1 的复单位根的集合. 问集合 C 中含有多少个元素?

7 集合 A 的元素都是整数,其中最小的是 1,最大的是 100. 除 1 以外,每一个元素都等于集合 A 的两个数(可以相同)的和. 求集合 A 的元素个数的最小值.

8 设 M 为有限数集,现知从它的任何 3 个元素中都可以找出两个数,它们的和属于 M. 试问: M 中最多可能有多少个元素?

9 设 A 是一个正整数的集合,且对任意 $x, y \in A$,都有 $|x-y| \geqslant \frac{xy}{25}$. 求证: A 中最多有 9 个元素.

10 对于集合 $S=\{(a_1, a_2, \cdots, a_5) \mid a_i=0$ 或 $1, i=1, 2, \cdots, 5\}$ 中的任意两个元素 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_5)$ 和 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_5)$,定义它们的距离为: $d(A, B)=|a_1-b_1|+\cdots+|a_5-b_5|$. 取 S 的一个子集 T,使 T 中任意两个元素之间的距离都大于 2. 问子集 T 中最多含多少个元素? 证明你的结论.

11 求最大正整数 n,使得 n 元集合 S 同时满足:

(1) S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数;

(2) 对于 S 的两个数 a 和 b(可以相同),它们的乘积 ab 不属于 S.

12 我们称一个正整数的集合 A 是“一致”的,是指: 删除 A 中任何一个元素之后,剩余的元素可以分成两个不相交的子集,而且这两个子集的元素之和相等. 求最小的正整数 n $(n>1)$,使得可以找到一个具有 n 个元素的“一致”集合 A.

13 已知集合 $M=\{A \mid A$ 是各位数字互不相同的十位正整数,且 $11111 \mid A\}$. 求 $|M|$.

14 设 F 是所有有序 n 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 构成的集合,其中 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 2002\}$ 的子集,设 $|A|$ 表示集合 A 的元素的数目,对 F 中的所有元素 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$,求 $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ 的总和,即

$$\sum_{(A_1, A_2, \cdots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

15 设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系,S 是空间中的一个由有限个点所形成的集合,S_x、S_y、S_z 分别是 S 中所有的点在 Oyz 平面、Ozx 平面、Oxy 平面上的正交投影所成的集合. 证明

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

其中$|A|$表示有限集合 A 中的元素数目.

（说明：所谓一个点在一个平面上的正交投影是指由点向平面所作垂线的垂足.）

16 设 S 为十进制中至多有 n 位数字的所有非负整数所成的集合，S_k 由 S 中那些数字之和小于 k 的元素组成. 对于怎样的 n，有 k 存在，使得 $|S|=2|S_k|$？

17 n、m 为正整数，$A=\{1, 2, \cdots, n\}$，$B_n^m=\{(a_1, a_2, \cdots, a_m) \mid a_i \in A, i=1, 2, \cdots, m\}$ 满足：

(1) $|a_i - a_{i+1}| \neq n-1$，$i=1, 2, \cdots, m-1$；

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_m (m \geqslant 3)$ 中至少有三个不同.

求 B_n^m 和 B_6^3 的元素的个数.

18 设 S 为平面上给定的有限整点集，A 为 S 的满足任两点的连线都不平行于坐标轴的元素个数最多的子集，B 为整数集的满足对任意 $(x, y) \in S$，总有 $x \in B$ 或 $y \in B$ 的元素个数最少的子集. 证明：$|A| \geqslant |B|$.

4 集合的分划

一个集合可以写成若干个集合的并集，例如集合$\{1, 2, 3, 4, 5\}$，可以写成两个集合$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$的并集$A\cup B$；也可以写成三个集合$C=\{1, 2\}$，$D=\{3, 5\}$，$E=\{4\}$的并集$C\cup D\cup E$，等等. 下面我们来研究将一个集合表示成若干个集合的并集的一种特殊情形.

定义 把一个集合M分成n个非空的子集：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果：

(1) $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(1\leqslant i, j\leqslant n, i\neq j)$；

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=M$，

那么，这些子集的全体叫做集合M的一个n-分划.

由集合分划的定义，容易证明有限集的一个非常有用的性质：

加法原理 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限集M的一个n-分划，则

$$|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|,$$

这是一个基本的计数公式.

集合的分划引出了大量有趣的数学问题.

例1 试将集合$\{1, 2, \cdots, 1989\}$分为117个互不相交的子集A_i $(i=1, 2, \cdots, 117)$，使得：

(1) 每个A_i都含有17个元素；

(2) 所有A_i中各元素之和都相同.

分析 因为$1989=117\times17$，故可将$\{1, 2, \cdots, 1989\}$顺次分成17段，每段含117个数. 显然，只要把每段的117个数适当地分别放入$A_1, A_2, \cdots, A_{117}$中以使条件(2)满足，问题就解决了.

解 将集合$\{1, 2, \cdots, 1989\}$中的数从小到大顺次分成17段，每段含117个数.

从第4段数开始，将偶数段的数从小到大依次放入$A_1, A_2, \cdots, A_{117}$中，并将奇数段的数从大到小依次放入这117个子集中. 易见，所有集合中的14

个数之和都相等. 于是问题归结为如何将前三段数$\{1, 2, \cdots, 351\}$每 3 个一组分别放入每个集中，且使每组 3 数之和都相等.

把这些数中 3 的倍数抽出来从大到小排好：$\{351, 348, 345, \cdots, 6, 3\}$，共 117 个数，依次放入 A_1，A_2，…，A_{117} 中. 其余的 234 个数从小到大排列并分成两段，每段 117 个数，即$\{1, 2, 4, 5, 7, \cdots, 173, 175\}$和$\{176, 178, 179, \cdots, 349, 350\}$. 将这两段数分别顺次放入 A_1，A_2，…，A_{117} 之中便满足要求. 事实上，若将这两段数中的数顺次相加，则其和为$\{177, 180, 183, 186, \cdots, 522, 525\}$. 由此可见，放入每个 A_i 的 3 数之和都是 528.

说明 上述解法是通过具体地构造 A_i $(i=1, 2, \cdots, 117)$完成的. 由此不难看出，这种构造方式不是惟一的，有兴趣者不妨一试.

例 2 集合 $H=\{1, 2, \cdots, 9\}$的分拆 p 是将 H 表示为两两不相交的子集的并. 对于 $n\in H$ 和分拆 p，将包含 n 的子集中元素的数目记为 $p(n)$. 例如，若 p：$\{1, 4, 5\}\cup\{2\}\cup\{3, 6, 7, 8, 9\}$，则 $p(6)=5$. 证明：对 H 的任意两个分拆 p_1、p_2，存在 H 的两个不同的元素 m、n，使得

$$p_1(m)=p_1(n),\ p_2(m)=p_2(n).$$

分析 因为 H 只有 9 个元素，对于一个确定的分拆 p，$p(i)$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$只有三种不同的取值，这是因为若有四种不同的取值，则至少需要 $1+2+3+4=10$ 个元素. 这就给我们打开了一条通过对 $p(i)$可能的取值个数的研究解决问题的思路.

解 用反证法. 假设可以找到 H 的两个分拆 p_1、p_2，使不存在 H 的两个不同的元素 m、n，满足

$$p_1(m)=p_1(n),\ p_2(m)=p_2(n).$$

对于确定的 p_1，若 $p_1(i)$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$有四种不同的取值，则至少需要 $1+2+3+4=10$ 个元素，而 $|H|=9$，矛盾. 所以，$p_1(i)$至多有三种不同的取值.

若同时有四个元素的 $p_1(i)$取值相等，由于 $p_i(i)$至多有三个不同取值，所以，必有四个中的两个元素 m、n，使得 $p_2(m)=p_2(n)$，与假设矛盾.

若 $p_1(i)$至多有两种不同的取值，由抽屉原理知，至少有 H 的四个不同元素的 $p_1(i)$值相同. 这说明对于任意确定的 p_1，$p_1(i)$恰有三种不同取值，且每种取值有三个元素取到. 也就是说对于分拆 p_1，H 的每一个子集的元素个数不超过 3. 不妨设

$$p_1(1)=p_1(2)=p_1(3)=1,$$
$$p_1(4)=p_1(5)=p_1(6)=2,$$

$$p_1(7)=p_1(8)=p_1(9)=3.$$

但 $p_1(4)=p_1(5)=p_1(6)=2$ 是不可能的. 这就否定了假设.

例 3　对一个由非负整数组成的集合 S，定义 $r_s(n)$ 为满足下述条件的有序对 (s_1, s_2) 的对数：

$$s_1 \in S,\ s_2 \in S,\ s_1 \neq s_2, \text{且 } s_1+s_2=n.$$

问：是否能将非负整数集分划为两个集合 A 和 B，使得对任意 n，均有 $r_A(n)=r_B(n)$？

分析　整数有多种表示形式，其中二进制表示的每位数字只有 0 和 1 这两种选择. 由于是将 S 分划为两个集合 A、B，对每个固定的 n，满足 $s_1+s_2=n$ 的非负整数对 (s_1, s_2) 是有限的，用二进制数来讨论 (s_1, s_2) 在 A 和 B 中的分配情况似乎较有利.

解　存在上述的分划.

将所有二进制表示下数码 1 出现偶数个的非负整数归入集合 A，其余的非负整数归入 B，则 A、B 是非负整数集 N 的分划.

注意到，对 A 中满足 $a_1+a_2=n$，$a_1 \neq a_2$，$a_1, a_2 \in A$ 的数对 (a_1, a_2)，由于 $a_1 \neq a_2$，因此在二进制表示下 a_1 与 a_2 必有一位上的数码不同，从右到左看，第 1 个不同数码的数位上，改变 a_1、a_2 在该位上的数码，分别得到 b_1、b_2，则 b_1、$b_2 \in B$，且 $b_1 \neq b_2$，$b_1+b_2=n$. 这个将 (a_1, a_2) 对应到 (b_1, b_2) 的映射是一一对应，因此 $r_A(n)=r_B(n)$.

说明　这是一个存在性问题. 我们是利用二进制数构造 S 的 2-分划 A、B，然后通过建立 A 中有序对集 $\{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2, a_1+a_2=n\}$ 与 B 中有序对集 $\{(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2, b_1+b_2=n\}$ 的一一对应来解决的. 利用一一对应解决计数问题的方法就是所谓的配对原理.

例 4　设集合 $A=\{1, 2, \cdots, m\}$. 求最小的正整数 m，使得对 A 的任意一个 14-分划 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$，一定存在某个集合 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 14)$，在 A_i 中有两个元素 a、b，满足 $b<a \leqslant \frac{4}{3}b$.

分析　由于要考虑的是一种极端情况，我们来作一张元素、集合从属关系的表：从 1 开始，由小到大每 14 个数为一组，依次填入表中的每一列中（如表 4-1）. 填满 4 列后，观察发现：去掉右下角的数 56 后，子集 $A_1, A_2, \cdots, A_{13}$ 中每一个都有 4 个元素，而 A_{14} 有 3 个元素，这时 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$ 任何一个中都不存在两个元素满足题中的不等式. 故 $m \geqslant 56$.

表 4-1

A_1	1	15	29	43	…
A_2	2	16	30	44	…
A_3	3	17	31	45	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_{12}	12	26	40	54	…
A_{13}	13	27	41	55	…
A_{14}	14	28	42	56	…

表 4-2

A_1	1	15	29	43
A_2	2	16	30	44
A_3	3	17	31	45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_{12}	12	26	40	54
A_{13}	13	27	41	55
A_{14}	14	28	42	

解 如表 4-2，第 i 行的数即为子集 A_i 的元素. 这时 $|A_i|=4$ $(i=1,2,\cdots,13)$，$|A_{14}|=3$. 显然，14 个子集每一个都不存在两个元素满足题中不等式. 所以，$m\geqslant 56$.

另一方面，若 $m=56$，则对 A 的任意分划 A_1，A_2，…，A_{14}，数 42，43，…，56 中，必有两个数属于同一个 A_i，取此二数为 a、b，则

$$42\leqslant a<b\leqslant 56=\frac{4}{3}\cdot 42\leqslant\frac{4}{3}a.$$

综上所述，所求 m 的最小正整数值为 56.

另解 若 $m<56$，令 $A_i=\{a\mid a\equiv i(\bmod 14),\ a\in A\}$，则对任意 $a,b\in A_i$ $(i=1,2,\cdots,14)$，$b<a$，均有 $56>a>b$，且 $a-b\geqslant 14$. 故 $b<a-14<42$. 于是

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\geqslant 1+\frac{14}{b}>1+\frac{14}{42}=\frac{4}{3}.$$

所以，$m\geqslant 56$.

后同前解.

例 5 证明：可以把自然数集分划为 100 个非空子集，使得对任何 3 个满足关系式 $a+99b=c$ 的自然数 a、b、c，都可以从中找出两个数属于同一子集.

分析 当然，只要能具体地构造一个满足条件的 100-分划即可. 在构造之前，有必要对关系式 $a+99b=c$ 进行讨论. 有两点是显然的：$a(\bmod 99)\equiv c(\bmod 99)$；$a$、$b$、$c$ 中偶数的个数为奇数. 我们的证明由此入手.

证明 按如下法则构造自然数集的子集：在第 i 个子集 $(1\leqslant i\leqslant 99)$ 中放入所有被 99 除余 $i-1$ 的偶数，而在第 100 个子集中放入所有的奇数. 显然，这是一个自然数集的 100-分划.

在任何满足方程 $a+99b=c$ 的自然数 a、b、c 中，偶数的个数为奇数，且

$a(\bmod 99)\equiv c(\bmod 99)$.

如果 a、b、c 中有两个为奇数，则此二奇数同属第 100 个子集；否则，它们全为偶数，且 a 和 c 被 99 除同余，故 a 与 c 仍属于同一子集.

例 6　设集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是集合 M 的两个 n-分划，已知对任意两个交集为空集的集合 A_i, B_j $(1\leqslant i, j\leqslant n)$，均有 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$. 求证：$|M|\geqslant\frac{n^2}{2}$.

分析　由 A_i、B_j 的交集为空集，有 $|A_i\cup B_j|=|A_i|+|B_j|\geqslant n$. 当每一个 $|A_i|\geqslant\frac{n}{2}$ 时，结论显然成立. 当某个 $|A_i|$，不妨设为 $|A_1|$ 小于 $\frac{n}{2}$ 时，设 $|A_1|=k$，这时与 A_1 相交的 B_j 至多有 k 个；而至少有 $n-k$ 个集合与 A_1 不相交，它们每一个的元素个数不小于 $n-k$. 假如 k 是所有 $|A_i|$、$|B_j|$ 中最小的，则有 $|M|\geqslant k\cdot k+(n-k)(n-k)\geqslant\frac{n^2}{2}$.

证明　设 $k=\min\{|A_i|, |B_j|, 1\leqslant i, j\leqslant n\}$，不妨设 $|A_1|=k$.

若 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则

$$|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\geqslant nk\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

若 $k<\frac{n}{2}$，由于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相交，故 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中至多有 k 个集合与 A_1 的交集不空，从而另外的 $n-k$ 个集合均与 A_1 的交集为空集，且这些集合的元素个数不小于 $n-k$. 由 $n>2k$，得 $n-k>k$. 于是我们有

$$\begin{aligned}|M|&=\sum_{i=1}^{n}|B_i|\geqslant k\cdot k+(n-k)\cdot(n-k)\\&=k^2+(n-k)^2\\&\geqslant\frac{1}{2}(k+(n-k))^2=\frac{n^2}{2}.\end{aligned}$$

综上所述，命题成立.

说明　本例的解答应用了最小数原理. 关于最小数原理的应用，我们将在后面作专门的介绍.

例 7　设自然数集分划成 r 个互不相交的子集：$\mathbf{N}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r$. 求证其中必有某个子集 A，它具有如下性质 P：存在 $m\in\mathbf{N}$，使对任何正整数 k，都能找到 $a_1, a_2, \cdots, a_k\in A$，满足

$$1 \leqslant a_{j+1} - a_j \leqslant m, \ j = 1, 2, \cdots, k-1.$$

分析 显然具有性质 P 的子集 A，不可能是 $\mathbf{N}$ 的 r-分划中的有限集. 不妨设 $\mathbf{N}$ 的 r-分划中的无限集为 $A_1, A_2, \cdots, A_{r'}$，令 $B = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{r'}$. 设 b 是集合 $A_{r'+1} \cup \cdots \cup A_{r-1} \cup A_r$ 中的最大自然数，则 b 以后的自然数都在 $N' = A_1 \cup B$ 中，即 N' 中存在任意有限长度的相继自然数段. 只需证明：若 A_1 不具有性质 P，则 B 必具有性质 P.

证明 先证下面的引理：

引理 设 $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$，且 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 两两不相交. 若 $A_i \cup A_{i+1} \cup \cdots \cup A_r$ 包含任意有限长度的相继自然数段. 而 A_i 不具有性质 P，则 $A_{i+1} \cup \cdots \cup A_r$ 中必定含有任意有限长度的相继自然数段.

引理的证明 若 A_i 不具有性质 P，则对于任给的 $m \in \mathbf{N}$，存在 $k(m) \in \mathbf{N}$，使得对于 A_i 的任何 $k(m)$ 个数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k(m)}$，都可找到下标 $j \in \{1, 2, \cdots, k(m)-1\}$，数 a_j 与 a_{j+1} 之间至少有 m 个相继自然数都不属于 A_i.

在 $A_i \cup A_{i+1} \cup \cdots \cup A_r$ 中选取一个长度为 $L = k(m)m$ 的相继自然数段. 若该段数中有 $k(m)$ 个数属于 A_i，则因 A_i 不具有性质 P，故在这 $k(m)$ 个数中，存在两个数 a_j 与 a_{j+1}，它们之间有 m 个相继自然数都不属于 A_i，当然就都属于 $A_{i+1} \cup \cdots \cup A_r$. 若选出的长度为 L 的相继自然数段中属于 A_i 的数少于 $k(m)$ 个，则当把这 L 个相继自然数依次分成 $k(m)$ 段，每段恰有 m 个数时，由抽屉原理知其中必有一段 m 个数中不含 A_i 中的数，当然都属于 $A_{i+1} \cup \cdots \cup A_r$. 由 $m \in \mathbf{N}$ 的任意性知引理成立.

回到原题的证明. 若 A_1 具有性质 P，则结论成立；若 A_1 不具有性质 P，则由引理知 $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$ 满足引理的条件. 若 A_2 具有性质 P，则结论成立；若 A_2 不具有性质 P，则 $A_3 \cup \cdots \cup A_r$ 又满足引理的条件. 这样继续下去，或者在某一步得出 A_{i_0} 具有性质 P，或者进行到最后，得到 A_r 含有任意有限长度的自然数段，当然具有性质 P.

说明 由上面的证明可以看出，本例可作如下的加强：设 $M \subset \mathbf{N}$，M 中存在任意有限长度的相继自然数段，作 M 的 r-分划：$A_1, A_2, \cdots, A_r$，则在这些子集中必存在某个子集 A 具有性质 P. 可以对 r 进行归纳证明.

例 8 将正整数集拆分为两个不相交的子集 A、B，满足条件：

(1) $1 \in A$；

(2) A 中没有两个不同的元素，使它们的和形如 $2^k + 2$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$；

(3) B 中也没有两个不同的元素，其和具有上述形式.

证明：这种拆分可以以唯一的方式实现，并确定 1987，1988，1989 所属

的子集.

分析 对任意的自然数 n，总存在非负整数 h，使 $2^h \leqslant n < 2^{h+1}$. 若 $m < n$，则存在 $n+m=2^h+2$ 或 $n+m=2^{h+1}+2$ 两种可能，只要将 n 与 m 置于不同的集合即可.

证明 因为 $1+2=2^0+2$，所以 $2\in B$. 设对小于 n 的数均有惟一的归属，且满足条件(1)、(2)、(3). 考虑 $n\ (n\geqslant 3)$，总有自然数 h，使

$$2^h \leqslant n < 2^{h+1}.$$

若 $n=2^h$，$h>1$，因 $2\in B$，故 $n\in A$. 这时，对 A 中任一元素 $m<n$，有

$$2^h < n+m < 2^{h+1}.$$

而 $m\neq 2$，所以 $n+m$ 不能写成 2^h+2 的形式. 条件(1)、(2)、(3)成立.

若 $n=2^h+1$，则 $1+n=2^h+2$，故 $n\in B$. 这时，对 B 中任一元素 $m<n$，

$$2^h+2 < n+m < 2^{h+1}+2.$$

条件(1)、(2)、(3)成立.

若 $n>2^h+1$，则 $2^{h+1}+2-n<n$，所以必须令 n 与 $2^{h+1}+2-n$ 在不同集合中. 这时，设 $m<n$，且与 n 在同一集合中，则

$$2^h+2 < n+m < 2^{h+2}+2,$$

而 $n+m\neq 2^{h+1}+2$. 所以，条件(1)、(2)、(3)仍然成立.

这说明所说的拆分可以惟一地实现.

由于 $1987=2^{11}+2-63$，而 $63=2^6+2-3$，$3=2^1+2-1\in B$，所以 $1987\in B$.

同理可知 $1988\in A$，$1989\in B$.

例 9 平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点. 求证：平面上的全体有理点可分成 3 个两两不相交的集合，满足条件：

(i) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含 3 个点分属这 3 个集合；

(ii) 在任何一条直线上都不可能有 3 个点分别属于这 3 个集合.

分析 由有理数的稠密性知，以坐标平面上任何点 D 为圆心，任何正数 r 为半径的圆内都有无数多个有理点. 关键是怎样使这些点分属三个不同的集合，这似乎比较容易办到. 如果直线 $ax+by+c=0$ 上有 1 个以上的有理点，则直线方程化简后的系数必皆为有理数，这时直线上有无数多个有理点，如果 3-分划能使同一直线上的有理点至多属于分划的两个子集，则问题获解.

证明　显然，任一有理点均可惟一地写成$\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$的形式，其中$u$、$v$、$w$都是整数，$w>0$且$(u, v, w)=1$.

令
$$A=\left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \nmid u\right\},$$
$$B=\left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \mid u,\ 2 \nmid v\right\},$$
$$C=\left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \mid u,\ 2 \mid v\right\}.$$

让我们来验证这3个集合满足条件(i)和(ii).

设平面上的直线方程为
$$ax+by+c=0.$$

如果其上有两个不同的有理点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则有
$$\begin{cases}ax_1+by_1+c=0,\\ ax_2+by_2+c=0.\end{cases}$$

如果$c=0$，则可取a、b为有理数. 如果$c\neq 0$，不妨设$c=1$，于是，从上面的联立方程中可解得a和b的值，当然都是有理数. 再通分即知，可以使a、b、c都是整数且满足$(a, b, c)=1$.

设有理点$\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$在直线$ax+by+c=0$上，于是，有
$$L: au+bv+cw=0. \quad ①$$

(1) 先证集合A、B、C满足条件(ii). 分三种情形.

(a) $2\nmid c$. 若$2\mid u$，$2\mid v$，则由①知$2\mid cw$，从而$2\mid w$，此与$(u, v, w)=1$矛盾. 所以，集合C中的点都不能在直线L上.

(b) $2\mid c$，$2\nmid b$. 若$2\nmid v$，则$2\nmid au$，从而$2\nmid u$. 因此，集合B中的点都不能在直线L上.

(c) $2\mid c$，$2\mid b$. 由①得$2\mid au$. 又因$(a, b, c)=1$，故$2\nmid a$. 所以$2\mid u$. 这表明集合A中的点都不在直线L上.

综上可知，A、B、C这3个集合满足条件(ii).

(2) 再证满足条件(i).

设D是以有理点$\left(\frac{u_0}{w_0}, \frac{v_0}{w_0}\right)$为圆心，以$r$为半径的圆. 取正整数$k$，使得

$$2^k > \max\left\{w_0,\ \frac{1}{r}(|u_0|+|v_0|+1)\right\}.$$

于是易验证，下列 3 个有理点

$$\left(\frac{u_0 2^k+1}{w_0 2^k},\ \frac{v_0 2^k}{w_0 2^k}\right)\in A,\ \left(\frac{u_0 2^k}{w_0 2^k},\ \frac{v_0 2^k+1}{w_0 2^k}\right)\in B,$$

$$\left(\frac{u_0 2^k}{w_0(2^k+1)},\ \frac{v_0 2^k}{w_0(2^k+1)}\right)\in C$$

都在$\odot D$的内部. 注意，在上述 3 点中，u_0、v_0、w_0 不一定互质. 但由于 $2^k > w_0$，故约分之后不改变分子的奇偶性. 这表明条件(i)成立.

最后，我们来看一个非常特殊的集合分划的例子.

例 10　设 $A=\{1,2,\cdots,2002\}$，$M=\{1001,2003,3005\}$. 对 A 的任一非空子集 B，当 B 中任意两数之和不属于 M 时，称 B 为 M-自由集. 如果 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，且 A_1、A_2 均为 M-自由集，那么称有序对 (A_1, A_2) 为 A 的一个 M-划分. 试求 A 的所有 M-划分的个数.

解　对 $m,n\in A$，若 $m+n=1001$ 或 2003 或 3005，则称 m 与 n“有关”.

易知，与 1 有关的数仅有 1000 和 2002，与 1000 和 2002 有关的都是 1 和 1003，与 1003 有关的为 1000 和 2002.

将 1，1003，1000，2002 分为两组$\{1,1003\}$，$\{1000,2002\}$，其中一组中的数仅与另一组中的数有关，我们将这样的两组叫做一个“组对”. 同样可划分其他各组对$\{2,1004\}$，$\{999,2001\}$；$\{3,1005\}$，$\{998,2000\}$；…；$\{500,1502\}$，$\{501,1503\}$；$\{1001\}$，$\{1002\}$.

这样 A 中的 2002 个数被分划成 501 个组对，共 1002 组.

由于任意数与且只与对应另一组有关，所以，若一组对中一组在 A_1 中，另一组必在 A_2 中.

反之亦然，且 A_1 与 A_2 中不再有有关的数. 故 A 的 M—划分的个数为 2^{501}.

习　题　4

1　已知集合$\{1,2,3,\cdots,3n-1,3n\}$，可以分为 n 个互不相交的三元组$\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$. 则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是________.

2　设 S 是一个有 6 个元素的集合，选取 S 的两个子集(可以相同)，使得这两

个子集的并集是 S，选取的次序无关紧要，例如，一对子集 $\{a, c\}$，$\{b, c, d, e, f\}$ 与一对子集 $\{b, c, d, e, f\}$，$\{a, c\}$ 表示同一种取法. 这样的取法有________种.

3 设集合 $A\cup B=\{1, 2, \cdots, 9\}$，$A\cap B=\varnothing$. 求证：在 A 或 B 中含有三个元素 x、y、z，使得 $x+z=2y$.

4 已知集合 M 是 $\{1, 2, \cdots, 2003\}$ 的子集，且 M 中任意两个元素之和均不能被 3 整除. 求集合 M 中元素个数的最大值.

5 试证：对于每个大于 1 的整数 r，都能找到一个最小的整数 $h(r)>1$，使在集合 $\{1, 2, \cdots, h(r)\}$ 分成 r 组的任何分划中，都存在整数 $a\geqslant 0$，$1\leqslant x\leqslant y$，使数 $a+x$，$a+y$，$a+x+y$ 含于分划的同一组中.

6 已知整个空间被分成互不相交的 5 个非空集合，求证：必有一个平面，它至少与其中的 4 个集合有公共点.

7 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，A、B、C 是 X 的分划，即 $A\cup B\cup C=X$，并且 A、B、C 两两的交集都是空集. 如果从 A、B、C 中各取一个元素，那么每两个的和都不等于第三个. 求

$$\max\{\min(|A|, |B|, |C|)\}.$$

8 (1) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为三个彼此不相交的集合的并集，使得：若 $m, n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2$ 或 5，则 m、n 属于不同的集合.

(2) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为 4 个彼此不相交的集合的并集，使得：若 $m, n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2$、3 或 5，则 m、n 属于不同的集合. 并说明：此时将 $\mathbf{N}^*$ 拆分为三个彼此不相交的集合的并集时，命题不成立.

9 试确定所有的正整数 n，使得集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 可以分成 5 个互不相交的子集，每个子集中元素之和相等.

10 设 k 为正整数，M_k 是 $2k^2+k$ 与 $2k^2+3k$ 之间(包括这两个数在内)的所有整数组成的集合. 能否将 M_k 拆分为两个不相交的子集 A、B，使得

$$\sum_{x\in A}x^2=\sum_{x\in B}x^2?$$

11 给定正整数 $n\geqslant 3$，求具有下列性质的正整数 m 的最小值：把集合 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$ 任意分成两个不相交的非空子集的并集，其中必有一个子集内含有 n 个数(不要求它们互不相同)：x_1，x_2，$\cdots$，x_n，使 $x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=x_n$.

12 设 n 是大于 3 的自然数，且具有下列性质：把集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ 任意分为两个不相交的子集，总有某个子集，它含有三个数 a、b、c(允许 $a=$

b)，使得$ab=c$. 求这样的n的最小值.

13 设S为n个正实数组成的集合，对S的每个非空子集A，令$f(A)$为A中所有元素的和. 求证：集合$\{f(A) \mid A \subseteq S, A \neq \varnothing\}$可以分拆为$n$个互不相交的子集，每个子集中最大数与最小数之比小于2.

14 试求所有正整数k，使得集合$M=\{1990, 1991, \cdots, 1990+k\}$可以分解为两个不相交的子集$A$与$B$，且使两集合中的元素之和相等.

15 给定集合$S=\{z_1, z_2, \cdots, z_{1993}\}$，其中$z_1, z_2, \cdots, z_{1993}$都是非零复数(可看作平面上的非零向量). 求证：可以把S中的元素分成若干组，使得

(1) S中的每个元素属于且仅属于其中一组；

(2) 每组中的任一复数与该组中所有复数之和的夹角不超过$90°$；

(3) 将任意两组中的所有复数分别求和，所得的两个和数之间的夹角大于$90°$.

16 设r、s、n都是正整数，并且$r+s=n$. 求证：集合

$$A=\left\{\left[\frac{n}{r}\right], \left[\frac{2n}{r}\right], \cdots, \left[\frac{(r-1)n}{r}\right]\right\},$$

$$B=\left\{\left[\frac{n}{s}\right], \left[\frac{2n}{s}\right], \cdots, \left[\frac{(s-1)n}{s}\right]\right\}$$

构成$N=\{1, 2, \cdots, n-2\}$的分划的充要条件是r和s都与n互质，其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数.

5 子集族

我们可以将某些集合取来作为元素构成一个新的集合，如 $A^* = \{\{1\}, \{0, 1\}, \{0\}, \varnothing\}$ 就是一个含有 4 个元素 $\{1\}$、$\{0, 1\}$、$\{0\}$、$\varnothing$ 的集合. 特别地，将集合 M 的若干子集作为元素构成的集合 M^* 叫做原集合的一个子集族. 例如前面的 A^* 就是二元集 $A=\{0, 1\}$ 的全部子集所构成的子集族. 子集族中所含原来集合的子集的数目叫做该子集族的阶. 例如子集族 A^* 的阶为 4，即 $|A^*|=4$.

一、C 族

最简单的子集族是由有限集 M 的全体子集所构成的子集族，简称为 C 族. C 族有如下基本的性质：

性质 设 $|M|=n$，则集合 M 的全部子集构成的集合 M^* 的阶为 2^n，即

$$|M^*| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

例 1 试证：任一有限集的全部子集可以排定次序，使得任何相邻的两个子集都相差一个元素.

分析 不妨设有限集 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$. 先来看一些简单情形：

当 $n=1$ 时，显然可以排成：$\varnothing$，$\{1\}$；

当 $n=2$ 时，共有 $2^2=4$ 个子集，可排成：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{1, 2\}$，$\{2\}$；

当 $n=3$ 时，共有 $2^3=8$ 个子集，可排成：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{1, 2\}$，$\{2\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 3\}$，$\{3\}$.

显然符合条件的排序方式不是惟一的. 请注意 $n=3$ 时的上述排法：所有子集可分为两组，前 4 个子集都不含元素 3；后 4 个均含元素 3，且去掉 3 后恰是前 4 个子集排列的逆序. 事实上，$n=2$ 时也如此. 这说明我们可以考虑用数学归纳法来证明.

证明 设有限集为 $M_n=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，我们对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时，$M_1=\{w_1\}$，将它的两个子集排列成 $\varnothing$，$\{w_1\}$ 即可.

假设当 $n=k$ 时，命题成立. 当 $n=k+1$ 时，

$$M_{k+1}=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_k,\ w_{k+1}\},$$

它是由集合 $M_k=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 添加元素 w_{k+1} 而形成的. M_k 的子集个数为 2^k. 由归纳假设知，可将 M_k 的全体子集排成满足题设要求的一列，不妨设

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{2^k}\,(A_i\subseteq M_k,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^k)$$

就是这样的一个排列. 我们来看排列

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{2^k},\ A_{2^k}\cup\{w_{k+1}\},\ A_{2^k-1}\cup\{w_{k+1}\},\ \cdots,\ A_1\cup\{w_{k+1}\},$$

它恰好由 M_{k+1} 的 2^{k+1} 个不同子集排成，且任意两个相邻集合的元素都仅相差 1 个. 可见当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

所以，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，所述命题成立.

说明 一个复杂的问题，也许一时找不到解题的突破口，这时可考虑"以退求进"的策略. 先解决一些简单的或特殊的情形，从中发现规律和方法，从而找到解决一般问题的办法. 这也就是从特殊到一般的思维方法.

例 2 在某次竞选中各政党作出 n 种不同的诺言 $(n>0)$，有些政党可以作某些相同的诺言. 现知其中每两个政党都至少作了一个相同的诺言，但没有两个政党的诺言完全相同. 求证：政党个数 $\leqslant 2^{n-1}$.

证明 设有 m 个政党. 以 A 记所有诺言的集合，A_i 记第 i 个政党的诺言的集合 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$. 由题设知

$$|A|=n,\ A_i\cap A_j\neq\varnothing,\ A_i\neq A_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant m.$$

因 $(\complement_A A_i)\cap A_i=\varnothing$，故 $\complement_A A_i\neq A_j\,(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，即 $\complement_A A_i$ 不同于任何一个政党的诺言的集合. 所以

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m,\ \complement_A A_1,\ \complement_A A_2,\ \cdots,\ \complement_A A_m$$

各不相同，而它们的个数不超过集合 A 的所有子集的数目 2^n，即 $2m\leqslant 2^n$，

所以 $$m\leqslant 2^{n-1}.$$

说明 上述解法的特点是将一个趣味问题转化为集合问题，然后借助集合的知识和方法来解决.

例 3 设正整数 $n\geqslant 5$，n 个不同的正整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 有下列性质：对集合 $S=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A 和 B，A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等. 在上述条件下，求

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

的最大值.

分析 因为 S 的任何两个不同的非空子集的各自元素之和不相等，由集合元素的互异性及正整数二进制表示的惟一性的启示，似乎集合 S 中的数应是形如 $2^r(r\in\mathbf{N})$ 的数. 下面的工作就是由此展开的.

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

先证明对任意自然数 $k\leqslant n$，都有

$$\sum_{i=1}^{k}a_k\geqslant 2^k-1. \qquad ①$$

用反证法. 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_k<2^k-1$，则 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的每个非空子集的元素和不超过 2^k-2. 但 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 有 2^k-1 个非空子集，根据抽屉原则，必有两个非空子集的元素和相等，这与题设矛盾. 故所证结论①成立.

接着证明：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad ②$$

事实上，

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\ =&\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-2}{2a_2}+\cdots+\frac{a_n-2^{n-1}}{2^{n-1}a_n}.\end{aligned}$$

令 $C_i=\frac{1}{2^{i-1}a_i}$，$d_i=a_i-2^{i-1}$，$D_k=\sum\limits_{i=1}^{k}d_i$. 显然 $C_1>C_2>\cdots>C_n$，且

$$D_k=\sum_{i=1}^{k}a_i-(1+2+\cdots+2^{k-1})=\sum_{i=1}^{k}a_i-(2^k-1)\geqslant 0.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\ =&\sum_{i=1}^{n}C_id_i\\ =&C_1D_1+C_2(D_2-D_1)+\cdots+C_n(D_n-D_{n-1})\\ =&(C_1-C_2)D_1+(C_2-C_3)D_2+\cdots+(C_{n-1}-C_n)D_{n-1}+C_nD_n\\ \geqslant&0,\end{aligned}$$

故②式得证.

注意到，当 $S=\{1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}\}$ 时，题设条件成立. 此时有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

因此，所求的最大值是 $2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

二、求解子集族

求解子集族的问题主要有两类：求子集族的阶，或确定集合的满足特定条件的子集族中的每个集合.

例 4　已知集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

分析　集合 A 有 $2^{10}-1$ 个非空子集，逐一考察的工作只有交给计算机. 像例 1 一样，我们先来看看比 A 的元素少一些的集合的情形. 记集合 A_i 符合条件的子集族为 A_i^*，$|A_i^*|=a_i$.

$A_1=\{1\}$，$A_1^*=\varnothing$，$a_1=0$；

$A_2=\{1,2\}$，$A_2^*=\varnothing$，$a_2=0$；

$A_3=\{1,2,3\}$，$A_3^*=\{\{1,3\}\}$，$a_3=1$；

$A_4=\{1,2,3,4\}$，$A_4^*=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\}$，$a_4=3$；

$A_5=\{1,2,3,4,5\}$，$A_5^*=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,3,5\},\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\}\}$，$a_5=7$.

我们来考察写出 A_5^* 的过程，这可以分作两步：第一步写出 A_4^* 的全部元素，它们都不含元素 5；第二步写出含 5 的子集，它们是在 A_3^* 的元素中添 5 所成，或者是含 5 的二元子集，即 $a_5=a_4+a_3+3$. 其实对 A_4^*、A_3^* 有类似的结论：$a_4=a_3+a_2+2$，$a_3=a_2+a_1+1$. 我们可以将这个作法推广到一般.

解　设 a_n 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的具有题设性质的子集个数.

对于集合 $\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2\}$，具有题设性质的子集可分为两类：第一类子集不包含 $n+2$，它们是集合 $\{1,2,\cdots,n,n+1\}$ 的全部具有题设性质的子集，共有 a_{n+1} 个；第二类子集包含 $n+2$，它们是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的每个具有题设性质的子集与 $\{n+2\}$ 的并集，以及二元子集 $\{1,n+2\}$，$\{2,n+2\}$，$\cdots$，$\{n,n+2\}$，共有 a_n+n 个.

于是，我们有

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+n.$$

易知，$a_1=a_2=0$，因此 $a_3=1$，$a_4=3$，$a_5=7$，$a_6=14$，$a_7=26$，$a_8=46$，$a_9=79$，$a_{10}=133$.

所以，所求子集的个数为133.

说明　上述解法的特点是将问题一般化，一般问题解决了，特殊问题当然就解决了. 这里用到了递推方法，递推也是解决组合问题的常用方法之一.

与上例相反，我们来看一个已知子集族求恰好包含这些子集的集合的阶的问题.

例5　对于整数 $n\ (n\geqslant 2)$，如果存在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 A_1，A_2，…，A_n 满足：

(a) $i\notin A_i$，$i=1, 2, \cdots, n$；

(b) 若 $i\neq j$，$i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$，则 $i\in A_j$，当且仅当 $j\notin A_i$；

(c) 任意 $i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

则称 n 是"好数".

证明：(1) 7是好数；

(2) 当且仅当 $n\geqslant 7$ 时，n 是好数.

分析　对于 $n=7$，可以作出满足条件的子集族来验证；当 $n\geqslant 7$ 时，可考虑用数学归纳法证明.

证明　(1) 当 $n=7$ 时，取

$$A_1=\{2, 3, 4\},\ A_2=\{3, 5, 6\},\ A_3=\{4, 5, 7\},$$

$$A_4=\{2, 6, 7\},\ A_5=\{1, 4, 6\},\ A_6=\{1, 3, 7\},$$

$$A_7=\{1, 2, 5\}$$

即可.

(2) 先证当 $n\geqslant 7$ 时，n 是好数. 对 n 进行归纳.

由(1)知，当 $n=7$ 时，结论成立.

假设 $n\ (n\geqslant 7)$ 是好数，则存在子集族 A_1，A_2，…，A_n 满足条件. 对于 $n+1$，取子集族 $B_1=A_1$，$B_2=A_2$，…，$B_n=A_n$，$B_{n+1}=\{1, 2, \cdots, n\}$. 由归纳假设易知，它们也是满足条件的.

下面证明每一个好数 n 都至少为7.

如果 A_1，A_2，…，A_n 是一个 n 为好数的集合的子集族，那么，每一个 A_i 至少有三个元素. 事实上，若 $A_i\subset\{j, k\}$，则

$$A_i\cap A_j=\{k\},\ A_i\cap A_k=\{j\}.$$

所以，$k\in A_j$，$j\in A_k$. 矛盾.

考虑一个由元素0、1构成的 $n\times n$ 阶正方形表格，当且仅当 $j\in A_i$ 其第 i 行第 j 列的元素为1. 表中对角线上的元素为0，对于余下的元素，因为 $i\neq j$，当且仅当 $a_{ji}=1$ 时 $a_{ij}=0$，所以0的个数等于1的个数. 因此，表中元素的和为 $\frac{n^2-n}{2}$. 又每行元素的和大于等于3，所以 $n^2-n\geqslant 6n$，故 $n\geqslant 7$.

例6　集合 $X=\{1,2,\cdots,6k\}$，$k\in\mathbf{N}^*$. 试作出 X 的三元子集族 $\mathscr{A}$，满足：

(1) X 的任一二元子集至少被族 $\mathscr{A}$ 中的一个三元子集包含；

(2) $|\mathscr{A}|=6k^2$.

解　先证明下面的引理：

引理　对 $n\in\mathbf{N}^*$，集合 $X_1=\{1,2,\cdots,2n\}$ 的全部二元子集可分成 $2n-1$ 组，且每组是 X_1 的一个分划.

引理的证明：如图5-1，将1，2，…，$2n-1$ 这 $2n-1$ 个数按顺时针方向放到一个正 $2n-1$ 边形的顶点上，数 $2n$ 放在外接圆圆心.

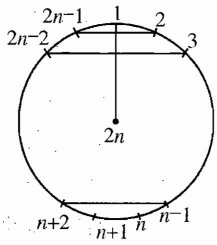


图5-1

连结 $2n$ 与1，作 $n-1$ 条以 $2n-1$ 边形顶点为端点且垂直于1与 $2n$ 连线的线段，便得到 X_1 的 n 个二元子集构成 X_1 的一个分划. 将 $2n$ 与1的连线依次顺时针旋转 $\frac{2\pi}{2n-1}$，$\frac{4\pi}{2n-1}$，…，$\frac{(4n-4)\pi}{2n-1}$，作出相应的图及 X_1 的 n 个二元子集. 这样，X_1 的全部 $C_{2n}^2=n(2n-1)$ 个二元子集被分成 $2n-1$ 组，且每组 n 个集合构成 X_1 的一个分划.

下面来作满足题设的子集族：

令 $A=\{1,2,\cdots,2k\}$，$B=\{2k+1,2k+2,\cdots,4k\}$，$C=\{4k+1,4k+2,\cdots,6k\}$. 由引理，$A$ 的全部二元子集可分成 $2k-1$ 组，每组是 A 的一个分划. 将其中一组重复一次，得到 A 的 $2k$ 个分划，让其中每个分划与 B 的一个元素搭配作出 k 个 X 的三元子集.

类似地，作出 B 的 $2k$ 个二元子集构成的分划，包含 B 的全部二元子集，让其中每个分划与 C 的一个元素搭配作出 k 个 X 的三元子集；作出 C 的 $2k$ 个二元子集构成的分划，包含 C 的全部二元子集，让其中每个分划与 A 的一个元素搭配作出 k 个 X 的三元子集.

上面得到的 $k\times2k\times3=6k^2$ 个 X 的三元子集组成的族 $\mathscr{A}$ 满足题设要求.

说明 X 的二元子集有 $C_{6k}^2=3k(6k-1)=18k^2-3k$ 个. 而所作的三元子集族中的每个集合(子集族的元素)都包含 3 个二元子集，子集族共可生成二元子集 $3\times 6k^2=18k^2$ 个. 这说明有 $3k$ 个(次)二元子集在子集族中被重复生成. 那么，满足条件(1)的 $|\mathscr{A}|$ 的最小值是 $6k^2$ 吗?

三、有关子集族的最值问题

有关集合子集族的最值主要有三类：(1) 求子集族阶的最值；(2) 求子集族中的集合阶的最值；(3) 求符合特定条件的集合元素的最值.

例 7 集合 $A=\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，$\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 是 A 的一族非空子集，当 $i\neq j$ 时，$B_i\cap B_j$ 至多有两个元素. 求 k 的最大值.

分析 集合 A 的一元、二元、三元子集显然符合要求. 而 A 的任一多于三元的子集 B' 必包含了 A 的三元子集，故 B' 与其包含的三元子集不能同在题中的子集族内.

解 首先至多含 3 个元素的 A 的非空子集有

$$C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3=10+\frac{10\times 9}{2}+\frac{10\times 9\times 8}{6}=175(\text{个}).$$

这些集合的交集至多有两个元素，否则两集合相等，矛盾. 因此 $k_{\max}\geqslant 175$.

下面证明 $k_{\max}\leqslant 175$.

设 $\mathscr{C}$ 为满足题设的子集族. 若 $B\in\mathscr{C}$，且 $|B|\geqslant 4$，设 $b\in B$，则 B 与 $B-\{b\}$ 不能同时含于 $\mathscr{C}$，以 $B-\{b\}$ 代 B，则 $\mathscr{C}$ 中元素数目不变. 仿此对 $\mathscr{C}$ 中所有元素数目多于 4 的集合 B 作相应替代，替代后子集族 $\mathscr{C}$ 中的每个集合都是元素数目不多于 3 的非空集合. 故 $k_{\max}\leqslant 175$.

所以，k 的最大值为 175.

说明 上述解答采用了"两边夹"的策略：先得出 k 的最大值不小于 175，然后指出 k 不大于 175，从而得出 $k_{\max}=175$.

例 8 设 $A\subseteq\{0, 1, 2, \cdots, 29\}$ 满足：对任何整数 k 及 A 中任意数 a、b (a、b 可以相同)，$a+b+30k$ 均不是两个相邻整数之积. 试定出所含元素个数最多的 A.

分析 因为当 $b=a$ 时，$2a+30k$ 均不是两个相邻整数之积，故我们只需考察 $2a$ 被 30 除的余数.

解 所求 A 为 $\{3l+2\mid 0\leqslant l\leqslant 9\}$.

设 A 满足题中条件且 $|A|$ 最大. 因为两个相邻整数之积被 30 除，余数为 0, 2, 6, 12, 20, 26. 则对任一 $a\in A$，有 $2a\not\equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$，

即 $a\neq 0, 1, 3, 6, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 28$,因此,$A\subseteq\{2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29\}$,后一集合可分拆成下列 10 个子集的并,其中每一个子集至多有一个元素包含在 A 中:$\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{8, 12\}$, $\{9, 11\}$, $\{14, 22\}$, $\{17, 19\}$, $\{20\}$, $\{23, 27\}$, $\{24, 26\}$, $\{29\}$,故 $|A|\leqslant 10$.

若 $|A|=10$,则每个子集恰好有一个元素包含在 A 中,因此,$20\in A$, $29\in A$.

由 $20\in A$ 知 $12\notin A$,从而 $8\in A$,这样 $4\notin A$, $22\notin A$, $24\notin A$. 因此 $2\in A$, $14\in A$, $26\in A$.

由 $29\in A$ 知 $7\notin A$, $27\notin A$,从而 $5\in A$, $23\in A$,这样 $9\notin A$, $19\notin A$,因此 $11\in A$, $17\in A$.

综上所述,有 $A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$,此集合 A 确实满足要求.

例 9 设 n 为正整数,在数集

$$\{-n, -n+1, -n+2, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\}$$

中最多选取多少个数,可使任意三个数的和均不为 0(三个数可以相同)?

分析 显然,当选取的数的绝对值充分大时,可使任意三个数的和均不为 0.

解 设从题中数集中最多选取 k 个数,可使任意三个数的和均不为 0. 考察子集

$$\left\{-n, \cdots, -\left[\frac{n}{2}\right]-1, \left[\frac{n}{2}\right]+1, \cdots, n\right\},$$

其中 $[x]$ 表示不超 x 的最大整数. 知当 n 为偶数时,$k\geqslant n$;当 n 为奇数时,$k\geqslant n+1$.

设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$ 都是元素为整数的非空集合. 定义集合

$$A+B=\{a+b\mid a\in A, b\in B\},$$

可以证明 $A+B$ 至少有 $m+l-1$ 个元素.

事实上,不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$, $b_1<b_2<\cdots<b_l$,则

$$a_1+b_1, a_1+b_2, \cdots, a_1+b_l, a_2+b_l, \cdots, a_m+b_l$$

是一个有 $m+l-1$ 项的严格递增的数列,其中每一个数都是集合 $A+B$ 的元素.

假设 S 是一个满足题设的子集. 显然 $0 \notin S$. 取

$$A=S \cap \{-n, -n+1, \cdots, -1\},$$
$$B=S \cap \{1, 2, \cdots, n\}.$$

于是，$A+B$ 和 $-S=\{-s \mid s \in S\}$ 是集合 $\{-n, -n+1, \cdots, n\}$ 的两个不相交的子集. 由前证知

$$\begin{aligned}2n+1 &\geqslant |A+B|+|-S| \\ &\geqslant |A|+|B|-1+|S| \\ &=2|S|-1,\end{aligned}$$

即 $|S| \leqslant n+1$.

当 n 为奇数时，就证明了 $k=n+1$.

当 n 为偶数时，还需要证明 $|S|=n+1$ 是不可能的.

由于 $A+B \subseteq \{-n+1, -n+2, \cdots, n-1\}$，若有

$$|A+B|+|-S|=2n+1,$$

则必有 $-n, n \in -S$，即 $-n, n \in S$. 于是

$$\{1, n-1\}, \cdots, \left\{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\right\}, \left\{\frac{n}{2}\right\}$$

每个集合中至多有一个元素在 B 中. 因此，

$$|B| \leqslant \frac{n}{2}.$$

同理，
$$|A| \leqslant \frac{n}{2}.$$

由 A、B 的定义，知

$$|S|=|A|+|B| \leqslant n.$$

与 $|S|=n+1$ 矛盾.

因此，当 n 为偶数时，$k=n$.

例 10 集合 $A=\{1, 2, \cdots, 1997\}$，对 A 的任意一个 999 元子集 X，若存在 $x, y \in X$，使得 $x<y$ 且 $x \mid y$，则称 X 集为好集. 求最大自然数 a $(a \in A)$，使任一含有 a 的 999 元子集都为好集.

分析 抓住 A 的 999 元子集 $X_0=\{999, 1000, \cdots, 1997\}$ 是关键. 因为 $999 \times 2=1998>1997$，所以 $a<999$. 考虑集合 A 的这样的元素 b：$2b \in X_0$，$3b \notin X_0$. 易知 $b=666+i$，$i=0, 1, \cdots, 332$. 由 $B_i=\{666+i\} \cup X_0 \backslash$

$\{2(666+i)\}$，$i=0,1,\cdots,332$，$|B_i|=999$，知 $a\leqslant 665$.

解　我们证明 $\max a=665$.

先证 $a\leqslant 665$. 显然 A 的 999 元子集 $X_0=\{999,1000,1001,\cdots,1997\}$ 中不存在 $x,y\in X_0$，使得 $x<y$ 且 $x\mid y$. 事实上，X_0 的最小元素为 999，它的最小倍数除本身外为 $2\times 999=1998>1997$，即比 X_0 的最大元素还大. 这样，a 就不能为 999，1000，1001，…，1997 中的任一个数.

构造集合

$$B_i=\{666+i\}\cup X_0\backslash\{2(666+i)\},\ i=0,1,\cdots,332.$$

对 B_i 来说，$(666+i)\times 3\geqslant 1998$，而 $(666+i)\times 2\notin B_i$，故 $666+i$ 除本身外其他倍数都不在 B_i 中. 上面已证 X_0 的任一非本身的倍数都不在 X_0 中；而 $666+i<999$ $(i=0,1,2,\cdots,332)$，故 X_0 中任一元素的倍数不可能为 $666+i$ $(i=0,1,\cdots,332)$. 这样 B_i 中仍不存在两元素满足 $x<y$ 且 $x\mid y$. 而 B_i 中 $(i=0,1,\cdots,332)$ 包含了 666，667，…，998，故 $a\neq 666,667,\cdots,998$. 所以 $a\leqslant 665$.

下证 665 是可取的. 反设存在一个含 665 的 999 元子集 X，不存在这样的 $x,y\in X$，$x<y$ 使 $x\mid y$，则 665×2、$665\times 3\notin X$.

构造如下 997 个抽屉，它包含了 A 中除 665、665×2、665×3 外的所有元素，且每个元素只出现一次

$$\{1,1\times 2,1\times 2^2,\cdots,1\times 2^{10}\},$$

$$\{3,3\times 2,3\times 2^2,\cdots,3\times 2^9\},$$

$$\{5,5\times 2,5\times 2^2,\cdots,5\times 2^8\},$$

……

$$\{663,663\times 2,663\times 3\},$$

$$\{667,667\times 2\},$$

$$\{669,669\times 2\},$$

……

$$\{1991\},\{1993\},\{1997\}.$$

X 中除 665 外的其他 998 个元素归入这 997 个抽屉里，定有两个在同一抽屉，而同一抽屉里的数互为倍数关系，矛盾. 证毕.

习 题 5

1 在集合 $M=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的所有子集中，有这样一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，那么这族子集最多有________个.

2 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 1000\}$，现对 M 的任一非空子集 X，令 α_X 表示 X 中最大数与最小数之和. 则所有这样的 α_X 的算术平均值为________.

3 对于$\{1, 2, \cdots, n\}$和它的每个非空子集，我们定义"交替和"如下：把子集中的数按从大到小的顺序排列，然后从最大的数开始交替地加减各数(例如，$\{1, 2, 4, 6, 9\}$的交替和是 $9-6+4-2+1=6$，而$\{5\}$的交替和就是 5). 对于 $n=7$，求所有这些交替和的总和.

4 $X=\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$. A 是 X 的子集，且具有性质：A 中任意两个数的和不在 A 中，求 $\max|A|$.

5 在集合$\{1, 2, \cdots, n\}$中，任意取出一个子集，计算它的元素之和. 问所有子集元素之和的总和是多少？

6 如果一个正整数集合中没有 3 个数是两两互质的，则称之为"异质"的. 问从 1 到 16 的整数集合中"异质"的子集合的元素的最大数目是多少？

7 设 S 为$\{1, 2, \cdots, 9\}$的子集，且 S 中任意两个不同的数作和，所得的数两两不同，问：S 中最多有多少个元素？

8 设 $r(r\geqslant 2)$是一个固定的正整数，F 是一个无限集合族，且每个集合中有 r 个元素. 若 F 中任意两个集合的交集非空，证明：存在一个具有 $r-1$ 个元素的集合与 F 中的每一个集合的交集均非空.

9 设集合 $S=\{1, 2, \cdots, 50\}$. 试求最小正整数 n，使得 S 中的每个 n 元子集中都有 3 个数能作为直角三角形的三边长.

10 设 P 是一个奇质数，考虑集合$\{1, 2, \cdots, 2p\}$满足以下两个条件的子集 A：

(i) A 恰有 p 个元素；

(ii) A 中所有元素之和可被 p 整除.

试求所有这样的子集 A 的个数.

11 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，S 是一个 n 元集合. 求最小的正整数 k，使得存在 S 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 具有如下性质：对 S 中的任意两个不同元 a、b，存在 $j\in\{1, 2, \cdots, k\}$，使得 $A_j\cap\{a, b\}$ 为 S 的一元子集.

12 设 $S=\{1, 2, \cdots, 50\}$. 求最小自然数 k，使 S 的任一 k 元子集中都存在

两个不同的数 a 和 b，满足 $(a+b)\mid ab$.

13 集合 Z 由 n 个元素组成，Z 中最多有多少个这样的 3 元子集，使得其中任意两个 3 元子集都恰好有一个公共元.

14 设 $S=\{1, 2, \cdots, 15\}$，从 S 中取出 n 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足下列条件：

(i) $|A_i|=7$, $i=1, 2, \cdots, n$;

(ii) $|A_i\cap A_j|\leqslant 3$, $1\leqslant i<j\leqslant n$;

(iii) 对 S 的任何 3 元子集 M，都存在某个 A_k，$1\leqslant k\leqslant n$，使得 $M\subset A_k$.

求这样一组子集的个数 n 的最小值.

15 设 $S\subseteq\{1, 2, \cdots, 2002\}$. 对任意 $a, b\in S$（a、b 可以相同），总有 $ab\notin S$，求 $|S|$ 的最大值.

16 称子集 $A\subseteq M=\{1, 2, \cdots, 11\}$ 是好的，如果它有下述性质："如果 $2k\in A$，则 $2k-1\in A$，且 $2k+1\in A$"（空集和 M 都是好的）. M 有多少个好子集?

17 设 n 为给定的正整数，D_n 为 $2^n3^n5^n$ 的所有正因数所成的集合，$S\subseteq D_n$，且 S 中任一数都不能整除 S 中另一数. 求 $|S|$ 的最大值.

6 集合的性质

很多集合问题实际上就是研究集合中元素的性质问题，前面的每一节都能找到这样的例子. 下面，我们再通过一些例子进一步探讨研究集合性质的技巧.

一、集合中全部元素的性质

已知集合 $S=\{x \mid P(x)\}$. 如果由性质 P 能推出 S 中每个元素都满足的性质 P'，那么 P' 就是 P 的一个必要条件. 设 $S'=\{x \mid P'(x)\}$，显然有 $S\subseteq S'$.

例 1 已知数集 M 至少有 3 个元素，且对 M 中任何两个不同的元素 a、b，数 $a^2+b\sqrt{2}$ 都是有理数，证明：对于 M 中任何数 a，数 $a\sqrt{2}$ 都是有理数.

分析 设 $a,b\in M$ 且 $a\neq b$，则 $a^2+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，$b^2+a\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$. 于是有 $a^2+b\sqrt{2}-(b^2+a\sqrt{2})=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2)\in\mathbf{Q}$. 若能证明 $a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$ 或 $a\sqrt{2}+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，则问题迎刃而解. 但已给条件似乎不够用！不过另设 $c\in M$，$c\neq a$，$c\neq b$，则 $c^2+a\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，$c^2+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，便得到

$$c^2+a\sqrt{2}-(c^2+b\sqrt{2})=a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}.$$

证明 任取 $a,b,c\in M$，且 a、b、c 互不相等，则 $a^2+b\sqrt{2}$，$b^2+a\sqrt{2}$，$c^2+a\sqrt{2}$，$c^2+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$. 因此

$$a^2+b\sqrt{2}-(b^2+a\sqrt{2})=(a-b)(a+b-\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2)\in\mathbf{Q},$$

$$c^2+a\sqrt{2}-(c^2+b\sqrt{2})=(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbf{Q}.$$

从而

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2\in\mathbf{Q},$$

所以 $a\sqrt{2}+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$.

所以

$$a\sqrt{2}=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}+a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbf{Q}.$$

例 2　设 $\alpha=\frac{r}{s}$，这里 r、s 是正整数，且 $r>s$，$(r,s)=1$. 令集合

$$N_\alpha=\{[n\alpha]\mid n=1,2,\cdots\}.$$

求证：对任何 $m\in N_\alpha$，$r\nmid m+1$.

分析　$n\alpha=n\cdot\frac{r}{s}$. 当 $s=1$ 时，结论显然成立. 当 $s>1$ 时，若 $1\leqslant n\leqslant s-1$，由 $\frac{r}{s}>1$ 知，$1\leqslant n\alpha\leqslant r-\frac{r}{s}<r-1$，即 $1\leqslant[n\alpha]<r-1$，结论成立；若 $n\geqslant s$，令 $n=qs+k$ $(0\leqslant k\leqslant s-1,\ q\in\mathbf{N}^*)$，则 $n\alpha=qr+k\alpha$，$[n\alpha]=qr+[k\alpha]$，又转化为前面情形的讨论.

证明　分两种情形讨论.

(1) 若 $s=1$，则 $N_\alpha=\{rn\mid n=1,2,\cdots\}$. 因 $r>1$，结论显然成立.

(2) 若 $s>1$，因 $\frac{r}{s}>1$，故

$$1\leqslant\left[\frac{r}{s}\right]<\left[\frac{2r}{s}\right]<\cdots<\left[\frac{(s-1)r}{s}\right]=r+\left[-\frac{r}{s}\right]<r-1.\qquad ①$$

任取 $m=[n_0\alpha]\in N_\alpha$，令 $n_0=qs+k$ $(0\leqslant k\leqslant s-1)$，则

$$[n_0\alpha]=[qr+k\alpha]=qr+[k\alpha],$$

$$m+1=[n_0\alpha]+1=qr+[k\alpha]+1.\qquad ②$$

但由不等式①，有 $0\leqslant[k\alpha]<r-1$，即

$$1\leqslant[k\alpha]+1<r.$$

于是，由②式可知 $r\nmid m+1$.

综上可知，命题成立.

例 3　在平面上给定无穷多个点，已知它们之间的距离都是整数，求证这些点都在一条直线上.

分析　“无穷”和“整数”是两个关键词，去其一，则结论不成立. 下面我们就是利用这两点“制造”矛盾来反证结论成立.

证明 若不然，则存在三点 A、B、C，使三点不共线且 $AB=r$ 和 $AC=s$ 都是整数. 设点 P 是任一给定点，则由三角不等式有

$$|PA-PB|\leqslant AB=r,$$

即 $|PA-PB|$ 是整数 $0,1,2,\cdots,r$ 中之一. 因此，点 P 或位于直线

$$H_0=\text{直线 } AB \text{ 的垂直平分线},$$
$$H_r=\text{直线 } AB$$

之一上，或落在双曲线

$$H_i=\{X \mid |XA-XB|=i\},\ i=1,2,\cdots,r-1$$

之一上. 同理，点 P 又或者位于直线

$$K_0=\text{线段 } AC \text{ 的垂直平分线},$$
$$K_s=\text{直线 } AC$$

之一上，或者落在双曲线

$$K_j=\{X \mid |XA-XC|=j\},\ j=1,2,\cdots,s-1$$

之一上. 由此可知，任一给定点必落在集合

$$H_i\cap K_j,\ i=0,1,\cdots,r,\ j=0,1,\cdots,s \qquad ①$$

之一上. 由于直线 AB 与 AC 不重合，所以任一 H_i 与任一 K_j 都不相同.

从而知①中每个集合都不多于 4 点，故知集合

$$M=\bigcup_{i,j}(H_i\cap K_j)$$

的点数不多于 $4(r+1)(s+1)$，此与给定点有无穷多个矛盾.

例 4 设 M 为一个无限的有理数集，满足：M 的任意一个 2009 元子集的元素之积为一个整数，且这个整数不能被任何质数的 2009 次幂整除. 证明：M 的元素均为整数.

分析 这里的“2009”并不是一个关键的数字，与上例一样，我们还是得围绕“无限”做文章.

证明 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2008}\in M$. 记

$$A=a_1a_2\cdots a_{2008}=\frac{p}{q},\ (p,q)=1.$$

假设 M 中包含了无数多个形如

$$\alpha_i=\frac{p_i}{q_i},\ (p_i,\ q_i)=1,\ q_i>1$$

的数，且 $\alpha_i \neq a_1, a_2, \cdots, a_{2008}$. 由于

$$\alpha_i \cdot A=\alpha_i a_1 a_2 \cdots a_{2008}=\frac{p_i}{q_i} \cdot \frac{p}{q}$$

为整数，所以

$$q_i \mid p.$$

由于 p 只有有限个因子，故有无数个分母为 q_i' 的既约分数属于 M. 这些分数中的任意 2009 个的乘积都不是整数. 这与题设矛盾. 这说明 M 中包含了无限多个整数，记这些整数的集合为 M'.

假设有 $\frac{a}{b} \in M,\ (a,\ b)=1,\ b>1$.

设 p 为 b 的一个质因子. 由于 $\frac{a}{b}$ 与 M' 中任意 2008 个整数的乘积为整数，故 p 为 M' 中无数多个整数的质因子. 而 M' 中任意 2009 个含有因数 p 的数的乘积可被 p^{2009} 整除. 这又与题设矛盾.

这就证明了 M 的元素均为整数. 而这样的整数集是存在的，如全部质数的集合.

二、集合子集元素的性质

设集合 $S=\{x \mid P(x)\}$. 如果条件 P^* 是条件 P 的充分条件，那么集合

$$S^*=\{x \mid P^*(x),\ x \in S\}$$

是集合 S 的子集，即 $S^* \subseteq S$. 这里 P^* 是集合 S 中部分元素的性质.

我们还可以通过增加 S 的"内涵"的方式来缩小它的"外延"：S 是所有具备性质 P 的元素 x 的集合，增加新的性质 P^*，得到集合

$$S^*=\{x \mid P(x) \text{ 且 } P^*(x),\ x \in S\},$$

显然 $S^*=\{x \mid P^*(x),\ x \in S\}$，它是 S 的子集，即 $S^* \subseteq S$.

一类典型的问题就是从集合 S 中分离出所有满足性质 P^* 的元素，从而得到所求的 S^*.

例 5　三维空间中所有整点(3 个坐标都为整数的点)的集合记为 T. 两个整点 (x, y, z) 和 (u, v, w) 当且仅当 $|x-u|+|y-v|+|z-w|=1$ 时称为相邻. 求证：存在 T 的一个子集 S，使对每个 $P \in T$，点 P 以及 P 的所有邻

点中恰有一点属于 S.

分析　设 $(u, v, w)\in T$，它的 6 个邻点分别为 $(u\pm1, v, w)$，$(u, v\pm1, w)$，$(u, v, w\pm1)$. 若函数 $f(x, y, z)$ 在以上 7 点的函数值为整数，且除以 7 的余数都不相同，则原题获证. 事实上，取 $f=x+2y+3z$ 即可.

证明　显然，两个整点相邻，当且仅当两点的各 3 个坐标中的两对分别相等，而第 3 个坐标相差 1.

令
$$S=\{(x, y, z)\mid 7\mid x+2y+3z\},$$

则 S 满足题中要求. 事实上，对于任何 $(u, v, w)\in T$，它有 6 个邻点 $(u\pm1, v, w)$，$(u, v\pm1, w)$，$(u, v, w\pm1)$. 这 7 点所对应的 7 个整数
$$u+2v+3w+j,\ j=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$
中，恰有一个是 7 的倍数，从而相应的整点属于 S，即 S 满足题中要求.

例 6　设 $A\subset\mathbf{N}^*$ 是无限集，A 中每个数 a 是至多 1990 个质数的乘积. 证明：必有 A 的无限子集 B，使得 B 中任何两个不同数的最大公约数都相同.

分析　如果 A 中含有无限多个两两互质的整数，则结论显然成立. 否则，存在质数 p_1 为 A 的无限多个数的因数，故 $A_1=\left\{\frac{a}{p_1}\middle|\frac{a}{p_1}\in\mathbf{Z}, a\in A\right\}$ 为无限集. 若 A_1 中含有无限多个两两互质的整数，则结论亦成立. 否则，继续上面的步骤.

证明　如果 A 中含有无限多个两两互质的正整数，将它们全部选出作成子集 B，则结论成立.

若存在质数 p_1 为 A 中无限多个数的因数，则集合
$$A_1=\left\{\frac{a}{p_1}\middle|\frac{a}{p_1}\in\mathbf{Z}, a\in A\right\}$$
为无限集. 依此类推（用 A_1 代替 A）. 由于 A 中每个数的质因数个数 $\leqslant1990$，所以必有无限集
$$A_k=\left\{\frac{a}{p_1p_2\cdots p_k}\middle|\frac{a}{p_1p_2\cdots p_k}\in\mathbf{Z}, \frac{a}{p_1p_2\cdots p_{k-1}}\in A_{k-1}\right\},$$
每个质数 p_i 都仅是 A_k 中有限多个数的因数.

任取 $a_1\in A_k$. 在取定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两互质后，由于每个质数都仅是 A_k 中有限多个数的因数，在 A_k 中存在 a_{n+1}，它与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均互质. 这样就得到 A_k 的一个无穷子集 B_k，B_k 中的元素两两互质.

将 B_k 中每个元素乘以 $p_1p_2\cdots p_k$，得到 A 的无穷子集，其中每两个数的最

大公约数均为 $p_1p_2\cdots p_k$.

例 7 记 $\mathbf{Q}$ 为有理数集合，$\mathbf{Q}$ 的非空子集 S 具有以下性质：

(1) $0\notin S$；

(2) 若 $s_1\in S$, $s_2\in S$，则 $s_1/s_2\in S$；

(3) 存在一非零有理数 q, $q\notin S$，且每一个不在 S 中的非零有理数都可写成 qs 的形式，其中 $s\in S$.

证明：若 $x\in S$，则存在 $y,z\in S$，使 $x=y+z$.

分析 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$，且 $\alpha+\beta=1$，则

$$x=x(\alpha+\beta)=x\alpha+x\beta.$$

我们希望出现：$x\alpha\in S$ 且 $x\beta\in S$. 由(3)似乎应该有 $\alpha,\beta\in S$. 于是我们要解决两个问题：① 怎样的 α、β 必定属于 S；② 如 $x_1\in S$, $x_2\in S$，则 $x_1x_2\in S$.

证明 假设 $s\in S$. 令 $s_1=s_2\in S$，则 $s_1/s_2=1\in S$. 令 $s_1=1$, $s_2=s$，则 $1/s\in S$.

若 $t\in S$，令 $s_1=t$, $s_2=1/s$，则 $s_1/s_2=t/(1/s)=st\in S$（这样 s 就是乘法意义下的解）.

假设 u 是一个非零有理数，若 $u\notin S$，则 $u=qs$，其中 $s\in S$，于是我们有 $u^2=q^2s^2$.

若 $q^2\notin S$，则可设 $q^2=qt$ $(t\in S)$，则 $q=t\in S$，矛盾. 所以 $q^2\in S$, $u^2\in S$.

假如 $x\in S$，则由 $(3/5)^2$、$(4/5)^2$ 为平方数可知，

$$x(3/5)^2\in S,\ x(4/5)^2\in S.$$

又 $x=x(3/5)^2+x(4/5)^2$，取 $y=x(3/5)^2$, $z=x(4/5)^2$，则命题得证.

三、其他有关集合性质的问题

有关集合性质的问题丰富多彩，除了上面两类典型的问题外很难作一个系统的分类. 其实，集合问题大多具有明显的组合色彩，解题方法各异，分类并没有实质意义. 下面我们再看几个例子.

例 8 证明：对任意的 $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$，都存在 n 个互不相等的自然数组成的集合 M，使得对任意的 $a\in M$ 和 $b\in M$，都有 $(a-b)\mid(a+b)$.

分析 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为 M 的 n 个元素，我们用归纳的方法来构造这些元素.

当 $n=2$ 时，取 $a_1=1$, $a_2=2$ 即可.

假设 $n=k$ 时，k 个元素 $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 组成的集合符合要求. 当 $n=$

$k+1$ 时 则取如下 $k+1$ 个数

$$a_k!,\ a_k!+a_1,\ a_k!+a_2,\ \cdots,\ a_k!+a_k,$$

组成的集合符合要求. 事实上,

$$\frac{(a_k!+a_i)+a_k!}{(a_k!+a_i)-a_k!}=\frac{2(a_k!)+a_i}{a_i}\in\mathbf{N}^*\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

又不妨设 $i>j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则

$$A=\frac{(a_k!+a_i)+(a_k!+a_j)}{(a_k!+a_i)-(a_k!+a_j)}$$

$$=\frac{2(a_k!)+a_i+a_j}{a_i-a_j}.$$

因为 $(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)$ (归纳假设), $(a_i-a_j)\mid 2(a_k!)$, 所以 $A\in\mathbf{N}^*$.

说明 对上面的分析稍作整理即为本例的证明. 略.

例 9 平面上整点的集合 $M=\{(x,\ y)\mid x, y\in\mathbf{Z}$, 且 $1\leqslant x\leqslant 12,\ 1\leqslant y\leqslant 13\}$. 证明: 不少于 49 个点的 M 的每一个子集, 必包含一个矩形的 4 个顶点, 且此矩形的边平行于坐标轴.

分析 设 S 为 M 的任一个 49 元子集. 其中纵坐标相同的点的横坐标的集合为:

$$X_i=\{x\mid(x,\ i)\in S\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 13.$$

若存在关于整点横坐标的二元集 $(r,\ s)$ 同时是 X_i、X_j $(i\neq j)$ 的子集, 则原题得证.

证明 设 S 为 M 的任一个 49 元子集. 令

$$X_i=\{x\mid(x,\ i)\in S\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 13,$$

则 $|X_i|=x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{13}x_i=49$, $0\leqslant x_i\leqslant 12$. 记

$$P_i=\{\{r,\ s\}\mid r\neq s,\ (r,\ i),\ (s,\ i)\in S\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 13.$$

显然, 全体 P_i 中只有 $C_{12}^2=66$ 种不同的二元集.

又 $\sum\limits_{i=1}^{13}|P_i|=\sum\limits_{i=1}^{13}C_{x_i}^2$, 考虑其最小值.

利用局部调整: 当 $x_1+x_2=c$ 时,

$$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2=\frac{c^2-c}{2}-x_1x_2\geqslant\frac{c^2-c}{2}-\frac{c^2}{4},$$

$x_1=\left[\frac{c}{2}\right]$，$x_2=c-\left[\frac{c}{2}\right]$时，$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2$ 取得最小值. 由此知，$\sum\limits_{i=1}^{13}C_{x_i}^2$ 取得最小值必须是将 $49=\sum\limits_{i=1}^{13}x_i$ 尽可能地平均到$\{x_i\}$中，即$\{x_i\}$中有 j 个$\left[\frac{49}{13}\right]=3$，$(13-j)$个$\left[\frac{49}{13}\right]+1=4$，从而得 $j=3$.

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{13}C_{x_i}^2\right)_{\min}=3C_3^2+10C_4^2=69.$$

从而，有

$$\sum_{i=1}^{13}|P_i|=\sum_{i=1}^{13}C_{x_i}^2\geqslant 69>66.$$

由此推知存在 $i\neq j$，使得$(r, s)\in P_i$，$(r, s)\in P_j$.

故有(r, i)，(s, i)，(r, j)，$(s, j)\in S$，结论成立.

例 10 设 $S=\{1, 2, \cdots, 17\}$，而$\{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$为 S 的一个 8 元子集. 求证：

(1) 存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得方程 $a_i-a_j=k$ 至少有 3 组不同的解；

(2) 对于 S 的 7 元子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_7\}$，(1)中的结论不再总是成立.

分析 (1) 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_8$，则

$$a_8-a_1=(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)\leqslant 16.$$

若上式中间 7 个括号中没有 3 个两两相等，那么必各有两个分别等于 1、2、3，一个等于 4.

(2) 作出一个使(1)中结论不成立的 7 元子集即可.

证明 (1) 若不然，则存在 S 的一个 8 元子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$，使对任何 $k\in\mathbf{N}^*$，方程 $a_i-a_j=k$ 都至多有两组解，即 $|a_i-a_j|$ $(1\leqslant i<j\leqslant 8)$ 共 28 个差数中，不存在 3 个值相等的差数.

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_8$，于是 $a_8-a_1\leqslant 16$，亦即有

$$(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)\leqslant 16. \quad ①$$

既然①式左端的 7 个差数中没有 3 数相同，故必有

$$\begin{aligned}(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)&\geqslant 1+1+2+2+3+3+4\\&=16. \quad ②\end{aligned}$$

①和②结合起来表明，这 7 个差数中恰有 1、2、3 各两个而另一个是 4.

考察这 7 个差数的排列情形，由于已经有两个 2、两个 3 和 1 个 4，所以必有

(i) 两个 1 不能相邻，1 和 2 也不能相邻；

(ii) 1 和 3、2 和 2 至多有 1 组相邻.

先看两个 1 与两个 2 这 4 个差数的排列顺序，由对称性知只有下列 4 种不同情形：

(a) 1，1，2，2；　(b) 1，2，1，2；　(c) 1，2，2，1；　(d) 2，1，1，2.

余下的 3 个差数 3、3、4 将放入这 4 个数的空隙中. 易见，在(b)和(d)两种情形中，依次相邻的 3 对数在 7 个差数的排列中都不能相邻，所以 3 个空隙中必须各放入 3、3、4 中的一个数，从而两个 3 都与 1 相邻，导致有 3 个差值为 4，矛盾. 对于(a)，两个 1 之间不能只夹 3，所以 4 必须夹在两个 1 之间. 于是 1 与 2 之间只能插入 3. 这样一来，两个 2 也不能相邻，只能插入另一个 3，这导致 4 个差值为 5，矛盾. 对于(c)，1 与 2、2 与 1 之间不能都填 3，必有一个填 4 而另两个空隙中填 3，导致 4 个差值为 5，矛盾.

(2) 考察 S 的 7 元子集$\{1, 2, 4, 7, 11, 16, 17\}$. 它的 21 对元素的差值(大数减小数)中有 1，3，5，6，9，10，15 各两个，2，4，7，12，13，14，16 各 1 个. 没有 3 个差数有相同的值，即(1)中的结论不再成立.

习　题　6

1 已知 $S=\left\{\frac{(3n)!}{6^n\cdot n}\middle| n\in\mathbf{N}^*\right\}$，设 $s\in S$. 求证：$s\in\mathbf{N}^*$.

2 数集 M 由 2003 个不同的正数组成，对于 M 中任何三个不同的元素 a、b、c，数 a^2+bc 都是有理数. 证明：可以找到一个正整数 n，使得对于 M 中任何数 a，数 $a\sqrt{n}$ 都是有理数.

3 已知由 2003 个正数组成的集合，该集合中的任意两个数 a 与 b $(a>b)$ 的和 $a+b$ 与差 $a-b$ 中至少有一个属于该集合. 证明：若将该集合中的数按递增的顺序排列，则相邻两个数的差相同.

4 设 $S=\left\{\frac{mn}{m^2+n^2}\middle| m,\ n\in\mathbf{N}^*\right\}$. 求证：如果 $x, y\in S$，且 $x<y$，那么一定存在 $z\in S$，使得 $x<z<y$.

5 求所有的由不同正整数(至少 2 个)组成的集合，使其中各数之和等于它们的积.

6 设集合 $M=\{x_1, x_2, \cdots, x_{30}\}$ 由 30 个互不相同的正数组成，$A_n(1\leqslant n\leqslant 30)$ 是 M 中所有的 n 个不同元素之和的和数. 证明：若 $A_{15}>A_{10}$，则 $A_1>1$.

7 S 为 m 个无序正整数对 (a, b) $(1\leqslant a<b\leqslant n)$ 所成的集合. 证明：至少有 $4m\cdot\dfrac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}$ 个无序三元数组 (a, b, c)，使得 (a, b)，(b, c)，(c, a) 都属于 S.

8 设 L 是坐标平面中的一个子集. 定义如下：

$$L=\{(41x+2y, 59x+15y)\mid x, y\in\mathbf{Z}\}.$$

试证：每个以原点为中心，面积等于 1990 的平行四边形至少包含集 L 中的两个点.

9 证明：在集合 $\left\{1, 2, 3, \cdots, \dfrac{3^n+1}{2}\right\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中可取出 2^n 个数，其中无三个数成等差数列.

10 设 a_j、b_j、c_j 为整数，这里 $1\leqslant j\leqslant N$，且对任意的 j，数 a_j、b_j、c_j 中至少有一个为奇数. 证明：存在一组数 r、s、t，使得集合 $\{ra_j+sb_j+tc_j\mid 1\leqslant j\leqslant N\}$ 中，至少有 $\dfrac{4N}{7}$ 个数为奇数.

11 平面上不含零向量的集合 A，若其至少有三个元素，且对任意 $u\in A$，存在 $v, w\in A$，使 $v\neq w$，$u=v+w$，则称 A 具有性质 S. 证明：

(1) 对任意 $n\geqslant 6$，存在具有性质 S 的向量集；

(2) 具有性质 S 的有限向量集合都至少有 6 个元素.

12 平面上的点集 H 称为是好的，如果 H 中任意 3 个点都存在一条对称轴，使得这 3 个点关于这条对称轴对称. 证明：

(1) 一个好的集合不一定是轴对称的；

(2) 如果一个好的集合中恰有 2003 个点，则这 2003 个点在一条直线上.

13 一个正整数的集合 C 称为"好集"，是指对任何整数 k，都存在着 $a, b\in C$，$a\neq b$，使得数 $a+k$ 与 $b+k$ 不是互质的数. 证明：如果一个好集 C 的元素之和为 2003，则存在一个 $c\in C$，使得集合 $C\backslash\{c\}$ 仍是一个"好集".

14 试证：存在一个具有如下性质的正整数的集合 A，使对任何由无限多个素数组成的集合 S，都存在自然数 $k\geqslant 2$，$m\in A$ 及 $n\notin A$，m 和 n 均为 S 中 k 个不同元素的乘积.

15 求最小的正整数 n，使得 $S=\{1, 2, \cdots, 150\}$ 的每个 n 元子集都含有 4 个两两互质的数（已知 S 中共有 35 个素数）.

16 对于任意正整数 n，记 n 的所有正约数组成的集合为 S_n. 证明：S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

17 设 $X=\{1, 2, \cdots, 2001\}$. 求最小正整数 m，使其适合要求：对 X 的任何一个 m 元子集 W，都存在 $u, v \in W$（u 和 v 可以相同），使得 $u+v$ 是 2 的方幂.

18 平面内一个整点的有限集 S 称为一个双邻集，如果对 S 内每个点 (p, q)，恰有点 $(p+1, q)$、$(p, q+1)$、$(p-1, q)$、$(p, q-1)$ 中的两点在 S 内. 问对怎样的正整数 n，存在一个双邻集恰包含 n 个整点？

7 分类原则

自本节开始，我们把注意力转向集合知识和由集合知识派生出来的数学方法的应用上.

首先我们来看与集合的分划有关的所谓分类问题.

一、分类原则

在我们的经验中，有些数学问题涉及的对象较复杂，统一地解决有困难，于是就将这些对象分成“不重不漏”的若干类，然后逐类解决. 这就是分类解决问题的方法.

分类的基本原则就是每次分类必须不重不漏，其理论依据就是集合的分划.

分类原则 设所研究的对象的全体形成集合 M，A_1，A_2，…，A_n 是 M 的一组非空子集，且

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$，$1 \leqslant i$，$j \leqslant n$，$i \neq j$；

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = M$，

那么，这组子集叫做研究对象的全体的一个 n-分类，其中每一个子集叫做所研究对象的一个类.

例 1 已知 $y=\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{x}{10}+\dfrac{9}{5}$，且 $y \leqslant |x|$，求 x 的取值范围.

分析 为了去掉 $y \leqslant |x|$ 中 $|x|$ 的绝对值符号，自然要对 x 进行分类：当 $x \geqslant 0$ 时，$y \leqslant x$；当 $x<0$ 时，$y \leqslant -x$. 由此知，本题应分两种情况讨论.

解 当 $x \geqslant 0$ 时，有 $y \leqslant x$. 即

$$\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5} \leqslant x,$$

亦即
$$(x-2)(x-9) \leqslant 0.$$

解得 $2 \leqslant x \leqslant 9$.

当 $x<0$ 时，有 $y\leqslant -x$. 即

$$\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}\leqslant -x,$$

亦即

$$(x+3)(x+6)\leqslant 0.$$

解得　$-6\leqslant x\leqslant -3$.

综上，所求 x 的取值范围为 $[-6,-3]\cup[2,9]$.

说明　以上解答是以绝对值的定义为标准进行分类的. 注意不要漏掉了 $x=0$ 的情形，这里我们是将 $x=0$ 与 $x>0$ 并在一起考虑的，但并非任何时候都可以这么做!

例 2　已知 $a>0$，$a\neq 1$，解关于 x 的不等式：

$$2\log_a(x-1)>\log_a[1+a(x-2)].$$

分析　解对数不等式必然要考虑对数函数的单调性. 于是，将底数 a 分为 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情形讨论.

解　(1) 当 $0<a<1$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 1+a(x-2)>0, \\ (x-1)^2<1+ax-2a, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>1, \\ x>2-\dfrac{1}{a}, \\ a<x<2. \end{cases}$$

因为 $0<a<1$，所以 $1>2-\dfrac{1}{a}$. 所以此时原不等式的解为 $1<x<2$.

(2) 当 $a>1$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 1+a(x-2)>0, \\ (x-1)^2>1+ax-2a, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>2-\dfrac{1}{a}, & ① \\ (x-2)(x-a)>0. & ② \end{cases}$$

i) 当 $1<a<2$ 时，由②得 $x<a$ 或 $x>2$.

因为 $a>1$，所以 $a-\left(2-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}-2>2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}-2=0$，所以 $a>2-\frac{1}{a}$.

所以，此时原不等式的解为 $2-\frac{1}{a}<x<a$ 或 $x>2$.

ii) 当 $a\geqslant 2$ 时，由②得 $x<2$ 或 $x>a$.

因为 $a\geqslant 2$，所以 $2>2-\frac{1}{a}$.

所以，此时原不等式的解为 $2-\frac{1}{a}<x<2$ 或 $x>a$.

综上，当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $(1,2)$；当 $1<a<2$ 时，原不等式的解集为 $\left(2-\frac{1}{a},a\right)\cup(2,+\infty)$；当 $a\geqslant 2$ 时，原不等式的解集为 $\left(2-\frac{1}{a},2\right)\cup(a,+\infty)$.

说明 上述解答中的分类讨论有如下特点：

1. 讨论是围绕参数 a 展开的.

2. 采用了二级分类的方式：第一级的分类是由对数函数的单调性引起的，我们将参数 a 分为两大类：(1) $0<a<1$，(2) $a>1$；第二级的分类是为了比较不等式②对应的方程 $(x-2)(x-a)=0$ 的两根的大小，我们将 $a>1$ 又分成两小类：i) $1<a<2$，ii) $a\geqslant 2$. 每级分类都严格遵循分类原则，这种分类方式可推广到更多级的情形.

3. 最后的结论是依不同情况下解的状况重新按一级分类叙述的.

从以上两例我们看出，解题中的分类讨论是根据解题的需要自然进行的，有时还要进行多级分类. 下面来看更多的例子.

二、结论因对象不同而异，分类势在必行

有些数学问题，在相同条件下因对象不同而有不同的结论，这时分类讨论是必不可少的. 例2就是一个这样的例子.

例3 设 n 是一个正整数. 安先写出 n 个不同的正整数，然后艾夫删除了其中的某些数（可以不删，但不能全删），同时在每个剩下的数的前面放上"+"号或"−"号，再对这些数求和. 如果计算结果能被 2003 整除，则艾夫获胜，否则安获胜. 问谁有必胜策略？

分析 n 个不同整数所成的集合 M 有 2^n-1 个不同的非空子集. 当 $2^n-1>2003$ 时，必有两个不同的子集的元素和关于模 2003 同余. 设这两个子集

为 A、B，且 $A\cap B=C$. 则集合 $A\backslash C$ 与 $B\backslash C$ 的元素和关于模 2003 仍同余. 这时，艾夫只要在集合 $A\backslash C$ 的元素前加“+”号，在 $B\backslash C$ 的元素前加“−”号，而将其他元素全删除，即可获胜. 取 $n\geqslant 11$，便有 $2^n-1>2003$.

那么，当 $n\leqslant 10$ 时有什么结果呢？这时只要安写下整数 $1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ $(n\leqslant 10)$ 中的若干个，则已立于不败之地. 因为艾夫无论怎么做，所得的和都只能在 -1023 与 1023 之间，且不等于 0.

解 当 $n\leqslant 10$ 时，安有必胜策略. 为此，他可写出整数 $1, 2, \cdots, 2^{n-1}$. 因为 $1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1\leqslant 2^{10}-1=1023$，所以，艾夫可能得到的和只能在 -1023 与 1023 之间. 由二进制数的表示的惟一性及添加正、负号的办法知，艾夫得到的和也不可能为 0. 所以，艾夫必败无疑.

当 $n\geqslant 11$ 时，艾夫有必胜的策略. 设安写出的整数所成之集为 M. 因为 $2^n-1\geqslant 2^{11}-1>2003$，所以 M 的非空子集数大于 2003. 因而，一定存在 M 的两个不同子集，例如 A 和 B，使得 A 中数的和与 B 中数的和关于模2003同余. 如果艾夫将“+”号放在集合 $A\backslash B$ 中的数的前面，将“−”号放在集合 $B\backslash A$ 中的数的前面，并删除 M 中所有其余的数，则艾夫必胜.

例 4 彼得有 25 名同班同学(他自己未计入数目 25 之内). 已知这 25 名同学在班内的朋友数目各不相同，试问彼得在该班有多少名朋友？

分析 因为彼得也可能是同班同学的朋友，所以彼得的 25 名同学的朋友数分别只能是 $0, 1, 2, \cdots, 24, 25$ 之一，且互不相同. 如果在彼得的同学中存在孤独者(无朋友者)，则另 24 个同学的朋友数分别为 $1, 2, \cdots, 24$；否则，彼得的 25 个同学的朋友数分别为 $1, 2, \cdots, 25$. 看来我们得分如上两种情形讨论.

解 分两种情形讨论.

第一种情形 假定某位同学在班上的朋友数为 0. 则除了这位孤独者和彼得以外，其他同学每人在班上的朋友数不多于 24. 因为这些同学总共 24 人，每人在班上的朋友数不同，所以他们的朋友数依次为 $1, 2, \cdots, 24$.

约定将朋友数为 $1, 2, \cdots, 12$ 的同学编为 A 组，将朋友数为 $13, 14, \cdots, 24$ 的同学编为 B 组. 将各组同学的朋友数求和，分别得到

$$S(A)=1+2+\cdots+12=78,$$

$$S(B)=13+14+\cdots+24=222.$$

设 A 组中有 k 名同学是彼得的朋友. 则 A 组同学在 B 组中的朋友数总和不多于 $S(A)-k$，另外 B 组同学在本组中的朋友数总和不超过 12×11. 因此，彼得在 B 组中的朋友数不少于

$$S(B)-12\times 11-(S(A)-k)=12+k,$$

但 B 组总共只有 12 人，所以只能是 $k=0$. A 组中没有彼得的朋友（A 组同学也没有在本组中的朋友），B 组的每位同学都是彼得的朋友. 对此情形，彼得在班上有 12 名朋友.

第二种情形　设班上没有孤独者，每个人都有朋友. 朋友数各不相同，最多可达 25 人. 约定将朋友数为 1，2，…，12 的同学编入 A 组；将朋友数为 13，14，…，25 的同学编入 B 组. 将各组同学的朋友数求和，分别得到

$$S(A)=1+2+\cdots+12=78,$$

$$S(B)=13+14+\cdots+25=247.$$

设 A 组中有 k 名同学是彼得的朋友. 则 A 组同学在 B 组中的朋友数总和不多于 $S(A)-k$. 另外，B 组同学在本组中的朋友数总共不超过 13×12. 于是，彼得在 B 组中的朋友数不少于

$$S(B)-13\times 12-(S(A)-k)=13+k,$$

但 B 组总共只有 13 人，所以 $k=0$. A 组中无彼得的朋友，B 组中的每位同学都是彼得的朋友. 对此情形，彼得在班上有 13 名朋友.

下面是一个根据几何图形的形状来分类的例子.

例 5　证明：任何一个三角形可以被分割成三个多边形（包括三角形），其中之一为钝角三角形，且能重新拼为一个矩形（多边形允许被翻转）.

解　若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形（如图 7-1），且 $AB=AC$，则取底边中点 D 和底边另一点 E，连结顶点和底边上这两个点，把三角形分为三部分，易知其中 $\triangle AEC$ 为钝角三角形，且能按图 7-2 方法拼成矩形.

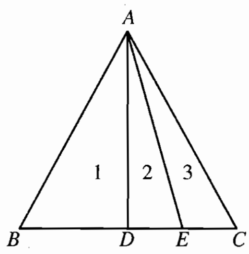


图 7-1

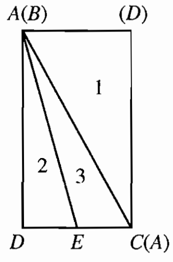


图 7-2

若 $\triangle ABC$ 为非等腰三角形（如图 7-3），不妨设 $\angle A$ 为其最大的角. 作 $AD\perp BC$ 于点 D，在线段 BD 上取点 M，使 $MD=DC$. 设 BM、AB 的中点分别为 E、F，连结 EF. 则 $\triangle BEF$、$\triangle ADC$、四边形 $ADEF$ 可按图 7-4 方法拼成矩形，且易知 $\triangle BEF$ 为钝角三角形.

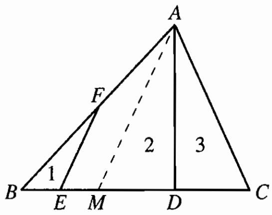


图 7－3

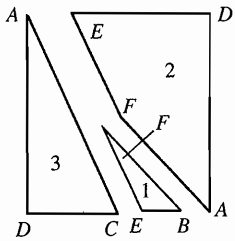


图 7－4

在解有关整数的问题时，常常利用剩余类来分类.

例 6 对任意 $n, k \in \mathbf{N}^*$，令 $S = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + k^n$. 求 S 被 3 除所得的余数.

分析 因为 $(3m)^n \equiv 0 \pmod 3$，$(3m+1)^n \equiv 1 \pmod 3$，$(3m+2)^{2r} \equiv 1 \pmod 3$，$(3m+2)^{2r+1} \equiv 2 \pmod 3$，所以对 n 按奇偶性分类是自然的.

解 (1) 当 n 为奇数时，不妨设 $n = 2l - 1$，$l \in \mathbf{N}^*$. 对 $m \in \mathbf{N}^*$，如果 $3 \nmid m$，则 $m^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow m^{2l} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow m^{2l-1} \equiv m^{2(l-1)+1} \equiv m \pmod 3$；如果 $3 \mid m$，则 $m^{2l-1} \equiv 0 \equiv m \pmod 3$. 于是，当 n 为奇数时，对 $m \in \mathbf{N}$，总有 $m^n \equiv m \pmod 3$. 从而

$$\begin{aligned} S &\equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + k \\ &\equiv (1+2+3) + (4+5+6) + \cdots \pmod 3. \end{aligned}$$

当 $k = 3t + 3$ 或 $k = 3t + 2$ 时，就有

$$S \equiv 0 \pmod 3 \ (t \in \mathbf{N});$$

当 $k = 3t + 1$ 时，就有

$$\begin{aligned} S \equiv\ & (1+2+3) + (4+5+6) + \cdots \\ & + [(k-3) + (k-2) + (k-1)] + k \\ \equiv\ & 1 \pmod 3 \ (t \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

(2) 当 n 为偶数时，对 $m \in \mathbf{N}$，由(1)知，$3 \nmid m \Rightarrow m^n \equiv 1 \pmod 3$，$3 \mid m \Rightarrow m^n \equiv 0 \pmod 3$. 于是

$$S \equiv (1+1+0) + (1+1+0) + \cdots \pmod 3.$$

当 $k = 3t + 3$ $(t \in \mathbf{N})$ 时，$(1+1+0)$ 共有 $t+1$ 组，故 $S \equiv (t+1)(1+1+0) \equiv 2t + 2 \pmod 3$；

当 $k=3t+2\ (t\in\mathbf{N})$ 时，$(1+1+0)$ 共有 t 组，且 $(k-1)^n\equiv k^n\equiv 1\pmod 3$，故 $S\equiv 2t+1+1\equiv 2t+2\pmod 3$；

当 $k=3t+1\ (t\in\mathbf{N})$ 时，$(1+1+0)$ 共有 t 组，且 $k^n\equiv 1\pmod 3$，故 $S\equiv 2t+1\pmod 3$.

综合(1)、(2)可知：

当 n 为奇正整数时，有

$$S\equiv\begin{cases}0,\ k=3t+3\text{ 或 }3t+2,\\1,\ k=3t+1\end{cases}\pmod 3\ (t\in\mathbf{N});$$

当 n 为偶正整数时，有

$$S\equiv\begin{cases}0,\ k=9t+4\text{ 或 }9t+8\text{ 或 }9t+9,\\1,\ k=9t+1\text{ 或 }9t+5\text{ 或 }9t+6,\\2,\ k=9t+2\text{ 或 }9t+3\text{ 或 }9t+7\end{cases}\pmod 3\ (t\in\mathbf{N}).$$

说明　这是一个两级分类的例子. 首先是对 n 按奇偶性(模 2 的剩余类)分成两大类，然后又将每一大类对 k 按模 3 的剩余类分成三个小类.

三、通过分类增加条件，便于各个击破

分类实际上就是给研究对象增设限制条件，从而使解决问题的难度降低.

例 7　求集合 B、C，使得 $B\cup C=\{1,2,\cdots,10\}$，并且 C 的元素乘积等于 B 的元素和.

分析　这实际上是求特殊条件下集合方程的解. 注意到集合 B 的元素和 $\leqslant 1+2+\cdots+10=55$，而 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$，故知集合 C 至多有 4 个元素. 这样我们可以按 $|C|$ 的可能值分 4 类来讨论.

解　因为 $1+2+\cdots+10=55<120=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$，所以集合 C 至多有 4 个元素. 下面对 $|C|$ 分 4 种情况讨论.

(1) C 由一个元素构成. 因为 C 的元素乘积不超过 10，B 的元素和至少为 $55-10=45$. 故此情况不成立.

(2) C 由两个元素 x、y 构成. 设 $x<y$，则有 $xy=55-x-y$，即

$$(x+1)(y+1)=56.$$

因为 $x+1<y+1\leqslant 11$，解得 $x=6$，$y=7$. 故 $C=\{6,7\}$，$B=\{1,2,3,4,5,8,9,10\}$.

(3) C 由三个元素 $x<y<z$ 构成. 由题设得

$$xyz=55-x-y-z.$$

当 $x=1$ 时,解得 $y=4$, $z=10$. 因此,$C=\{1,4,10\}$, $B=\{2,3,5,6,7,8,9\}$.

当 $x=2$ 时,有 $2yz+y+z=53$,即 $(2y+1)(2z+1)=107$ 为质数. 无解.

若 $x\geqslant 3$,显然有 $xyz\geqslant 3\times 4\times 5=60>55-x-y-z$. 无解.

(4) C 由四个元素 $x<y<z<t$ 构成. 必有 $x=1$,否则 $xyzt\geqslant 2\times 3\times 4\times 5=120>55$. 这时

$$yzt=54-y-z-t,\ 2\leqslant y<z<t.$$

如(3),$y\geqslant 3$ 时无解. 故 $y=2$, $2zt+z+t=52$,即 $(2z+1)(2t+1)=105$. 解得 $z=3$, $t=7$. 从而,$C=\{1,2,3,7\}$, $B=\{4,5,6,8,9,10\}$.

综上知,B、C 有 3 组解.

说明 这里的分类并不是一眼看出来的,但在经过了对两个集合的元素和与元素积的估计后,这个分类就是自然的了,而且后面的解答过程或多或少与这个估计有关.

例 8 对任意的 $a>0$, $b>0$,求 $\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2+b^2\right\}\right\}$ 的值.

分析 为了求出 $\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2+b^2\right\}$,我们来比较 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、a^2+b^2 的大小. 令 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=a^2+b^2$,得 $a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. 如设 $a\geqslant b>0$,则 a、b、$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 有三种顺序关系:$a\geqslant b\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\geqslant a\geqslant b$, $a\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\geqslant b$. 我们就以此分类.

解 不失一般性,不妨设 $a\geqslant b>0$,则 $0<\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$. 令 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=a^2+b^2$,则 $a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

(1) 若 $a\geqslant b\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$,则

$$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\sqrt[3]{2},\ a^2+b^2\geqslant 2b^2\geqslant\sqrt[3]{2}.$$

所以$\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}=a^2+b^2\geqslant\sqrt[3]{2}$.从而当且仅当$a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$时，

$$\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}\right\}=\min\{a^2+b^2\}=\sqrt[3]{2};$$

(2) 若$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\geqslant a\geqslant b>0$,则

$$\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{a}\geqslant\sqrt[3]{2},\ a^2+b^2\leqslant 2a^2\leqslant\sqrt[3]{2}.$$

所以$\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}=\frac{1}{b}\geqslant\sqrt[3]{2}$.从而当且仅当$a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$时，

$$\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}\right\}=\min\left\{\frac{1}{b}\right\}=\sqrt[3]{2}.$$

(3) 若$a\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\geqslant b>0$,则$\frac{1}{b}\geqslant\sqrt[3]{2}\geqslant\frac{1}{a}>0$.

此时若$\frac{1}{b}\geqslant a^2+b^2$,则

$$\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}=\frac{1}{b}\geqslant\sqrt[3]{2};$$

若$\frac{1}{b}\leqslant a^2+b^2$,则

$$\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}=a^2+b^2\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\sqrt[3]{2};$$

所以 当且仅当$a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$时，

$$\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}\right\}=\sqrt[3]{2}.$$

综上所述：当且仅当$a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$时，

$$\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ a^2+b^2\right\}\right\}=\sqrt[3]{2}.$$

例 9　设S为集合$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 50\}$的具有下列性质的子集,S中任意两个

不同的元素之和不被 7 整除. 则 S 中的元素最多可能有几个?

解　将{1，2，…，50}按照模 7 分成 7 类：

$$K_1=\{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\},$$

$$K_2=\{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\},$$

$$K_3=\{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\},$$

$$K_4=\{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\},$$

$$K_5=\{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\},$$

$$K_6=\{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\},$$

$$K_0=\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}.$$

下面证明 $S=K_1\cup K_2\cup K_3\cup\{7\}$ 为满足要求的元素最多的集合.

首先,对 $a, b\in S, a\neq b$,有 3 种可能：

(1) $a, b\in K_i(1\leqslant i\leqslant 3)$,则

$$a+b\equiv 2i \pmod 7,$$

有 $a+b$ 不能被 7 整除.

(2) $a\in K_i, b\in K_j(1\leqslant i\neq j\leqslant 3)$,则

$$a+b\equiv i+j \pmod 7,$$

有 $a+b$ 不能被 7 整除.

(3) $a\in K_i, b=7\ (1\leqslant i\leqslant 3)$,则

$$a+b=i \pmod 7,$$

有 $a+b$ 不能被 7 整除.

综上知,S 中任两个元素之和不能被 7 整除.

其次证明,若给 S 添加一个元素 c,则必存在 S 中的一个元素与 c 之和,能被 7 整除. 添加的 c 有 4 种可能：

(1) $c\in K_4$,则 c 与 K_3 中的元素之和能被 7 整除.

(2) $c\in K_5$,则 c 与 K_2 中的元素之和能被 7 整除.

(3) $c\in K_6$,则 c 与 K_1 中的元素之和能被 7 整除.

(4) $c\in K_0$,则 c 与 7 之和能被 7 整除.

综上知,S 中的元素不能再增添. 所以 S 中元素数目的最大值为

$$|S|=|K_1|+|K_2|+|K_3|+1=23.$$

说明 这里首先按模7的剩余类对集合$\{1, 2, \cdots, 50\}$的元素分类是自然的.后面的解答中又进行了两次分类,但这两个分类的理由已经蕴涵在最初的分类之中了.

例10 设n、m、k都是自然数,且$m \geqslant n$. 证明:如果

$$1+2+\cdots+n=mk,$$

则可将数$1, 2, \cdots, n$分成k组,使每一组数的和都等于m.

证明 对n进行归纳.

当$n=1$时,结论显然成立.

假设对一切小于n的自然数结论成立,我们来考察集合$S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$的情形.

如果$m=n$,那么$\frac{1}{2}(n+1)=k$为整数,于是可按如下方式分组:

$$\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \cdots, \left\{\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+1)\right\}.$$

如果$m=n+1$,那么$n=2k$为偶数,则分组方式具有形式:

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \cdots, \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right\}.$$

对其余情形再分三种情况讨论:

情况1:$n+1<m<2n$, m为奇数. 我们先从S_n中分出$S_{m-n-1}=\{1, 2, \cdots, m-n-1\}$;再将其余$2n-m+1$个数两两配对,使各对之和皆为$m$: $\{m-n, n\}, \{m-n+1, n-1\}, \cdots, \left\{\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}(m+1)\right\}$. 由于$S_{m-n-1}$中的数字之和为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n)\\=&\frac{1}{2}[m^2-m(2n+1)]+\frac{1}{2}n(n+1)\\=&m\left[\frac{1}{2}(m-2n-1)+k\right],\end{aligned}$$

知该和数可被m整除,且因$m \geqslant m-n-1$,于是由归纳假设知,可将S_{m-n-1}中的数字分组,使得各组数字之和皆为m.

情况2:$n+1<m<2n$, m为偶数. 这时,我们仍然先从S_n中分出S_{m-n-1}

来；并先将其余数字两两配对，使各对数字之和为 m：$\{m-n, n\}$，$\{m-n+1, n-1\}$，…，$\left\{\frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}+1\right\}$，这时还剩下一个数字$\frac{m}{2}$. S_{m-n-1}中的数字之和可以表示成$\frac{m}{2}(m-2n-1+2k)$ 的形式，它可被$\frac{m}{2}$ 整除. 又由 $m<2n$ 得 $m\leqslant 2n-2$，$\frac{m}{2}\geqslant m-n-1$. 于是由归纳假设知，可将 S_{m-n-1} 中的数字分为 $m-2n-1+2k$ 组，使每组之和皆为$\frac{m}{2}$. 由于 $m-2n-1+2k$ 是一个奇数，所以当将刚才剩下的单独一个数$\frac{m}{2}$ 作为一组补入其中后，即可将这些和为$\frac{m}{2}$ 的组两两合并，使得各组之和都成为 m.

情况 3：$m\geqslant 2n$. 此时 $k=\frac{n(n+1)}{2m}\leqslant\frac{1}{4}(n+1)$，所以 $n-2k\geqslant 2k-1>0$. 我们从 S_n 中分出 S_{n-2k}，后者中的数字之和为

$$\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1)=\frac{1}{2}n(n+1)-k(2n+1)+2k^2,$$

它可被 k 整除，且所得之商不小于 $n-2k$. 这是因为

$$\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{2(n-2k)}=\frac{1}{2}(n-2k+1)\geqslant k.$$

于是由归纳假设知可将 S_{n-2k} 中的数字分为 k 组，使各组之和相等. 再将剩下的 $2k$ 个数字两两配对，使各对数字之和相等：$\{n-2k+1, n\}$，$\{n-2k+2, n-1\}$，… 然后再将这 k 对数字分别并入前面所分出的 k 组数字，即可得到合乎需要的 k 组数字.

综上，对 S_n 结论成立.

说明　上述解答是在用数学归纳法证明的过程中采用分类法：在归纳证明的第二步中，我们对 m 的取值范围分了 5 类来讨论.

习　题　7

1 若 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$，则直线 $y=kx+k$ 的图象必经过第________象限.

2 在 1，2，…，99 这 99 个正整数中，任意取出 k 个数，使得其中必有两个

数 a、b $(a \neq b)$ 满足 $\frac{1}{2} \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 2$，则 k 的最小可能值等于________.

3 设变量 x 满足 $x^2+bx \leqslant -x$ $(b<-1)$，且 $f(x)=x^2+bx$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$，则 b 等于________.

4 若关于 x 的不等式 $kx^2-2|x-1|+6k<0$ 的解集为空集，则 k 的取值范围是________.

5 证明：三角形三条高线的中点共线的充分必要条件是这个三角形是直角三角形.

6 正整数 x、y 满足 $x<y$，令 $P=\frac{x^3-y}{1+xy}$，求 P 能取到的所有整数值.

7 在一个由 n 个方格组成的 $1\times n$ 棋盘中的每个方格上各放一个钱币. 第一次搬动是将某一个方格上的钱币放在相邻的一个方格中的钱币上，左边或右边都可以，但是不能出棋盘. 以后的每次搬动是将某个方格中的所有钱币(设有 k 个)搬到与此方格相邻的第 k 个位置的方格中，左或右都可以，但是不能出棋盘. 试证：能经过 $n-1$ 次搬动，将所有钱币都集中在一个方格中.

8 求满足 $w!=x!+y!+z!$ 的所有正整数组 w，x，y，z.

9 设整数 $k\geqslant 14$，P_k 是小于 k 的最大质数. 若 $P_k \geqslant \frac{3k}{4}$，$n$ 是一个合数，且 $n>2P_k$，证明：n 能整除 $(n-k)!$.

10 若 x、y 是任意正实数，求 $\max\left\{\min\left\{x,\ \frac{1}{y},\ y+\frac{1}{x}\right\}\right\}$ 的值.

11 设正整数 n 具有如下性质：在从 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 1988\}$ 中任取的 n 个数中，总有 29 个数组成一个等差数列. 求证：$n>1788$.

12 某国学生参加城市联赛，试卷由 6 题组成，每题恰有 1000 个人做出来，若找不到两个人，使任何一题至少被两个人中的一个答出，试求参加比赛的人数的最小值.

13 将一些相同的正 n 边形餐巾纸放在桌子上，允许任两张餐巾纸有可能有部分重叠. 设任两张餐巾纸可经过平移将一张移到和另一张重叠. 当 $n=6$ 时，是否总可以在桌上钉一些钉子，使得每张餐巾纸恰好被钉了一次？

14 平面上按如下方式给出一个螺旋放置的正方形系列：最初是两个 1×1 正方形，这两个正方形有一条竖直的公共边，并排水平放置；第三个为 2×2 正方形，紧贴着放置在前两个正方形上方，有一条边为前两个正方形各一条边之并；第四个为 3×3 正方形，紧贴着放置在第一个和第三个正

方形的左方，有一条边为那两个正方形各一条边之并；第五个为 5×5 正方形，紧贴着放在第一、第二和第四个正方形的下方，有一条边为那三个正方形各一条边之并；第六个为 8×8 正方形，紧贴着放置在第二、第三、第五个正方形的右方……每一个新的正方形与已拼成的矩形有一条公共边，该公共边上含有上一个正方形的一条边. 试证：除了第一个正方形以外，所有这些正方形的中心统统都在两条固定直线上.

15 桌子上放着两堆重量和相等的硬币，第一堆硬币的个数是 n，第二堆硬币的个数是 m，$S=\min\{n, m\}$. 对于任意的不大于 S 的自然数 k，按硬币重量自大至小的顺序，第一堆前 k 个较重的硬币的重量和都不大于第二堆中前 k 个较重的硬币的重量和. 证明：对于任意正数 x，如果把两堆中每一个重量不小于 x 的硬币的重量都按 x 计算，那么，这样算出来的第一堆硬币的重量和都不小于第二堆硬币的重量和.

16 x、y 是互素的自然数，k 是大于 1 的自然数. 找出满足 $3^n=x^k+y^k$ 的所有自然数 n，并给出证明.

17 证明：可以用 4 种颜色对正整数 1，2，…，2000 染色，使它不含有由 7 个同色数组成的等差数列.

18 一个正整数无穷等差数列，包含一项是整数的平方，另一项是整数的立方. 证明：此数列含有一项是整数的六次幂.

19 如果一个正整数的所有正约数之和为其两倍，则称该数为一个完全数. 求所有的正整数 n，使得 $n-1$ 和 $\frac{n(n+1)}{2}$ 都是完全数.

8 极端原理

对于一类特殊的实数的集合，我们有下面这些显然的结论：

最小数原理Ⅰ　设 M 是自然数集的一个非空子集，则 M 中必有最小数.

最小数原理Ⅱ　设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最小数.

推论　设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最大数.

最小数原理又称为极端原理. 不要小看了这些简单的结论，数学的奇妙或许就在于：在一些看似原始的简单事实中往往蕴含了深刻的数学思想方法. 下面我们就来看一些运用最小数原理解决问题的例子.

一、集合与组合问题

最小数原理实际上是一个存在性定理. 运用最小数原理解决数学问题的关键就是，首先根据问题的条件构造具有某种性质的实数的集合，然后利用这个集合的最小(大)数的存在性解决问题.

例1　已知 S_1、S_2、S_3 为非空整数集合，且对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1) 证明：S_1、S_2、S_3 三个集合中至少有两个相等.

(2) 这三个集合中是否可能有两个集合无公共元素？

证明　(1) 由已知，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则

$$y-x\in S_k,\ (y-x)-y=-x\in S_i,$$

所以每个集合中均有非负元素.

当三个集合中的元素都为零时，命题显然成立.

否则，设 S_1、S_2、S_3 中的最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$. 设 b 为 S_2、S_3 中最小的非负元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$，则 $0\leqslant b-a<b$，与 b 的取法矛盾. 所以 $b=0$.

任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故 $x-0=x\in S_3$，所以 $S_1\subseteq S_3$. 同理 $S_3\subseteq S_1$. 故 $S_1=S_3$.

(2) 可能. 例如 $S_1=S_2=\{奇数\}$、$S_3=\{偶数\}$ 显然满足条件，但 S_1 和 S_2 与 S_3 都无公共元素.

例 2 设 n 元集合 X 的某些三元子集组成集合 S，且 S 中每两个元素(子集)之间至多有 1 个公共元素. 试证：存在集合 $A\subset X$，使得 $|A|\geqslant[\sqrt{2n}]$，且 S 中的任何元素都不是 A 的子集.

分析 依题设 X 的三元子集族 S 显然没有包含 X 的全部三元子集，故存在 X 的不包含 S 中任何元素(X 的三元子集)的子集，毫无疑问应选取其中元素最多者来做 A.

证明 设在 X 的不包含 S 中任何元素的子集中，A 是元素数目最多的一个，$|A|=a$. 对于每个 $x\in X-A$，$A\cup\{x\}$ 中必包含 S 中的一个元素，否则与 a 的最大性矛盾.

设 $x,\ y\in X-A,\ x\neq y$，则 $A\cup\{x\}$ 与 $A\cup\{y\}$ 分别包含 S 中的元素 $s(x)$ 和 $s(y)$. 显然，$s(x)\neq s(y)$. 按已知，二者至多有 1 个公共元素，所以相应的 A 中的两个二元子集也不同，即

$$s(x)-\{x\}\neq s(y)-\{y\}.$$

这样一来，我们就定义了一个由 $X-A$ 到 A 的所有二元子集组成的集合的单射：

$$X-A\ni x\longmapsto s(x)-\{x\}\subset A.$$

从而有

$$n-a\leqslant C_a^2,$$

$$a+\frac{1}{2}>\sqrt{2n}.$$

因为 $a\in N$，所以 $a\geqslant[\sqrt{2n}]$.

例 3 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛，每人至少上场一次. 求证：必有六场比赛，其 12 个参赛者各不相同.

证明 记参加第 j 场比赛的选手为 $(a_j,\ b_j)$，并记

$$S=\{(a_j,\ b_j)\mid j=1,\ 2,\ \cdots,\ 14\}.$$

设 M 为 S 的一个子集. 如果 M 中所含选手对中出现的选手互不相同，则称 M 为 S 的一个“好”子集.

显然，这样的“好”子集只有有限个，其中必有一个元素最多的，设这个元素最多的“好”子集为 M_0，它的元素个数为 r，显然只需证明 $r\geqslant 6$.

如果 $r\leqslant 5$，由于 M_0 是元素个数最多的"好"子集，所以在 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛，否则与 M_0 的最大性矛盾. 这就意味着，这 $20-2r$ 名选手所参加的比赛一定是同前 $2r$ 名选手进行的.

由于每名选手至少参加一场比赛，所以除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛.

因此，总比赛场数至少为

$$r+20-2r=20-r\geqslant 15,$$

与总比赛场次为 14 场矛盾.

于是 $r\geqslant 6$. 问题得证.

二、代数与数论问题

在代数不等式中，有一类确定满足不等关系的量是否存在的问题，通常可以尝试用最小数原理来解决.

例 4 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均是正整数，令

$$a=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

$$b=\frac{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

求证：在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中必存在两个数 x_i、x_j，使 $|a-b|\leqslant|a-x_i|\leqslant|x_j-x_i|$ 成立.

分析 要证明存在 x_i 使 $|a-b|\leqslant|a-x_i|$ 成立，自然要在 $|a-x_1|$，$|a-x_2|$，…，$|a-x_n|$ 中取最大者来做 $|a-x_i|$. 同样的，对于存在 x_i、x_j 使 $|a-x_i|\leqslant|x_j-x_i|$ 的证明，$|x_j-x_i|$ 应取 $|x_1-x_i|$，$|x_2-x_i|$，…，$|x_n-x_i|$ 中最大者.

证明

$$\begin{aligned}&|a-b|\\=&\left|a-\frac{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\right|\\=&\frac{|b_1(a-x_1)+b_2(a-x_2)+\cdots+b_n(a-x_n)|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\\\leqslant&\frac{b_1|a-x_1|+b_2|a-x_2|+\cdots+b_n|a-x_n|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.\end{aligned}$$

在 $|a-x_1|$，$|a-x_2|$，…，$|a-x_n|$ 中必有一个最大者，设为 $|a-x_i|$.

则有

$$|a-b| \leqslant \frac{b_1|a-x_i|+b_2|a-x_i|+\cdots+b_n|a-x_i|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$=\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)|a-x_i|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$=|a-x_i|.$$

下面再计算 $|a-x_i|$.

$$|a-x_i|=\left|\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-x_i\right|$$

$$=\frac{|a_1(x_1-x_i)+a_2(x_2-x_i)+\cdots+a_n(x_n-x_i)|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$\leqslant \frac{a_1|x_1-x_i|+a_2|x_2-x_i|+\cdots+a_n|x_n-x_i|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

在 $|x_1-x_i|$，$|x_2-x_i|$，…，$|x_n-x_i|$ 中必有最大者，设为 $|x_j-x_i|$. 则

$$|a-x_i| \leqslant \frac{a_1|x_j-x_i|+a_2|x_j-x_i|+\cdots+a_n|x_j-x_i|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)|x_j-x_i|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$=|x_j-x_i|.$$

于是，存在 x_i、x_j，使

$$|a-b| \leqslant |a-x_i| \leqslant |x_j-x_i|$$

成立.

例 5　求方程

$$x^4+4y^4=2(z^4+4u^4) \qquad ①$$

的整数解.

分析　本例可以运用无穷递降法来解. 设 $(x,\ y,\ z,\ u)$ 是方程的一组解，且其中 x 是所有解中取最小正整数者，我们就让"无穷递降"的过程从此开始，看看后面会出现什么情况.

解　显然，方程①有解

$$x=y=z=u=0.$$

我们证明这是方程①的惟一一组整数解.

若(x, y, z, u)是方程①的解,则$(|x|, y, z, u)$必是方程①的解.故不妨设(x, y, z, u)是方程①的所有解中x取最小正整数者.易知,x为偶数.设$x=2x_1$, $x_1 \in \mathbf{N}^*$,则有

$$16x_1^4+4y^4=2(z^4+4u^4),$$

$$8x_1^4+2y^4=z^4+4u^4.$$

因而z是偶数.设$z=2z_1$, $z_1 \in \mathbf{Z}$,则有

$$8x_1^4+2y^4=16z_1^4+4u^4,$$

$$4x_1^4+y^4=8z_1^4+2u^4.$$

因而y是偶数.设$y=2y_1$, $y_1 \in \mathbf{Z}$,则有

$$4x_1^4+16y_1^4=8z_1^4+2u^4,$$

$$2x_1^4+8y_1^4=4z_1^4+u^4.$$

因而u是偶数.设$u=2u_1$, $u_1 \in \mathbf{Z}$,则有

$$2x_1^4+8y_1^4=4z_1^4+16u_1^4,$$

$$x_1^4+4y_1^4=2(z_1^4+4u_1^4). \qquad ②$$

由②知,(x_1, y_1, z_1, u_1)也是方程①的解.但$0<x_1<x$,这与x的取法矛盾.所以,方程①有惟一解$(0, 0, 0, 0)$.

说明 由$(x, y, z, u)=(2x_1, 2y_1, 2z_1, 2u_1)$知,若方程①有$x=y=z=u=0$以外的解,则$x$、$y$、$z$、$u$至少有一个不等于零.由于它们在方程中的次数均为偶数,故可设其中任一个为正整数.由上面的证法同样可导出矛盾.这就是我们“不妨设”的理由.

例6 已知正整数a和b使得$ab+1$整除a^2+b^2,求证$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个正整数的平方.

证明 令$A=\{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{N}^*, a \geqslant b, ab+1 \mid a^2+b^2\}$.本题的结论是:对所有$(a, b) \in A$,都有

$$f(a, b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k^2 (k \in \mathbf{N}^*). \qquad ①$$

记$B=\{(a, b) \mid (a, b) \in A$,且$f(a, b) \neq k^2, k \in \mathbf{N}^*\}$.我们只需证明$B=\varnothing$.

若 $B\neq\varnothing$，则不妨设 B 中使 $a+b$ 最小的正整数对为 (a, b). 令

$$f(a, b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=t\ (\neq k^2),$$

则有

$$a^2-tba+b^2-t=0. \tag{②}$$

把②看作是关于 a 的二次方程，显然 a 是方程②的一个根，设 c 为②的另一根，则由韦达定理有

$$\begin{cases}a+c=tb, & ③\\ ac=b^2-t. & ④\end{cases}$$

由 ③ 知 c 是整数，由 ④ 知 $c\neq 0$.

若 $c<0$，则由 $t>0$, $b>0$ 知

$$-tcb-t\geqslant 0.$$

由 c 是②的根得

$$c^2-tcb+b^2-t=0, \tag{⑤}$$

于是 $c^2+b^2=tcb+t\leqslant 0$. 出现矛盾.

因而 $c>0$. 由④知

$$0<ac=b^2-t<b^2\leqslant a^2,$$

所以 $0<c<a$. 由⑤得

$$t=\frac{c^2+b^2}{cb+1},$$

于是 (b, c) 或 $(c, b)\in B$. 但此时

$$b+c<a+b$$

与 (a, b) 的选择即 $a+b$ 最小矛盾.

所以 $B=\varnothing$，从而命题得证.

说明 这是第 26 届 IMO 的一道试题，曾难倒主办国不少数论专家，但就在此次竞赛中就有选手因上面的解法而获特别奖. 此题还有另外一个用无穷递降法的证明.

另证 当 $a=b$ 时，有正整数 q，使得 $\dfrac{2a^2}{a^2+1}=q$，即 $(2-q)a^2=q$.

显然，$q=1=1^2$，此时结论成立.

由对称性，不妨设 $a>b$.

设 s 与 t 是满足下列条件的整数：

$$\begin{cases} a=bs-t, \\ s\geqslant 2,\ 0\leqslant t<b. \end{cases} \tag{①}$$

将 ① 代入$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$得

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}.$$

考察这个数与 $s-1$ 的差

$$\begin{aligned} &\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}-(s-1)\\ =&\frac{b^2s-bst+b^2+t^2-s-bt+1}{b(bs-t)+1}\\ =&\frac{s(b^2-bt-1)+b(b-t)+t^2+1}{b(bs-t)+1}. \end{aligned} \tag{②}$$

因为 $t<b$，所以 $b-t\geqslant 1$，从而

$$b^2-bt-1\geqslant 0,\ b-t>0,\ t^2+1>0,$$

于是 ② 式大于 0，即

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}>s-1. \tag{③}$$

同理

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}<s+1. \tag{④}$$

由于$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}$是整数，所以由 ③、④ 可得

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}=s,$$

由此得

$$b^2+t^2=bts+s.$$

即

$$\frac{b^2+t^2}{bt+1}=s=\frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

因为 $a>b>t$，所以 $t=0$ 时，$s=b^2$ 为平方数；若 $t\neq 0$，可仿此继续下去，经过有限步之后，总可以使最小的数变为 0，所以 s 是平方数，即 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方.

三、几何与染色问题

例 7　在平面上有 n 个 $(n\geqslant 2)$ 不全共线的点. 试证：一定存在一条直线恰好通过这 n 个点中的两个点.

分析　假设结论不成立. 不妨设其中三点 A、B、C 都在直线 l 上，且 B 在 A、C 之间，D 为 l 外一点，如图 8－1，作 $DP_1\perp AC$. 不妨设 A、B 在 P_1 的同侧，再作 $BP_2\perp AD$. 易知 $DP_1>BP_2$. 如直线 AD 上还有第三点 E，不妨设 D、E 在 P_2 的同侧，且 $DP_2>EP_2$，作 $EP_3\perp BD$，则 $BP_2>EP_3$. 由假设，这个过程可以无限地进行下去，而且每次得到的“点到直线的距离”都比前一次小. 另一方面，过 n 个点的每两点作一条直线（可能有三点共线），然后由 n 个点中每一点作到这些直线的距离，显然这样的距离只有有限个. 于是出现矛盾. 至此，我们实际上已找到了本例的一种证明方法. 下面我们用最小数原理来改写上面的过程.

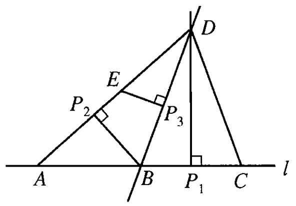


图 8－1

证明　由 n 个点中每两点作一条直线（可能出现三点共线），考虑 n 个点中每一点到这些直线的距离所成之集，这样的距离只有有限个，其中必有一个最小者. 不妨设点 P 到直线 l 的距离最短.

下面证明：l 上仅有已知点中的两个点.

若 l 上有已知 n 个点中的三个点，过点 P 作 $PF\perp l$ 于 F，则必有两点在点 F 的同侧，设点 X、点 Y 在点 F 的同侧（如图 8－2），且 $YF>XF$. 设过点 P 与点 Y 的直线为 m，这时点 X 到 m 的距离 XZ 小于点 P 到 l 的距离 PF，与假设 PF 最小矛盾.

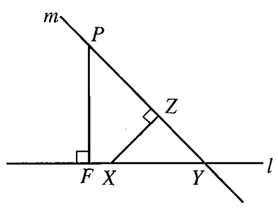


图 8－2

所以，直线 l 上仅有已知点中的两个点. l 即为所求.

例 8 在某个星系的每一个星球上，都有一位天文学家在观测最近的星球. 若每两个星球间的距离都不相等，证明：当星球的个数为奇数时，一定有一个星球任何人都看不到.

证明 设有 n 个星球(同时也表示 n 个天文学家)A_1，A_2，…，A_n，n 为奇数. 这些星球两两之间的距离所成的集合是有限集，故必有最小值，不妨设 A_1A_2 最小.

除 A_1、A_2 外还有 $n-2$ 个星球和 $n-2$ 位天文学家. 假若他们当中至少有一位看见已选出的星球. 例如 A_3 看见 A_2，如果谁也看不见 A_3，则结论成立；否则还有一位天文学家如 A_4 可看见 A_3. 如果谁也看不见 A_4，结论同样成立；否则还有一位天文学家如 A_5 可看见 A_4. 仿此下去. 由于上述过程中前面星球上的天文学家看不见后面的行星，而 n 是一个有限数，必然有最后一颗星球任何人都看不到.

如果其他天文学家都看不到 A_1、A_2，则再从 $n-2$ 颗星球中选择距离最近的两个. 依此类推. 因为 n 是奇数，所以最后存在一颗星球，任何人都看不到它.

例 9 平面上已给出 997 个点，将连结每两点的线段的中点染成红色. 证明至少有 1991 个红点. 能否找到恰有 1991 个红点的点集?

证明 由 997 个点连结每两点的线段只有有限条，所以必有一条最长者. 设 AB 为诸线段中的最长者.

A 与其他 996 个点连结的线段的中点均在以 A 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆的内部或圆周上.

B 与其他 996 个点连结的线段的中点均在以 B 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆的内部或圆周上.

所以至少有

$$2\times 996-1=1991$$

个中点，即有 1991 个红点.

下面我们构造恰有 1991 个红点的 997 个点的点集：

在 x 轴上取 997 个点，坐标分别为 1，2，…，997，则区间(1，997)内分母为 1 或 2 的有理点就是全部的红点，个数恰为 1991 个.

四、比赛与游戏问题

例 10 若干名儿童围成一圈，他们手中都拿有一些糖块. 规定进行如下

传递，每次传递的方法是：如果某人手中糖块数是奇数，则他可再领取一块，然后每人都把手中糖块的一半传给右边的小朋友. 求证：一定可以经过若干次传递，使得所有儿童手中的糖块数都相同.

分析　由题设知，在每次传递前，每个儿童手中都有偶数块糖，其中必有最多者和最少者.

证明　不妨设某次传递前手中糖块数最多的人有 $2m$ 块，最少的有 $2n$ 块，$m>n$. 进行一次传递后，结果是

(1) 传递后每人手中的糖块数仍在 $2n$ 与 $2m$ 之间；

(2) 原来手中糖块数超过 $2n$ 块的，传递后仍然超过 $2n$ 块；

(3) 至少有一名原来糖块数为 $2n$ 的孩子，传递后糖块数超过了 $2n$.

事实上，圈子中至少有一名拿 $2n$ 块糖的孩子的左邻手中糖块数为 $2h>2n$. 传递之后，原拿 $2n$ 块糖的孩子手中的糖块数变为 $n+h>2n$.

由于每传递一次，拿 $2n$ 块糖的孩子数至少减少 1，故若干次后，将使所有孩子手中的糖块数都大于 $2n$. 当他们都通过领取而使自己手中糖块数为偶数时，孩子手中糖块数的最小值至少上升了 2.

由于孩子手中糖块数的最大值在传递过程中不增，而经过若干次传递之后最小值至少上升 2，故知经过多次传递后总可以使最大值与最小值相等，即所有孩子手中的糖块数都相同.

例 11　在 n 名选手参加的循环赛中，每两人比赛一场(无平局). 试证下列两种情形恰有一种发生：

(1) 可将所有选手分成两个非空集合，使得一个集合中的任何一名选手都战胜另一个集合中的所有选手；

(2) 可将 n 名选手从 1 到 n 编号，使得第 i 名选手战胜第 $i+1$ 名选手，$i=1, 2, \cdots, n$，其中将 $n+1$ 理解为 1.

证明　显然，(1)和(2)不能同时出现，以下证明(1)和(2)至少有一种出现.

设选手 A 胜场最多. 若 A 战胜其他所有选手，则(1)成立，否则必有选手 C 胜 A. 因 A 胜场最多，故必有负于 A 的选手 B 战胜 C，于是得到一个选手圈 $\{A, B, C\}$：A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

设这样的圈中含选手数最多的其中之一为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，其中 A_1 胜 A_2，A_2 胜 A_3，$\cdots$，A_{m-1} 胜 A_m，A_m 胜 A_1. 若 $m=n$，则(2) 成立. 以下设 $m<n$. 令

$$S_1=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}.$$

对任意 $B\notin S_1$，或者 B 战胜 S_1 中所有选手，或者 B 负于 S_1 中的所有选

手. 若不然，则存在 A_i, $A_j \in S_1$，使 B 负于 A_i 而战胜 A_j. 不妨设 $i<j$，从而有 k, $i\leqslant k\leqslant j-1$，使 B 负于 A_k 而战胜 A_{k+1}. 但这将导致更长的选手圈，矛盾. 再令

$$S_2=\{B \mid B \text{ 胜 } A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\},$$

$$S_3=\{B \mid B \text{ 负于 } A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}.$$

对任意 $B\in S_2$ 与 $C\in S_3$，若有 C 胜 B，则可将选手 C 和 B 加入 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m\}$ 中而得到更长的圈，矛盾，故必有 B 胜 C. 若 S_2 非空，则令 $S=S_2$, $T=S_1\cup S_3$；若 S_3 非空，则令 $S=S_1\cup S_2$, $T=S_3$. 易见，S 中的任一名选手都战胜 T 中的所有选手，即(1)成立.

说明　上述证明中两次运用了最小数原理的推论，一次是“设选手 A 胜场最多”，导致“三怕”选手圈 $\{A,\ B,\ C\}$ 的存在；另一次是“设这样的圈中含选手数最多的其中之一为 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m\}$”，后面的讨论都是以此为基础的.

习　题　8

1　在 $n\times n$ 的正方形表格中，写上非负整数. 如果在某一行和某一列的交汇处的数是 0，那么该行和该列上所填各数之和不小于 n. 证明：表中所有数的和不小于 $\frac{1}{2}n^2$.

2　设 $k>1$ 为自然数，试证不能在 $k\times k$ 的方格表中填入数 $1,\ 2,\ \cdots,\ k^2$，使得每行和每列数之和都是 2 的方幂.

3　设 S 是一个非空点集，它的所有点都是整点. 此外，还给定一组有限多个有整数坐标的非零向量组. 已知当将向量组中的所有向量的起点都放在 S 中的任一点时，它们的终点中属于 S 的比不属于 S 的多. 求证：S 必为无穷点集.

4　一次 10 名选手参加的循环赛中无平局，胜者得 1 分，负者得 0 分. 证明：各选手得分的平方和不超过 285.

5　设 n 为大于 1 的整数，全部正因数为 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_k$，其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$，记

$$D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k.$$

(1) 证明：$D<n^2$；

(2) 确定所有的 n，使得 D 能整除 n^2.

6 设 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, n$，$n\geqslant 2$. 求证：存在 i 满足 $1\leqslant i\leqslant n-1$，且

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant \frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

7 已知集合 M 的元素都是整数，既有正整数又有负整数，且当 $a, b\in M$ 时，$2a$ 和 $a+b$ 也属于 M. 求证：当 $a, b\in M$ 时，$a-b\in M$.

8 证明：方程

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2)$$

不存在正整数解 (x, y, z, u).

9 已知 3 所学校中的每所都有 n 名学生，且任何 1 名学生认识其他两所学校的学生总数都是 $n+1$，求证：可以从每所学校各选 1 名学生，使得这 3 名学生彼此都相识.

10 求所有的非空有限的正整数集 S，使得对任意 $i, j\in S$，数 $\dfrac{i+j}{(i, j)}\in S$，这里 (i, j) 表示 i 与 j 的最大公约数.

11 在平面上任给 $2n$ 个点，其中任意三点不共线，并把其中 n 个点染成红色，n 个点染成蓝色. 求证：可以一红一蓝地把它们连成 n 条线段，使这些线段互不相交.

12 平面上有 n 个点，其中任意三点不共线，且任意三点构成的三角形的面积都小于 1. 证明：存在一个面积小于 4 的三角形包含这 n 个点.

13 20 个足球队参加全国冠军赛，问最少应该进行多少场比赛，才能使得任何 3 个队中总有两个队彼此比赛过?

14 设有 n 个人 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中有些人相互认识. 证明：可用适当方式把他们分成两组，使每人都至少有一半熟人不跟他在同一组.

15 平面上有若干个圆，它们所盖住的面积为 1. 证明：一定可以从这些圆中去掉一部分圆，使得余下的圆互不相交，且它们所覆盖的面积不小于 $\dfrac{1}{9}$.

16 证明：不存在整数 x、y、z，满足

$$2x^4+2x^2y^2+y^4=z^2,\ x\neq 0.$$

17 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是非负实数，a 是它们中的最小值，记 $x_{n+1}=x_1$. 求证：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

18 设 $S=\{-(2n-1),-(2n-2),\cdots,-1,0,1,2,\cdots,2n-1\}$，求证：$S$ 的任一个 $2n+1$ 元的子集中必有 3 个数之和为零.

19 某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 c_i 名学生到体育馆观看球赛. 已知 $0\leqslant c_i\leqslant 39$，$i=1,2,\cdots,n$，$c_1+c_2+\cdots+c_n=1990$，看台的每一横排有 199 个座位. 要求同一学校的学生必须坐在同一横排，问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能按要求入座？

20 试求所有的正整数 $n>1$，使得 $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ 是整数.

9 容斥原理

本节我们进一步讨论如何计算有限集的阶的问题.

设 M 为非空有限集，非空集合

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \qquad (\mathscr{A})$$

是 M 的一个子集族，且满足

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = M, \qquad \text{(i)}$$

则称子集族 $\mathscr{A}$: A_1, A_2, …, A_n 是集合 M 的一个覆盖.

我们的问题是，如何通过计算覆盖 $\mathscr{A}$: A_1, A_2, …, A_n 中每个子集的阶来计算有限集 M 的阶.

一、加法原理

我们先来看一个简单的情形.

如果子集族 $\mathscr{A}$ 既满足(i)，又满足

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \qquad \text{(ii)}$$

那么覆盖 A_1, A_2, …, A_n 就是有限集 M 的一个 n—分划.

对于有限集 M 的 n—分划，我们有下面非常有用的结论.

加法原理　设 M 为非空有限集，A_1, A_2, …, A_n 是 M 的一个由非空子集构成的 n—分划，那么

$$|M| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

加法原理是组合数学中一个基本的计数原理. 在实际运用中可根据问题的不同背景赋予有限集 M 的元素不同的含义.

例 1　设正整数 a、b、c 为三角形三边长，$a+b=n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant c \leqslant n-1$. 求这样的三角形的个数.

分析　设$\triangle ABC$ 的角 A、B、C 的对应边分别为 a、b、c. 例 1 就是要计

算有限集 $M=\{\triangle ABC \mid a+b=n,\ a,\ b\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant c\leqslant n-1\}$ 的阶. 也就是要计算同时满足 $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$ 的三元正整数组 $\{a,\ b,\ c\}$ 的个数.

解　不妨设 $b\geqslant a$,则 $1\leqslant a\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. 满足题设条件的三角形可分为两类:

第一类: c 为最大边. 令 $a=i$,则 $b=n-i,\ n-i\leqslant c\leqslant n-1$. 这样的三角形有 $(n-1)-(n-i)+1=i$ 个.

第二类: c 不为最大边. 则 $b>c,\ c+a>b$,故 $b-a=n-2i,\ n-2i<c<n-i$. 因此 $n-2i+1\leqslant c\leqslant n-i-1$. 这样的三角形有 $(n-i-1)-(n-2i+1)+1=i-1$ 个.

由加法原理,满足题设条件的三角形的个数为

$$f(n)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(i+i-1)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2i-1)=\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)^2.$$

例 2　集合 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 1990\}$, 考察 S 的 31 元子集. 如果子集中 31 个元素之和可被 5 整除,则称为是好的. 试求 S 的好子集的个数.

分析　直接计算好子集的个数是困难的. 考察 S 的全部 31 元子集,将其按子集元素和模 5 的剩余类分成 5 类,直觉告诉我们,每一类子集的个数似乎是相同的. 果真是这样的吗?

解　我们来考察 S 的全部 31 元子集,这样的子集共有 C_{1990}^{31} 个,它们构成集合

$$M=\{\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{31}\}\mid\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{31}\}\subset S\}.$$

设 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{31}\}\in M$, 其元素和被 5 除的余数为 k,即

$$\sum_{i=1}^{31}a_i=k\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

k 只有 5 个可能值: 0, 1, 2, 3, 4. 我们将所有 k 值相同的 M 的元素(S 的 31 元子集)归为一类,得到 M 的 5 个子集 $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ 和 A_4. 显然 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_4$ 是 M 的一个分划,其中 A_0 的元素就是 S 的好子集.

由于 $31\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,所以当 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{31}\}\in A_0$ 时,即当 $\sum_{i=1}^{31}a_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ 时,就有

$$\sum_{i=1}^{31}(a_i+k)\equiv k\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

故知 $\{a_1+k, a_2+k, \cdots, a_{31}+k\}\in A_k$，$k=1, 2, 3, 4$，这里当 $a_i+k>1990$ 时，将 a_i+k 理解为 $a_i+k-1990$. 这种 A_0 与 A_k 间的对应是一一的. 所以有

$$|A_0|=|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|,$$

于是

$$\begin{aligned}|A_0|&=\frac{1}{5}(|A_0|+|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|)\\&=\frac{1}{5}|M|=\frac{1}{5}\mathrm{C}_{1990}^{31}.\end{aligned}$$

说明　在这里，我们的目的并不是求 $|M|$，而是由于 $|M|$ 易于计算，我们反过来利用这一点来达到计算 $|A_0|$ 的目的.

二、容斥原理的简单形式

如果条件(ii)不一定满足，也就是说可能存在 $1\leqslant p\neq q\leqslant n$，使

$$A_p\cap A_q\neq\varnothing \tag{iii}$$

时，$|A_1|$，$|A_2|$，…，$|A_n|$ 与 $|M|$ 有什么关系呢？我们还是先来看比较简单的情形.

定理 1　$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.　(Ⅰ)

证明　设 $A_1\cap A_2=B$，$A_1'=A_1\backslash B$，$A_2'=A_2\backslash B$，则

$$A_1\cup A_2=A_1'\cup A_2'\cup B.$$

由加法原理知，$|A_1'|=|A_1|-|B|$，$|A_2'|=|A_2|-|B|$，所以

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2|&=|A_1'\cup A_2'\cup B|=|A_1'|+|A_2'|+|B|\\&=(|A_1|-|B|)+(|A_2|-|B|)+|B|\\&=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|.\end{aligned}$$

定理 2　设 A_1、A_2 是集合 S 的子集，则

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|. \tag{Ⅱ}$$

证明　由摩根定律及加法原理有

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2|=|\complement_S(A_1\cup A_2)|=|S|-|A_1\cup A_2|.$$

又由定理 1 得

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|.$$

定理 1 及定理 2 是容斥原理的简单形式，可以用来解决一些简单的计数问题.

例 3 设集合 $S=\{1, 2, \cdots, 1000\}$，A 是 S 的子集，且 A 的元素或是 3 的倍数，或是 7 的倍数. 试求 A 的元素个数的最大值.

解 设 $A_1=\{x \mid x \in S, 且\ 3 \mid x\}$，$A_2=\{x \mid x \in S, 且\ 7 \mid x\}$，则 $|A|_{\max}=|A_1 \cup A_2|$. 显然有

$$|A_1|=\left[\frac{1000}{3}\right]=333,$$

$$|A_2|=\left[\frac{1000}{7}\right]=142,$$

$$|A_1 \cap A_2|=\left[\frac{1000}{3 \cdot 7}\right]=47.$$

所以

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2| &= |A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2| \\ &= 333+142-47=428.\end{aligned}$$

所以 A 的元素个数的最大值为 428.

说明 利用容斥原理的关键是构造所要计数的集合的一个合适的覆盖. 上例解答中的覆盖是：A_1，A_2.

例 4 设 Z 是平面上由 n (>3) 个点组成的点集，其中任三点不共线，又设自然数 k 满足不等式 $\frac{n}{2}<k<n$. 如果 Z 中的每个点都至少与 Z 中的 k 个点有线段相连，证明：这些线段中一定有三条线段构成三角形的三边.

证明 因为 $k>\frac{n}{2}>\frac{3}{2}$，所以 $k \geqslant 2$，即每个点都至少与 Z 中 2 个点有线段相连. 不妨设 AB 为 Z 中点连成的线段. 令

$$M=\{P \mid P \in Z, P 与 A 有线段相连\}-\{B\},$$

$$N=\{P \mid P \in Z, P 与 B 有线段相连\}-\{A\}.$$

由于 Z 中任一点至少引出 k 条线段，所以有 $|M| \geqslant k-1$，$|N| \geqslant k-1$. 又由于 $M \cup N$ 中不含 A、B，所以有 $|M \cup N| \leqslant n-2$. 因此

$$\begin{aligned}|M \cap N| &= |M|+|N|-|M \cup N| \\ &\geqslant (k-1)+(k-1)-(n-2) \\ &= 2k-2-(n-2)\end{aligned}$$

$$>(n-2)-(n-2)=0.$$

所以 $M\cap N\neq\varnothing$，即存在点 $C\in M$，且 $C\in N\ (C\neq A,\ C\neq B)$. 显然线段 AB、AC、BC 构成三角形的三边.

例 5 设 S 是有理数 r 的集合，其中 $0<r<1$，且 r 有循环小数的展开形式为 $\overline{0.abcabcabc\cdots}=\overline{0.\dot{a}b\dot{c}}$，$a$、$b$、$c$ 不一定相异. 在 S 的元素中，能写成最简分数的不同的分子有多少个？

解 因为 $\overline{0.\dot{a}b\dot{c}}=\dfrac{\overline{abc}}{999}$，又 $999=3^3\cdot 37$，故如果 $\overline{abc}$ 既不能被 3 整除也不能被 37 整除，则分数就是最简形式. 设 $A_1=\{$不超过 1000 的正整数中 3 的倍数$\}$，$A_2=\{$不超过 1000 的正整数中 37 的倍数$\}$. 易知

$$|A_1|=\frac{999}{3}=333,\ |A_2|=\frac{999}{37}=27,$$

$$|A_1\cap A_2|=\frac{999}{3\cdot 37}=9.$$

由定理 2，有

$$\begin{aligned}&999-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|\\=&999-(333+27)+9=648.\end{aligned}$$

即此类最简分数的不同分子有 648 个.

此外，还有形如 $\dfrac{k}{37}$ 的数，其中自然数 k 是小于 37 的 3 的倍数，这样的 k 有 $3,6,9,\cdots,36$ 共 12 个.

故满足条件的分子有 $648+12=660$ 个.

三、容斥原理的一般形式

定理 3

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|.\tag{Ⅲ}$$

证明 由定理 1 知，$n=2$ 时结论成立.

若 $n=k$ 时结论成立，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|+|A_{k+1}|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cap A_{k+1}\right|$$

$$\begin{aligned}
&=\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|+|A_{k+1}|-\left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i\cap A_{k+1})\right|\\
&=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|+\cdots\\
&\quad+(-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|+|A_{k+1}|-\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}|\\
&\quad+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})|\\
&\quad-\cdots+(-1)^{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k}(A_i\cap A_{k+1})\right|\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k+1}A_i\right|,
\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时结论成立.

由归纳原理知，对任意正整数 n，结论成立.

由于公式(Ⅲ)在计算左端集合的元素个数时，(右端)采用了将“应该有的”包含进来，“不该有的(或重复的)”排斥出去的思想方法，故称其为容斥原理. 容斥原理是加法原理的推广，一般用来计算至少具有某几个性质之一的元素的个数.

利用摩根定律

$$\complement_I\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\left(\complement_I A_i\right),$$

及公式 $\complement_I A=I-A$ (I 为全集) 改写定理 3，便得到下面的逐步淘汰原理.

定理 4 设 I 为全集，则

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i=1}^{n}\complement_I A_i\right|&=\left|\complement_I\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right|=|I|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|\\
&=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\\
&\quad-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|. \quad (\text{Ⅳ})
\end{aligned}$$

公式(Ⅳ)又叫筛法公式，一般用来计算不具有某几个性质中的任何一个性质的元素的个数.

例 6 对于任何的集合 S，设 $n(S)$ 为集合 S 的子集个数. 如果 A、B、C 是三个集合，满足下列条件：

(1) $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$,

(2) $|A|=|B|=100$,

求$|A\cap B\cap C|$的最小值.

解　如果一个集合有 k 个元素，那么它有 2^k 个子集. 由题设有

$$2^{100}+2^{100}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|},$$

即

$$1+2^{|C|-101}=2^{|A\cup B\cup C|-101}.$$

因为 $1+2^{|C|-101}$ 是大于 1 且等于一个 2 的整数幂，所以 $|C|=101$. 从而有

$$|A\cup B\cup C|=102.$$

由容斥原理得

$$\begin{aligned}|A\cap B\cap C|=&|A\cup B\cup C|+|A|+|B|+|C|\\&-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|.\end{aligned}$$

从而有

$$|A\cap B\cap C|=403-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|.$$

由 $A\cup B$、$A\cup C$、$B\cup C\subseteq A\cup B\cup C$ 得，$|A\cup B|$、$|A\cup C|$、$|B\cup C|\leqslant 102$，所以

$$|A\cap B\cap C|\geqslant 403-102\times 3=97.$$

另一方面，取 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$，$B=\{3,4,5,\cdots,102\}$，$C=\{1,2,4,5,6,\cdots,100,101,102\}$，满足题设条件. 这时

$$|A\cap B\cap C|=|\{4,5,6,\cdots,100\}|=97.$$

所以，$|A\cap B\cap C|$的最小值为 97.

例 7　若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，且 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均为非空集合，则集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的组数为

$$g(m,n)=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\mathrm{C}_m^k(2^{m-k}-1)^n.$$

证明　对于 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_m=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，如果对任意正整数 k（其中 $1\leqslant k\leqslant m-1$），在 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至少有 k 个集合为空集，先确定出 k 个空集，确定的方式有 C_m^k 种. 对每一种方式确定出的 k 个空集，都有剩下

的 $m-k$ 个集合. 不妨设它们为 A_1', A_2', $\cdots$, A_{m-k}'，它们的并集仍是 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

仿第 2 节例 6，知集合 A_1', A_2', $\cdots$, A_{m-k}' 的组数为 $(2^{m-k}-1)^n$.

即有：在 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中至少有 k 个空集时，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的组数是 $C_m^k(2^{m-k}-1)^n$. 记

$$C_m^k(2^{m-k}-1)^n=h(m, n, k).$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均为非空集合，且

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

则由容斥原理知集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的组数是

$$(2^m-1)^n+\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k h(m, n, k).$$

也就是 $$g(m, n)=(2^m-1)^n+\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k C_m^k(2^{m-k}-1)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k(2^{m-k}-1)^n.$$

例 8 将与 105 互质的所有正整数从小到大排成数列，求这个数列的第 1000 项.

分析 先看在区间 $(0, 105]$ 中有多少个整数与 105 互质. 因为 $105=3\times5\times7$，所以只要在数列 1, 2, …, 105 中去掉所有 3 或 5 或 7 的倍数即可. 然后再逐段考察区间 $(105\cdot(k-1), 105k]$ 中与 105 互质的整数..

解 设 $S=\{1, 2, \cdots, 105\}$, $A_3=\{a \mid a\in S, 且\ 3\mid a\}$, $A_5=\{a \mid a\in S, 且\ 5\mid a\}$, $A_7=\{a \mid a\in S, 且\ 7\mid a\}$，则

$$|A_3|=\frac{105}{3}=35,\ |A_5|=\frac{105}{5}=21,\ |A_7|=\frac{105}{7}=15,$$

$$|A_3\cap A_5|=\frac{105}{3\times5}=7,\ |A_5\cap A_7|=\frac{105}{5\times7}=3,$$

$$|A_7\cap A_3|=\frac{105}{7\times3}=5,$$

$$|A_3\cap A_5\cap A_7|=\frac{105}{3\times5\times7}=1,\ |S|=105.$$

在 1 到 105 中，与 105 互质的数有

$$\begin{aligned}
& |\complement_S A_3 \cap \complement_S A_5 \cap \complement_S A_7| \\
={} & |S| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
={} & |S| - (|A_3| + |A_5| + |A_7|) \\
& + (|A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| \\
& + |A_7 \cap A_3|) - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
={} & 105 - (35 + 21 + 15) + (7 + 3 + 5) - 1 \\
={} & 48.
\end{aligned}$$

设与 105 互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ \cdots,\ a_{48} = 104,$$

$$a_{49} = 105 + 1,\ a_{50} = 105 + 2,$$

$$a_{51} = 105 + 4,\ \cdots, a_{96} = 105 + 104,\ \cdots$$

因为 $1000 = 48 \times 20 + 40$,所以

$$a_{1000} = 105 \times 20 + a_{40}.$$

由于 $a_{48} = 104$, $a_{47} = 103$, $a_{46} = 101$, $a_{45} = 97$, $a_{44} = 94$, $a_{43} = 92$, $a_{42} = 89$, $a_{41} = 88$, $a_{40} = 86$,所以

$$a_{1000} = 105 \times 20 + 86 = 2186.$$

筛法公式在数论中的一个典型应用,就是推导欧拉函数的解析式.

我们把不超过正整数 n 且与 n 互质的正整数的数目记为 $\varphi(n)$,称为欧拉函数.例如,$\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$.

例 9　设 $p_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为正整数 n 的全部质因数.求证:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

证明　记 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$,并设

$$A_i = \{a \mid a \in S,\ p_i \mid a\},\ i = 1, 2, \cdots, m.$$

则 $\varphi(n) = \left|\bigcap_{i=1}^{m} \complement_S A_i\right|$.注意到

$$|A_i| = \left[\frac{n}{p_i}\right],\ |A_i \cap A_j| = \left[\frac{n}{p_i p_j}\right],\ \cdots,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| = \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}\right],$$

而 p_i 为 n 的不同的质因数，上面各式中[ ]都可去掉，由筛法公式得

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=|S|-\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{n}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]-\cdots+(-1)^m\left[\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right]\\&=n\left[1-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\frac{1}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{p_1p_2\cdots p_m}\right]\\&=n\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).\end{aligned}$$

容斥原理是一个非常有用的计数方法，但我们在这里只介绍了它在解决集合和整数问题中的简单应用，因为对那些经典的组合问题的介绍不是本书的任务.

最后我们来看一道离本书的出版日期最近的试题，其容斥原理的运用并不是解答的全部，但却是解题的关键一步，因为我们的结论就是由容斥原理导出的.

例 10 对于整数 $n\geqslant4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m, m+1, \cdots, m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素.

解 当 $n\geqslant4$ 时，记 $M=\{m, m+1, m+2, \cdots, m+n-1\}$.

易知，若 $2\mid m$，则 $m+1$，$m+2$，$m+3$ 两两互素；若 $2\nmid m$，则 m，$m+1$，$m+2$ 两两互素.

于是，M 的所有 n 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素，因此 $f(n)$ 存在，且 $f(n)\leqslant n$.

设 $T_n=\{t\mid t\leqslant n+1$ 且 $2\mid t$ 或 $3\mid t\}$，则 T_n 为 $\{2, 3, \cdots, n+1\}$ 的子集，但 T_n 中任 3 个元素均不能两两互素，因此 $f(n)\geqslant|T_n|+1$.

由容斥原理知

$$|T_n|=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right],$$

从而必有

$$f(n)\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1. \qquad ①$$

因此，$f(4)\geqslant4$，$f(5)\geqslant5$，$f(6)\geqslant5$，$f(7)\geqslant6$，$f(8)\geqslant7$，$f(9)\geqslant8$.

以下证明 $f(6)=5$.

设 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为 $\{m, m+1, \cdots, m+5\}$ 中的 5 个数. 若这 5 个数中有 3 个奇数，则它们两两互素；若这 5 个数中有 2 个奇数，则必有 3 个偶数，

不妨设 x_1、x_2、x_3 为偶数，x_4、x_5 为奇数，当 $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ 时，$|x_i - x_j| \in \{2, 4\}$，所以 x_1、x_2、x_3 中至多一个被 3 整除，至多一个被 5 整除，从而至少有一个既不被 3 整除也不被 5 整除，不妨设 $3 \nmid x_3$，$5 \nmid x_3$，则 x_3、x_4、x_5 两两互素. 这就是说这 5 个数中有 3 个两两互素，即 $f(6) = 5$.

又由 $\{m, m+1, \cdots, m+n\} = \{m, m+1, \cdots, m+n-1\} \cup \{m+n\}$，知 $f(n+1) \leqslant f(n) + 1$.

因为 $f(6) = 5$，所以 $f(4) = 4$，$f(5) = 5$，$f(7) = 6$，$f(8) = 7$，$f(9) = 8$.

因此，当 $4 \leqslant n \leqslant 9$ 时，

$$f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n+1}{6}\right] + 1. \quad ②$$

以下对 n 用归纳法，证明②对所有 n 都成立：

假设 $n \leqslant k$ $(k \geqslant 9)$ 时②式成立. 当 $n = k+1$ 时，显然

$\{m, m+1, \cdots, m+k\} = \{m, m+1, \cdots, m+k-6\} \cup \{m+k-5, m+k-5+1, m+k-5+2, m+k-5+3, m+k-5+4, m+k-5+5\}$.

而由归纳假设知 $n = 6$，$n = k-5$ 时②式成立. 所以

$$\begin{aligned} f(k+1) &\leqslant f(k-5) + f(6) - 1 \\ &= \left[\frac{k+2}{2}\right] + \left[\frac{k+2}{3}\right] - \left[\frac{k+2}{6}\right] + 1. \end{aligned} \quad ③$$

由①、③式知，对于 $n = k+1$，②式成立.

所以对于任意 $n \geqslant 4$，

$$f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n+1}{6}\right] + 1.$$

习　题　9

1 方格表中具有公共点的小方格称为相邻的. 试问，在 $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ 的方格表中共有多少对相邻的小方格？

2 在所有四位数的号码（从 0000 到 9999）中，有多少个号码的前两位数字之和同末两位数字之和相等？

3 用 2、4、6 三个数字来构造六位数，但是不允许有两个连着的 2 出现在六位数中(例如 626 442 是允许的，226 426 就不允许)，问这样的六位数共有多少个？

4 某个国王的 25 位骑士围坐在他们的圆桌旁，他们中间的 3 位被选派去杀一条恶龙. 问被挑到的 3 位骑士中至少有两位是邻座的选派方法有多少种？

5 三边长为互不相等的自然数的三角形中，最大边长恰为 n 的共有 600 个. 求 n 的值.

6 在 1，2，…，1000 中，有多少个正整数既不是 2 的倍数，又不是 5 的倍数？

7 已知某中学共有学生 900 人，其中男生 528 人，高中学生 312 人，团员 670 人，高中男生 192 人，男团员 336 人，高中团员 247 人，高中男团员 175 人. 试问这些统计数据是否有误？

8 一次会议有 1990 位数学家参加，每人至少有 1327 位合作者. 证明：可以找到 4 位数学家，他们中每两个人都合作过.

9 计算不超过 120 的合数和素数的个数.

10 由数字 1、2 和 3 组成 n 位数，要求 n 位数中 1、2 和 3 中的每一个至少出现一次. 求所有这些 n 位数的个数.

11 由数字 1，2，…，8 组成的 n $(n\geqslant 5)$位自然数中(数字可以重复)，同时包含数字 1，2，3，4，5 的数有多少个？

12 在区间 $1\leqslant n\leqslant 10^6$ 中，使得方程 $n=x^y$ 有非负整数解 x、y，且 $x\neq n$ 的整数 n 共有多少个？

13 对于 $0\leqslant x\leqslant 100$，求函数 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\dfrac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$ 所取的不同整数值的个数.

14 证明：任意 28 个介于 104 与 208 之间(包括 104 和 208)的不同的正整数，其中必有两个数不互质.

15 已知 $N=1990^{1990}$. 求满足条件 $1\leqslant n\leqslant N$，且$(n^2-1,\ N)=1$ 的整数 n 的个数.

16 空间中有 $2m$ 个点，$m\geqslant 2$，其中任意四点不共面. 证明：如果这 $2m$ 个点之间至少连有 m^2+1 条线段，则所连的线段中至少有三条，它们围成一个三角形.

17 上届获得前 n 名的 n 个球队参加本届争夺前 n 名的比赛. 如果不设并列名次，问：没有一个队取得的名次恰好紧接在上届比他高一个名次的球队之后的比赛结果有多少种可能？

18 由复数构成的有限集合 A 满足：对任意正整数 n，若 $z\in A$，则 $z^n\in A$. 证明：

(1) $\sum\limits_{z\in A}z$ 是整数；

(2) 对任意整数 k，可以找到一个集合 A，使得 A 满足条件且 $\sum\limits_{z\in A} z = k$.

19 设 $S=\{1, 2, \cdots, 280\}$. 求最小自然数 n，使得 S 的每个 n 元子集中都含有 5 个两两互素的数.

20 46 个国家派代表队参加亚洲数学竞赛，比赛共 4 个题. 结果统计如下：第 1 题对的学生有 235 人；第 1、2 两题都对的有 59 人；第 1、3 两题都对的有 29 人；第 1、4 两题都对的有 15 人；四题全对的有 3 人. 求证：存在一个国家，这个国家派出的选手中至少有 4 人恰好只做对了第 1 题.

习题解答

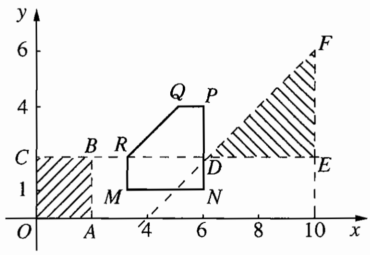
习 题 1

1. 0.

2. $S \subsetneqq T$. 当 $x=\frac{1}{2}y^2+$奇数时，显然 $\sin(2\pi x)-\sin(\pi y^2)=\cos(2\pi x)-\cos(\pi y^2)$ 成立，$S\subseteq T$. 但满足 $x=\frac{1}{2}y^2$ 的点 $(x, y)\in T$，而不属于 S，故 $S\subsetneqq T$.

3. $M=N$. 因 $12m+8n+4l=4(3m+2n+l)$，$20p+16q+12r=4(5p+4q+3r)$，$(3, 2, 1)=1$，$(5, 4, 3)=1$，由裴蜀定理可知 $3m+2n+l$ 与 $5p+4q+3r$ 均可表示所有整数. 所以，$M=N=\{k \mid k=4t, t\in \mathbf{Z}\}$.

4. 7. 如图，集合 A 为正方形 $OABC$，集合 B 为 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$. OD、AE、BF、CF、CD 的中点依次为 $M(3, 1)$、$N(6, 1)$、$P(6, 4)$、$Q(5, 4)$、$R(3, 2)$. 所成图形面积 $S_{MNPQR}=7$.



第 4 题图

5. 7. 因为 $1+5=2+4=3+3$，故 M 可以是 $\{3\}$，$\{1, 5\}$，$\{2, 4\}$，$\{1, 3, 5\}$，$\{2, 3, 4\}$，$\{1, 2, 4, 5\}$，$\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. $a\geqslant 2$. 集合 A 为以 $(1, 2)$ 为圆心、$\frac{2}{\sqrt{5}}$ 为半径的圆面. 集合 B 为以 $(1, 2)$ 为对角线交点的菱形，且平行于 x 轴的对角线长为 $2a$，平行于 y 轴的对角线长为 a. 由 $A\subseteq B$ 知，当 $a\cdot\frac{a}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 时 a 值最小，所以 $a_{\min}=2$.

7. $2^{90}-1$.

8. $-4\leqslant a\leqslant -1$. 易知 $A=(1, 3)$. 记 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$. $A\subseteq B$ 表明，当 $1<x<3$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象都在

x 轴的下方. $A\subseteq B$ 的充要条件是: $f(1)\leqslant 0$, $g(1)\leqslant 0$ 和 $f(3)\leqslant 0$, $g(3)\leqslant 0$ 同时成立. 解之即得.

9. $M\subsetneqq N$. 由 $a^2+1=(a+2)^2-4a+5$ 知 $M\subseteq N$. 但 $1\in N$, $1\notin M$.

10. $2^{n+1}-1$. 把自然数 $1, 2, \cdots, 2n+1$ 搭配成 $n+1$ 个数组 $\{1, 2n+1\}$, $\{2, 2n\}$, $\cdots$, $\{n, n+2\}$, $\{n+1\}$. S 的元素从以上 $n+1$ 组选取, 有 $C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}-1$ 种取法.

11. $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. 当 $z_1=z_2=z$ 时, 若 $z\in S$, 则 $z_1-2z_2\cos\theta=-z\in S$. 因 $|z|=1$, 所以 $|z|=|-z|=1$. 这说明 S 中含有偶数个元素. 又 $2<n<6$, 所以 $n=4$. 由 $1\in S$, 得 $-1\in S$. 设 $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ ($\sin\alpha\neq 0$, $0\leqslant\alpha<2\pi$), $z_2=1$, $\theta=\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\alpha$. 若 $z_1\in S$, 则 $z_1-2\cos\theta=-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\in S$. 因为 $\sin\alpha\neq 0$, 故 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\neq-(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$, 所以 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, 即 $\cos\alpha=0$, $\sin\alpha=\pm1$. 所以 $\mathrm{i}\in S$, $-\mathrm{i}\in S$.

12. $\{1, 2, 3, 5, 8\}$. 不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$. 则 $x_1+x_2=3$, $x_4+x_5=13$. 又 $4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=3+4+5+6+7+8+9+10+11+13$, 即 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=19$, 从而得 $x_3=19-3-13=3$. 又 $x_1+x_3=4$, 从而 $x_1=1$. 又 $x_3+x_5=11$, 从而 $x_5=8$, 所以 $x_2=2$, $x_4=5$.

13. 由已知得 $\sum\limits_{k=1}^{200}k^2=\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2+\sum\limits_{i=1}^{100}(201-a_i)^2=2\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2-402\sum\limits_{i=1}^{100}a_i+201^2\times 100$. 由(2)及上式得 $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2$ 为常数. 设 G 中有 x 个奇数, 则由上式可得 $4\equiv 2x-0+4 \pmod 8$, 故 $x\equiv 0 \pmod 4$.

14. 设集合 M 的所有含偶数个元数的子集的积数之和为 x, 所有含奇数个元素的子集的积数之和为 y, 则 $x+y=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{100}\right)-1$, $x-y=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{100}\right)-1$. 所以 $x+y=\dfrac{99}{2}$, $x-y=-\dfrac{99}{100}$. 解得 $x=\dfrac{4851}{200}$.

15. 在 K 内 x 和 y 的每位数字是 0 或 2, 因此, $\dfrac{x}{2}$ 和 $\dfrac{y}{2}$ 的每位数字是 0 或 1, 从而 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}$ 的每位数字在 3 进制下是 0、1 或 2, 并且由 $x\in[0, 1]$, $y\in[0, 1]$ 可知 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\in[0, 1]$. 反过来, 对于 $[0, 1]$ 上的任何一个数, 它在 3 进制下的每位数字是 0、1 或 2, 显然可以写成两个在 3 进制下每位数字是 0

或1的数的和. 也就是说，都可以写成$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$，x，$y\in K$的形式. 因此，我们有$\left\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\middle| x, y\in K\right\}=[0, 1]$，故得$S=\{x+y \mid x, y\in K\}=[0, 2]$.

16. 首先证明s中的每个数在数列a_1，a_2，…，a_n中至少出现2次. 事实上，若s中的某个数在这个数列中只出现一次，由于含这个数的二元子集共有3个，但在数列中含这个数的相邻两项至多有两种取法，因此不可能3个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现. 矛盾. 由此可得，$n\geqslant 8$. 另一方面，数列3，1，2，3，4，1，2，4满足题设条件，且只有8项. 所以，n的最小值为8.

17. 构造子集$X'=\{1001-x \mid x\in X\}$，则所有非空子集分成两类$X'=X$和$X'\neq X$. 当$X'=X$时，必有$X'=X=M$，于是，$\alpha_X=1001$. 当$X'\neq X$时，设$x$、$y$分别是$X$中的最大数与最小数，则$1001-x$、$1001-y$分别是$X'$中的最小数与最大数. 于是，$\alpha_X=x+y$，$\alpha_{X'}=2002-x-y$. 从而，$\frac{\alpha_X+\alpha_{X'}}{2}=1001$. 因此，所有的$\alpha_X$的算术平均值为1001.

18. 对任意的$r\in\mathbf{Q}$，$r\neq 0$，由②知$r\in S$，$-r\in S$之一成立. 再由①，若$r\in S$，则$r^2\in S$；若$-r\in S$，则$r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$. 总之，对任意的非零$r\in\mathbf{Q}$均有$r^2\in S$. 取$r=1$，则$1=1^2\in S$. 由①，$2=1+1\in S$，$3=1+2\in S$，…，可知全体正整数都属于S. 设p，$q\in\mathbf{N}$，由①，$pq\in S$. 又由前证知$\frac{1}{q^2}\in S$，所以$\frac{p}{q}=pq\cdot\left(\frac{1}{q^2}\right)\in S$. 因此，$S$含有全体正有理数. 再由②知，0及全体负有理数不属于S，即S是由全体正有理数组成的集合.

19. (1) 由已知，若$x\in S_i$，$y\in S_j$，则$y-x\in S_k$，$(y-x)-y=-x\in S_i$，所以每个集合中均有非负元素. 当三个集合中的元素都为零时，命题显然成立. 否则，设S_1、S_2、S_3中的最小正元素为a，不妨设$a\in S_1$. 设b为S_2、S_3中最小的非负元素，不妨设$b\in S_2$. 则$b-a\in S_3$. 若$b>0$，则$0\leqslant b-a<b$，与b的取法矛盾，所以$b=0$. 任取$x\in S_1$，因$0\in S_2$，故$x-0=x\in S_3$，所以$S_1\subseteq S_3$. 同理，$S_3\subseteq S_1$. 所以$S_1=S_3$.

(2) 可能. 例如$S_1=S_2=\{$奇数$\}$，$S_3=\{$偶数$\}$，显然满足条件，但S_1和S_2与S_3都无公共元素.

20. 因为当$x_2\geqslant x_1\geqslant 1$时，有$x_2^{x_2}\geqslant x_1^{x_2}\geqslant x_1^{x_1}$. 所以$y=x^x$在$[1, +\infty)$上单调递增. 所以$x^x=x_0$在$[1, +\infty)$上有且仅有一解，且$x\in(k, k+1)$. 假设$x^x=x_0$的解为有理数，可设$x=\frac{n}{m}$，$m$，$n\in\mathbf{N}^*$，$(m, n)=1$，且$m\neq 1$；

$p, q\in \mathbf{R}^+$，$\left(\frac{q}{p}\right)^m = \frac{n}{m}$. 所以 $x^x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}} = \left(\frac{q}{p}\right)^n = x_0\in\mathbf{Q}$. 又因为$(m, n)=1$,所以存在 $a, b\in\mathbf{Z}$,使得 $am+bn=1$,所以 $\frac{q}{p}=\left(\frac{q}{p}\right)^{am+bn}=\left[\left(\frac{q}{p}\right)^m\right]^a\cdot\left[\left(\frac{q}{p}\right)^n\right]^b\in\mathbf{Q}$. 所以不妨设 $p, q\in\mathbf{N}^*$,且$(p, q)=1$,则$(p^m, q^m)=1$，$\frac{n}{m}=\frac{q^m}{p^m}$. 易得 $m\mid p^m$,且 $p^m\mid m$,所以 $m=p^m$. 注意到 m 为大于 1 的整数,矛盾. 所以 x 为无理数.

习 题 2

1. -3. $|a|=3$,且 $a^2+2a+2=5$. 解得 $a=-3$.

2. $\{x\mid x=6n\pm2, n\in\mathbf{Z}\}$. $M=\{x\mid x=6n, 6n+2, 6n+4, n\in\mathbf{Z}\}$，$S=\{x\mid x=6n, 6n+3, n\in\mathbf{Z}\}$,于是 $M\cap \complement_{\mathbf{Z}}S=\{x\mid x=6n\pm2, n\in\mathbf{Z}\}$.

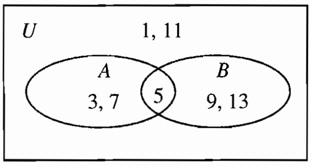
3. $[-4\sqrt{2}, 4)$. $M\cap N\neq\varnothing\Leftrightarrow y=\sqrt{16-x^2}=x-a\neq0$ 有解. 从而有 $-4<x<4$，$a<4$,且 $2x^2-2ax+a^2-16=0$ 有实数解.

4. $(-4, +\infty)$. 依题意,$x^2+(p+2)x+1=0$ 无解或有两个小于 0 的解. 所以,$\Delta<0$ 或 $\Delta\geqslant0$ 且 $-(p+2)<0$.

5. 9. $M=\{(x, y)\mid x=k, y=l, k, l\in\mathbf{Z}\}$.

6. $\left[\frac{11}{4}, 5\right]$. 设 $\cos\alpha+(4-\cos^2\alpha)\mathrm{i}=\cos\beta+(\lambda+\sin\beta)\mathrm{i}$,则有 $\cos\alpha=\cos\beta$，$4-\cos^2\alpha=\lambda+\sin\beta$. 消去 α,得 $\lambda=\frac{11}{4}+\left(\sin\beta-\frac{1}{2}\right)^2$,所以 $\frac{11}{4}\leqslant\lambda\leqslant5$.

7. $m\leqslant3$. 当 $B=\varnothing$ 时,$m+1>2m-1$,得 $m<2$; 当 $B\neq\varnothing$ 时,须 $-2\leqslant m+1$，$2m-1\leqslant5$，$m+1\leqslant2m-1$ 同时满足,解得 $2\leqslant m\leqslant3$.

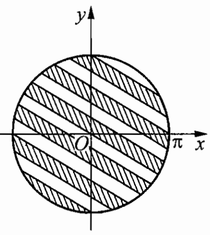


第 8 题图

8. $A=\{3, 5, 7\}$，$B=\{5, 9, 13\}$.

9. $a=-2$. $B=\{2, 3\}$，$C=\{2, -4\}$. 由题设知 $3\in A$，$2\notin A$，$-4\notin A$. 将 3 代入方程 $x^2-ax+a^2-19=0$,得 $a=-2$ 或 5. 然后逐一检验.

10. $\frac{1}{2}\pi^3$. $A=\{(x, y)\mid 2k\pi<3x+5y<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$,且 $x^2+y^2\leqslant\pi^2\}$,A 所成图形为图中阴影部分.



第 10 题图

11. $2^{m-n}(2^n-1)$. 由于 A 的子集中只有由自然数 $n+1$, $n+2$, $\cdots$, m 中任取若干个数组成的集合 C',才能使 $B\cap C'=\varnothing$,而这样的集合 C' 有 2^{m-n} 个. 所以满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的集合 C 的个数是 2^m-2^{m-n}.

12. (1) 正确. 因 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)^n}{2}$,所以 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_1+a_n}{2}$. 这说明点 $\left(a_n,\ \dfrac{S_n}{n}\right)$在直线 $y=\dfrac{a_1+x}{2}$ 上.

(2) 正确. 设 $(x,\ y)\in A\cap B$,则 $y=\dfrac{a_1+x}{2}$,且$\dfrac{1}{4}x^2-y^2=1$. 消去 y,得 $2a_1x+a_1^2=-4$. 当 $a_1=0$ 时,方程组无解;当 $a_1\neq 0$ 时,$x=\dfrac{-4-a_1^2}{2a_1}$,方程组恰有一个解. 故 $A\cap B$ 至多有一个元素.

(3) 不正确. 举例如下:取 $a_1=1$, $d=1$,此时若有 $A\cap B\neq\varnothing$,则存在 $(x,\ y)\in A\cap B$. 由(2) 有 $x=\dfrac{-4-a_1^2}{2a_1}=-\dfrac{5}{2}<0$. 另一方面,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n=n>0$,所以$(x,\ y)\notin A$. 这与$(x,\ y)\in A\cap B$ 矛盾.

13. 假设存在实数 a、b,同时满足题中的两个条件,则必存在整数 n,使 $3n^2-an+(15-b)=0$,于是它的判别式 $\Delta=(-a)^2-12(15-b)\geqslant 0$,即 $a^2\geqslant 12(15-b)$. 又由 $a^2+b^2\leqslant 144$ 得 $a^2\leqslant 144-b^2$,由此便得$12(15-b)\leqslant 144-b^2$,即$(b-6)^2\leqslant 0$,故 $b=6$. 将 $b=6$ 代入上述的 $a^2\geqslant 12(15-b)$ 及 $a^2\leqslant 144-b^2$ 得 $a^2=108$,所以 $a=\pm 6\sqrt{3}$. 将 $a=\pm 6\sqrt{3}$、$b=6$ 代入方程 $3n^2-an+(15-b)=0$,求得 $n=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$. 这说明满足已知两个条件的实数 a、b 是不存在的.

14. 因 $a\geqslant 2$, $a\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{N}$,所以 $a^x\in\mathbf{N}$,且$(a+1)x\in\mathbf{N}$. 又因为 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $b\in\mathbf{N}$. 只需求 $b\in\mathbf{N}$ 的 b 值,使得满足$(a+1)x_2+b=a^{x_1}$,即 $x_2=\dfrac{a^{x_1}-b}{a+1}$, x_1, $x_2\in\mathbf{N}$. 当 x_1 为正偶数时,$x_2=-\dfrac{1-a^{x_1}}{1+a}-\dfrac{b-1}{1+a}$. 因为 $-\dfrac{1-a^{x_1}}{1+a}\in\mathbf{N}$, $1\leqslant b\leqslant a$,所以 $0\leqslant\dfrac{b-1}{1+a}<1$. 因 $x_2\in\mathbf{N}$,故 $b=1$. 当 x_1 为正奇数时,$x_2=\dfrac{a^{x_1}+1}{a+1}-\dfrac{b+1}{a+1}$. 因为$\dfrac{a^{x_1}+1}{a+1}$是大于 1 的自然数,$0\leqslant\dfrac{b+1}{a+1}\leqslant 1$, $x_2\in\mathbf{N}$,所以 $b=a$. 综上知,在$[1,\ a]$上存在 $b=1$ 或 $b=a$,使得 $A\cap B\neq\varnothing$. 当 $b=1$ 时,$A\cap B=\{y\mid y=a^{2x},\ x\in\mathbf{N}\}$;当 $b=a$ 时,$A\cap B=\{y\mid y=a^{2x+1},\ x\in\mathbf{N}\}$.

15. 如果 A 为奇数,则有 $x(x+A)+B\equiv B\pmod 2$,这表明 M_1 中的所有数都与 B 奇偶性相同. 对于 M_2 中的数,有 $2x(x+1)+C\equiv C\pmod 2$. 可

见，为使 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，只须取 $C = B+1$ 即可.

如果 A 为偶数，则有 $2x(x+1)+C \equiv C \pmod 4$. 又因 $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2$ 作为完全平方数模 4 时只能为 0 或 1，故由 $x^2+Ax+B=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+B$ 知 M_1 中元素模 4 时只能与 B、$B+1$ 或 $B+3$ 同余. 因而，当取 $C=B+2$ 时，$M_1 \cap M_2=\varnothing$.

16. 设 S 为 S_n 的奇子集，令 $T=\begin{cases} S\cup\{1\}, & \text{若 } 1\notin S, \\ S\setminus\{1\}, & \text{若 } 1\in S. \end{cases}$ 则 T 是偶子集，$S\to T$ 是奇子集到偶子集的一一对应，而且对每个偶子集 T，恰有一个奇子集 $S=\begin{cases} T\cup\{1\}, & \text{若 } 1\notin T, \\ T\setminus\{1\}, & \text{若 } 1\in T \end{cases}$ 与之对应，所以(1) 的结论成立.

对任一 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，含 i 的子集共 2^{n-1} 个，用上面的对应方法可知当 $i\neq 1$ 时，这 2^{n-1} 个集中有一半是奇子集. 当 $i=1$ 时，由于 $n\geqslant 3$，将上边的 1 换成 3，同样可得其中有一半是奇子集. 于是在计算奇子集容量之和时，元素 i 的贡献是 $2^{n-2}\cdot i$. 奇子集容量之和是 $\sum\limits_{i=1}^{n}2^{n-2}i=n(n+1)\cdot 2^{n-3}$. 由上可知，这也是偶子集的容量之和，两者相等.

17. 最大的 $n=871$. 若 $n\geqslant 872$，则 A_1 中必有一个元素 a 至少属于除 A_1 外的 30 个集合(因 $29\times 30+1=871<n$). 设 $a\notin A_i$，每个含 a 的集与 A_i 有一个公共元，故 A_i 至少有 31 个元，矛盾.

如下 871 个集满足题设：$A=\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{29}\}$；$B_i=\{a_0,\ a_{i,1},\ a_{i,2},\ \cdots,\ a_{i,29}\}$，$1\leqslant i\leqslant 29$；$A_{i,j}=\{a_i\}\cup\{a_{k,\ j+(k-1)(i-1)},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 29\}$，$1\leqslant i,\ j\leqslant 29$，其中 $a_{k,\ s}$ 与 $a_{k,\ s+29}$ 是同一个元素. 容易验证 $A\cap B_i$，$A\cap A_{i,j}$，$B_i\cap B_j(i\neq j)$，$B_s\cap A_{i,j}$，$A_{i,j}\cap A_{i,t}(j\neq t)$，$A_{i,j}\cap A_{s,j}(i\neq s)$ 为单元素集. 而 $A_{i,j}\cap A_{s,t}=\{a_{h,\ j+(h-1)(i-1)}\}$，$i\neq s$，$j\neq t$，其中 h 是 $(x-1)(i-s)\equiv t-j \pmod{29}$ 的惟一解.

18. 如果一个 10 元子集 T 具有性质：对任何 $k\in T$，均有 $f(T-\{k\})\neq k$，我们就称 T 为“好集”. 不是“好集”的 10 元子集称为“坏集”，也就是说，如果 T 为“坏集”，则在 T 中必有一 k_0，使 $f(T-\{k_0\})=k_0$. 若令 $S=T-\{k_0\}$，这是一个 9 元子集，则一方面 $f(S)=k_0$，另一方面 $T=S\cup\{k_0\}$，即 $T=S\cup\{f(S)\}$. 上式表示了“坏集” 的结构，它可由某一个 9 元子集 S 生成，即 S 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成了“坏集”.

如果 $f(S)\in S$，那么 $S\cup\{f(S)\}$ 是一个 9 元子集，而不是 10 元子集，即不构成“坏集”. 因此任一 9 元子集按上式至多能生成一个“坏集”(由函数的定

义，对于给定的 S，$f(S)$ 是惟一的）. 于是，"坏集"的个数 $\leqslant 9$ 元子集的个数 <10 元子集的个数. 最后一个不等式成立是因为，9 元子集的个数是 C_{20}^{9}，而 10 元子集的个数是 $C_{20}^{10}=\frac{11}{10}C_{20}^{9}>C_{20}^{9}$. 由此可知，"好集"是存在的.

19. 由于 $d(x, x)=0<3$，所以 S 中任何两个元素的距离都大于 3. 因而当将 S 中的元素 x 的 n 个分量改变 1 个、2 个或 3 个（1 变为 0 或 0 变为 1）时，所得的元素都在 $T-S$ 中，且 S 中的不同元素按上述办法所得的元素也互不相同. 按假设知，对每个 $x\in T$，都有惟一的 $y\in S$，使得 $d(x, y)\leqslant 3$，所以 $T-S$ 中的每个元素都可由 S 中的元素按上述办法生成. 从而有 $2^n=2^k(C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3)$. 由于 $n=2k-1$，故有 $3\cdot 2^{k-2}=k(2k^2-3k+4)$. ① 若 $3\nmid k$，则 $k=2^m$. 由于 $k\geqslant 6$，所以 $m\geqslant 3$. 于是 $2k^2-3k+4$ 是 4 的倍数但不是 8 的倍数. 从而由 ① 可得 $2k^2-3k+4=12$，这个方程无解，所以 k 为 3 的倍数. 记 $k=3h=3\cdot 2^q$，$q\geqslant 1$，于是 ① 式化为 $2^{3h-2}=h(18h^2-9h+4)$. ② 当 $q\geqslant 3$ 时，$18h^2-9h+4$ 是 4 的倍数不是 8 的倍数. 由 ② 知 $18h^2-9h+4=4$，无解. 从而 $q=1$ 或 2，$h=2$ 或 4. 代入 ② 式知 $h=2$ 不是根而 $h=4$ 是根. 所以得到 $n=2k-1=6h-1=23$.

20. 首先，由条件（1）—（3）可以导出更强的条件：（3′）B 中每个元素恰好属于 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 中的两个. 若不然，不妨设有 $b\in B$，使得 $b\in A_1\cap A_2\cap A_3$. 因为对任何 $i\neq j$，$A_i\cap A_j$ 恰有一个元素，故知 $A_1\cap\left(\bigcup\limits_{j=2}^{2n+1}A_j\right)=[A_1\cap(A_2\cup A_3)]\cup\left[A_1\cap\left(\bigcup\limits_{j=4}^{2n+1}A_j\right)\right]$ 中至多有 $2n-1$ 个元素. 另一方面，又由（3）知 A_1 中每个元素至少属于另外的某个 $A_i(i\neq 1)$，所以 $A_1\cap\left(\bigcup\limits_{j=2}^{2n+1}A_j\right)$ 中又应有 $2n$ 个元素，矛盾.

由（3′）知，对于每个 $a\in B$，a 都对应于由两个不同正整数组成的一个数对. 具体地说，若 $a\in A_i\cap A_j$，则令 a 与 $\{i, j\}$ 相对应. 显然，这个对应是个双射. 若能按要求为 B 中的数标上 0 和 1，则在上述数组中恰有一半与 0 对应. 这样的数组的个数为 $\frac{1}{2}C_{2n+1}^{2}=\frac{1}{2}n(2n+1)$. 可见，$n$ 必为偶数.

用构造法证明，把一个圆周用 $2n+1$ 个点均分成 $2n+1$ 等分. 在这些点依逆时针顺序标上 $1, 2, \cdots, 2n+1$. 对于任何 $1\leqslant i<j\leqslant 2n+1$，看 i 与 j 在圆周上的劣弧，若 i 与 j 之间有奇数段弧，则给 $\{i, j\}$ 所对应的 $a\in B$ 标上数 1；若有偶数段弧，则标上数 0. 由于 n 为偶数，因此不论 i 为何值，A_i 中的元素都恰有一半标有数 0 而另一半标有数 1.

习 题 3

1. 100. 当 $n\in A$ 时，$y=f(n)=n^2+n-2$ 恒为偶数.

2. 1870. k 与 $15k$ $(k=9,10,\cdots,133)$ 不能同在 A 中，又 $133<15\times 9$，所以 $|A|\leqslant 1995-(133-9+1)=1870$. 另一方面，设 $B=\{1,2,\cdots,8\}$，$C=\{134,135,\cdots,1995\}$，取 $A=B\cup C$，则 $|A|=1870$.

3. 将前一个子集记为 A，依题设对任何 $n\in A$，都存在 $k,m\in\mathbf{N}^*$，使得 $n=k^2+m^3$. 由于 $n\leqslant 10^6$，所以 $k\leqslant 10^3$，$m\leqslant 10^2$，因而数对 (k,m) 的个数不超过 10^5 个，从而 $n\in A$ 的个数也不超过 10^5 个. 可见，第二个子集的元素多.

4. 对任意的 $i,j\in\{0,1,\cdots,9\}$，X 应包含 $\overline{ij}$ 或 $\overline{ji}$ 之一. 这种无序对 (i,j) 共有 $10+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=55$ 个，故 $|X|\geqslant 55$. 又如取 $X=\{\overline{ij}\mid 0\leqslant i\leqslant j\leqslant 9\}$，则 $|X|=55$，且对任一无穷序列，设 i 为它所含的最小数字，j 为 i 的后一项，则 $\overline{ij}\in X$. 故 X 最少含 55 个元素.

5. 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则 $\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<\cdots<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_2+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<\cdots<\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$，因此，$A_S$ 中至少有 $2n-3$ 个元素. 另一方面，若取 $S=\{2,4,6,\cdots,2n\}$，则 $A_S=\{3,4,5,\cdots,2n-1\}$ 只有 $2n-3$ 个元素. 所以，$|A_S|$ 的最小值为 $2n-3$.

6. 集合 A 的元素为 $z=\cos\frac{2k\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{18}$. 集合 B 的元素为 $w=\cos\frac{2t\pi}{48}+\mathrm{i}\sin\frac{2t\pi}{48}$. $zw=\cos\frac{2(8k+3t)}{144}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2(8k+3t)}{144}\pi$. 因为 8 和 3 互质，故存在整数 k 和 t，使 $8k+3t=1$. 进而，存在整数 k、t，使 $8k+3t=m$. 取 $m=0,1,2,\cdots,143$，则得到 zw 的 144 个不同的值. 于是，集合 $C=\{zw\mid z\in A,w\in B\}$ 含有 144 个元素.

7. 易知集合 $\{1,2,3,5,10,20,25,50,100\}$ 满足条件，故集合 A 的元素个数的最小值不大于 9. 若 $\{1,2,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,100\}$ 也满足条件，则 $x_1\leqslant 4$，$x_2\leqslant 8$，$x_3\leqslant 16$，$x_4\leqslant 32$，$x_5\leqslant 64$. 但 $x_4+x_5\leqslant 96<100$，所以 $x_5=50$. $x_3+x_4\leqslant 48<50$，所以 $x_4=25$. $x_2+x_3\leqslant 24<25$，所以 $25=2x_3$，矛盾. 所以，集合 A 的元素个数的最小值为 9.

8. 最多 7 个元素. 由 7 个元素组成的数集的例子有：$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. 对 $m\geqslant 8$，任何由 m 个数组成的数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 都不具有所要求的性质. 不失一般性，可设 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_m$ 且 $a_4>0$（因为若把每个数都乘以 -1，不会改变我们的性质）. 于是，$a_1+a_2>a_1+a_3>a_1+$

$a_4>a_1$，从而和数 a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4 都不属于集合 A. 并且和数 a_2+a_3 与 a_2+a_4 不可能同时属于集合 A，此因 $a_2+a_3>a_2$，$a_2+a_4>a_2$，且 $a_2+a_3\neq a_2+a_4$. 这样一来，对数组 (a_1, a_2, a_3) 和 (a_1, a_2, a_4)，至少有一个组中任何两个数的和都不是 A 中的元素.

9. 设 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$x_{i+1}=x_i+d_i$，$d_i>0$. 由条件 $|x-y|\geqslant\frac{xy}{25}$ 易知，A 中至多有 1 个元素不小于 25，从而有 $x_{n-1}\leqslant 24$. 由 $d_i=|x_{i+1}-x_i|\geqslant\frac{x_{i+1}\cdot x_i}{25}=\frac{(x_i+d_i)x_i}{25}$，解得 $d_i\geqslant\frac{x_i^2}{25-x_i}$. 若 $x_5\geqslant 5$，则 $d_5\geqslant\frac{25}{20}>1$，故有 $x_6\geqslant 7$. 从而 $d_6>2$，$x_7\geqslant 10$；$d_7>6$，$x_8\geqslant 17$；$d_8>36$，$x_9\geqslant 54>25$. 可见，A 中至多有 9 个元素. 另一方面，容易验证集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ 满足题中要求. 从而知集合 A 中最多有 9 个元素.

10. 假设有一个 5 个元素的子集也符合条件，则这 5 个元素中至少有 3 个的第一位数码相同. 不妨设 A、B、C 这三个元素的第一位数码相同. 同样，在 A、B、C 中，第二、三、四、五个数码上，每一位都至少有两个元素的对应数码相同. 但 A、B、C 三元素两两分组只有 3 组，故至少有两个元素，它们除第一数码相同外，至少还有两位数码相同，不妨设 A 与 B，则 A、B 的距离不大于 2，矛盾. 故 T 的元素不多于 4 个. 可令 $T=\{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}$，则不难验证结论成立. 所以 $|T|_{\max}=4$.

11. 设集合 $A=\{1\}$，$B=\{2^1, 2^2, \cdots, 2^{10}\}$，$C=\{3^1, 3^2, \cdots, 3^6\}$，$D=\{5^1, 5^2, 5^3, 5^4\}$，$E=\{6^1, 6^2, 6^3, 6^4\}$，$X_i=\{i, i^2\}$，其中 i 不是 2、3、4、5、6 的幂，且满足 $7\leqslant i\leqslant 44$. 于是，集合 S 中：至少不包含 A 中的 1 个元素；至少不包含 B 中的 5 个元素；至少不包含 C 中的 3 个元素；至少不包含 D 中的 2 个元素；至少不包含 E 中的 2 个元素；至少不包含 31 个 X_i 中每个集合中的 1 个元素. 所以，S 中最多有 $2002-(1+5+3+2+2+31)=1958$ 个元素. 例如，$S=\{45, 46, 47, \cdots, 2002\}$ 即为满足条件且有 1958 个元素的集合.

12. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，又设 M 是 A 中各元素之和. 根据题中的条件可以断定，对任何 $i=1, 2, \cdots, n$，$M-a_i$ 是偶数. 如果 M 是偶数，则 A 中每个元素也都是偶数，即 $a_i=2b_i$，而集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 仍然是"一致"的. 假定 M 是奇数，故对于 $i=1, 2, \cdots, n$，a_i 也都是奇数. 由于 $a_1+a_2+\cdots+a_n=M$，n 也是奇数. $n=7$ 时，容易验证集合 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ 是一致的.

假定 $n\leqslant 5$，对于 $n=1, 3$ 的情形是显然的. 设 $n=5$. 将元素按升序排列，即 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. 将集合 $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 分成两个不相交的子集，且使每个子集的元素之和相等，有两种方式：$a_5+a_2=a_3+a_4$，$a_5=a_2+a_3+$

a_4. 类似地对集合 $\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 有，$a_5+a_1=a_3+a_4$，$a_5=a_1+a_3+a_4$. 考虑其可能的组合：如果 $a_5+a_2=a_3+a_4$，且 $a_5+a_1=a_3+a_4$，则有 $a_1=a_2$，矛盾. 如果 $a_5+a_2=a_3+a_4$，且 $a_5=a_1+a_3+a_4$，则有 $a_1+a_2=0$，矛盾. 如果 $a_5=a_2+a_3+a_4$，且 $a_5+a_1=a_3+a_4$，则有 $a_1+a_2=0$，矛盾. 如果 $a_5=a_2+a_3+a_4$，且 $a_5=a_1+a_3+a_4$，则有 $a_1=a_2$，矛盾. 因此，$n\neq 5$，故 $n=7$.

13. 因为 A 的各位数字互不相同，所以 $A\equiv 0+1+\cdots+9\equiv 0 \pmod 9$，即 $9\mid A$. 又 $11\,111\mid A$，而 $(9, 11\,111)=1$，故 $99\,999\mid A$. 设 $A=99\,999A_0$，$A_0\in\mathbf{Z}^+$. 因为 $10^9<A<10^{10}$，所以 $\frac{10^9}{10^5-1}<A_0<\frac{10^{10}}{10^5-1}$. 又因为 $\frac{10^9}{10^5-1}>\frac{10^9}{10^5}=10^4$，$10^5+1<\frac{10^{10}}{10^5-1}<10^5+2$，所以 $10^4<A_0\leqslant 10^5+1$.

显然，当 $A_0=10^5+1$ 或 10^5 时，不合题意，故 $10^4<A_0<10^5$，即 A_0 为五位数. 设 $A_0=\overline{a_0a_1a_2a_3a_4}$，其中 $a_0>0$，$a_i\in\{0, 1, \cdots, 9\}$ $i=0, 1, 2, 3, 4$，则 $A=A_0(10^5-1)=\overline{a_0a_1a_2a_3a_4 00000}-\overline{a_0a_1a_2a_3a_4}$. 记 $A=\overline{c_0c_1c_2c_3c_4c_0'c_1'c_2'c_3'c_4'}$ $(c_0\neq 0)$. 若 $a_4\neq 0$，则 $c_0=a_0$，$c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$c_3=a_3$，$c_4=a_4-1$，$c_0'=9-a_0$，$c_1'=9-a_1$，$c_2'=9-a_2$，$c_3'=9-a_3$，$c_4'=10-a_4$；若 $a_4=0$，则 $a_3\neq 0$(否则 A 的数位中有两个 0). 于是，$c_0=a_0$，$c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$c_3=a_3-1$，$c_4=9$，$c_0'=9-a_0$，$c_1'=9-a_1$，$c_2'=9-a_2$，$c_3'=10-a_3$，$c_4'=0$. 所以 $c_i+c_i'=9$ $(0\leqslant i\leqslant 4$，且 $i\in\mathbf{N})$. ①

因此 $\{(c_i, c_i')\mid 0\leqslant i\leqslant 4, i\in\mathbf{N}\}=\{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (9, 0), (8, 1), (7, 2), (6, 3), (5, 4)\}$. 因为 $c_0\neq 0$，所以满足条件 ① 的 A 的个数为 $5!\times 2^5-4!\times 2^4=3456$. 反之，任何满足条件 ① 的数都可表示为：$\overline{c_0c_1c_2c_3c_4 00000}+\overline{c_0'c_1'c_2'c_3'c_4'}=\overline{c_0c_1c_2c_3c_4}\cdot(10^5-1)+99\,999$，必可被 11 111 整除. 因此，$|M|=3456$.

14. $\sum\limits_{(A_1, A_2, \cdots, A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 的值，即是 $\{1, 2, \cdots, 2002\}$ 中元素出现的次数之和. 对每一个 $k\in\{1, 2, 3, \cdots, 2002\}$，因为 $\{1, 2, \cdots, 2002\}$ 共有 2^{2002} 个子集，这些子集的全体记作集合 M. 其中不含有元素 k 的子集共有 2^{2001} 个，记这些子集全体为 N. 当 n 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 中 A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都取遍 M 时，共有 2^{2002n} 个这样的 n 元组. 但其中当 A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都不含有 k 即 $A_i\in N$ $(i=1, 2\cdots, n)$ 时，这样的 n 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 共有 2^{2001n} 个. 所以 $\sum\limits_{(A_1, A_2, \cdots, A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 中 k 出现 $2^{2002n}-2^{2001n}$

次，当 $k=1, 2, \cdots, 2002$ 时，即 $\sum\limits_{(A_1, A_2, \cdots, A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=2002\cdot(2^{2002n}-2^{2001n})$.

15. 记 $S_{i,j}$ 是 S 中形如 (x, i, j) 的点的集合，即 S 中在 Oyz 平面内正交投影坐标为 (i, j) 的一切点的集合. 显然 $S=\bigcup\limits_{(i, j)\in S_x}S_{i,j}$. 由柯西不等式，得 $|S|^2=\left(\sum\limits_{(i, j)\in S_x}|S_{i,j}|\right)^2\leqslant\sum\limits_{(i, j)\in S_x}1^2\times\sum\limits_{(i, j)\in S_x}|S_{i,j}|^2=|S_x|\sum\limits_{(i, j)\in S_x}|S_{i,j}|^2$. 令 $X=\bigcup\limits_{(i, j)\in S_x}(S_{i,j}\times S_{i,j})$，则 $|X|=\sum\limits_{(i, j)\in S_x}|S_{i,j}|^2$.

作映射 $f: X\to S_y\times S_z$，$f((x, i, j), (x', i, j))=((x, j), (x', i))$. 显然 f 为单射. 因此，$|X|\leqslant|S_y|\cdot|S_z|$. 故 $|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|X|\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$.

16. 对于任一个 n 位数 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ $(0\leqslant a_i\leqslant 9, i=1, 2, \cdots, n)$，对应 $A\to B=\overline{b_1b_2\cdots b_n}$ 是位数不超过 n 的所有非负整数的集合到它自身的一个双射，其中 $b_i=9-a_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 若记 $d(A)=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $d(A)+d(B)=9n$. 由此可见，对于任意 $0<k\leqslant 9n$，$d(A)<k$ 的充分必要条件是 $d(B)>9n-k$. 因而有 $\left|\left\{A\middle|d(A)<\frac{9n}{2}\right\}\right|=\left|\left\{A\middle|d(A)>\frac{9n}{2}\right\}\right|$. ①

当 n 为奇数时，$\frac{9n}{2}$ 不是整数，故 ① 中左右两端的集合之并集为 S，所以当 $k=\left[\frac{9n}{2}\right]+1$ 时，$|S|=2|S_k|$. 当 n 为偶数时，$\frac{9n}{2}$ 是整数，当 $k=\frac{9n}{2}$ 时，$|S|>2|S_k|$，$|S|<2|S_{k+1}|$，这时满足要求的 k 不存在.

17. 由题意，若 B_n^m 非空，则 $n, m\geqslant 3$. 计算仅满足条件(1)的 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的个数，这时 1 与 n 不相邻. 记这样的 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 有 S_m 个，其中 x_m 个以 1 开头，y_m 个以 $2, \cdots, n-1$ 开头，z_m 个以 n 开头，则 $S_m=x_m+y_m+z_m$，那么有递推式 $x_{m+1}=x_m+y_m$，$y_{m+1}=(n-2)(x_m+y_m+z_m)$，$z_{m+1}=y_m+z_m$. 以上三式相加得 $S_{m+1}=(n-1)S_m+(n-2)S_{m-1}$. (∗)

又易知 $S_1=n$，$S_2=n^2-2$，而(∗)的特征方程是 $t^2-(n-1)t-(n-2)=0$，其特征根为 $t_{1,2}=\frac{n-1\pm\sqrt{n^2+2n-7}}{2}$，故 $S_m=A\cdot\left(\frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m+B\cdot\left(\frac{n-1-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m$，其中 A、B 由 $S_1=A\cdot\left(\frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)+B\cdot\left(\frac{n-1-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)=n$ 及 $S_2=A\cdot\left(\frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^2+B\cdot$

$\left(\dfrac{n-1-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^2=n^2-2$ 确定，解得 $A=\dfrac{1+\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}$，$B=\dfrac{1-\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}$.

故 $S_m=\left(\dfrac{1+\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}\right)\left(\dfrac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m+\left(\dfrac{1-\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}\right)\left(\dfrac{n-1-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m$.

下面再减去满足(1)而不满足(2)的. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 全相同，即 $a_1=\cdots=a_m=k\in\{1, 2, \cdots, n\}$，这样的 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 有 n 个 $(n\geqslant 3)$；若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中恰含两个不同的数，选出这两个数有 C_n^2 种方法，但不能选 $\{1, n\}$，故有 C_n^2-1 种选法，这样的 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 有 $(C_n^2-1)(2^m-2)$ 种. 综上所述，$|B_n^m|=S_m-n-(C_n^2-1)(2^m-2)=\left(\dfrac{1+\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}\right)\left(\dfrac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m+\left(\dfrac{1-\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-7}}}{2}\right)\left(\dfrac{n-1-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\right)^m-n-(C_n^2-1)(2^m-2)\ (n, m\geqslant 3)$.

特别地，当 $n=6$，$m=3$ 时，$S_3=5S_2+4S_1=5\times 34+4\times 6=194$，所以 $|B_6^3|=194-6-(C_6^2-1)(2^3-2)=104$.

18. 记 $\tau=|B|$，从集合 S 中尽可能多的去掉一些点得到 S 的子集 S'，使得 S' 满足：1) 若 B' 为 $\mathbf{Z}$ 的满足 $\forall(x, y)\in S'$，总有 $x\in B'$ 或 $y\in B'$ 的元素个数最小的子集，则 $|B'|=\tau$；2) 对 $\forall b\in S'$，若 B'' 是 $\mathbf{Z}$ 的满足 $\forall(x, y)\in S'\backslash\{b\}$，总有 $x\in B''$ 或 $y\in B''$ 的元素个数最小的子集，则 $|B''|<\tau$. 我们要证明：S' 中任两点的连线都不平行于坐标轴，从而 $|A|\geqslant|S'|\geqslant\tau=|B|$.

反证：若有 $a, b\in S'$ 使 ab 平行于(不妨设) x 轴，则 a、b 的第二个坐标分量相同，记为 z. 考虑 $S'\backslash\{a\}$，由 S' 的性质，存在 $\mathbf{Z}$ 的子集 U_a，使 $S'\backslash\{a\}$ 的任一

元素至少有一个坐标分量在 U_a 中，且 $|U_a|=\tau-1$ 及 a 的两个坐标分量都不在 U_a 中；对于 $S'\backslash\{b\}$，有类似的 $U_b\subset\mathbf{Z}$. 设 S'' 为 S' 的子集满足：S'' 中任一点的两个坐标分量都在 $\{z\}\cup(U_a\cup U_b-U_a\cap U_b)$ 中，令 $t=|U_a\cap U_b|$，则 S'' 所有不同的坐标分量最多有 $2(\tau-1-t)+1$. 显然对 S''，存在 $\mathbf{Z}$ 的子集 C，使 S'' 的任意一个元素总有一个分量在 C 中，且 $|C|\leqslant\tau-1-t$.

现在令 $C'=C\cup(U_a\cap U_b)$，则 S' 的任一元素总有一个分量在 C' 中. 事实上，取 $u\in S'$，(1) $u=a$ 或 b，则 $u\in S''$，于是由 C 的性质，u 至少有一个分量在 C 中，从而在 C' 中；(2) $u\neq a$ 及 b，则 u 总有一个分量在 U_a 中，且 u 总有一个分量在 U_b 中. 如果 u 的同一个坐标分量在 U_a 和 U_b 中，则在 $U_a\cap U_b$ 中，从而在 C' 中；如果 u 的一个坐标在 U_a 中而另一个在 U_b 中，则 u 在 S'' 中，从而至少有一个分量在 C 中，从而在 C' 中. 故 $\tau\leqslant|C'|=|C\cup(U_a\cap U_b)|\leqslant|C|+t\leqslant\tau-1-t+t=\tau-1$，矛盾！

习 题 4

1. 5，8. 设三元组为 $\{x_i, y_i, z_i\}$，且 $x_i+y_i=3z_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i+z_i)=4\sum\limits_{i=1}^{n}z_1=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$. 当 $2\mid n$ 时，$8\mid n$，得 n 的最小值为 8；当 $2\nmid n$ 时，$8\mid 3n+1$，得 n 的最小值为 5. 可验证 5、8 即为所求.

2. 435. 设 $S=A\cup B$，$|A|\leqslant|B|$. 若 $|A|=0$，则 $|B|=6$，有 1 种取法；若 $|A|=1$，则 $|B|=6, 5$，有 $C_6^1C_6^6+C_6^1C_5^5=12$ 种取法；类似地，可分别计算出 $|A|=2, 3, 4, 5, 6$ 时的取法数.

3. 假设结论不成立. 不妨设 $5\in A$，则 1、9 不同时属于 A. 若 $1\in A$，且 $9\in B$，则 $3\in B\Rightarrow 6\in A\Rightarrow 4, 7\in B\Rightarrow 2, 8\in A$，与 $5\in A$ 矛盾. 若 $1, 9\in B$，当 $7\in A\Rightarrow 3, 6\in B$，与 $9\in B$ 矛盾；当 $7\in B\Rightarrow 8, 4\in A\Rightarrow 3\in B\Rightarrow 2\in A$，$2, 5, 8\in A$ 矛盾.

4. 考虑集合 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 2001\}$，$B=\{1, 4, 7, \cdots, 2002\}$，$C=\{2, 5, 8, \cdots, 2003\}$. 由 A 中至多选一个元素与集合 B 或 C 构成一个新的集合 M. 因为 $|B|=|C|=668$，所以 M 中最多有 669 个元素.

5. 考察将 $\{1, 2, \cdots, 2r\}$ 分成 r 组的任一分划. 在 $r, r+1, \cdots, 2r$ 这 $r+1$ 个数中，必有两个数 u 和 v 属于同一组，不妨设 $u<v$. 令 $a=2u-v\geqslant 0$，$x=y=v-u\geqslant 1$，则 $a+x=a+y=u$，$a+x+y=v$ 在同一组中. 由此可见，$h(r)\leqslant 2r$.

另一方面，考察 $\{1, 2, \cdots, 2r-1\}$ 的如下分划：$\{1, 1+r\}$，$\{2, 2+r\}$，$\cdots$，$\{r-1, 2r-1\}$，$\{r\}$. 显然，$a+x$、$a+y$、$a+x+y$ 不能同在 $\{r\}$ 中.

设它们都在$\{k, k+r\}$中，于是只能是$a+x=a+y=k$，$a+x+y=a+2x=k+r$. 从而有$x=y=r$. 这样一来，$a=k-r<0$，矛盾. 而且由证明可知，当$n<2r$时，$\{1, 2, \cdots, n\}$都不能满足要求. 综上可知，$h(r)=2r$.

6. 若不然，则任何一个平面至多与其中的3个集合相交. 在5个集合中各取1点，5点分别为A、B、C、D、E，则其中任何4点都不共面，因而其中任何3点都不共线. 考察以AB为公共交线的3个平面ABC、ABD和ABE，不难看出，其中必有一个平面，使得另两点分别属于该平面将空间分成的两个半空间中. 不妨设点D和E分别位于平面ABC的两侧. 从而直线DE与平面ABC相交，记交点为F. 由于A、B、C 3点分属于3个集合，而平面ABC只与3个集合相交，所以点F必属于点A、B、C所在的3个集合之一，不妨设F与A属于同一个集合. 这样一来，4点D、F、E、B所决定的平面便与4个集合相交，矛盾.

7. 考虑奇偶性. 如果A由X中的奇数组成，$B\cup C$由X中的偶数组成，那么它们合乎题设要求. 这时$\min(|A|, |B|, |C|)=\left[\frac{n}{4}\right]$. 由此，猜测$\max\{\min(|A|, |B|, |C|)\}=\left[\frac{n}{4}\right]$，也就是恒有$\min(|A|, |B|, |C|)\leqslant\frac{n}{4}$.

8. (1) 令$A=\{3k \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{3k-2 \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{3k-1 \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，则$A$、$B$、$C$彼此的交集为空集，且$A\cup B\cup C=\mathbf{N}^*$，并且此时属于同一集合的两个元素之差为3的倍数，不等于2或5.

(2) 令$A=\{4k \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{4k-1 \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{4k-2 \mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$D=\{4k-3 \mid k\in\mathbf{N}^*\}$. 同上讨论，可知命题成立.

假设可以将$\mathbf{N}^*$表示为三个集合A、B、C(彼此不相交)的并集，使得：对任意的$m, n\in\mathbf{N}^*$，当$|m-n|=2$、3或5时，m、n属于不同的集合. 不妨设$1\in A$，则$3\notin A$，从而$3\in B$或$3\in C$. 不妨设$3\in B$，则$6\notin A$且$6\notin B$，故$6\in C$. 依此类推，可知$4\in B$，$8\in A$，$5\in C$，$7\in A$. 这时，9属于A、B、C中任何一个集合均导致矛盾.

9. 我们先找一个必要条件，若$\{1, 2, \cdots, n\}$能分成5个互不相交的子集，各个子集的元素和相等，则$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$能被5整除，所以$n=5k$或$n=5k-1$. 显然，当$k=1$时，上述条件不是充分的. 可用数学归纳法证明，当$k\geqslant 2$时，条件是充分的.

当$k=2,3$，即$n=9, 10, 14, 15$时，可以验证结论成立：

若集合$\{1, 2, \cdots, n\}$能分成5个互不相交的子集，且它们各自的元素和相等，则易证$\{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+10\}$也能分成5个互不相交的子集，且它们每个的元素和相等.

假设对于$n=5k-1$、$5k$，命题正确，由上面的讨论知，对于$n=5(k+2)-1$、$5(k+2)$命题也成立.

10. 当$k=1$时，$3^2+4^2=5^2$；当$k=2$时，$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. 猜想：M_k中前$k+1$个数的平方和与后k个数的平方和相等.

11. 若S不具有题设性质，则存在S的两个非空不相交的子集A和B使$S=A\cup B$，并且A(或B)中任意$n-1$个数(不要求互不相同)的和都不在A(或B)内. 不妨设$1\in A$，则$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{个}}=n-1\in B$(只要$m\geqslant n-1$)，从而$\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n-1\text{个}}=(n-1)^2\in A$(只要$m\geqslant(n-1)^2$). 若$n\in A$，则$(n-1)^2=\underbrace{n+n+\cdots+n}_{n-2\text{个}}+1\in B$，矛盾. 若$n\in B$，则$\underbrace{n+n+\cdots+n}_{n-2\text{个}}+(n-1)=n^2-n-1\in A$(只要$m\geqslant n^2-n-1$)，但$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2\text{个}}+(n-1)^2=n^2-n-1\in B$，矛盾. 可见，当$m\geqslant n^2-n-1$时，集合$S=\{1, 2, \cdots, m\}$具有题设性质.

其次，对于集合$S=\{1, 2, 3, \cdots, n^2-n-2\}$，令$A=\{1, 2, \cdots, n-2, (n-1)^2, (n-1)^2+1, \cdots, n^2-n-2\}$，$B=\{(n-1), n, \cdots, (n-1)^2-1\}$，则$A\cap B=\varnothing$，$S=A\cup B$. 若$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\in\{1, 2, \cdots, n-2\}\subset A$，则$n-1\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant(n-1)(n-2)<(n-1)^2$，故$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\notin A$. 若$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$中至少有一个$\in\{(n-1)^2, (n-1)^2+1, \cdots, n^2-n-2\}$，则$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\geqslant\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2\text{个}}+(n-1)^2=n^2-n-1$，故$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\notin A$. 若$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\in B$，则$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\geqslant(n-1)^2$，故$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\notin B$. 可见，$m=n^2-n-2$时，集合$S=\{1, 2, \cdots, m\}$不具有题设条件. 所求$m$的最小值为$n^2-n-1$.

12. 若$n\geqslant 3^5$，则$3, 3^2, 3^4, 3^5\in S_n$. 设集合S_n分为两个不相交的子集A和B，$3\in A$，且A和B不满足题中条件. 于是$3^2\in B$，$3^4\in A$，$3^3\in B$，$3^5\in B$. 这时B中三个元素$3^2, 3^3, 3^5$满足$ab=c$矛盾. 这表明$n\geqslant 3^5$时，把集合S_n任意分为两组，总有某个组，具有题中性质，即所求最小值不超过$3^5=243$.

另一方面，取$n=242$，且设$A=\{k\mid 9\leqslant k\leqslant 80\}$，$B=\{k\mid 3\leqslant k\leqslant 8,$

或 $81 \leqslant k \leqslant 242\}$，则 $S_{242}=A \cup B$，而且 A 和 B 都不具有题中性质. 当 $n<242$ 时，将 S_n 分为两组 $A \cap S_n$ 和 $B \cap S_n$，则 $A \cap S_n$ 和 $B \cap S_n$ 也都不具有题中性质. 故 n 的最小值为 243.

13. 设 $S=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，且 $u_1<u_2<\cdots<u_n$. $u_i>0$ $(i=1, \cdots, n)$. 令 $S_1=\{f(A) \mid A=\{u_1\}\}$. $S_k=\{f(A) \mid u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}<f(A) \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_k\}$，$k=2, 3, \cdots, n$. 则 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是符合要求的分拆.

事实上，在 S_1 中最大数与最小数都等于 u_1，结论显然. 当 $k \geqslant 2$ 时，若 $u_k \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$，则在 S_k 中 $\dfrac{\text{最大数}}{\text{最小数}}<\dfrac{u_1+\cdots+u_{k-1}+u_k}{u_1+\cdots+u_{k-1}}<2$；若 $u_k>u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$，则 $\dfrac{\text{最大数}}{\text{最小数}}=\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}+u_k}{u_k}<2$.

14. 由 $\sum\limits_{n=0}^{k}(1990+n)=1990(k+1)+\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 为偶数，知 $k(k+1) \equiv 0 \pmod 4$. 由此可知 $k \equiv 0 \pmod 4$ 或 $k \equiv 3 \pmod 4$. 换句话说，$k=4m+1$ 与 $k=4m+2$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ 都不满足本题要求.

设 $k \equiv 3 \pmod 4$，则 $4 \mid (k+1)$. 令 $A=\left\{1990+j \mid j=4m, 4m+3, m=0, 1, \cdots, \left[\dfrac{k}{4}\right]\right\}$，$B=\left\{1990+j \mid j=4m+1, 4m+2, m=0, 1, \cdots, \left[\dfrac{k}{4}\right]\right\}$，易见，这样的 A 和 B 满足要求.

设 $k \equiv 0 \pmod 4$，于是 $k=4m$，$m \in \mathbf{N}^*$. 因为 $|M|$ 为奇数，故有 $|A| \neq |B|$. 不妨设 $|A|>|B|$，于是 $|A| \geqslant 2m+1$，$|B| \leqslant 2m$. 因而，A 中元素之和不小于 $\sum\limits_{n=0}^{2m}(1990+n)$，$B$ 中元素之和不大于 $\sum\limits_{n=2m+1}^{4m}(1990+n)$，故得 $\sum\limits_{n=0}^{2m}(1990+n) \leqslant \sum\limits_{n=2m+1}^{4m}(1990+n)=(2m)^2+\sum\limits_{n=1}^{2m}(1990+n)$. 解得 $m \geqslant 23$，$k \geqslant 92$. 当 $k=92$ 时，令 $A_1=\{1990, 1991, \cdots, 1990+46\}$，$B_1=\{1990+47, 1990+48, \cdots, 1990+92\}$. 两集合中元素之和分别为 $S_{A_1}=1990 \times 47+1081$，$S_{B_1}=1990 \times 46+1081+2116$，$S_{B_1}-S_{A_1}=126$. 再令 $A=A_1 \cup \{2053\}-\{1990\}$，$B=B_1 \cup \{1990\}-\{2053\}$，则集合 A 和 B 即为满足题中要求的分解. 当 $k>92$ 时，我们将前 93 个数分组如上，而将后面的 $k-92=4m$ 个数中的每相邻 4 数按前面 $k \equiv 3 \pmod 4$ 的办法处理即可得到所需要的分解.

综上可知，所求的所有 k 的集合为 $\{k \mid k=4m+3, m=0, 1, \cdots; k=4m, m=23, 24, \cdots\}$.

15. 考虑集合 S 的所有子集并计算每个子集中所有复数的和的模. 因这

样得到的模数只有有限多个，故其中必有最大数. 将模取最大值的子集之一记为 A. 如果 $S-A\neq\varnothing$，再将 $S-A$ 的所有子集中能使其中所有复数之和的模达到最大的一个子集取为 B. 如果 $S-(A\cup B)\neq\varnothing$，则令 $C=S-(A\cup B)$. 这样选取的至多 3 个子集便满足题中要求.

将 A、B、C 中所有元素之和分别记为 a、b、c.

(i) 对任意 $z\in A$，如果 z 与 a 的夹角为钝角，则 $-z$ 与 a 的夹角为锐角. 于是有 $|a+(-z)|>|a|$，即子集 $A-\{z\}$ 中所有元素之和的模大于 a 的模，此与 $|a|$ 的最大性矛盾. 这就证明了 A 中任一元素与 a 的夹角都不超过 $90°$. 同理，B 中任一元素与 b 的夹角也不超过 $90°$.

(ii) 对任意 $\xi\in S-A$，ξ 与 a 的夹角都是钝角. 否则又导致 $|a+\xi|>|a|$，矛盾. 同理，C 中任一元素 η 与 b 的夹角都是钝角. 由此可见，B 中所有元素均与 a 成钝角，从而其和 b 与 a 夹钝角. 同理，c 与 a，c 与 b 都夹钝角，即(3)成立.

(iii) 若存在 $\xi\in C$，使 ξ 与 c 夹钝角，则由(ii)知，4 个数 a、b、c、ξ 两两之间都夹钝角，此不可能. 所以，C 中任一元素与 c 的夹角都不超过 $90°$.

16. 因 $|A|=r-1$，$|B|=s-1$，$|N|=n-2$，故 A 与 B 构成 N 的一个分划等价于 $A\cap B=\varnothing$.

必要性. 若 r、n 之一与 n 有公因数 d，则另一个也与 n 有公因数 d. 设 $r=r'd$，$s=s'd$，于是 $\left[\frac{r'n}{r}\right]=\left[\frac{s'n}{s}\right]$，$A\cap B\neq\varnothing$，矛盾.

充分性. 假设 $A\cap B\neq\varnothing$，则存在整数 a、b，使 $\left[\frac{an}{r}\right]=\left[\frac{bn}{s}\right]=p$，$p<\frac{an}{r}<p+1$，$p<\frac{bn}{s}<p+1$，即 $\frac{pr}{n}<a<\frac{(p+1)r}{n}$，$\frac{ps}{n}<b<\frac{(p+1)s}{n}$，相加得 $p<a+b<p+1$. 矛盾.

习 题 5

1. 2^9. 显然不含空集. 按所含元素的多少把这族子集分为 10 类，设含 i 个元素的子集为 A_i，其个数为 a_i. 易知 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}\leqslant C_9^0+C_9^1+\cdots+C_9^9=2^9$.

2. 1001. 构造子集 $X'=\{1001-x\mid x\in X\}$，则所有非空子集分成两类 $X'=X$ 和 $X'\neq X$. 当 $X'=X$ 时，必有 $X'=X=M$，于是 $\alpha_X=1001$. 当 $X'\neq X$ 时，设 x、y 分别是 X 中的最大数与最小数，则 $1001-x$、$1001-y$ 分别是 X' 中的最小数与最大数. 于是，$\alpha_X=x+y$，$\alpha_{X'}=2002-x-y$. 从而，$\frac{\alpha_X+\alpha_{X'}}{2}=1001$. 因此，所求的 α_X 的算术平均值为 1001.

3. 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 中每个元素在子集中均出现 $2^6=64$ 次. 可

计算 1，2，3，4，5，6 在子集中按从大到小的顺序排列时各有 32 次在奇数位，32 次在偶数位，因此子集中这些数的交替和的总和为 0；而 7 也出现 64 次，且均取正值，所以所有子集的交替和的总和为 $7\times64=448$.

4. 取 $A=\{1, 3, 5, \cdots, 2n+1\}$ 合乎要求. 故 $\max|A|\geqslant n+1$. 另一方面可设合乎要求的 A 中有 k $(k\leqslant n+1)$ 个奇数：$a_1>a_2>\cdots>a_k$. 显然，偶数 $a_1-a_2<a_1-a_3<\cdots<a_1-a_k$ 都不能在 A 中，所以 A 中至多有 $n-(k-1)=n+1-k$ 个偶数. 从而，$\max|A|\leqslant k+(n+1-k)=n+1$.

5. $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中含 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 的子集有 2^{n-1} 个，故其总和为 $2^{n-1}(1+2+\cdots+n)=2^{n-2}n(n+1)$.

6. “异质”子集至多有 2 个数取自 $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$，因而至多有 $16-7+2=11$ 个数字，如 $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$.

7. 容易验证：当 $S=\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 时符合题中要求. 如果 $T\subseteq\{1, 2, \cdots, 9\}$，$\{T\}\geqslant6$，$T$ 中任意两个不同的数之和介于 3 与 17 之间，故至多可以形成 15 个不同的和数. 而 T 中任取两个数，有至少 $C_6^2=15$ 种取法. 如果 T 满足条件，则所得和数中必须 3 与 17 同时出现，即 1、2、8、9 都在 T 中出现，但这时 $1+9=2+8$，T 不合题意.

8. 可以证明命题：如果集合 A 的元素个数小于 r，且包含于 F 的无穷多个集合中，则要么 A 与 F 中所有集合的交集非空，要么存在一个 $x\notin A$，使得 $A\cup\{x\}$，包含于 F 的无穷多个集合中. 当然，这样的集合 A（如空集）是存在的. 重复运用这个命题 r 次，即得所要证明的结论. 因为具有 r 个元素的集合不可能包含于 F 的无穷多个集合中.

假设 F 中的某个集合 $R=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 与集合 A 的交集是空集，由于 F 中有无穷多个集合包含 A，且每一个集合与 R 的交集非空，于是，存在某个 x_i 属于无穷多个集合. 设 $x=x_i$，则 $A\cup\{x\}$ 包含于 F 的无穷多个集合中.

9. 引理　如果正整数 x, y, z 满足方程① $x^2+y^2=z^2$，则 3 个数中至少有 1 个数是 5 的倍数. 这是因为 $(5k+1)^2=25k^2+10k+1\equiv1 \pmod 5$，$(5k+2)^2=25k^2+20k+4\equiv-1 \pmod 5$，$(5k+3)^2=25k^2+30k+9\equiv-1 \pmod 5$，$(5k+4)^2=25k^2+40k+16\equiv1 \pmod 5$，所以，如果 x 和 y 都不是 5 的倍数，则 x^2 和 y^2 都模 5 等于 1 或 -1. 从而 z^2 只能模 5 等于 0，因此，z 是 5 的倍数.

考察以 10，15，25，40，45 分别作为直角三角形 1 条边长的所有勾股数组. 因为方程①的正整数解可以表为②：$x=k(a^2-b^2)$，$y=2kab$，$z=k(a^2+b^2)$，其中 $k, a, b\in\mathbf{N}$，且 $(a, b)=1$，$a>b$，故知这样的勾股数共有下列 11 组：(10，8，6)，(26，24，10)，(15，12，9)，(17，15，8)，(39，36，15)，(25，24，7)，(40，32，24)，(41，40，9)，(45，36，27)，(25，20，15)，

(50，40，30). 注意到前 9 组勾股数中每组都有 8、9、24、36 这 4 个数之一，可知集合 $M=S-\{5, 8, 9, 20, 24, 30, 35, 36, 50\}$ 中任何 3 个数都不是一组勾股数. 所以，所求的最小正整数 $n\geqslant 42$.

另一方面，在下列 9 组勾股数 (3，4，5)，(7，24，25)，(8，15，17)，(9，40，41)，(12，35，37)，(14，48，50)，(16，30，34)，(20，21，29)，(27，36，45) 中出现的 27 个数互不相同. 故对 S 的任一个 42 元子集 M，不在 M 中的 8 个数至多属于其中的 8 组，从而至少有 1 组勾股数全在 M 中. 故所求的最小正整数 $n=42$.

10. 记 $U=\{1, 2, \cdots, p\}$，$V=\{p+1, p+2, \cdots, 2p\}$，$W=\{1, 2, \cdots, 2p\}$，除去 U 和 V 而外，W 的所有其他的 p 元子集 E 都使得 $E\cap U\neq\varnothing$，$E\cap V\neq\varnothing$. 若 W 的两个这样的 p 元子集 S 和 T 同时满足：$S\cap V=T\cap V$；只要编号适当，$S\cap U$ 的元素 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 和 $T\cap U$ 的元素 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 对适当的 $k\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$ 满足同余式组 $s_i-t_i\equiv k\pmod p$，$i=1, 2, \cdots, m$. 就约定将这两个子集 S 和 T 归入同一类.

对于同一类中的不同子集 S 和 T，显然有 $k\neq 0$，因而 $\sum\limits_{i=1}^{p}s_i-\sum\limits_{i=1}^{p}t_i\equiv mk\not\equiv 0\pmod p$. 对于同一类中的不同子集，它们各自元素的和模 p 的余数不相同. 因而每一类恰含 p 个子集，其中仅一个适合题目的条件(ii).

综上所述，在 $W=\{1, 2, \cdots, 2p\}$ 的 C_{2p}^{p} 个 p 元子集当中，除去 U 和 V 这两个特定子集外，每 p 个子集分成一类，每类恰有一个子集满足题目的条件(ii). 据此很容易算出，$W=\{1, 2, \cdots, 2p\}$ 的适合条件(i) 和(ii) 的子集的总数为 $\dfrac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2$.

11. 构造如右表格：如果 $i\in A_j$，那么在 A_j 所在行、i 所在列处的方格中标上 1，其余的方格中标上 0. 考虑表格中的列构成的序列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$. 我们证明：S 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 具有题中性质的充要条件是：$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 两两不同. 若 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 两两不同，则对任意 $a, b\in S$，$a\neq b$，有 $P_a\neq P_b$. 于是在某一行(设为第 j 行)上，第 a 列与第 b 列的方格中一个为 1，而另一个为 0. 这表明 $A_j\cap\{a, b\}$ 为单元集，故 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 具有题中性质. 由于对任意 $a, b\in S$，$a\neq b$，存

	1	2	3	$\cdots$	n
A_1					
A_2					
A_3					
$\vdots$					
A_k					
	P_1	P_2	P_3	$\cdots$	P_n

在 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，使 $A_j\cap\{a,b\}$ 为单元素集，故 P_a 与 P_b 在第 j 行处的两个方格中的数一个为 1，而另一个为 0，故 $P_a\neq P_b$. 所以，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 两两不同.

由于由 0、1 构成的 k 元序列有且仅有 2^k 个两两不同，从而由抽屉原则及前面所证明的结论知 $2^k\geqslant n$. 所以，所求的最小正整数 k 为不小于 $\log_2 n$ 的最小正整数.

12. 设有 a、$b\in S$ 满足 $(a+b)\mid ab$. 记 $c=(a,b)$，于是 $a=ca_1$，$b=cb_1$，其中 a_1、$b_1\in\mathbf{N}^*$ 且有 $(a_1,b_1)=1$，$a_1\neq b_1$，不妨设 $a_1>b_1$. 由于 $a+b=c(a_1+b_1)$，$ab=c^2a_1b_1$，因此 $(a_1+b_1)\mid ca_1b_1$. 又由于 $(a_1+b_1,a_1)=1$，$(a_1+b_1,b_1)=1$，因此 $(a_1+b_1)\mid c$. 而 $a+b\leqslant 99$，即 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$，所以 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$. 由此可知，$S$ 中满足 $(a+b)\mid ab$ 的不同数对 (a,b) 共有 23 对：$a_1+b_1=3$ 时，有 $(6,3)$，$(12,6)$，$(18,9)$，$(24,12)$，$(30,15)$，$(36,18)$，$(42,21)$，$(48,24)$；$a_1+b_1=4$ 时，有 $(12,4)$，$(24,8)$，$(36,12)$，$(48,16)$；$a_1+b_1=5$ 时，有 $(20,5)$，$(40,10)$，$(15,10)$，$(30,20)$，$(45,30)$；$a_1+b_1=6$ 时，有 $(30,6)$；$a_1+b_1=7$ 时，有 $(42,7)$，$(35,14)$，$(28,21)$；$a_1+b_1=8$ 时，有 $(40,24)$；$a_1+b_1=9$ 时，有 $(45,36)$.

令 $M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$. 则上述 23 个数对中的每一个数对都至少包含 M 中的 1 个元素. 令 $T=S-M$. 则 T 中任何两数都不能成为满足要求的数对 (a,b). 因为 $|T|=38$，所以所求最小自然数 $K\geqslant 39$.

另一方面，下列 12 个满足题中要求的数对互不相交：$(6,3)$，$(12,4)$，$(20,5)$，$(42,7)$，$(24,8)$，$(18,9)$，$(40,10)$，$(35,14)$，$(30,15)$，$(48,16)$，$(28,21)$，$(45,36)$. 对于 S 中任一 39 元子集 R，它只比 S 少 11 个元素，而这 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 个，因此，必有 12 对中的 1 对属于 R. 故所求的最小自然数 $K=39$.

13. 用 k_n 表示所求的数. 设从集合 Z 中取出 k_n 个 3 元子集，其中任意两个都恰好有一个公共元，分三种可能情况：

(1) 集合 Z 中的每个元素都至多出现在两个 3 元子集中. 设 $\{a,b,c\}$ 是其中一个 3 元子集，则其他任何一个 3 元子集都与 $\{a,b,c\}$ 相交，而且所有其他子集中至多有一个含元素 a，至多有一个含元素 b，至多有一个含元素 c. 因此，子集最多有 $1+3\times1=4$ 个，即 $k_n\leqslant 4$.

(2) 集合 Z 中有一个元素出现在三个 3 元子集中，但集合 Z 的每一个元素至多出现在三个 3 元子集中，则设 $\{a,b,c\}$ 是其中一个 3 元子集，于是其他任意一个子集都与它相交，而且所有其他子集中至多有两个集合包含元素 a，

至多有两个集合包含元素 b，至多有两个集合包含元素 c. 因此，所有子集至多有 $1+3\times2=7$ 个，即 $k_n\leqslant7$.

(3) 集合 Z 中含有元素 a，它至少属于 4 个 3 元子集，则这 4 子集也应包含元素 a. 否则，这样的子集与 4 个 3 元子集中每一个恰有一个公共元素，所以它至少含有 4 个元素. 于是在此情形下，有 $1+2k_n\leqslant n$，即 $k_n\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

当 $n=1, 2, 3, 4, 5$ 时，显然有 $k_1=k_2=0$，$k_3=k_4=1$，$k_5=2$. 当 $n=6$ 时，集合 Z 的每个元素至多属于 2 个 3 元子集，否则 3 元子集的并将含有 7 个元素，因此情形(1)成立，即 $k_6\leqslant4$. 另一方面，设 $Z=\{a, b, c, d, e, f\}$，则 3 元子集取为 $\{a, b, c\}$，$\{c, d, e\}$，$\{e, f, a\}$，$\{b, d, f\}$. 于是 $k_6=4$.

设 $a\in\{7, 8, 9, \cdots, 16\}$，则当出现情形(3)时，3 元子集的个数至多为 $\left[\frac{16-1}{2}\right]=7$，当出现情形(1)、(2)时，3 元子集的个数也至多为 7. 另一方面，如果集合 Z 的元素中的 7 个为 a, b, c, d, e, f, g，则有 7 个 3 元子集：$\{a, b, c\}$，$\{c, d, e\}$，$\{e, f, a\}$，$\{b, d, f\}$，$\{a, g, d\}$，$\{b, g, e\}$，$\{c, g, f\}$. 于是 $n=7, 8, 9, \cdots, 16$ 时，$k_n=7$.

最后，当 $n\geqslant17$ 时，则不论哪种情形总有 $k_n\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$. 而且如下选取 3 元子集时达到上界：集合 Z 中取一个元素为所有 3 元子集的公共元，并将所有其他元素配成对(当 n 为偶数时需去掉一个)，且与公共元素一起组成 3 元子集，故当 $n\geqslant17$ 时，$k_n=\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

14. 若有 $a\in S$ 且至多属于 6 个子集 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_6}$，则每个 A_{i_j} 中除 a 之外还有 6 个元素，共可组成含 a 的三元组的个数为 $C_6^2=15$. 于是，6 个子集共可组成不同的含 a 的三元组的个数至多为 90 个. 另一方面，S 中所有不同的含 a 三元组的个数为 $C_{14}^2=7\times13=91>90$，无法使(iii) 成立. 所以，为使条件(i)－(iii) 成立，S 中的每个数都至少属于 7 个子集. 这样一来，必有 $n\geqslant15$.

用字典排列法可以写出满足题中要求的 15 个 7 元子集：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$\{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\}$，$\{1, 2, 3, 12, 13, 14, 15\}$，$\{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$，$\{1, 4, 5, 10, 11, 14, 15\}$，$\{1, 6, 7, 8, 9, 14, 15\}$，$\{1, 6, 7, 10, 11, 12, 13\}$，$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$，$\{2, 4, 6, 9, 11, 13, 15\}$，$\{2, 5, 7, 8, 10, 13, 15\}$，$\{2, 5, 7, 9, 11, 12, 14\}$，$\{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15\}$，$\{3, 4, 7, 9, 10, 13, 14\}$，$\{3, 5, 6, 8, 11, 13, 14\}$，$\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$.

15. 首先，$1\notin S$. 其次，若 $a\in\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 且 $a\in S$，则以下 45 对数对中，每对的两个数不能同时属于 S：$(1, a)$，$(2, 2a)$，$\cdots$，$(a-1, (a-1)a)$，

$(a+1,(a+1)a)$，$(a+2,(a+2)a)$，…，$(2a-1,(2a-1)a)$，… $(44a+1,(44a+1)a)$，$(44a+2,(44a+2)a)$，…，$(45a-1,(45a-1)a)$. 由于$(45a-1)a\leqslant(45\times6-1)\times6<2002$，所以以上 90 个小于 2002 的数中至少有一半不属于 S. 从而 $|S|\leqslant2002-45=1957$.

再次，若 $2,3,4,5,6\notin S$，考虑以下 38 个数对：$(7,7^2)$，$(8,8^2)$，…，(k,k^2)，…，$(44,44^2)$，若有某一对中的两个数 k_0，$k_0^2\in S$，则令 $a=b=k_0$，有 $a,b,ab\in S$，与题设矛盾！因此这里至少有 38 个数不属于 S，再减去 $1,2,\cdots,6$，有 $|S|\leqslant2002-38-6=1958$. 又 $S=\{45,46,47,\cdots,2002\}$满足要求. 对任意 $a,b\in S$，$ab\geqslant45^2=2025>2002$，即 $ab\notin S$，此时$|S|=1958$.

16. 设 $n(A)$ 为属于 A 的偶数的个数.

情形 0：$n(A)=0$. 只须确定 A 中的奇数. 有 2^6 个好子集.

情形 1：$n(A)=1$. 对偶数的选取有 5 种可能性. 有 5×2^4 个好集合 A.

情形 2：$n(A)=2$.（Ⅰ）在好子集中的偶数是相邻的. 有 4×2^3 个好子集.（Ⅱ）A 中的两个偶数不相邻. 有 6×2^2 个好子集. 共有 56 个好子集.

情形 3：$n(A)=3$.（Ⅰ）A 中的偶数是相邻的. 有 3×2^2 个好子集.（Ⅱ）A 中的任意两个偶数都不相邻. $A=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11\}$是惟一的选择.（Ⅲ）$A$ 的 3 个偶数中恰好两个是相邻的. 有 $6\times2=12$ 个好子集. 共有 25 个好子集.

情形 4：$n(A)=4$.（Ⅰ）$2\notin A$ 或 $10\notin A$. 有 4 个好子集.（Ⅱ）$2\in A$ 且 $10\in A$. 有 3 个好子集. 共有 7 个好子集.

情形 5：$n(A)=5$，则 $A=M$，1 种可能性.

最后，好子集的总数是 $2^6+5\times2^4+56+25+7+1=233$.

17. 显然 D_n 中的每一个数都有形式 $2^\alpha3^\beta5^\gamma$，其中 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant n$，下面用数组$(\alpha,\beta,\gamma)$表示数 $2^\alpha3^\beta5^\gamma$. 考察如下集合：$A_{i,j}=\{(i,j,\alpha),0\leqslant\alpha\leqslant n-j\}\cup\{(i,\beta,n-j),j\leqslant\beta\leqslant n\}$，$i=0,1,2,\cdots,n$，$j=0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{n}{2}\right]$；

$B_{i,j}=\{(k,i,j),k=0,1,2,\cdots,n\}$，$i=\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,\cdots,n$，$j=0,1,2,\cdots,n-\left[\dfrac{n}{2}\right]-1$. 共有$\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\right)\cdot(n+1)+\left(n-\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)^2=\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}$（$n$ 为偶数），或 $\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\right)(n+1)+\left(n-\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)^2=\dfrac{3(n+1)^2}{4}$（$n$ 为奇数），即 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$个集合. 又因为每个集合中的数至多有一个属于 S，可得以上集合互不相交且包含所有的数，即 $\bigcup A_{i,j}\bigcup B_{i,j}=D_n$. 因而可得

$|S|\leqslant\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$.

另一方面，考察满足 $\alpha+\beta+\gamma=n+t\left(其中\ t=\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$ 的数组 (α,β,γ) 的个数. 由条件 $0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant n$，可得 $(n+t+1)+(n+t)+\cdots+1-3[t+(t-1)+\cdots+1]=\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$. $\left(其中\ t=\left[\dfrac{n}{2}\right]\right.$ 当 α,β,γ 中有一个大于 n 时，共有 $3(t+(t-1)+\cdots+1)$ 组解，故应除去）取 $S=\left\{2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\,\middle|\,\alpha+\beta+\gamma=n+\left[\dfrac{n}{2}\right],\ 0\leqslant\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqslant n\right\}$，可得 $|S|=\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$，且 S 中任意两数不具备倍数关系，否则，不妨设 $2^{\alpha_1}3^{\beta_1}5^{\gamma_1}\mid 2^{\alpha_2}3^{\beta_2}5^{\gamma_2}$，则 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，$\beta_1\leqslant\beta_2$，$\gamma_1\leqslant\gamma_2$，$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$，因此 $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$，$\gamma_1=\gamma_2$，产生矛盾！综上可知，$|S|_{\max}=\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$.

习　题　6

1. 显然 $2^n\mid(3n)!$. 而 $3^n\cdot n!=3\cdot6\cdot9\cdot\cdots\cdot3n$，所以 $(3^n\cdot n!)\mid(3n)!$.

2. a, b, c, $d\in M$，且两两不同. 由 $d^2+ab\in\mathbf{Q}$, $d^2+bc\in\mathbf{Q}$，得 $bc-ab\in\mathbf{Q}$. 故 $a^2+ab=a^2+bc+(ab-bc)\in\mathbf{Q}$，同理 $b^2+ab\in\mathbf{Q}$. 从而，对 M 中任何两个不同的数 a、b，都有 $q=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+ab}{b^2+ab}\in\mathbf{Q}$. 于是，$a=qb$，从而 $a^2+ab=b^2(q^2+q)=l\in\mathbf{Q}$, $b=\sqrt{\dfrac{l}{q^2+q}}=\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, m, $k\in\mathbf{N}$. 令 $n=mk$，得 $b\sqrt{n}=m\in\mathbf{Q}$. 故对任何 $c\in M$，有 $c\sqrt{n}=\dfrac{c}{b}\cdot b\sqrt{n}\in\mathbf{Q}$.

3. 将 2003 个正数按递增顺序排列，并记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2003}\}$. 因为 $(a_{2003}+a_i)\notin A$，所以 $(a_{2003}-a_i)\in A$，$i=1,2,\cdots,2002$. 即 $a_{2003}-a_{2002}<a_{2003}-a_{2001}<\cdots<a_{2003}-a_1<a_{2003}\in A$. 故 $a_{2003}-a_i=a_{2003-i}$，$i=1,2,\cdots,2002$. 同理 $a_{2002}-a_i=a_{2002-i}$，$i=1,2,\cdots,2001$. 所以，$a_{i+1}=a_{2003}-a_{2002-i}=a_i+a_{2003}-a_{2002}$. 从而，$a_{i+1}-a_i=a_{2003}-a_{2002}$，$i=1,2,\cdots,2002$.

4. 设 x, $y\in S$, $x=\dfrac{mn}{m^2+n^2}$, $y=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$, $x<y$. 不妨设 $m\leqslant n$, $a\leqslant b$. 考虑函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，易证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增. 所以对所有 c, $d\in[0,1]$，有 $f(c)<f(d)\Leftrightarrow c<d$. 因为 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{mn}{m^2+n^2}<\dfrac{ab}{a^2+b^2}=f\left(\dfrac{a}{b}\right)$，所以 $\dfrac{m}{n}<\dfrac{a}{b}$. 因此，可选择有理数 $\dfrac{p}{q}$（其中 p, $q\in\mathbf{N}^*$），使得 $\dfrac{m}{n}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$

$\left(\text{例如取}\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{a}{b}\right)\right)$，那么，就有 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)<f\left(\dfrac{p}{q}\right)<f\left(\dfrac{a}{b}\right)$. 令 $z=f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{pq}{p^2+q^2}$即可.

5. 显然，1 在集合中起着保持积不动而增大和的作用，而且它是具有这种性质的惟一正整数. 先设集合中的 n 个数中不含 1 且 $1<a_1<a_2<\cdots<a_n$，于是 $a_j>j$，$j=1, 2, \cdots, n$. 因 $n\geqslant 2$，故有 $a_na_{n-1}-a_n-a_{n-1}=(a_n-1)(a_{n-1}-1)-1\geqslant 1$，$a_na_{n-1}\geqslant a_n+a_{n-1}+1$. 其中等号成立当且仅当 $a_n=3$，$a_{n-1}=2$. 从而当 $n\geqslant 3$ 时，$a_na_{n-1}a_{n-2}\geqslant 2a_na_{n-1}>a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+1$. 依此类推，便得 $a_na_{n-1}\cdots a_1>a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+1$. 这表明，凡不含 1 的集合都不满足要求，而且当 $n\geqslant 3$ 时，即使将 1 添入集合中也不能满足要求.

当 $n=2$ 时，只有 $a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=3$ 才满足题中要求. 又当 $n=1$ 时，$a_1\cdot 1<a_1+1$，所以任何 $\{1, a_1\}$ 都不满足题中要求. 总结起来，满足题中要求的集合只有一个，即为 $\{1, 2, 3\}$.

6. 只需证明：如果 $A_1\leqslant 1$，那么对一切 $1\leqslant n\leqslant 29$，都有 $A_{n+1}<A_n$. 由于 $A_1\leqslant 1$，所以，$A_n\geqslant A_1A_n$. 将 A_1 与 A_n 乘开，并且整理以后，可知 $A_1A_n=A_{n+1}+S_n$，易证 $S_n>0$，由此即得所证.

7. 考虑 n 个点 $1, 2, \cdots, n$. 如果 $(i, j)\in S$，则在 i 与 j 之间连一条线. 我们来求这个图中的三角形的个数. 设 $(i, j)\in S$，并且自 i 引出的线有 d_i 条，则以 (i, j) 为边的三角形至少有 d_i+d_j-n 个. 由于每个三角形有三条边，所以 S 中至少有 $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{(i, j)\in S}(d_i+d_j-n)$ ①个三角形. $\sum\limits_{(i, j)\in S}1=m$，　$\sum\limits_{(i, j)\in S}n=nm$. ②

对于每个固定的 i，恰有 d_i 个 j 使 $(i, j)\in S$，所以在①中的 d_i 出现了 d_i 次. 注意 (i, j) 既可作为自 i 引出的边，又可作为自 j 引出的边，被计算了 2 次. 因此 $\sum\limits_{(i, j)\in S}(d_i+d_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^2$. 由柯西不等式，$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^2\geqslant\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\right)^2=\dfrac{1}{n}(2m)^2=\dfrac{4m^2}{n}$. 由①、②及上式得 $T\geqslant\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4m^2}{n}-nm\right)=4m\cdot\dfrac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}$.

8. 设 F 是以 $(0, 0)$，$(41, 59)$，$(43, 74)$，$(2, 15)$ 为顶点的平行四边形，它的 4 个顶点都属于 L，且 F 中其他点都不属于 L. 将 F 在坐标平面上向各方向平移，便形成以 F 为基本区域的网络，网络的结点都是 L 中的点. F 的面积

$$S_F=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 41 & 59 & 1\\ 2 & 15 & 1\end{vmatrix}=497.$$

设 P 是以原点为中心，面积等于 1990 的平行四边形. 作以原点为中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似变换. 记平行四边形 P 的位似象为 P'，则 P' 的面积为 $1990\times\frac{1}{4}=497\frac{1}{2}>497$. 这样一来，当将平行四边形 P' 被网络所分成的诸块都平移到基本区域 F 中时，必有两点重叠. 设这两点是 $D_1'(x_1, y_1)$ 和 $D_2'(x_2, y_2)$. 由于平移是沿网格线移动的，所以点 $M(x_1-x_2, y_1-y_2)\in L$.

另一方面，因为 $D_1', D_2'\in P'$，所以 $D_1(2x_1, 2y_1)$，$D_2(2x_2, 2y_2)\in P$. 又因 P 是以原点为中心的平行四边形，所以 $D_3(-2x_2, -2y_2)\in P$. 从而线段 D_1D_3 的中点 $M\in P$，且 $M\neq(0, 0)$. 这就证明了平行四边形 P 中至少含有 L 中的两个点.

9. 用数学归纳法. 当 $n=k+1$ 时，可分别从 $A_1=\left\{1, 2, \cdots, \frac{3^k+1}{2}\right\}$ 及 $A_2=\left\{3^k+1, 3^k+2, \cdots, 3^k+\frac{3^k+1}{2}\right\}$ 中各取 2^k 个数满足条件.

10. 考虑不全为零的 7 个数组 (x, y, z)，其中 $x, y, z\in\{0, 1\}$. 容易证明：若 a_j、b_j、c_j 不全为偶数，则集合 $A_j=\{xa_j+yb_j+zc_j \mid x, y, z\in\{0, 1\}\}$ 中恰有 4 个为偶数，也恰有 4 个为奇数，这里 $1\leqslant j\leqslant N$. 当然，在 $x=y=z=0$ 时，$xa_j+yb_j+zc_j$ 为偶数. 由此可知 $\{xa_j+yb_j+zc_j \mid x, y, z\in\{0, 1\}, x、y、z$ 不全为零，$1\leqslant j\leqslant N\}$ 中，恰有 $4N$ 个数为奇数. 于是，由抽屉原则，可知存在一组数 (x, y, z)，$x, y, z\in\{0, 1\}$，x、y、z 不全为零，使得 $\{xa_j+yb_j+zc_j \mid 1\leqslant j\leqslant N\}$ 中至少有 $\frac{4N}{7}$ 个数为奇数.

11. (1) 对 $n(n\geqslant 6)$ 进行归纳. 当 $n=6$ 时，考虑 $\triangle ABC$ 及 AB、BC、CA、BA、CB、AC. 对于具有性质 S 的 n 元集合 A，设其非零向量为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$. 设 $\boldsymbol{v}_i$、$\boldsymbol{v}_j$ 是 A 的两个不同向量，$\boldsymbol{v}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_j$ 的夹角是 A 中各向量之间的最小角. 则 $(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_j)\notin A$，否则与最小性矛盾. 因此，$A\cup\{\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_j\}$ 有 $(n+1)$ 个元素，且满足性质 S.

(2) 考虑一个均由 O 为始点的具有性质 S 的向量集合 $A=\{\boldsymbol{OX}_1, \boldsymbol{OX}_2, \cdots, \boldsymbol{OX}_n\}$，若 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 不平行，且使得 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 平行于 A 中的一个向量或 $\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j$ $(i\neq j)$ 中的一个向量. 记 $\boldsymbol{OX}_i=a_i\boldsymbol{u}+b_i\boldsymbol{v}$，对向量 $\boldsymbol{OX}_i$ 分解，$i=1, 2, \cdots, n$. 实数集合 $M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 具有类似于 S 的性质. 设 M 中的最大数为 a. 显然，$a>0$，存在 b、$c>0$，使得 $a=b+c$，$b\neq c$. 否则，a 不是 M 中的最大元素. 同理，对于 M 中的最小元素 a'，存在 b'，$c'\in M$，且 b'、$c'<0$，$b'\neq c'$，使得 $a'=b'+c'$. 由此得出 M 中的 6 个不同元素.

12. (1) 如图 1，$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle BCD$ 均为等腰三角形，A、B、D 也

共线. 所以，任意三个点皆有一条对称轴. 故它是一个好的集合. 但是 A、B、C、D 不是轴对称的.

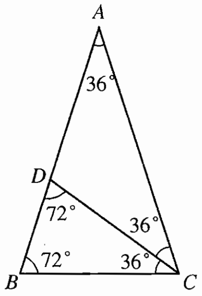


图 1

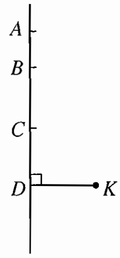


图 2

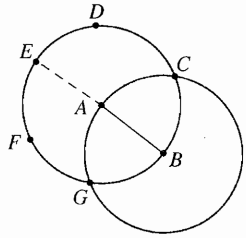


图 3

(2) 反证法. 假设结论不成立. 于是，不可能有集合中的 6 个点共线. 否则，在这条直线外必有 1 个属于集合的点 K，过点 K 作此直线的垂线，则此直线上必有至少 3 个点在这条垂线的同侧，记为 A、B、C（如图 2）. 因为 $\angle KCB > \frac{\pi}{2}$，所以，$BK > BC$. 由于 K、C、B 有对称轴，则 $BC = CK$. 同理，$AC = CK$，矛盾. 故不可能有集合中的 6 个点共线.

不妨设 A、B 为这个集合中距离最短的两个点（如图 3）. 则其余 2001 个点有以下 4 种情况：(i) 在线段 AB 中垂线上；(ii) 在 AB 所在直线上；(iii) 在以 A 为圆心、AB 长为半径的圆上；(iv) 在以 B 为圆心、AB 长为半径的圆上. 由前面的证明可知，(i)、(ii)两种情况点的总数不超过 10 个. 又因为 AB 的距离最小，所以(iii)、(iv)两种情况点的总数不超过 10 个. 故 $10+10+2<2003$. 矛盾.

13. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 C 中两个数的差的所有可能的质因子. 假定对每个 p_i，都存在一个剩余 α_i，使得 C 中至多有一个数关于模 p_i 与 α_i 同余. 利用中国剩余定理（即孙子定理）可得，存在一个整数 k，满足 $k \equiv p_i - \alpha_i \pmod{p_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 利用题中的条件可得，存在某个 j 和某个 $a, b \in C$，使得 p_j 整除 $a+k$ 与 $b+k$. 于是，a 和 b 关于模 p_j 与 α_j 同余. 这与 α_j 的假定矛盾.

由此可以断定关于模 p 的每个剩余，在 C 的数的剩余中至少出现两次. 假定每个剩余都恰好出现两次，则 C 中元素的和等于 $pr + 2(0+1+\cdots+p-1) = p(r+p-1)$，$r \geq 1$，这与 2003 是质数矛盾. 因此，一定存在某个剩余，它至少出现三次. 将具有这种性质的 C 中的元素删除一个，就得到了一个新的“好集”.

14. 设 $q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots$是全体素数从小到大排成的数列，即有 $q_1=2$，$q_2=3, q_3=5, q_4=7, q_5=11, q_6=13, \cdots$. 令 $A_1=\{2q_i \mid i=2, 3, \cdots\}$，$A_2=\{3q_iq_j \mid i<j, i=3, 4, \cdots, j=4, 5, \cdots\}$. 一般地，对正整数 h，令 $A_h=\{q_hq_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_h} \mid h<i_1<i_2<\cdots<i_h\}$. 最后再令 $A=\bigcup\limits_{h=1}^{\infty}A_h$.

设 S 是由无限多个素数组成的集合 $S=\{p_1, p_2, \cdots, p_t, \cdots\}$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_t<\cdots$. 于是有 $p_1\geqslant 2, p_2\geqslant 3, p_3\geqslant 5, \cdots$. 设 $p_i=q_{j_i}$，$i=1, 2, \cdots$. 于是 $m=p_1p_2\cdots p_{j_1+1}=q_{j_1}q_{j_2}\cdots q_{j_{j_1+1}}\in A$，$n=p_2p_3\cdots p_{j_1+2}=q_{j_2}q_{j_3}\cdots q_{j_{j_2+2}}\notin A$. 可见，只要取 $k=j_1+1$ 就可以了.

15. 考虑 S 中 2 或 3 或 5 的倍数的个数，有 $\left[\frac{150}{2}\right]+\left[\frac{150}{3}\right]+\left[\frac{150}{5}\right]-\left[\frac{150}{2\times 3}\right]-\left[\frac{150}{2\times 5}\right]-\left[\frac{150}{3\times 5}\right]+\left[\frac{150}{2\times 3\times 5}\right]=110$. 当 $n=110$ 时，可以全取 2 或 3 或 5 的倍数，所以在这个子集里无论如何也找不到 4 个两两互素的数. 因此，$n\geqslant 111$.

$n=111$ 合乎要求. 为此构造如下 6 个数组：$A_1=\{1\}\cup\{S$ 中 35 个素数$\}$，$A_2=\{2\times 67, 3\times 43, 5\times 17, 7\times 19, 11\times 13\}$，$A_3=\{2\times 53, 3\times 47, 5\times 23, 7\times 17\}$，$A_4=\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2\}$，$A_5=\{2\times 19, 3^3, 5\times 13, 7\times 11\}$，$A_6=\{2^3, 3\times 23, 5\times 11, 7\times 13\}$. 令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_6$. 上述每一个 $A_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 中至少有 4 个元素并且两两互素，且 $A_i\cap A_j=\varnothing\ (1\leqslant i<j\leqslant 6)$，$|A|=58$. 这样，若从 S 中取出 111 个数，则 A 中至少被取出 19 个数，由抽屉原则必有某 $A_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 被选出 4 个，而这四个数是两两互素的.

16. 考虑如下四种情况：

(1) n 能被 5 整除，设 $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 为 S_n 中所有个位数为 3 的元素，则 S_n 中还包括 $5d_1, 5d_2, \cdots, 5d_m$ 这 m 个个位数为 5 的元素，所以 S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

(2) n 不能被 5 整除，但 $2|n$. 仿(1)可证.

(3) n 不能被 5 整除，且 n 的质因子的个位数均为 1 或 9，则 S_n 中所有的元素的个位数均为 1 或 9. 结论成立.

(4) n 不能被 5 整除，且 $2\nmid n$，但 n 有个位数为 3 或 7 的质因子 p，令 $n=p^rq$，其中 q 和 r 都是正整数，p 和 q 互质. 设 $S_q=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 为 q 的所有正约数组成的集合，将 S_n 中的元素写成如下方阵：

$$a_1,\ a_1p,\ a_1p^2,\ \cdots,\ a_1p^r,$$
$$a_2,\ a_2p,\ a_2p^2,\ \cdots,\ a_2p^r,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_k,\ a_kp,\ a_kp^2,\ \cdots,\ a_kp^r.$$

对于 $d_i=a_rp^l$，选择 a_rp^{l-1} 或 a_rp^{l+1} 之一与之配对(所选之数必须在 S_n 中). 设 e_i 为所选之数，我们称$(d_i,\ e_i)$为一对朋友. 如果 d_i 的个位数为 3，则由 p 的个位数是 3 或 7，知 e_i 的个位数不是 3. 假设 d_i 和 d_j 的个位数都是 3，且有相同的朋友 $e=a_sp^t$，则$\{d_i,\ d_j\}=\{a_sp^{t-1},\ a_sp^{t+1}\}$，因为 p 的个位数为 3 或 7，所以 p^2 的个位数是 9，而 n 不能被 5 整除，故 a_s 的个位数不为 0，所以 a_sp^{t-1}，$a_sp^{t-1}\cdot p^2=a_sp^{t+1}$ 的个位数不同，这与 d_i 和 d_j 的个位数都是 3 矛盾，所以每个个位数为 3 的 d_i 均有不同的朋友.

综上所述，S_n 中每个个位数为 3 的元素，均与一个 S_n 中个位数不为 3 的元素为朋友，而且两个个位数为 3 的不同元素的朋友也是不同的，所以 S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

17. 构造一个使题中要求不被满足且又含元素最多的例子，这个子集不能含 2 的任一方幂且每对数 $\{2^r+a,\ 2^r-a\}$ 中只能有 1 个含在集中. 令 $Y=\{2001,\ 2000,\ \cdots,\ 1025\}\cup\{46,\ 45,\ \cdots,\ 33\}\cup\{17\}\cup\{14,\ 13,\ \cdots,\ 9\}\cup\{1\}$，则有 $|Y|=998$. 对任何 u、$v\in Y$，不妨设 $u\geqslant v$ 且有 $2^r<u\leqslant 2^r+a<2^{r+1}$，其中当 r 分别取值 10、5、4、3 时，相应的 a 值依次为 977、14、1、6. 对(1) 若 $2^r<v\leqslant u$，(2) 若 $1\leqslant v<2^r$，可证明 $u+v$ 不能是 2 的方幂. 故知所求的最小正整数 $m\geqslant 999$.

将 X 划分成下列 999 个互不相交的子集：$A_i=\{1024-i,\ 1024+i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 977$，$B_j=\{32-j,\ 32+j\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ 14$，$C=\{15,\ 17\}$，$D_k=\{8-k,\ 8+k\}$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$，$E=\{1,\ 8,\ 16,\ 32,\ 1024\}$. 对于 S 的任何一个 999 元子集 W，若 $W\cap E\neq\varnothing$，则从其中任取一个元素的 2 倍都是 2 的方幂；若 $W\cap E=\varnothing$，则 W 中的 999 个元素分属于前面的 998 个 2 元子集. 由抽屉原理知 W 中必有不同的 u 和 v，属于其中同一子集. 显然，$u+v$ 为 2 的方幂. 故所求的最小正整数 $m=999$.

18. 先证明结论：一个双邻集 S 恰包含 n 个整点，则 n 必为偶数.

用线段连结 S 中的相邻整点. 因为 S 中每一整点恰连出两条线段，因此，双邻集 S 内全部整点可用连结相邻整点的线段组成有限个不自交的闭折线图形. 在每一闭折线图形中，每两个相邻整点的横纵坐标之和只相差 1，横纵坐标之和依次为偶数、奇数、偶数、奇数……交替出现. 由于是闭折线，则任一个闭折线图形整点个数必为偶数个.

再证：$n=4$ 和 n(偶数) $\geqslant 8$.

当 $n=2$ 时，2 个整点显然无法构成一个双邻集. 当 $n=6$ 时，由于 3 个及 3 个以下的整点无法组成闭折线图形，则 6 个整点要成为一个双邻集，6 个点组成的闭折线图形只能是图 4 所示的两图形之一. 图 4 中两图形显然都不是双邻集.

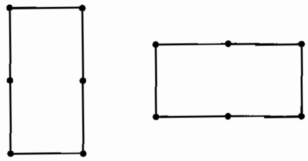


图 4

4 个整点 (p, q)、$(p+1, q)$、$(p+1, q-1)$、$(p, q-1)$ 恰组成一个双邻集(边长为 1 的正方形)，则 $n=4$.

注意到 10 个整点 (p, q)、$(p+1, q)$、$(p+2, q)$、$(p+3, q)$、$(p, q-1)$、$(p+3, q-1)$、$(p, q-2)$、$(p+1, q-2)$、$(p+2, q-2)$、$(p+3, q-2)$ 也组成一个双邻集(长为 3 宽为 2 的矩形边上的 10 个整点).

因此，当 $n=4k$ $(k\in\mathbf{N})$ 时，取 k 个 4 整点组成的双邻集，每两个双邻集的距离(一个相邻集中任一点到另一双邻集中任一点距离的最小值)大于 1，将这 k 个 4 整点双邻集合并为一个集合，这个集合当然是恰含 $4k$ 个整点的双邻集. 当 $n=4k+2$ $(k\geqslant 2)$ 时，由于 $n=4(k-2)+10$，取 $k-2$ 个 4 整点组成的双邻集，取一个 10 整点组成的双邻集，每两个双邻集的距离大于 1. 将这 $k-2$ 个 4 整点双邻集与一个 10 整点双邻集合并为一个集合，这个集合当然是恰含 $4k+2$ $(k\geqslant 2)$ 个整点的双邻集.

习 题 7

1. 二、三.

2. 7. 将 1～99 这 99 个正整数分为 6 组，使得每组中任意两个数的比值在闭区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 中，且每组元素个数尽量地多. 分组如下：$A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{3, 4, 5, 6\}$，$A_3=\{7, 8, \cdots, 14\}$，$A_4=\{15, 16, \cdots, 30\}$，$A_5=\{31, 32, \cdots, 62\}$，$A_6=\{63, 64, \cdots, 99\}$. 当任取 6 个数时，比如在 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 中各取一个数时，如取 1，3，7，15，31，63，这 6 个数中任 2 个数的比值都不在闭区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 中，可见 $k>6$. 所以，$k\geqslant 7$.

当 $k=7$ 时，在 99 个数中任取 7 个数，由抽屉原理知，必有 2 个数属于同一个 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，这 2 个数的比值在闭区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 中.

3. $b=-\frac{3}{2}$.

4. $k \geqslant \frac{1+\sqrt{7}}{6}$. 对 $x \in \mathbf{R}$,恒有 $k \geqslant f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2+6}$. 所以,$k \geqslant \max f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. 当 $x \geqslant 1$ 时,令 $t = x-1$, $t \geqslant 0$,则 $f(x) = \frac{2t}{(t^2+7)+2t} \leqslant \frac{2t}{2\sqrt{7}t+2t} = \frac{\sqrt{7}-1}{6}$. 当 $x < 1$ 时,令 $t = 1-x$, $t > 0$,则 $f(x) = \frac{2t}{(t^2+7)-2t} \leqslant \frac{2t}{2\sqrt{7}t-2t} = \frac{\sqrt{7}+1}{6}$,当 $t = \sqrt{7}$ 时,等号成立.

5. 在$\triangle ABC$中,三条高线的中点 A'、B'、C'分别在中位线$\triangle MNP$三边所在直线上.若$\triangle ABC$是锐角三角形,则点 A'、B'、C'在$\triangle MNP$的三边上,故此三点不共线;若$\triangle ABC$是钝角三角形,则点 A'、B'、C'中有两点在$\triangle MNP$的两条边的延长线上,另一点在第三条边上,故此三点不共线;若$\triangle ABC$是直角三角形,则点 A'、B'、C'在直角所对的中位线上.

6. 易验证 $y = 8$, $x = 2$ 时,$P = 0$. $P = 1$ 时,$x^3 - y = 1 + xy \Rightarrow (x+1)y = x^3 - 1 = (x+1)(x^2-x+1) - 2$. 所以$(x+1) \mid 2$, $x = 1$,从而 $y = 0 < x \Rightarrow$ 矛盾. 因此 $P \neq 1$. 当 $P \geqslant 2$ 时,由 $P = \frac{x^3-y}{1+xy}$ 可得 $y = \frac{x^3-P}{xP+1}$. 由此知当 $x = P^3$ 时,$y = P(P^4-1) > P^3$ 成立,这说明 P 可取$\geqslant 2$的任意整数. 当 $P < 0$ 时,由 $|x^3-y| = y - x^3 < xy + 1 \Rightarrow$ 与 P 为整数矛盾. 所以 P 可取的值为$\{k \mid k \in \mathbf{N}, k = 0 \text{ 或 } k \geqslant 2\}$.

7. 设 n 为奇数,记 $n = 2m+1$. 考虑第 $m+1$ 个方格,将其中钱币向左运动一次,于是第 m 个方格中有两个钱币,而第 $m+1$ 个方格中无钱币. 将第 m 个方格中的钱币搬到第 $m+2$ 个方格中,这样依次从左到右,再从右到左,经过 $n-1$ 次运动,便将钱币都放在最右边那个方格中,而其余方格中无钱币.

设 n 为偶数,记 $n = 2m$. 考虑第 m 个方格,将其中钱币向右运动一次,于是第 $m+1$ 个方格中有两个钱币,而第 m 个方格中无钱币. 将第 $m+1$ 个方格中的钱币搬到第 $m-1$ 个方格中,这样依次从右到左,再从左到右,经过 $n-1$ 次运动,便将钱币都放在最右边那个方格中,而其余方格中无钱币.

8. 不妨设 $w > x \geqslant y \geqslant z$. 若 $y > z$,则以 $z!$除等式两边得 $w(w-1)\cdots(z+1) = x\cdots(z+1) + y\cdots(z+1) + 1$,其中 $z+1 > 1$ 能整除上式左边,而不能整除其右边,矛盾. 若 $x > y = z$,则可得 $w(w-1)\cdots(z+1) = x\cdots(z+1) + 2$,应有$(z+1) \mid 2$,从而 $z+1 = 2$,上式又可约简为 $w(w-1)\cdots 3 = x\cdots 3 + 1$,显然也不成立. 于是,必有 $x = y = z$,此时原式为 $w! = 3 \cdot x!$. 所以 $x = y = z = 2$, $w = 3$.

9. 因为 n 是合数,故设 $n = ab$ $(2 \leqslant a \leqslant b)$.

若 $a\geqslant 3$，(i) $a\neq b$，则 $n>2p_k\geqslant\frac{3k}{2}$，$b\leqslant\frac{n}{3}$. 从而，$k<\frac{2n}{3}$. 故 $n-k>\frac{n}{3}\geqslant b>a$. 所以，$n\mid(n-k)!$. (ii) $a=b$，则 $n=a^2$，$n-k>\frac{n}{3}=\frac{a^2}{3}$. 因为 $k\geqslant 14$，则 $p_k\geqslant 13$，$n>26$，$a\geqslant 6$. 从而，$\frac{a^2}{3}\geqslant 2a$. 故 $n-k>2a$. 所以，$n\mid(n-k)!$. 若 $a=2$，因为 $n>26$，假设 b 不为质数，则 $b=b_1b_2(b_1\leqslant b_2)$. 因为 $b>13$，则 $b_2\geqslant 4$. 于是，$ab_1\geqslant 4$ 归入 $a\geqslant 3$ 的情况. 不妨设 b 为质数，则 $b=\frac{n}{2}>p_k$. 因为 p_k 是小于 k 的最大质数，则 $b>k$. 从而，$n-k=2b-k>b$. 所以，$n\mid(n-k)!$.

10. 不妨设 $x\geqslant\frac{1}{y}>0$，令 $x=\frac{1}{y}=y+\frac{1}{x}$，则 $x=\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以

① 若 $x\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\sqrt{2}$，则 $y+\frac{1}{x}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，所以 $\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}=y+\frac{1}{x}\leqslant\sqrt{2}$，从而当且仅当 $x=\frac{1}{y}=\sqrt{2}$ 时，$\max\left\{\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}\right\}=\max\left\{y+\frac{1}{x}\right\}=\sqrt{2}$；

② 若 $\sqrt{2}\geqslant x\geqslant\frac{1}{y}>0$，则 $y+\frac{1}{x}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. 所以 $\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{y}\leqslant\sqrt{2}$，从而当且仅当 $x=\frac{1}{y}=\sqrt{2}$ 时，$\max\left\{\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}\right\}=\max\left\{\frac{1}{y}\right\}=\sqrt{2}$；

③ 若 $x\geqslant\sqrt{2}\geqslant\frac{1}{y}>0$，则 $y+\frac{1}{x}\geqslant 2\cdot\frac{1}{x}\leqslant 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$y+\frac{1}{x}\leqslant 2\cdot y\geqslant 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，此时若 $\frac{1}{y}\geqslant y+\frac{1}{x}$，则 $\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}=y+\frac{1}{x}\leqslant\sqrt{2}$；若 $\frac{1}{y}\leqslant y+\frac{1}{x}$，则 $\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{y}\leqslant\sqrt{2}$，所以当且仅当 $x=\frac{1}{y}=\sqrt{2}$ 时，$\max\left\{\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}\right\}=\sqrt{2}$.

11. 首先从 $\{1,2,\cdots,1988\}$ 中删除 29 的所有倍数，共 68 个. 将余下的 1920 个数分成 69 个集合：$A_k=\{1+29k,2+29k,\cdots,28+29k\}$，$k=0,1,2,\cdots,67$，$A_{69}=\{1973,1974,\cdots,1988\}$. 由于 29 为素数，故当 $(d,29)=$

1 时，公差为 d 的等差数列 a，$a+d$，…，$a+28d$ 中的 29 个数模 29 互不同余，其中必有 29 的倍数. 由于这样的数已被删除，故在剩下的数中不存在与 29 互素的公差 d 的 29 项等差数列.

下面再考察以 29 的倍数即以 29 或 58 为公差的 29 项等差数列的情形. 删去集合 A_{28}、A_{57} 中的所有数，共删去 56 个数. 由于公差为 29 的等差数列的 29 项必分别属于 A_0，A_1，…，A_{68} 中相继的 29 个集合，公差为 58 的等差数列的 29 项则分别属于 A_0，A_1，…，A_{68} 中相间的 29 个集合，故两者均必有某项属于 A_{28} 或 A_{57}. 从而在删除 A_{28}、A_{57} 的所有数之后，即不存在任何 29 项的等差数列.

易见，两次共删除了 $68+2\times 28=124<200$，所以余下的数多于 1788. 这就证明了只有 $n>1788$，才可能具备题中所述的性质.

12. (1) 首先证明 2000 个人参加比赛是可以的，定义三元数组 (i, j, k) 表示答对第 i，j，k 题 $(1\leqslant i, j, k\leqslant 6)$. 考虑 10 个三元数组 (1, 2, 3)，(3, 5, 6)，(1, 2, 5)，(3, 4, 5)，(1, 3, 4)，(2, 4, 6)，(2, 3, 6)，(1, 4, 6)，(1, 5, 6)，(2, 4, 5) 满足：① 任两个数恰出现 5 次；② 每个数恰出现 5 次. 将每个三元数组对应于 200 个人的答题情况，则可知满足题目所有条件恰有 2000 人.

(2) 证明不能少于 2000 人. 设答对题最多的人为 A，设 A 答对 k 题. ① $k=6$，则 A 全部答对，与条件矛盾！② $k=5$，不妨设 A 答对 1，2，3，4，5，则由题知存在 B 答对第 6 题，则 A 与 B 答对所有题，矛盾！③ $k=4$，不妨设 A 答对 1，2，3，4，则不存在 B 既答对 5，又答对 6，又因为答对 5，6 的共2000 人，再加上 A，至少有 2001 人！④ $k=3$，则每人至多答对 3 题，而每题有 1000 人答对，所以至少有 $\dfrac{6\times 1000}{3}=2000$(人). 所以 2000 人为所求最小值.

13. 回答是可以做到的. 由 $n=6$，餐巾纸为正六边形，边按逆时针方向定向. 由于任两张餐巾纸可经过平移而重叠. 所以任两餐巾纸的六条边按相同定向互相平行. 因此可以在平面上作出大小和餐巾纸一样的正六边形网格，网格中每个正六边形和任一餐巾纸的六条边按相同定向互相平行. 所有餐巾纸的中心可构成两个集合，一个集合由这样的中心构成，这些中心都在网络线上，另一个集合由不在网格线上的中心构成. 前者记作 N，后者记作 M.

(i) 设 $N=\varnothing$，即所有餐巾纸的中心都不落在网格线上. 我们在网格的每个正六边形的中心上钉钉子. 这些钉子要么不钉在任一餐巾纸上，要么只钉上一次. 因为若有一张餐巾纸上被钉了两个钉子，那么餐巾纸的中心落在网格的两个不同的正六边形内，这是不可能的.

(ii) 设 $N\neq\varnothing$. 由于餐巾纸只有有限张，所以 M 为有限集. 因此记 $d>$

0，d 为 M 的中心和网格线的最近距离.我们将网格平移小于 d 的距离.于是，M 中的点仍不在网格线上.由于 N 也为有限集，所以我们可以选取这种平移的方向，使得 N 中的点也都不在新的网格线上.于是对新的网格线，化为情形(i).这证明了命题成立.

14. 设所作的正方形依次为 S_0，S_1，S_2，…，这些正方形的中心依次为 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，为确定起见，设最初 4 个正方形的中心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$(1, 2)$，$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. 于是 $\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=3$，$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=-\frac{1}{3}$. 正方形 S_0，S_1，S_2，…的边长正好是菲波那契数列 f_0，f_1，f_2，…. 注意到 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}=2f_{n-2}+f_{n-3}=3f_{n-3}+2f_{n-4}$. 以下将分情形利用正方形的边长计算 x_n-x_{n-4} 和 y_n-y_{n-4}，从而算出 $k_n=\frac{y_n-y_{n-4}}{x_n-x_{n-4}}$.

情形 1　$n\equiv 0 \pmod 4$. $x_n-x_{n-4}=-\frac{1}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$y_n-y_{n-1}=-\frac{3}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$k_n=3$.

情形 2　$n\equiv 1 \pmod 4$. $x_n-x_{n-4}=\frac{3}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$y_n-y_{n-4}=-\frac{1}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$k_n=-\frac{1}{3}$.

情形 3　$n\equiv 2 \pmod 4$. $x_n-x_{n-4}=\frac{1}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$y_n-y_{n-1}=\frac{3}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$k_n=3$.

情形 4　$n\equiv 3 \pmod 4$. $x_n-x_{n-4}=-\frac{3}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$y_n-y_{n-4}=\frac{1}{2}(f_{n-3}+f_{n-4})$，$k_n=-\frac{1}{3}$.

统观各种情形，可以判定：对于偶数 n 有 $k_n=3$，所有偶数编号正方形的中心全在过 (x_0, y_0) 点且斜率为 3 的直线上；对于奇数 n 有 $k_n=-\frac{1}{3}$，所有奇数编号正方形的中心全在过 (x_1, y_1) 点且斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的直线上.

15. 把第一堆 n 枚硬币的重量依次表示为 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，把第二堆 m 枚硬币的重量依次表示为 $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_m$. 又设 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_s\geqslant x\geqslant x_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant\cdots\geqslant y_t\geqslant x\geqslant y_{t+1}\geqslant\cdots\geqslant y_m$.（如果没有不轻于 x 的

硬币，则结论显然成立.）这样，要证明的是：$x_s+x_{s+1}+\cdots+x_n\geqslant x_t+y_{t+1}+\cdots+y_m$. 设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m=A$，即证 $x_s+[A-(x_1+\cdots+x_s)]\geqslant x_t+[A-(y_1+\cdots+y_t)]$，即证 $x_1+\cdots+x_s+x(t-s)\leqslant y_1+\cdots+y_t$. 下面分两种情况：

若 $t\geqslant s$，则 $x_1+\cdots+x_s+x(t-s)\leqslant(y_1+\cdots+y_s)+(y_{s+1}+\cdots+y_t)$.（因为 $x_1+\cdots+x_s\leqslant y_1+\cdots+y_s$ 可由已知推出，而且 $y_{s+1}\geqslant x,\ \cdots,\ y_t\geqslant x$.）

若 $t<s$，则 $x_1+\cdots+x_s+x(t-s)\leqslant y_1+\cdots+y_t$ 相当于 $x_1+\cdots+x_s\leqslant y_1+\cdots+y_t+\underbrace{(x+\cdots+x)}_{(t-s)\text{个}}$. 这个不等式可由下式推出：$x_1+\cdots+x_s\leqslant y_1+\cdots+y_s=(y_1+\cdots+y_t)+(y_{t+1}+\cdots+y_s)$，而 $y_{t+1}\leqslant x,\ \cdots,\ y_s\leqslant x$.

16. 设 $3^n=x^k+y^k$，其中 x 与 y 互素（不妨设 $x>y$），$k>1$，n 是自然数. 显然，x、y 中的任何一个都不能被 3 整除.

如果 k 是偶数，则 x^k 和 y^k 被 3 除的余数都是 1. 这样，x^k 与 y^k 的和除以 3 的余数是 2，而不是 3 的整数次幂. 于是，推出矛盾，所以 k 不是偶数.

如果 k 是奇数且 $k>1$，则 $3^n=(x+y)(x^{k-1}-\cdots+y^{k-1})$. 这样，$x+y=3^m$，$m\geqslant1$.

以下证明：$n\geqslant 2m$. 因为 k 可被 3 整除，取 $x_1=x^{\frac{k}{3}}$，$y_1=y^{\frac{k}{3}}$ 代入后，可以认为 $k=3$. 这样，$x^3+y^3=3^n$，$x+y=3^m$. 要证明 $n\geqslant 2m$，只要证明 $x^3+y^3\geqslant(x+y)^2$，即证明 $x^2-xy+y^2\geqslant x+y$. 由于 $x\geqslant y+1$，则 $x^2-x=x(x-1)\geqslant xy$. $(x^2-x-xy)+(y^2-y)\geqslant 0$. 不等式 $n\geqslant 2m$ 得证.

由恒等式 $(x+y)^3-(x^3+y^3)=3xy(x+y)$ 推出：（∗）$3^{2m-1}-3^{n-m-1}=xy$，而 $2m-1\geqslant 1$，且（∗∗）$n-m-1\geqslant n-2m\geqslant 0$. 因此，如果（∗∗）中至少有一个不等号是严格不等号，那么（∗）式中的左端可被 3 整除，但右端不能被 3 整除，推出矛盾. 如果 $n-m-1=n-2m=0$，那么，$m=1$，$n=2$ 且 $3^2=2^3+1^3$. 故 $n=2$.

17. 问题等价于把集合 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2000\}$ 分拆成 4 个非空子集 M_1、M_2、M_3、M_4，使得 $M_i\cap M_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4=S$.

因为 $6\times 7^3>2000$，所以 S 中的每个数都可以表示成至多 4 位的 7 进制数 $(abcd)_7$，这里 $a,\ b,\ c,\ d\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}$. 设 $A_i=\{(abcd)_7\mid(abcd)_7\in S,\ b\neq i,\ c\neq i,\ d\neq i\}$，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. 对任意 $x\in S$，由于每个 7 进制正整数末 3 位数上至少有 1，2，3，4 中的一个数字未出现，例如 x 的末 3 位数中未出现 4，则 $x\in A_4$，所以，$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=S$.

下证：集合 $A_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 中不含由 7 项构成的等差数列. 反设某个

A_i 中含有由 7 项构成的等差数列：a，$a+d$，…，$a+6d$．若 $7\nmid d$，则上述 7 个数模 7 两两不同余(即构成一个模 7 的完系)，从而，这 7 个数中必有一个，它除以 7 的余数为 i，即它的 7 进制表示中的末位数为 i，矛盾．若 $7|d$，$7^2\nmid d$，仿上可得到这个等差数列中必有一项，它的 7 进制表示中从右数的第二位数字为 i，矛盾．若 $7^2|d$，$7^3\nmid d$，同理可得这个等差数列中必有一项，它的 7 进制表示中从右数的第三位数字为 i，矛盾．若 $7^3|d$，则 $6d\geqslant 6\times 7^3>2000$，矛盾．

最后，令 $M_1=A_1$，$M_2=A_2\cap\overline{A}_1$，$M_3=A_3\cap\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$，$M_4=A_4\cap\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$，得到符合要求的分拆．

18. 设数列 $\{a+ih: i=0, 1, 2, \cdots\}$ 含 x^2、y^3 项，x、y 是整数．对公差 h 用数学归纳法．$h=1$，显然成立．对某个固定的 $h>1$，假设其公差小于 h 且满足题设条件的等差数列都成立．现考察在 h 时的情形．令 a、h 的最大公约数为 $d=(a, h)$，$h=de$．分两种情况：

情形 1　$(d, e)=1$．易知 $x^2\equiv a\equiv y^3\pmod h$，因而有 $x^2\equiv a\equiv y^3\pmod e$．$e$ 与 a 互素，故 e 与 x 和 y 也互素．所以，有整数 t，使得 $ty\equiv x\pmod e$．因此，$(ty)^6\equiv x^6\pmod e$，即 $t^6a^2\equiv a^3\pmod e$．因 $(e, a)=1$，故两端可除以 a^2 有 $t^6\equiv a\pmod e$．又 $(d, e)=1$，则对某个整数 k，有 $t+ke\equiv 0\pmod d$．于是，$(t+ke)^6\equiv 0\equiv a\pmod d$．因 $t^6\equiv a\pmod e$，由二项式公式，可得 $(t+ke)^6\equiv a\pmod e$．又 $(d, e)=1$，$h=de$，由以上两同余式，有 $(t+ke)^6\equiv a\pmod h$．显然，k 可取任意大的整数，故上式说明数列 $\{a+ih\mid i=0, 1, 2, \cdots\}$ 含一个整数的六次幂项．

情形 2　$(d, e)>1$．令素数 p，$p|d$，$p|e$，并设 p^α 是整除 a 的 p 的最高次幂，p^β 是整除 h 的 p 的最高次幂．因 $h=de$，$(e, a)=1$，有 $\beta>\alpha\geqslant 1$．因而对 $\{a+ih\mid i=0, 1, \cdots\}$ 中每一项，能整除它的最高次幂是 p^α．因 x^2、y^3 是数列的两个项，α 必被 2 和 3 整除，故 $\alpha=6r$．因此，$\alpha\geqslant 6$．整数数列 $\{p^{-6}(a+ih)\mid i=0, 1, 2, \cdots\}$ 的公差 $\frac{h}{p^6}<h$，且含有项 $\left(\frac{x}{p^3}\right)^2$、$\left(\frac{y}{p^2}\right)^3$，由归纳假设，它含有项 z^6(z 是整数)．所以，$(pz)^6$ 是原数列的一个项．

19. 这里需要用到 Euler 的一个结论：n 为偶完全数 $\Leftrightarrow$ 存在质数 p，使得 2^p-1 为质数，且 $n=2^{p-1}(2^p-1)$．下面以此来解本题．

情形一：n 为奇数，则 $n-1$ 为偶完全数，于是，可写 $n-1=2^{p-1}(2^p-1)$，其中 p 与 2^p-1 都为质数，这时 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(2^{p-1}(2^p-1)+1)(2^{p-1}(2^p-1)+2)=(2^{p-1}(2^p-1)+1)(2^{p-2}(2^p-1)+1)$．当 $p=2$ 时，$n=7$，$\frac{n(n+1)}{2}=28$，此时 $n-1$ 与 $\frac{n(n+1)}{2}$ 都是完全数．当 $p\geqslant 3$ 时，记 $N=\frac{n(n+1)}{2}$，则 N 为

奇数，且$\frac{n+1}{2}=4^{p-1}-2^{p-2}+1=(3+1)^{p-1}-(3-1)^{p-2}+1$，由二项式定理可知$\frac{n+1}{2}\equiv 3\times(p-1)-(p-2)\times 3+1+1+1\equiv 6\pmod 9$. 从而 $3\mid N$，但 $3^2\nmid N$，可设 $N=3k$，$3\nmid k$，此时，$\sigma(N)=\sigma(3)$，$\sigma(k)=4\sigma(k)$，但是 $2N\equiv 2\pmod 4$，故 $\sigma(N)\neq 2N$，从而此时$\frac{n(n+1)}{2}$不是完全数.

情形二：n 为偶数，如果 $4\mid n$，则 $n-1\equiv -1\pmod 4\Rightarrow n-1$ 不是完全平方数，此时对任意 $d\mid n-1$，由 $d\times\frac{n-1}{d}=n-1\equiv -1\pmod 4$，可知 d 与$\frac{n-1}{d}$中一个 mod 4 余 -1，另一个 mod 4 余 1，导致 $d+\frac{n-1}{d}\equiv 0\pmod 4$，从而 $4\mid\sigma(n-1)$，但 $2(n-1)\equiv 2\pmod 4$，故 $n-1$ 不是完全数. 所以，$4\nmid n$，于是，可设 $n=4k+2$，此时 $N=\frac{n(n+1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数. 由于$(2k+1,\ 4k+3)=1$，故 $\sigma(N)=\sigma(2k+1)\sigma(4k+3)$. 同上可知 $4\mid\sigma(4k+3)$，故若 $\sigma(N)=2N$，则 $4\mid 2N\Rightarrow 2\mid N$，这是一个矛盾.

综上可知，满足条件的 n 只有一个，即 $n=7$.

习　题　8

1. 计算 n 行和 n 列中每一行和每一列所有各方格的数的和，这 $2n$ 个和中一定有一个最小的. 设某一行的各数之和最小，且设这个和为 k，则这行就有不少于 $n-k$ 个 0. 现在考察包括这些零的列，由于 0 所在的行与列的各数的和不小于 n，则此零所在列的数之和不小于 $n-k$，而位于其他任何一列的数的和不小于 k. 所以，表中各数之和(设为 S)为 $S\geqslant(n-k)(n-k)+k\cdot k=n^2-2kn+2k^2=\frac{n^2}{2}+2\left(k-\frac{n}{2}\right)^2\geqslant\frac{n^2}{2}$.

2. 若不然，设将 $1,\ 2,\ \cdots,\ k^2$ 填入表格后最小的行和是 2^a，则有 $2^a\geqslant 1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$. 因为表中所有数之和为 $1+2+\cdots+k^2=\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$，故应有 $2^a\,\Big|\,\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$. 当 k 为奇数时，$\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$ 亦为奇数，当然不能被 2^a 整除；当 k 为偶数时，k^2+1 为奇数，于是应有 $2^a\,\Big|\,\frac{1}{2}k^2$. 但这时又有$\frac{1}{2}k^2<\frac{1}{2}k(k+1)\leqslant 2^a$，矛盾.

3. 设 S 为有限点集，于是其中必有两点 A 和 B，使 A 的纵坐标是所有点

的纵坐标中最大的，且在纵坐标同为最大的所有点中，A 的横坐标最大；B 的纵坐标是所有点的纵坐标中最小的，且在纵坐标同为最小的所有点中，B 的横坐标最小. 首先把给定的所有向量的起点都放在点 A，按已知，满足 $y>0$ 和 $y=0$、$x>0$ 的向量少于半数. 然后再把所有向量都放在点 B，又知 $y<0$ 和 $y=0$、$x<0$ 的向量也少于半数，矛盾.

4. 由于得分的情况仅有有限多种，其中必有一种的平方和取最大值. 这时各选手的得分 $p_1, p_2, \cdots, p_{10}$ 必互不相同，因为若 $p_i=p_j$，则改变选手 i 与 j 之间的胜负，即用 p_i-1、p_j+1 来代替 p_i、p_j 时，由于 $(p_i-1)^2+(p_j+1)^2-(p_i^2+p_j^2)=2>0$，而平方和中其他项不变，故平方和严格增大，这与平方和已取得最大值矛盾. 于是，在 $p_i=i-1\ (i=1,2,\cdots,10)$ 时，$\sum_{i=1}^{10} p_i^2$ 最大，这时的值 $\sum_{i=0}^{9} i^2=285$.

5. (1) 注意到，若 d 为 n 的因子，则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因子. 于是，$D=\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} d_i d_{i+1}=n^2\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}\frac{1}{d_i d_{i+1}}\leqslant n^2\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)<\frac{n^2}{d_1}=n^2$.

(2) 设 p 为 n 的最小素因子，则 $d_2=p$，$d_{k-1}=\frac{n}{p}$，$d_k=n$. 若 $n=p$，则 $k=2$，$D=p$，$D\mid n^2$. 若 n 为合数，则 $k>2$，$D>d_{k-1}d_k=\frac{n^2}{p}$. 如果 $D\mid n^2$，则 $\frac{n^2}{D}$ 为 n^2 的因子，但 $1<\frac{n^2}{D}<p$. 由于 p 为 n^2 的最小素因子，上式不能成立. 故若 $D\mid n^2$，则 n 为素数.

6. 令 $x_k=a=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$x_t=b=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

如果 $x_2\leqslant\frac{1+b}{2}$，则 $x_1(1-x_2)\geqslant x_1\left(1-\frac{1+b}{2}\right)=\frac{1}{2}x_1(1-b)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n)$. 从而取 $i=1$ 即可. 如果 $x_2>\frac{1+b}{2}$，由于 $\frac{a}{2}\leqslant\frac{1+b}{2}$ 且 $x_t=b\leqslant\frac{1+b}{2}$，所以有以下两种情况：

(i) $x_1=b$，$x_2>\frac{1+b}{2}$，$\cdots$，$x_n>\frac{1+b}{2}$. 令 $x_m=\min\{x_2, \cdots, x_n\}$，其中 $2\leqslant m\leqslant n$，显然 $x_{m-1}(1-x_m)\geqslant x_1(1-x_n)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n)$.

(ii) 存在 $2\leqslant i\leqslant n-1$，使得 $x_i>\frac{1+b}{2}$，$x_{i+1}\leqslant\frac{1+b}{2}$，于是

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1+b}{2}\left(1-\frac{1+b}{2}\right)\geqslant\frac{a}{4}(1-b)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

7. 首先，用归纳法容易证明，若 $c\in M$，则对任意 $n\in Z$，都有 $nc\in M$.

设 $a>0$ 是集合 M 中的最小正整数，$b<0$ 是 M 中的最大负整数，即绝对值最小的负整数. 按已知，$a+b\in M$，且满足不等式 $b<a+b<a$. 由 a 和 b 的极端性知 $a+b=0$. 因此，$0\in M$，且有 $b=-a$. 这样一来，对任何 $a\in M$，$n\in\mathbf{Z}$，都有 $na\in M$.

我们断言，集合 M 中除了 a 的整数倍以外，不含任何其他元素. 若不然，设有 $x\in M$ 且有 $ma<x<(m+1)a$，$m\in\mathbf{Z}$. 记 $x=ma+r$，$0<r<a$，$r\in\mathbf{N}$. 这时 $r=x+(-m)a\in M$，此与 a 的最小性矛盾. 这样一来，$M=\{na\mid n\in\mathbf{Z}\}$. 由于 M 中任意两数之差仍是 a 的整数倍，当然仍在 M 之中.

8. 假设这个方程有正整数解 x、y、z、u. 考虑 x 与 y 的平方和 x^2+y^2. 由于 x^2+y^2 是正整数，则在所有的 x^2+y^2 中必有一个最小的，我们考虑使 x^2+y^2 最小的那组正整数解 (x, y, z, u).

由于 x^2+y^2 是 3 的倍数，则 x 和 y 必都能被 3 整除. 设 $x=3m$，$y=3n$，其中 m、n 都是正整数. 从而有 $9m^2+9n^2=3(z^2+u^2)$，$z^2+u^2=3(m^2+n^2)$. 此时，z、u、x、y 也是方程的一组解，而由已知方程可知 $z^2+u^2<x^2+y^2$，这与 x^2+y^2 为最小矛盾.

9. 设 A 是 $3n$ 名学生中认识另一所学校中的学生数最大的一名学生. 不妨设 A 是第 1 所学校的学生，他认识第 2 所学校中的 k 名学生，$k\geqslant\frac{1}{2}(n+1)$. 于是 A 认识第 3 所学校中的 $n+1-k$ 名学生. 因为 $k\leqslant n$，故 $n+1-k\geqslant 1$.

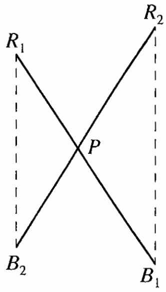
考察第 3 所学校里认识 A 的学生 B. 如果 B 认识第 2 所学校中认识 A 的某学生 C，则 A，B，C 即为所求. 如果第 2 所学校中认识 A 的 k 名学生都不认识 B，则 B 至多认识这所学校中的 $n-k$ 名学生，从而 B 至少认识第 1 所学校中的 $(n+1)-(n-k)=k+1$ 名学生，此与 k 的最大性矛盾. 可见必有 3 名学生满足要求.

10. 设 S 为满足条件的集合，并设 $a\in S$，则 $\frac{a+a}{(a, a)}=2\in S$，如果 $1\in S$，则 $\frac{1+2}{(1, 2)}=3\in S$. 一般地，设 $n\in S$，则 $\frac{n+1}{(n, 1)}=n+1\in S$. 这表明 $S=\mathbf{N}^*$，与 S 为有限集矛盾.

另一方面，若 S 中有大于 2 的元素，取这些元素中的最小元素，设为 n，则 $\frac{n+2}{(2, n)}\in S$. 若 $(2, n)=2$，则 $2<\frac{n+2}{2}<n$，这与 n 为 S 中比 2 大的最小元

素矛盾，故 $(2, n)=1$. 因此，$n+2\in S$. 进一步，$\dfrac{n+(n+2)}{(n, n+2)}=2n+2\in S$，$\dfrac{n+(2n+2)}{(n, 2n+2)}=3n+2\in S$，依此类推，可知对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，数 $kn+2\in S$，与 S 为有限集矛盾. 综上可知，$S=\{2\}$.

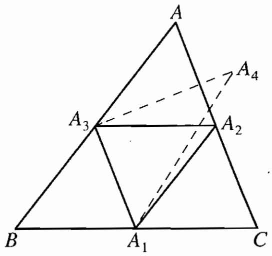
11. 因为总共只有 $2n$ 个点，将红点与蓝点一一配对的方法只有有限种. 对于每一种配对方法，都会得到这 n 条线段的长度和，这种和数只有有限个（其实不超过 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$ 个），其中必有一个是最小的. 下面来证明，这时候这 n 条线段是互不相交的.



第 11 题图

假定此时有两条线段 R_1B_1 和 R_2B_2 相交，其中 R_1、R_2 是红点，B_1、B_2 是蓝点，设它们的交点为 P（如图）. 由于 $R_1B_2+R_2B_1<(R_1P+PB_2)+(R_2P+PB_1)=R_1B_1+R_2B_2$，所以，当我们将 R_1 与 B_2 配对，R_2 与 B_1 配对，其他的保持不变时，n 条线段的长度和就减少了，矛盾. 因此，这时候 n 条线段是互不相交的.

12. 取 n 个点中任意三点作一个三角形，三角形的个数是有限的，每一个三角形都有一个面积，取其中面积最大的一个记为 $\triangle A_1A_2A_3$. 由于每个三角形的面积都小于1，所以 $S_{\triangle A_1A_2A_3}<1$. 过顶点 A_1、A_2、A_3 分别作对边的平行线，得到一个 $\triangle ABC$，如图所示. 显然 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle A_1A_2A_3}<4$.



第 12 题图

下面证明 $\triangle ABC$ 包含了这 n 个点. 用反证法. 设 $\triangle ABC$ 外还有这 n 个点中的一点，设为 A_4，如图. 则 $S_{\triangle A_4A_3A_1}>S_{\triangle A_2A_3A_1}$，这与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的面积最大矛盾. 于是 $\triangle ABC$ 即为所求.

13. 设进行了 m 场比赛后，任何 3 队中都已有两队彼此比赛过. 设 A 队是所有球队参赛场次最少的一个球队，它共参赛 k 场. 于是已经与 A 队比赛过的队至少进行了 k 场比赛. 没与 A 赛过的 $19-k$ 个队中的任何两队之间都得赛一场，否则存在 3 个队，其中任何两队都未彼此赛过. 于是有 $2m\geqslant(k+1)k+2\mathrm{C}_{19-k}^2=2(k-9)^2+180\geqslant 180$. 这意味着至少进行 90 场比赛.

另一方面，将 20 个球队均分成两组，每组内的任何两队之间比赛一场，不同组的任何两队之间不赛，则共进行了 90 场比赛. 由于任何 3 个队中总有两个队在一组，它们之间已经进行了一场比赛，故知这种安排满足题中要求.

14. 设 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 有 c_i 个熟人，其中有 d_i 个不与 A_i 同组. 这里

d_i 是随分组变化而变化的. 本题相当于证明：存在一个适当的分组法，使得对一切 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $d_i \geqslant \frac{1}{2}c_i$.

由于总人数只有有限多个，分组方法也只有有限多种，从而和 $d_1+d_2+\cdots+d_n$ 也只有有限多个不同的值. 于是，必存在某种分组法，使上面的和取得最大值，记这个最大值为 d. 下面证明：使 $d_1+d_2+\cdots+d_n$ 最大的分组方法符合要求. 否则，对这种分组法存在某个人，不妨设为甲组的 A_1，他在乙组的熟人数 $d_1<\frac{1}{2}c_1$. 于是，A_1 在甲组中的熟人数为 c_1-d_1. 现把 A_1 从甲组调入乙组，其余的人不动. 对这个重新分组，$d_2, d_3, \cdots, d_n$ 都未变，这时，A_1 在甲组的熟人数 c_1-d_1 变为与他不同组的熟人数，从而 d_1 变为 c_1-d_1. 这时有 $(c_1-d_1)+d_2+\cdots+d_n=c_1-d_1+d-d_1=d+(c_1-2d_1)>d$，这与 d 是最大值矛盾.

15. 显然应尽可能地保留些大圆而去掉小圆，为此，将这些圆适当"排序". 设这若干个圆中最大的一个是$\odot O_1$，其半径为 r_1，则与$\odot O_1$ 相交的所有圆必落在以 O_1 为圆心，$3r_1$ 为半径的圆内. 因此，$\odot O_1$ 的面积不小于这组圆所覆盖面积的$\frac{1}{9}$. 去掉与$\odot O_1$ 相交的所有圆，余下的圆与$\odot O_1$ 不相交，再设这些圆中除$\odot O_1$ 外最大的一个是$\odot O_2$，仿上讨论知$\odot O_2$ 的面积不小于所有与$\odot O_2$ 相交的一组圆所覆盖面积的$\frac{1}{9}$. 去掉与$\odot O_2$ 相交的所有圆，……，如此继续，直到$\odot O_1, \odot O_2, \cdots, \odot O_n$ 它们彼此都不相交，且面积都不小于与自己相交的那一组圆面积的$\frac{1}{9}$（它们中的某几个也可能一开始就不与任何一个圆相交而被保留下来）. 所以，它们所覆盖的面积不小于总覆盖面积的$\frac{1}{9}$.

16. 因为 $x\neq 0$，显然有 $y\neq 0$. 不失一般性，假定 x、y 是题设方程的整数解，且满足 $x>0, y>0$，及 $(x, y)=1$，我们还可以进一步假定 x 是满足上述条件的最小的整数解.

由于 $z^2\equiv 0, 1, 4 \pmod 8$，可知 x 是偶数，而 y 是奇数. 注意到 $x^4+(x^2+y^2)^2=z^2$，及 $(x^2, x^2+y^2)=1$，故存在一个奇整数 p 和偶整数 q，使得 $x^2=2pq$，$x^2+y^2=p^2-q^2$ 及 $(p, q)=1$. 由此易证，存在一个整数 a 与奇数 b，使得 $p=b^2$，$q=2a^2$. 故 $x=2ab$，$y^2=b^4-4a^4-4a^2b^2$.

注意到 $\left(\frac{2a^2+b^2+y}{2}\right)^2+\left(\frac{2a^2+b^2-y}{2}\right)^2=b^4$ 及 $\left(\frac{2a^2+b^2+y}{2}, \frac{2a^2+b^2-y}{2}\right)=1$. 故存在整数 s、t，其中 $s>t$，$(s, t)=1$，使得$\frac{2a^2+b^2+y}{2}=$

$2st$，$\dfrac{2a^2+b^2-y}{2}=s^2-t^2$，或$\dfrac{2a^2+b^2+y}{2}=s^2-t^2$，$\dfrac{2a^2+b^2-y}{2}=2st$，及 $b^2=s^2+t^2$. 易知 $a^2=(s-t)t$.

由于$(a, b)=1$，$(s, t)=1$，故存在正整数 m、$n((m, n)=1)$，使得 $(s-t)=m^2$，$t=n^2$. 因此，$b^2=n^4+(n^2+m^2)^2$. 而 $x=2ab>t=n^2\geqslant n$，这与 x 是最小解的假定矛盾.

17. 用归纳法. 当 $n=1$ 时要证的不等式显然成立. 设当 $n=k$ 时结论成立. 当 $n=k+1$ 时，由轮换对称性，不妨设 x_{k+1} 最大. 于是由归纳假设可得

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}+\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant k+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{k}(x_j-a)^2. \qquad ①$$

由①可知，为证原不等式，只需证

$$\frac{1+x_k}{1+x_{k+1}}+\frac{1+x_{k+1}}{1+x_1}-\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant 1+\frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1}-a)^2.$$

即
$$\frac{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_1)}{(1+x_{k+1})(1+x_1)}\leqslant\frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1}-a)^2. \qquad ②$$

由于 $a=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$，$x_{k+1}=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$，显然②成立. 这就证明了当 $n=k+1$ 时要证的不等式成立. 而且为使 $n=k+1$ 时要证的不等式中的等号成立，当且仅当①和②中的等号成立. 由归纳假设①中等号成立的充要条件是 $a=x_1=x_2=\cdots=x_k$. 从而②中等号成立的充要条件是 $x_{k+1}=a$. 故当 $n=k+1$ 时，原不等式中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$.

18. 若不然，则存在 S 的一个 $2n+1$ 元的子集 H，其中任何 3 个数之和都不为零.

(1) 首先证明，$0\notin H$. 如果 $0\in H$，则其余的 $2n$ 个整数分属于如下 $2n-1$ 个数对：$(-i, i)$，$i=1, 2, \cdots, 2n-1$. 由抽屉原理知其中必有一对的两个数都属于 H. 二者加上 0，3 数之和为零，矛盾.

(2) 设 H 中绝对值最小的元素为 d，不妨设 $d>0$. 令 $H^+=\{x\mid x\in H, x>d\}$，$H^-=\{x\mid x\in H, x<-d\}$，$H^{+-}=\{d-x\mid x\in H^+\}$，$H^{-+}=\{-d-x\mid x\in H^-\}$. 显然，这些集都不是空集且由反证假设知 $H^+\cap H^{-+}=\varnothing$. ①

若 $-d\notin H$，则由①有 $2n-1\geqslant|H^+\cup H^{-+}|=|H^+|+|H^{-+}|=2n$，矛盾. 故必有 $-d\in H$. 于是 $H^-\cap H^{+-}=\varnothing$ 及 $|H^+|+|H^{-+}|=|H^{+-}|+|H^-|=2n-1$. 故有 $H^+\cup H^{-+}=\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$，$H^-\cup H^{+-}=\{-1,$

$-2, \cdots, -(2n-1)\}$. ②

将 H^+、H^- 中各数之和分别记为 h^+ 和 h^-，则 H^{+-} 和 H^{-+} 中各数之和分别为 $|H^+|\cdot d-h^+$ 和 $-|H^-|\cdot d-h^-$. 于是由 ② 便得 $h^++h^-+|H^+|\cdot d-h^+-|H^-|\cdot d-h^-=0$，$(|H^+|-|H^-|)d=0$. 因 $|H^+|+|H^-|=2n-1$，故 $|H^+|-|H^-|$ 为奇数，故得 $d=0$，矛盾.

19. 由于 $c_i \leqslant 39$，故每一横排至少可坐 160 人. 于是只要有 13 排，至少可坐 $160\times 13=2080$ 人，当然能坐下全部 1990 名学生.

下面证明只要安排 12 个横排就够了. 由于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 只有有限多个，故它们的不超过 199 的有限和也只有有限多个. 选取其中最接近 199 的有限和，记为 $c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_k}$，将这 k 个学校的学生安排在第一排就坐. 然后再对其余的诸 c_i 人进行同样的讨论并选取不超过 199 且最接近 199 的有限和，并把相应的学校的学生排在第二排. 依此类推，一直排到第十排并记第 i 排的空位数为 x_i，$i=1, 2, \cdots, 12$.

如果 $x_{10}\geqslant 33$，则余下的未就坐的学校的学生数 c_i 全都不小于 34. 若余下的学校数不多于 4 个，则只要 11 排就够了. 若余下的学校数不少于 5 个，则可任取 5 个学校的学生安排在第 11 排. 这时有 $x_{11}\leqslant 29<x_{10}$，此与 x_{10} 的最小性矛盾. 如果 $x_{10}\leqslant 32$，则前 10 排的空位总数 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}\leqslant 10x_{10}\leqslant 320$，亦即前 10 排已至少坐了 1670 人，未安排就坐的学生至多还有 320 人. 每排至少可坐 160 人，故只要有 12 排就够了.

最后，考察只有 11 排的情形. 这时，只容许有 199 个空位. 为了安排下全部学生，每排空位平均不能达到 19 个. 设 $n=80$，前 79 个学校各出学生 25 人，最后一个学校派 15 人，则共有 1990 人. 但安排座位时，除了一排可坐 $25\times 7+15=190$ 人外，其余 10 排每排至多能安排 7 个学校的 175 人. 故 11 排至多安排 1940 人就坐. 这说明只有 11 排座位是不够的.

20. 显然数 n 为正奇数，于是我们只需考虑 $n\geqslant 3$ 且 n 为奇数的情况.

设 p 是 n 的最小素因数，则 $p\geqslant 3$，$p\mid 2^n+1$. 令 i 是使 $p\mid 2^i+1$ 成立的最小正整数，我们将证明 $1\leqslant i<p-1$. 若 $i\geqslant p-1$，则可设 $i=(p-1)t+r$，$0\leqslant r<p-1$，$r, t\in\mathbf{Z}$. 由费马小定理可知 $p\mid 2^{p-1}-1$. 于是 $2^r(2^{p-1})^t\equiv 2^r \pmod p$，$2^i+1=(2^{p-1})^t\cdot 2^r+1\equiv 2^r+1 \pmod p$. 故由 $p\mid 2^i+1$ 即知 $p\mid 2^r+1$. 这与 i 是使 $p\mid 2^i+1$ 成立的最小正整数相矛盾.

令 $n=ia+r_1$，$0\leqslant r_1<i$，则 $2^n+1=2^{ia+r_1}+1=(2^i+1-1)^a\cdot 2^{r_1}+1\equiv(-1)^a\cdot 2^{r_1}+1 \pmod p$. 由 $p\mid 2^n+1$ 得 $p\mid(-1)^a\cdot 2^{r_1}+1$. 若 $2\mid a$，即 a 是偶数，则 $p\mid 2^{r_1}+1$，由 $r_1<i$，与 i 的意义相矛盾. 此时只有 $r_1=0$. 若 $2\nmid a$，则由 $p\mid -2^{r_1}+1$ 知 $p\mid 2^{r_1}-1$. 若 $r_1>0$，可令 $i=r_1+b$，$1\leqslant b<i$，于是

由 $2^i+1=(2^{r_1}-1)\cdot 2^b+2^b+1$ 得 $p\mid 2^b+1$. 这又与 i 的意义相矛盾，此时也有 $r_1=0$. 于是 $n=ia$，即 $i\mid n$，但 p 是 n 的最小素因数，且 $1\leqslant i<p-1$，因而 $i=1$. 又由 $p\mid 2^i+1$ 可得 $p=3$. 于是可以把 n 写成 $n=3^m c$，$m\geqslant 1$，$(c,3)=1$，$2\nmid c$.

现在证明 $m=1$. 若 $m\geqslant 2$，则由 $n^2\mid 2^n+1$，可知 $3^{2m}\mid 2^n+1$. 于是由 $2^n+1=(3-1)^n+1\equiv 3n-\sum\limits_{k=2}^{2m-1}(-1)^k C_n^k 3^k \pmod{3^{2m}}$. $3^{2m}\mid 3n-\sum\limits_{k=2}^{2m-1}(-1)^k C_n^k 3^k$. ①

设 $k!$ 中的 3 的最高次幂为 α，则 $\alpha=\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left[\dfrac{k}{3^s}\right]<\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{k}{3^s}=\dfrac{\frac{k}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{k}{2}$.

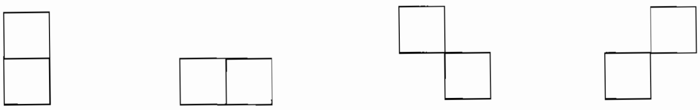
若 $3^k C_n^k$ 中的 3 的最高次幂为 β，则当 $k\geqslant 2$ 时，有 $\beta>k+m-\dfrac{k}{2}\geqslant m+1$. 若 $\beta\geqslant m+2$，则 $3^{m+2}\mid 3^k C_n^k$. 注意到 $m\geqslant 2$，所以有 $2m\geqslant m+2$. 于是由 ① 知，$3^{m+2}\mid 3n$. 进而 $3^{m+1}\mid n$. 这与 $(c,3)=1$ 矛盾. 从而证明了 $m=1$，即 $n=3c$，$(c,3)=1$.

设 $c>1$，而 q 是 c 的最小素因数，显然有 $q\geqslant 5$，且 $q\mid 2^n$. 类似地，令 j 为使 $q\mid 2^j+1$ 成立的最小正整数，则必有 $1\leqslant j<q-1$. 进而又可证明 $j\mid n$. 因而由素数 q 的定义及 $j<q-1$ 可知 $j\in\{1,3\}$. 于是由 $q\mid 2^j+1$ 得 $q=3$，这与 $q\geqslant 5$ 矛盾. 因而 $c=1$. 所以 $n=3$.

可以验证 $3^2\mid 2^3+1$. 于是，满足要求的正整数 n 只有 $n=3$.

习　题　9

1. 可将相邻方格对分为 3 类：竖向相邻对，横向相邻对，斜向相邻对（如图）. 易知，竖向相邻对与横向相邻对各有 $n(n-1)$ 个；斜向相邻对有 $2(n-1)^2$ 个. 故共有相邻的小方格 $2n(n-1)+2(n-1)^2=2(n-1)(2n-1)$ 个.



第 1 题图

2. 它们的前两位数字之和与末两位数字之和等于固定的 $k=0,1,\cdots,18$，共有这样的四位数 $1^2+2^2+\cdots+19^2=2470$ 个.

3. 六位数中不可能出现 4 个或 4 个以上的 2. 符合要求的六位数中，不含 2 的有 2^6 个，恰含 1 个 2 的有 $6\cdot 2^5$ 个，恰含 2 个 2 的有 $2^4\cdot C_5^2$ 个，恰含 3 个 2

的有 $2^3\cdot C_4^3$ 个.共有 448 个.

4. 一种情况是，3 位骑士依次相邻，有 25 种选法；另一种情况是，两位骑士是邻座，此时第三位骑士就不选在已经邻座的两位骑士的两旁，也就是说第三位只能在 25－4 位中任选一位，这样有 25(25－4) 种选法.因此，共有选法 $25+25(25-4)=550$ 种.

5. 设三角形三边的长是 x、y、n，且 $x<y<n$，其中 x、y、n 都是自然数，显然，最短边的长 x 满足 $2\leqslant x\leqslant n-2$. 现固定 x 来求所构成的三角形的个数.当 n 为奇数时，由下表

x	y	三角形个数
2	$n-1$	1
3	$n-1,\ n-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n-1}{2}$	$n-1,\ n-2,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}+2$	$\frac{n-3}{2}$
$\frac{n+1}{2}$	$n-1,\ n-2,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}+2$	$\frac{n-3}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-3$	$n-1,\ n-2$	2
$n-2$	$n-1$	1

知三角形的个数为 $f(n)=2\left(1+2+3+\cdots+\frac{n-3}{2}\right)=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$. 类似地，当 n 为偶数时，$f(n)=\frac{1}{4}(n-2)^2$. 令 $f(n)=600$，解得 $n=51$.

6. 设 $S=\{1,2,\cdots,1000\}$，$A_2=\{a\mid a\in S,\ 2\mid a\}$，$A_5=\{a\mid a\in S,\ 5\mid a\}$. 于是 $|(\complement_S A_2)\cap(\complement_S A_5)|=S-(|A_2|+|A_5|)+|A_2\cap A_5|=1000-(500+200)+100=400$.

7. 设 A=｛某中学男生｝，B=｛某中学高中生｝，C=｛某中学团员｝，则 $|A|=528$，$|B|=312$，$|C|=670$，$|A\cap B|=192$，$|B\cap C|=247$，$|C\cap A|=336$，$|A\cap B\cap C|=175$. 于是 $|A\cup B\cup C|=(528+312+670)-(192+336+247)+175=910$. 但某中学的学生总数仅为 900，矛盾.故统计有误.

8. 记数学家为 $v_1,v_2,\cdots,v_i,\cdots,v_{1990}$，与 v_i 合作过的数学家的集合为 A_i. 不妨设数学家 v_1 与 v_2 合作过.由 $|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|\geqslant 2\times1327-1990>0$ 知，有数学家不妨设为 v_3 与 v_1，v_2 都合作过.又 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2|+|A_3|-|(A_1\cap A_2)\cup A_3|\geqslant 3\times1327-$

$2\times1990=1$，故存在数学家，不妨设为 $v_4\in A_1\cap A_2\cap A_3$，即 v_4 与 v_1、v_2、v_3 都合作过. 从而有数学家 v_1、v_2、v_3、v_4 两两合作过.

9. 设 $S_1=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 2\mid a\}$，$S_2=\{b\mid 1\leqslant b\leqslant 120,\ 3\mid b\}$，$S_3=\{c\mid 1\leqslant c\leqslant 120,\ 5\mid c\}$，$S_4=\{d\mid 1\leqslant d\leqslant 120,\ 7\mid d\}$. 则由容斥原理可知 $|S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4|=92$，而 2、3、5、7 也在 92 个数之中，它们都不是合数，故合数为 $92-4=88$(个). 又 1 不是素数，故素数个数为 $120-88-1=31$(个).

10. 设 $S=\{$由 1，2，3 组成的 n 位数$\}$，则 $|S|=3^n$. 记 $A_1=\{S$ 中所有不含 1 的 n 位数$\}$，$A_2=\{S$ 中所有不含 2 的 n 位数$\}$，$A_3=\{S$ 中所有不含 3 的 n 位数$\}$. 于是 $\overline{A_i}$ 表示所有含有数字 i 的 n 位数，且 $|A_i|=2^n$，$i=1,2,3$，$|A_i\cap A_j|=1$，$i\neq j$，$i,j=1,2,3$. 因此，$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=3^n-3\times2^n+3$.

11. 设 $S=\{$由 1，2，3，4，5，6，7，8 组成的可重复数字的 n 位数$\}$，显然 $|S|=8^n$. 设 $A_i=\{S$ 中不含数字 i 的 n 位数$\}$($i=1,2,\cdots,8$)，有 $|A_i|=7^n$. 本题就是求 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|$，可计算出 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|=8^n-5\cdot7^n+10\cdot6^n-10\cdot5^n+5\cdot4^n-3^n$.

12. 设 $N(x^y)$ 表示整数 x^y 的个数. 若 $1<x^y\leqslant10^6$，由于 $2^{19}=524\,288<10^6$，$2^{20}>10^6$，则由容斥原理得 $N(x^y)=N(x^2)+N(x^3)+N(x^5)+N(x^7)+N(x^{11})+N(x^{13})+N(x^{17})+N(x^{19})-N(x^6)-N(x^{10})-N(x^{14})-N(x^{15})$. 由于大于 1 且不大于 10^6 的平方数有 10^3-1 个，所以 $N(x^2)=999$. 大于 1 且不大于 10^6 的立方数有 10^2-1 个，即 $N(x^3)=99$ 个. 因为 $15^5=819\,375<10^6$，所以大于 1 不大于 10^6 的 5 次方数有 $15-1$ 个，即 $N(x^5)=14$. 以此类推可得，$1<x^y\leqslant10^6$ 时 $N(x^y)=999+99+14+6+2+1+1+1-9-2-1-1=1110$ 个. 又 $n=1$ 时有非负整数解 $x>1$ 且 $y=0$. 于是满足题意的整数 n 有 1111 个.

13. 以 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 来分别表示函数$[x]$，$[2x]$，$[3x]$，$[4x]$和$\left[\frac{5x}{3}\right]$的所有间断点的集合. 则易知 $A_1\subset A_2\subset A_4$，且 $A_3=\left\{\frac{n}{3}\middle| n=1,2,\cdots,300\right\}$，$A_4=\left\{\frac{n}{4}\middle| n=1,2,\cdots,400\right\}$，$A_5=\left\{\frac{3n}{5}\middle| n=1,2,\cdots,166\right\}$.

由此可得 $A_3\cap A_4=\{n\mid n=1,2,\cdots,100\}$，$A_3\cap A_5=A_4\cap A_5=A_3\cap A_4\cap A_5=\{3n\mid n=1,2,\cdots,33\}$. 由容斥原理知 $f(x)$的间断点的个数为 $|A_3|+|A_4|+|A_5|-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_4\cap A_5|+|A_3\cap$

$A_4 \cap A_5| = 300 + 400 + 166 - 100 - 33 - 33 + 33 = 733$. 故知 $f(x)$所取的不同整数值的个数为 734.

14. 设 $I = \{x \mid 104 \leqslant x \leqslant 208,\ x \in \mathbf{N}\}$,并记 $E_k = \{x \mid x \equiv 0 \pmod{k},\ x \in I\}$, $k = 2, 3, 5, 7$. 由容斥原理得 $|E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7| = (53 + 35 + 21 + 15) - (17 + 10 + 7 + 7 + 5 + 3) + (3 + 2 + 1 + 1) - 0 = 82$. 这说明$[104, 208]$中不能被 2, 3, 5, 7 任何一个整除的整数共有 $(208 - 103) - 82 = 23$ 个. 于是任意取 104 和 208 之间的 28 个数,至少有 5 个数属于 $E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7$. 根据抽屉原则知,必有两个数属于某个 $E_k(k = 2, 3, 5, 7)$,故结论成立.

15. 因为 $1990 = 2 \times 5 \times 199$,所以$(n^2 - 1, N) = 1 \Leftrightarrow n^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{2, 5, 199}$,即 $n \not\equiv 1 \pmod 2$ 且 $n \not\equiv 1, 4 \pmod 5$ 且 $n \not\equiv 1, 198 \pmod{199}$.

令全集 $I = \{1, 2, \cdots, N\}$, $A = \{n \mid n \equiv 1 \pmod 2,\ n \in I\}$, $B = \{n \mid n \equiv 1, 4 \pmod 5,\ n \in I\}$, $C = \{n \mid n \equiv 1, 198 \pmod{199},\ n \in I\}$. 则 $A \cap B = \{n \mid n \equiv 1, 9 \pmod{10},\ n \in I\}$, $B \cap C = \{n \mid n \equiv 1, 994 \pmod{995},\ n \in I\}$, $C \cap A = \{n \mid n \equiv 1, 397 \pmod{398},\ n \in I\}$, $A \cap B \cap C = \{n \mid n \equiv 1, 1989 \pmod{1990},\ n \in I\}$. $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = N - \left(\frac{N}{2} + \frac{2N}{5} + \frac{2N}{199}\right) + \left(\frac{2N}{10} + \frac{2N}{995} + \frac{2N}{398}\right) - \frac{2N}{1990} = \frac{589}{1990}N$. 故满足条件的整数 n 的个数为$\frac{589}{1990}N$.

16. 对 m 用归纳法. 当 $m = 2$ 时,容易验证. 假设对 m 结论成立. 对 $m + 1$,空间有 $2m + 2$ 个点,$(m + 1)^2 + 1$ 条连线. 这 $2m + 2$ 个点中必有两点 a 与 b,它们之间有线段相连. 其余 $2m$ 个点的集合记为 X. 如果 X 中 $2m$ 个点之间至少连有 $m^2 + 1$ 条线段,则结论成立. 因此,设 X 中 $2m$ 个点之间至多连有 m^2 条线段. 于是 X 中的点与点 a 或点 b 所连线段至少有 $(m + 1)^2 + 1 - m^2 - 1 = 2m + 1$ 条. 记 X 中与点 a 有线段相连的点的集合为 A,与点 b 有线段相连的点的集合为 B. 则 $|A \cup B| \leqslant |X| \leqslant 2m$,而且 $|A| + |B| \geqslant 2m + 1$. 因此有 $2m \geqslant |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geqslant 2m + 1 - |A \cap B|$,由此得 $|A \cap B| \geqslant 1$. 于是必有点 $C \in A \cap B$. 点 a 与 b、c 之间两两均有线段相连.

17. 以 n 元有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示本届的比赛结果：上届第 i 名的球队在本届获得第 a_i 名 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 以 S 表示比赛可能结果的全体,则 $|S| = n!$. 设 $A_i = \{i + 1$ 号队获得的名次比 i 号队低一名次的比赛结果$\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 易知 $|A_i| = (n - 1)!\quad (1 \leqslant i \leqslant n)$, $|A_i \cap A_j| = (n - 2)!\quad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$, $\cdots$, $\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = 1$. $\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = n! - \mathrm{C}_{n-1}^{1}(n - 1)! + \mathrm{C}_{n-1}^{2}(n - 2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}$. 此即所求比赛结果的种数.

18. (1) 定义有限集合 X 的元素和为 $S(X)$. 设 $0\neq z\in A$. 因为 A 是有限集合，故存在正整数 $m<n$，且 $z^m=z^n$. 则 $z^{n-m}=1$. 设 d 是使 $z^k=1$ 成立的 k 的最小正整数. 所以，$1, z, z^2, \cdots, z^{d-1}$ 互不相同，且它们的 d 次方均为 1，故这些数是 1 的 d 次方根. 这表明 $A\backslash\{0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}U_{n_k}$，其中 $U_p=\{z\in\mathbf{C}\mid z^p=1\}$. 由于 $S(U_p)=0$，$p\geqslant 2$，$S(U_1)=1$，$U_p\cap U_q=U_{(p,q)}$，所以 $S(A)=\sum\limits_{k}S(U_{n_k})-\sum\limits_{k<l}S(U_{n_k}\cap U_{n_l})+\sum\limits_{k<l<s}S(U_{n_k}\cap U_{n_l}\cap U_{n_s})+\cdots$ 为整数.

(2) 设对某一个整数 k，存在 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{n_i}$ 满足 $S(A)=k$. 令互不相同的质数 $p_1, p_2, \cdots, p_6$ 均不是 n_i 的因子，则 $S(A\cup U_{p_1})=S(A)+S(U_{p_1})-S(A\cap U_{p_1})=k-S(U_1)=k-1$. 于是可得 $S(A\cup U_{p_1p_2p_3}\cup U_{p_1p_4p_5}\cup U_{p_2p_4p_6}\cup U_{p_3p_5p_6})=S(A)+S(U_{p_1p_2p_3})+S(U_{p_1p_4p_5})+S(U_{p_2p_4p_6})+S(U_{p_3p_5p_6})-S(A\cap U_{p_1p_2p_3})-\cdots+S(A\cap U_{p_1p_2p_3}\cap U_{p_1p_4p_5})+\cdots-S(A\cap U_{p_1p_2p_3}\cap U_{p_1p_4p_5}\cap U_{p_2p_4p_6})-\cdots+S(A\cap U_{p_1p_2p_3}\cap U_{p_1p_4p_5}\cap U_{p_2p_4p_6}\cap U_{p_3p_5p_6})=k+4\times 0-4S(U_1)-\sum\limits_{k=1}^{6}S(U_{p_k})+10S(U_1)-5S(U_1)+S(U_1)=k-4+10-5+1=k+2$. 于是，如果存在 A 使得 $S(A)=k$，那么，存在 B、C 满足 $S(B)=k-1$，$S(C)=k+2$. 从而，结论成立.

19. 令 $A_i=\left\{ik\mid k=1, 2, \cdots, \left[\dfrac{280}{i}\right]\right\}$，$i=1, 2, \cdots$，$A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$. 则由容斥原理可以算出 $|A|=216$. 由于在 A 中任取 5 个数时，必有两个数在同一个 $A_i(i\in\{2, 3, 5, 7\})$ 之中，二者不互素，故知所求的最小自然数 $n\geqslant 217$.

另一方面，设 $T\subset S$ 且 $|T|=217$. 记 S 中所有素数与 1 所成的集合为 M，则 $|M|=60$.

(1) 若 $|T\cap M|\geqslant 5$，则问题已解决.

(2) 若 $|T\cap M|=4$，设其余的素数从小到大排列为 $p_1, p_2, p_3, \cdots$，显然有 $p_1\leqslant 11$，$p_2\leqslant 13$，$p_3\leqslant 17$，$p_4\leqslant 19$，$p_5\leqslant 23$. 于是有 $\{p_1^2, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_1p_5, p_2^2, p_2p_3, p_2p_4\}\subset S$. 因为 S 中共有 220 个合数而这时 T 中有 213 个合数，故在 $S-T$ 中的合数只有 7 个，从而上面集合中的 8 个元素中总有一个含在 T 中，它与 $T\cap M$ 中的 4 个数一起即满足题中要求.

(3) 设 $|T\cap M|\leqslant 3$. 这时，至多有 S 中的 6 个合数不在 T 中. 若集合 $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$ 中有 5 个或 4 个元素含在 T 中，则问题化为前两种情形. 以下设这 6 个合数中至多有 3 个含在 T 中，于是其他合数至多有 3 个

不在 T 中. 因此, 集合 $\{2\times41, 3\times37, 5\times31, 7\times29, 11\times23, 13\times19\}$, $\{2\times37, 3\times31, 5\times29, 7\times23, 11\times19, 13\times17\}$ 的 12 个合数中至多有 3 个不在 T 中. 由抽屉原理知必有一个集合的至少 5 个数含在 T 中. 显然, 这 5 个数两两互素.

综上可知, 所求的最小自然数 $n=217$.

20. 设集合 $A=\{$全部选手$\}$, $A_i=\{$第 i 题对的考生$\}$, $i=1, 2, 3, 4$. 则 $|A_1|=235$, $|A_1\cap A_2|=59$, $|A_1\cap A_3|=29$, $|A_1\cap A_4|=15$, $\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|=3$. 因为 $|A_1\cap A_2\cap A_3|>\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|=3$, 同理, $|A_1\cap A_3\cap A_4|>3$, $|A_1\cap A_2\cap A_4|>3$, 所以 $|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_4|-\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|>6$. 注意到 $|A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=|A_1\cap\overline{(A_2\cup A_3\cup A_4)}|=|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|-|A_2\cup A_3\cup A_4|=\left(\sum_{i=1}^{4}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant4}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|\right)-\left(\sum_{i=2}^{4}|A_i|-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant4}|A_i\cap A_j|+\left|\bigcap_{i=2}^{4}A_i\right|\right)=|A_1|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|-\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|>235-59-29-15+6=138$, 可见 $|A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|\geqslant139=3\times46+1>3\times46$. 故由抽屉原理知, 存在一个国家, 该国派出的选手中至少有 4 人做对了且只做对了第一题.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．集合/刘诗雄编著．—2版．—上海：华东师范大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5617-9193-6

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第274589号

数学奥林匹克小丛书（第二版）·高中卷
集合（第二版）

编　　著　刘诗雄
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真　021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话　021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　昆山市亭林彩印厂有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　10
字　　数　176千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年7月第二次
印　　数　13 001-16 100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9193-6/G·5494
定　　价　20.00元

出 版 人　朱杰人