

厦门郑剑雄数学

全国小学奥数群221739457, 中考数学群579251397, 初中奥数学生群253736211, 初中奥数教练群112464128, 高考数学群536036395, 高中奥数学生群591782992, 高中奥数教练群195949359, 大学数学群702457289, 初中物竞教练群271751304, 高中物竞教练群271751860, 初中化竞教练群296982275, 高中化竞教练群271751511, 生竞教练群254139830, 信息竞赛教练群281798334  
公众号: 新浪微博@郑剑雄 (不是微信, 用微博搜索) 微信: v136257437 QQ: 136257437 抖音: zjx187

数学奥林匹克小丛书  
第二版

高中卷

2

Shuxue Aolimpik

XIAOCONG  
SHU

函数与函数方程

熊斌 朱臻 苏勇 编著

华东师范大学出版社

初升高自招群271737073 高考全科资料群271752763 全国少年班资料群700120188 大学自招群336746900 中考物理群227284641 初中物竞群271751304 高考物理群213480679 高中物竞学生群271733226 高中物竞教练群271751860 大学物理群718011655 中考化学群462100609 初中化竞群296982275 高考化学群5139062 高中化竞学生群: 168730781 高中化竞教练群271751511 大学化学群691761499 中考生物群260595347 初高中生物竞赛群254139830 高考生物群628540619 大学生物群734414430 信息竞赛群281798334 英语口语群168570356 心算交流群131033273 初地理群208573393 高地理群271753054 初历史群271752907 高历史群271753829 初政治群57085681 高政治群261712470

## 数学奥林匹克小丛书 (第二版) 编委会

- 
- 冯志刚 第53届IMO中国队副领队、上海中学特级教师
- 
- 葛 军 博士、中国数学奥林匹克高级教练、南京师范大学副教授  
江苏省中学数学教学研究会副理事长
- 
- 冷岗松 国家集训队教练、上海大学教授、博士生导师
- 
- 李胜宏 第44届IMO中国队领队、浙江大学教授、博士生导师
- 
- 李伟固 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
北京大学教授、博士生导师
- 
- 刘诗雄 华南师范大学中山附属中学校长、中学数学特级教师
- 
- 倪 明 华东师范大学出版社教辅分社社长、编审
- 
- 单 增 第30、31届IMO中国队领队、南京师范大学教授、博士生导师
- 
- 吴建平 中国数学会普及工作委员会主任、中国数学奥林匹克委员会副主席
- 
- 熊 斌 第46、49、51、52、53届IMO中国队领队  
中国数学奥林匹克委员会委员、华东师范大学教授、博士生导师
- 
- 余红兵 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
苏州大学教授、博士生导师
- 
- 朱华伟 中国教育数学学会常务副理事长、国家集训队教练  
广州大学软件所所长、研究员

# 总 序



数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegő)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因

为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书, 规模大、专题细. 据我所知, 这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述, 而且对竞赛题作了精到的分析解答, 不少出自作者自己的研究所得, 是一套很好的数学竞赛专题教程, 也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人員, 不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献, 为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上, 策划组织了这套丛书, 花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作, 并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

002

王元, 著名数学家, 中国科学院院士, 曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

总 序



<b>1</b>	<b>映射与函数</b>	1
1.1	映射	1
1.2	函数	9
	习题 1	17
<b>2</b>	<b>函数的基本性质</b>	19
2.1	奇偶性	19
2.2	单调性	22
2.3	周期性	27
	习题 2	32
<b>3</b>	<b>几个常见的初等函数</b>	35
3.1	二次函数	35
3.2	幂函数、指数函数和对数函数	41
3.3	函数 $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$	44
	习题 3	48
<b>4</b>	<b>函数的最大值与最小值</b>	51
4.1	配方法	51
4.2	判别式法	53
4.3	不等式法	55
4.4	换元法	58
4.5	构造法	60
4.6	利用函数性质	63

习题 4	66
<b>5 构造函数解题</b>	68
5.1 构造函数证明不等式	68
5.2 构造函数解方程与求函数值	71
5.3 构造函数解决其他问题	73
习题 5	76
<b>6 函数的迭代</b>	78
6.1 函数迭代的定义	78
6.2 $f^{(n)}(x)$ 的求法	83
6.3 函数迭代的应用	95
习题 6	99
<b>7 函数方程的解法</b>	101
7.1 代换法	101
7.2 赋值法	106
7.3 柯西法	115
7.4 递归法	120
7.5 综合题	124
习题 7	128
<b>习题解答</b>	133

002

# 映射与函数



## 1.1 映 射

映射是数学中的一个基本概念, 几乎每一个数学分支都要用到它.

**定义 1.1** 设  $A$  和  $B$  是两个给定的集合, 如果按照某种对应法则  $f$ , 使得对于每一个  $x \in A$ , 通过  $f$ , 唯一确定一个  $y \in B$ , 那么就称  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射, 记为

$$f: A \rightarrow B.$$

集合  $A$  叫做映射  $f$  的定义域, 集合  $B$  叫做映射  $f$  的值域, 称  $y$  为  $x$  在映射  $f$  作用下的象, 记作  $y = f(x)$ , 并用符号

$$f: x \mapsto y$$

表示, 称  $x$  为  $y$  的一个原象.

**例 1** 设集合  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x, y, z\}$ .

判断以下三种对应:

$$f: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x,$$

$$g: a \mapsto y, c \mapsto x,$$

$$h: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x, c \mapsto z,$$

是否是  $A$  到  $B$  的映射.

**解**

$$f: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x$$

是  $A$  到  $B$  的一个映射.

而

$$g: a \mapsto y, c \mapsto x$$

不是  $A$  到  $B$  的映射, 因为  $b$  在  $g$  的作用下没有象.

$$h: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x, c \mapsto z$$

也不是  $A$  到  $B$  的映射. 因为  $A$  中元素  $c$  有  $B$  中两个元素  $x$  和  $z$  与它对应.

**例 2** 设  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ .

(1) 问从  $A$  到  $B$  的不同的映射有多少个?

(2) 从  $A$  到  $B$  的映射满足  $f(a_1) > f(a_2) \geq f(a_3)$ , 确定这样的映射  $f: A \rightarrow B$  的个数.

**解** (1) 确定  $a_1$  的象, 有 3 种方法; 确定  $a_2$  的象, 也有 3 种方法; 确定  $a_3$  的象, 还是有 3 种方法. 所以, 从  $A$  到  $B$  不同的映射共有

$$3 \times 3 \times 3 = 27(\text{个}).$$

(2) 由  $f(a_1) > f(a_2) \geq f(a_3)$  知,  $f(a_1) = 0$  或 1.

若  $f(a_1) = 0$ , 则  $f(a_2) = f(a_3) = -1$ .

若  $f(a_1) = 1$ , 则  $f(a_2) = f(a_3) = 0$ , 或  $f(a_2) = f(a_3) = -1$ , 或  $f(a_2) = 0$ ,  $f(a_3) = -1$ .

综上, 共有 4 种满足题意的映射.

**定义 1.2** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射, 如果对任意的  $a_1, a_2 \in A$ , 当  $a_1 \neq a_2$  时, 必有  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , 那么称  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个单射. 如果对于任意  $b \in B$ , 均存在  $a \in A$ , 使得  $f(a) = b$ , 那么称  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个满射.

若  $A = B$ ,  $f$  定义为

$$f: x \mapsto x \quad (\text{其中 } x \in A),$$

则这个映射称为  $A$  上的恒等映射(或单位映射).

**例 3** 设  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ .

(1) 写出一个  $f: A \rightarrow B$ , 使得  $f$  是单射, 并求  $A$  到  $B$  的单射个数;

(2) 写出一个  $f: A \rightarrow B$ , 使得  $f$  不是单射, 并求所有这种映射的个数;

(3)  $A$  到  $B$  的映射能否是满射?

**解** (1) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3$$

就是  $A$  到  $B$  的一个单射.

这种映射的个数为  $P_4^3 = 24(\text{个})$ .

(2) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_1, a_3 \mapsto b_1$$

即为所求.

这种映射的个数为  $4^3 - P_4^3 = 40(\text{个})$ .

(3) 答案是否定的.

由于集合  $A$  中的每一个元素恰与集合  $B$  中的一个元素对应, 而  $|A| =$



3,  $|B| = 4$ (用  $|A|$  表示集合  $A$  的元素个数), 所以集合  $B$  中至少有一个元素, 在集合  $A$  中找不到与它对应的元素. 因而  $A$  到  $B$  的满射不存在.

一般地, 如果  $A$  到  $B$  有一个单射, 那么  $|A| \leq |B|$ ; 如果  $A$  到  $B$  有一个满射, 那么  $|A| \geq |B|$ .

**例 4**  $\mathbf{N}_+$  是正整数集合,  $\mathbf{N}_+$  到  $\mathbf{N}_+$  的映射  $p, q$  定义如下:

$$p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 4, p(4) = 1.$$

$$p(n) = n, \text{当 } n \geq 5 \text{ 时};$$

$$q(1) = 3, q(2) = 4, q(3) = 2, q(4) = 1.$$

$$q(n) = n, \text{当 } n \geq 5 \text{ 时}.$$

(1) 作出  $\mathbf{N}_+$  到  $\mathbf{N}_+$  的映射  $f$ , 使得对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  都有

$$f(f(n)) = p(n) + 2.$$

举出这样的映射  $f$  的一个例子;

(2) 证明:  $\mathbf{N}_+$  到  $\mathbf{N}_+$  的任何映射  $f$ , 都不可能使得对一切  $n \in \mathbf{N}_+$ , 都有

$$f(f(n)) = q(n) + 2.$$

**解** (1) 由  $p(n)$  的定义及  $f(f(n)) = p(n) + 2$ , 可以作出映射的对应表:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow \dots \\ 2 &\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

于是可构造出  $f(n)$ , 其对应关系由下表的箭头所示:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & \dots \end{array}$$

即  $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 7, f(4) = 5, f(5) = 3$ . 当  $n (\geq 6)$  是偶数时,  $f(n) = n + 3$ ; 当  $n (\geq 6)$  是奇数时,  $f(n) = n - 1$ . 这个映射满足  $f(f(n)) = p(n) + 2$ .

(2) 用反证法. 假设存在映射  $f$ , 使得对一切  $n \in \mathbf{N}_+$ ,  $f(f(n)) = q(n) + 2$ , 那么有

$$f(f(1)) = q(1) + 2 = 5, f(f(5)) = q(5) + 2 = 7, \dots,$$

$$f(f(2)) = q(2) + 2 = 6,$$

$$f(f(6)) = q(6) + 2 = 8, \dots, f(f(3)) = q(3) + 2 = 4,$$

$f(f(4))=q(4)+2=3$ .  $f(f(n))$ 的对应的值是

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \dots, \\ 2 &\rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow \dots, \\ 3 &\rightarrow 4 \rightarrow 3. \end{aligned}$$

由于  $q$  是单射, 因此  $f$  也是单射. 设

$$f(3) = a, f(4) = b.$$

那么  $f(a) = f(f(3)) = 4$ ,  $f(b) = f(f(4)) = 3$ . 所以

$$f(f(a)) = f(4) = b, f(f(b)) = f(3) = a.$$

若  $b \geq 5$ , 则

$$\begin{aligned} a &= f(f(b)) = q(b) + 2 = b + 2 \geq 7, \\ b &= f(f(a)) = q(a) + 2 = a + 2 = b + 4, \end{aligned}$$

矛盾.

若  $a \geq 5$ , 同样可推得矛盾.

若  $a \leq 4$ ,  $b \leq 4$ , 则

$$\begin{aligned} a &= q(b) + 2 \geq 3, \\ b &= q(a) + 2 \geq 3. \end{aligned}$$

于是  $a, b$  只能是 3、4 或 4、3.

当  $a = 3, b = 4$  时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2;$$

当  $a = 4, b = 3$  时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2.$$

因此, 对一切  $n \in \mathbf{N}_+$ , 使  $f(f(n)) = q(n) + 2$  的映射  $f$  不存在.

**例 5** 设  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $f: A \rightarrow A$  是  $A$  到  $A$  上的映射. 对于  $i \in A$ , 记  $d_i$  为  $i - f(i)$  被 7 除后所得的余数 ( $0 \leq d_i < 7$ ). 如果  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$  两两不同, 则称  $f$  是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射.

(1) 判断下面两个  $A$  到  $A$  上的映射  $f_1, f_2$  是不是  $D$  映射;

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(i)$	0	4	6	5	1	3	2

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(i)$	1	6	4	2	0	5	3

(2) 设  $f$  是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射, 令

$$F(i) = d_i, i \in A,$$

证明:  $F$  也是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射;

(3) 证明: 所有  $A$  到  $A$  上的不同的  $D$  映射的个数是奇数.

解 (1) 对于  $f_1$ , 容易算得  $d_0 = 0, d_1 = 4, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 3, d_5 = 2, d_6 = 4$ . 由  $D$  映射的定义知,  $f_1$  不是  $D$  映射.

对于  $f_2$ , 可算得  $d_0 = 6, d_1 = 2, d_2 = 5, d_3 = 1, d_4 = 4, d_5 = 0, d_6 = 3$ , 故  $f_2$  是  $D$  映射.

(2) 由于  $f$  是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射, 因此,  $d_0, d_1, \dots, d_6$  两两不同, 并且  $0 \leq d_i < 7, 0 \leq i \leq 6$ . 所以,  $F$  是  $A$  到  $A$  上的映射.

由  $d_i$  的定义知,

$$i - f(i) \equiv d_i \pmod{7},$$

所以

$$i - F(i) = i - d_i \equiv f(i) \pmod{7}.$$

因为  $0 \leq f(i) \leq 6$ , 所以从上式知,  $f(i)$  就是  $i - F(i)$  被 7 除所得的余数. 又因为  $f(0), f(1), \dots, f(6)$  两两不同, 所以  $F$  是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射.

(3) 显然,  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射的数目是有限多个.

由上面第(2)小题知, 给定一个  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射  $f$ , 可以得到  $A$  到  $A$  上的另一个  $D$  映射. 下面我们先来计算满足  $F \neq f$  的  $D$  映射的数目.

设  $f$  是  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射,  $F$  是从  $f$  出发按第(2)小题的方法所得到的  $D$  映射. 对于  $F$ , 用同样的方法又可以得到一个  $D$  映射  $G$ , 由第(2)小题知,  $i - F(i)$  被 7 除所得的余数就是  $f(i)$ , 即

$$G(i) = f(i), i = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

从而  $G = f$ . 也就是说, 从  $F$  出来, 按第(2)小题的方法所得到的  $D$  映射恰好就是原来的  $f$ . 因此, 对于满足  $F \neq f$  的  $D$  映射, 都可以用第(2)小题的方法使它们两两配对. 这样的  $D$  映射的数目是偶数.

接下来计算满足  $F = f$  的  $D$  映射的数目.

因为

$$i - F(i) \equiv f(i) \pmod{7},$$

$$F(i) = f(i),$$

所以

$$2f(i) \equiv i \pmod{7},$$

其中,  $0 \leq i \leq 6, 0 \leq f(i) \leq 6$ .

当  $i = 0$  时,  $f(0) = 0$ ; 当  $i = 1$  时,  $f(1) = 4$ ;

当  $i = 2$  时,  $f(2) = 1$ ; 当  $i = 3$  时,  $f(3) = 5$ ;

当  $i = 4$  时,  $f(4) = 2$ ; 当  $i = 5$  时,  $f(5) = 6$ ;

当  $i = 6$  时,  $f(6) = 3$ .

所以, 满足  $F = f$  的  $D$  映射(容易验证它是  $D$  映射)只有下列一个:

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$f(i)$	0	4	1	5	2	6	3

综上所述,  $A$  到  $A$  上的  $D$  映射的数目为奇数.

**定义 1.3** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射. 如果  $f$  既是单射, 又是满射, 那么  $f$  称为一一对应(或双射).

恒等映射是一一对应, 例 5(1) 中的映射  $f_1, f_2$  也都是一一对应.

如果集合  $A$  与集合  $B$  之间存在一一对应  $f$ , 那么集合  $A$  与集合  $B$  的元素个数相等, 即  $|A| = |B|$ .

反过来, 如果  $|A| = |B|$ , 那么在集合  $A$  与集合  $B$  之间必存在一个一一对应, 这只要将  $A$  中的第一个元素与  $B$  中的第一个元素对应,  $A$  中的第二个元素与  $B$  中的第二个元素对应, 依此类推即可.

**例 6** 给定一个正整数  $n$ . 有多少个满足条件

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$$

的四元有序数组  $(a, b, c, d)$ ?

**解** 作映射  $f$ :

$$(a, b, c, d) \mapsto (a, b+1, c+2, d+3).$$

于是  $f$  是从集合  $A = \{(a, b, c, d) \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n\}$  到集合  $B = \{(a, b', c', d') \mid 0 \leq a < b' < c' < d' \leq n+3\}$  的一个映射. 容易验证这个映射是一一对应. 所以  $|A| = |B|$ .

由于  $|B|$  就是集合  $\{0, 1, 2, \dots, n+3\}$  的四元子集的个数, 即  $C_{n+4}^4$ , 从而  $|A| = C_{n+4}^4$ .

**说明** 利用一一对应,可以帮助我们解决许多组合计数问题.当我们欲求集合  $A$  的元素个数时,可以寻找一个既能与集合  $A$  建立一一对应又便于计数的集合  $B$ ,算出集合  $B$  的元素个数即可.本例就是如此,下面再看一个有趣的问题.

**例 7** 数学竞赛命题委员会有 9 名教授组成.命好的试题藏在一个保险箱里,要求至少有 6 名教授在场时才能打开保险箱.问保险箱至少应安上多少把锁,配多少把钥匙,怎样把钥匙发给命题委员?

**解** 设  $B$  是保险箱上所安的锁的集合, $A$  是 9 名命题委员中所有 5 人组的集合.显然

$$|A| = C_9^5 = 126.$$

对于一个 5 人组  $a \in A$ ,依题意,必有唯一的一把锁  $b \in B$ ,使得 5 人组中无人能打开锁  $b$ .令  $b$  是  $a$  在  $A$  到  $B$  的映射  $f$  下的象,即  $b = f(a)$ .于是便定义了集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射  $f$ .下证  $f$  是一一对应.

对于集合  $A$  中的两个不同的 5 人组  $a_1, a_2$ ,它们所对应的锁  $b_1 (= f(a_1)), b_2 (= f(a_2))$  必不相同.否则,若  $b_1 = b_2$ ,则当两个 5 人组  $a_1$  与  $a_2$  (其中至少有 6 名命题委员)都在场时,仍然打不开锁  $b_1$ ,这与题设矛盾,从而  $f$  是单射.

又对每一把锁  $b \in B$ ,必有一个 5 人组  $a \in A$ ,他们不能打开锁  $b$ ,即  $b = f(a)$ ,因此  $f$  是满射.

综上所述, $f$  是  $A$  到  $B$  的一一对应.

所以  $|B| = |A| = 126$ ,即应安 126 把锁.

现在来考虑如何配钥匙.对于每把锁  $b \in B$ ,必有 5 人组  $a \in A$ ,他们中的每一个人都不能打开锁  $b$ ,而另外的 4 个人每个人都能打开锁  $b$ ,因此,每把锁应配 4 把钥匙,分给与这把锁对应的 5 人组之外的 4 个人.故总共应配  $4 \times 126 = 504$  把钥匙,并把每把锁的 4 把钥匙分发给一个 4 人小组的每个人,不同的 4 人组对应于不同的钥匙.

**例 8** 设集合  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .若  $X$  是  $S_n$  的子集,把  $X$  中的所有数的和称为  $X$  的“容量”(规定空集的容量为 0).若  $X$  的容量为奇(偶)数,则称  $X$  为  $S_n$  的奇(偶)子集.

- (1) 求证: $S_n$  的奇子集与偶子集个数相等;
- (2) 求证:当  $n \geq 3$  时, $S_n$  的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等;
- (3) 当  $n \geq 3$  时,求  $S_n$  的所有奇子集的容量之和.

(1992 年全国高中数学联赛试题)

**分析** 要证明两个集合的元素个数一样多, 一种方法是直接把这两个集合的元素个数算出来, 另一种方法是在这两个集合之间建立一个一一对应. 本题我们将用后一种方法来解.

**解** (1) 设  $A$  是  $S_n$  的任一奇子集, 构造映射  $f$  如下:

$$A \mapsto A - \{1\}, \text{若 } 1 \in A;$$

$$A \mapsto A \cup \{1\}, \text{若 } 1 \notin A.$$

(注:  $A - \{1\}$  表示从集合  $A$  中去掉 1 后得到的集合)

所以, 映射  $f$  是将奇子集映为偶子集的映射.

易知, 若  $A_1, A_2$  是  $S_n$  的两个不同的奇子集, 则  $f(A_1) \neq f(A_2)$ , 即  $f$  是单射.

又对  $S_n$  的每一个偶子集  $B$ , 若  $1 \in B$ , 则存在  $A = B - \{1\}$ , 使得  $f(A) = B$ ; 若  $1 \notin B$ , 则存在  $A = B \cup \{1\}$ , 使得  $f(A) = B$ , 从而  $f$  是满射.

所以,  $f$  是  $S_n$  的奇子集所组成的集到  $S_n$  的偶子集所组成的集之间的一一对应, 从而  $S_n$  的奇子集与偶子集个数相等, 故均为  $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$  个.

(2) 设  $a_n (b_n)$  表示  $S_n$  中全体奇(偶)子集容量之和.

若  $n (\geq 3)$  是奇数, 则  $S_n$  的奇子集有如下两类: ①  $S_{n-1}$  的奇子集; ②  $S_{n-1}$  的偶子集与集  $\{n\}$  的并, 于是得

$$a_n = a_{n-1} + (b_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}). \quad \textcircled{1}$$

又  $S_n$  的偶子集可由  $S_{n-1}$  的偶子集和  $S_{n-1}$  的奇子集与  $\{n\}$  的并构成, 所以

$$b_n = b_{n-1} + (a_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}). \quad \textcircled{2}$$

由①、②, 得  $a_n = b_n$ .

若  $n (\geq 4)$  是偶数, 同上可知

$$a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}),$$

$$b_n = b_{n-1} + (b_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}).$$

由于  $n-1$  是奇数, 由上面已证  $a_{n-1} = b_{n-1}$ , 从而  $a_n = b_n$ .

综上所述,  $a_n = b_n, n = 3, 4, \dots$

(3) 由于  $S_n$  的每一个元素均在  $2^{n-1}$  个  $S_n$  的子集中出现, 所以,  $S_n$  的所有子集容量之和为

$$2^{n-1}(1 + 2 + \dots + n) = 2^{n-2}n(n+1).$$

又由(2)知,  $a_n = b_n$ , 所以

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2} n(n+1) = 2^{n-3} n(n+1).$$

**说明** 第(2)小题的证明中,建立了递推关系.这也是解决“计数”问题的一个有效方法.

**例9** 试作开区间 $(0, 1)$ 与闭区间 $[0, 1]$ 的一一对应.

**分析** 由于 $[0, 1]$ 比 $(0, 1)$ 多了两个点,所以处理好这两个点是关键所在.

**解** 取开区间 $(0, 1)$ 的子集

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\},$$

在 $A$ 中加上两个数 $0, 1$ 后得到闭区间 $[0, 1]$ 的子集

$$B = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

显然,  $(0, 1) \setminus A = [0, 1] \setminus B$ . 于是定义映射 $f$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时,} \\ \frac{1}{n-2}, & \text{当 } x = \frac{1}{n}, n = 4, 5, \dots \text{ 时,} \\ x, & \text{当 } x \in (0, 1) \setminus A \text{ 时.} \end{cases}$$

易知 $f$ 为一一对应.

**说明** 集合 $A \setminus B$ (或 $A - B$ )定义为

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}.$$

## 1.2 函 数

函数也是数学中的一个基本而又重要的概念.在现代数学中,它几乎渗透到各个分支中.

**定义 1.4** 从非空数集 $A$ 到非空数集 $B$ 的一个映射 $f: A \rightarrow B$ 叫做 $A$ 到 $B$ 的函数,记作:

$$y = f(x), \text{ 其中 } x \in A, y \in B.$$

这里的数集  $A$  称为函数  $f$  的定义域. 对于  $A$  中的每一个元素  $x$ , 根据对应法则  $f$  所对应的  $B$  中的元素  $y$ , 称为  $f$  在点  $x$  的函数值, 记为  $f(x)$ . 全体函数值的集合

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$$

称为函数  $f$  的值域.

由于上述定义中的数集  $B$  常用实数集  $\mathbf{R}$  来代替, 定义域常用数集  $D$  表示. 于是确定函数的主要因素是两个: 对应法则(映射)  $f$  和定义域. 所以, 我们也常用

$$y = f(x), x \in D$$

来表示一个函数, 并称  $x$  为自变量,  $y$  为因变量.

根据函数  $y = f(x), x \in D$  的定义, 数集  $D$  中的每一个数  $x$  与值域  $f(D)$  中的数  $y$  相对应, 因而可以用有序数对集

$$G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

表示函数  $y = f(x), x \in D$ .

点集  $G$  在坐标平面上描绘出这个函数的图象.

在中学数学课程中, 函数的表示法主要有三种: 列表法, 图象法, 解析法.

在用解析法表示函数时, 有时无法只用一个解析式来表示函数, 而只能在定义域的不同部分用不同的解析式来表示, 这类函数称为分段函数. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ 时,} \\ \pi, & \text{当 } 1 < x \leq 8 \text{ 时.} \end{cases}$$

分段函数的一般形式为

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{当 } x \in D_1 \text{ 时,} \\ f_2(x), & \text{当 } x \in D_2 \text{ 时,} \\ \dots\dots \\ f_n(x), & \text{当 } x \in D_n \text{ 时.} \end{cases}$$

其中,  $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$ , 此时函数  $f(x)$  的定义域为



$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n.$$

有些函数无法用列表法、图象法和解析法来表示, 只能用语言来描述. 例如, 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

有时候, 函数的自变量与因变量是通过另外一些变量才建立起它们之间的对应关系的.

**定义 1.5** 设有两个函数:

$$y = f(u), u \in D;$$

$$u = g(x), x \in E.$$

如果集合  $E^* = \{x \mid g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ , 则对每一个  $x \in E^*$ , 可通过函数  $g$  对应  $D$  中唯一一个值  $u$ , 而  $u$  又通过函数  $f$  对应唯一一个值  $y$ . 这样就确定了一个定义在  $E^*$  上, 以  $x$  为自变量,  $y$  为因变量的函数, 记作

$$y = f[g(x)], x \in E^*$$

或

$$y = (f \circ g)(x), x \in E^*,$$

称为由函数  $f$  和  $g$  经过复合运算得到的复合函数.

例如, 函数  $y = f(u) = \sqrt{u}$ ,  $u \in D = [0, +\infty)$ ,  $u = g(x) = 1 - x^2$ ,  $x \in E = (-\infty, +\infty)$ , 经过复合, 得

$$y = f[g(x)] = \sqrt{1 - x^2}.$$

其定义域  $E^* = [-1, 1]$ , 值域  $f[g(E^*)] = [0, 1]$ .

自变量与因变量的关系往往是相对的.

**定义 1.6** 设函数

$$y = f(x), x \in D. \quad \textcircled{1}$$

若对于值域  $f(D)$  中每一个值  $y_0$ ,  $D$  中有且只有一个值  $x_0$ , 使得

$$f(x_0) = y_0,$$

则按此对应法则能得到一个定义在  $f(D)$  上的函数, 称这个函数为  $f$  的反函数, 记作:

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow D$$

或

$$x = f^{-1}(y), y \in f(D). \quad \textcircled{2}$$

习惯上,我们用  $x$  作为自变量的记号,  $y$  为因变量的记号,因此,函数①的反函数②可改写为

$$y = f^{-1}(x), x \in f(D).$$

**例 10** (1) 求函数  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\log_2(x^2 + 2x - 3)}$  的定义域;

(2) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[-1, 1]$ . 求  $f(ax) + f\left(\frac{x}{a}\right)$  的定义域,其中  $a > 0$ .

**解** (1) 函数的定义域是满足下列条件的解集.

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 3 > 0, \\ x^2 + 2x - 3 \neq 1. \end{cases}$$

因此,定义域为  $(-\infty, -1 - \sqrt{5}) \cup (-1 - \sqrt{5}, -3) \cup [2, +\infty)$ .

(2)  $f(ax) + f\left(\frac{x}{a}\right)$  的定义域是下列两个集合的交集:

$$D_1 = \{x \mid -1 \leq ax \leq 1\} = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right],$$

$$D_2 = \left\{x \mid -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1\right\} = [-a, a].$$

当  $a \geq 1$  时,  $a \geq \frac{1}{a}$ ,  $-a \leq -\frac{1}{a}$ , 故  $D_1 \cap D_2 = D_1$ ;

当  $0 < a < 1$  时,  $\frac{1}{a} > a$ ,  $-\frac{1}{a} < -a$ , 故  $D_1 \cap D_2 = D_2$ .

因此,  $f(ax) + f\left(\frac{x}{a}\right)$  的定义域为

$$[-a, a] (\text{当 } 0 < a < 1) \text{ 或 } \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right] (\text{当 } a \geq 1).$$

**例 11** 求函数  $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$  的值域.

(2001 年全国高中数学联赛试题)

**解** 由题设,得  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = y - x \geq 0$ , 所以

$$x^2 - 3x + 2 = y^2 - 2xy + x^2,$$

即

$$(2y - 3)x = y^2 - 2.$$

由上式知  $y \neq \frac{3}{2}$ , 且  $x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3}$ . 由  $y \geq x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3}$ , 得

$$\frac{y^2 - 3y + 2}{2y - 3} \geq 0, \frac{(y-1)(y-2)}{y - \frac{3}{2}} \geq 0.$$

所以  $1 \leq y < \frac{3}{2}$  或  $y \geq 2$ .

又任取  $y_0 \in [2, +\infty)$ , 令  $x_0 = \frac{y_0^2 - 2}{2y_0 - 3}$ , 则

$$x_0 - 2 = \frac{y_0^2 - 2}{2y_0 - 3} - 2 = \frac{(y_0 - 2)^2}{2y_0 - 3} \geq 0.$$

故  $x_0 \geq 2$ , 所以  $x_0^2 - 3x_0 + 2 \geq 0$ , 且  $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0^2 - 3x_0 + 2}$ .

任取  $y_0 \in [1, \frac{3}{2})$ , 令  $x_0 = \frac{y_0^2 - 2}{2y_0 - 3}$ , 则

$$x_0 - 1 = \frac{y_0^2 - 2}{2y_0 - 3} - 1 = \frac{(y_0 - 1)^2}{2y_0 - 3} \leq 0.$$

故  $x_0 \leq 1$ , 于是  $x_0^2 - 3x_0 + 2 \geq 0$ , 且  $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0^2 - 3x_0 + 2}$ .

综上, 所求的函数的值域为  $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$ .

**说明** 我们先求出了  $y$  的范围  $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$ , 这是不是函数的值域呢? 第二部分说明了对于  $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$  中的任意一个数  $y_0$ , 总存在一个  $x_0$ , 使得  $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0^2 - 3x_0 + 2}$ , 这就证明了函数的值域是  $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$ .

**例 12** 设函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

求  $f[f(x)]$ ,  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ ,  $g[g(x)]$ .

**解**  $f[f(x)] = 1, x \in \mathbf{R}$ .

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq \pm 1 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = \pm 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$g[g(x)] = \begin{cases} 2, & \text{当 } x \neq \pm 1 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = \pm 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

从本题可以看出,  $f[g(x)]$  不一定与  $g[f(x)]$  相等.

对于函数的图象, 有如下常见的变换:

(1) 平移变换 将函数  $y = f(x)$  的图象向左(或向右)平移  $h$  ( $h > 0$ ) 个单位后就得到函数  $y = f(x+h)$  (或  $y = f(x-h)$ ) 的图象; 将函数  $y = f(x)$  的图象向上(或向下)平移  $k$  ( $k > 0$ ) 个单位后就得到函数  $y = f(x) + k$  (或  $y = f(x) - k$ ) 的图象.

(2) 伸缩变换 将函数  $y = f(x)$  的图象上所有点的横坐标变到原来的  $\frac{1}{\omega}$  倍就得到函数  $y = f(\omega x)$  的图象; 将函数  $y = f(x)$  的图象上所有点的纵坐标变到原来的  $\frac{1}{\omega}$  倍就得到函数  $y = \frac{f(x)}{\omega}$  的图象.

(3) 对称变换 函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(-x)$  的图象分别关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点对称.

(4) 翻转变换 将函数  $y = f(x)$  的图象在  $x$  轴上方的部分不变,  $x$  轴下方的部分翻转到  $x$  轴的上方就得到函数  $y = |f(x)|$  的图象.

**例 13** 作出函数  $y = |x^2 + x - 6|$  的图象.

**解** 先作出  $y = x^2 + x - 6$  的图象, 然后将此图象在  $x$  轴下方的部分对称地翻折到  $x$  轴的上方即可, 如图 1-1 实线所示部分.

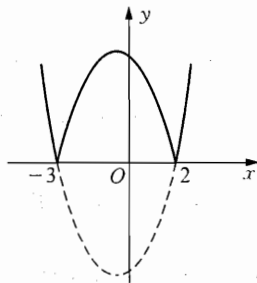


图 1-1

**例 14** (1) 设抛物线  $y = 2x^2$ , 把它向右平移  $p$  个单位, 或向下移  $q$  个单位, 都能使得抛物线与直线  $y = x - 4$  恰好有一个交点, 求  $p, q$  的值;

(2) 把抛物线  $y = 2x^2$  向左平移  $p$  个单位, 向上平移  $q$  个单位, 则得到的抛物线经过点  $(1, 3)$  与  $(4, 9)$ , 求  $p, q$  的值.

(3) 把抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  向左平移 3 个单位, 向下平移 2 个单位后, 所得图象是经过点  $(-1, -\frac{1}{2})$  的抛物线  $y = ax^2$ , 求原二次函数的解析式.

**解** (1) 抛物线  $y = 2x^2$  向右平移  $p$  个单位后, 得到的抛物线为  $y = 2(x-p)^2$ . 于是方程  $2(x-p)^2 = x - 4$  有两个相同的根, 即方程

$$2x^2 - (4p+1)x + 2p^2 + 4 = 0$$

### 根的判别式

$$\Delta = (4p + 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2p^2 + 4) = 0.$$

所以  $p = \frac{31}{8}$ . 这时的交点为  $(\frac{33}{8}, \frac{1}{8})$ .

抛物线  $y = 2x^2$  向下平移  $q$  个单位, 得到抛物线  $y = 2x^2 - q$ . 于是方程  $2x^2 - q = x - 4$  有两个相同的根, 即

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2(4 - q) = 0.$$

所以  $q = \frac{31}{8}$ . 这时的交点为  $(\frac{1}{4}, -\frac{15}{4})$ .

(2) 把  $y = 2x^2$  向左平移  $p$  个单位, 向上平移  $q$  个单位, 得到的抛物线为  $y = 2(x + p)^2 + q$ . 于是, 由题设, 得

$$\begin{cases} 3 = 2(1 + p)^2 + q, \\ 9 = 2(4 + p)^2 + q. \end{cases}$$

解方程组, 得  $p = -2, q = 1$ , 即抛物线向右平移了 2 个单位, 向上平移了 1 个单位.

(3) 首先, 抛物线  $y = ax^2$  经过点  $(-1, -\frac{1}{2})$ , 可求得  $a = -\frac{1}{2}$ .

设原来的二次函数为  $y = -\frac{1}{2}(x - h)^2 + k$ , 由题设知

$$\begin{cases} -h + 3 = 0, \\ k - 2 = 0. \end{cases}$$

解方程组, 得  $h = 3, k = 2$ . 故原二次函数为

$$y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2.$$

**例 15** 已知函数  $y = f(x)$  的图象如图 1-2 所示.

- (1) 写出  $y = f(x)$  的解析式;
- (2) 求  $y = f(2x)$  的解析式, 并作出  $y = f(2x)$  的图象;
- (3) 求  $y = f(2x - 1)$  的解析式, 并作出  $y = f(2x - 1)$  的图象.

**解** (1) 由图 1-2, 可知  $f(x) = |x| (-1 \leq x \leq 1)$ .

(2) 由第(1)小题, 知  $f(2x) = |2x| = 2|x|$ , 注意到  $-1 \leq 2x \leq 1$ , 所以

$$f(2x) = 2|x| \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right).$$

其图象如图 1-3 所示.

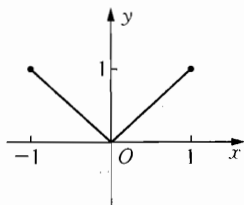


图 1-2

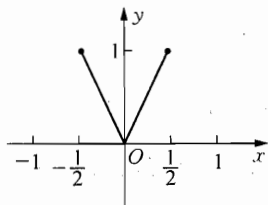


图 1-3

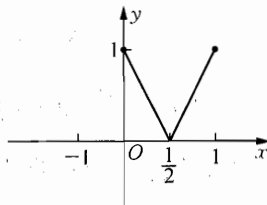


图 1-4

(3) 同上, 可得  $f(2x-1) = |2x-1|$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 其图象如图 1-4 所示.

**例 16** 设  $f(x) = x^2 + ax + b \cos x$ ,  $\{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{x \mid f(f(x)) = 0, x \in \mathbf{R}\} \neq \emptyset$ , 求满足条件的所有实数  $a, b$  的值.

**解** 设  $x_0 \in \{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $b = f(0) = f(f(x_0)) = 0$ .

于是  $f(x) = x(x+a)$ . 故

$$f(f(x)) = f(x)(f(x)+a) = x(x+a)(x^2+ax+a).$$

显然,  $a = 0$  满足题意.

若  $a \neq 0$ , 由于  $x^2+ax+a=0$  的根不可能是 0 或者  $-a$ , 故  $x^2+ax+a=0$  没有实数根, 于是  $\Delta = a^2 - 4a < 0$ , 所以  $0 < a < 4$ .

016

综上所述, 满足题设条件的  $a, b$  分别为:  $0 \leq a < 4, b = 0$ .

**例 17** 已知  $a, b, c, d$  为非零实数,  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, x \in \mathbf{R}$ , 且  $f(19) = 19, f(97) = 97$ . 若当  $x \neq -\frac{d}{c}$  时, 对于任意实数  $x$ , 均有  $f[f(x)] = x$ , 试求出  $f(x)$  值域以外的唯一数. (第 15 届美国数学邀请赛试题)

**解** 由题设, 对任意实数  $x \neq -\frac{d}{c}$ , 有  $f[f(x)] = x$ , 所以

$$\frac{a \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + d} = x.$$

化简, 得  $(a+d)cx^2 + (d^2 - a^2)x - b(a+d) = 0$ .

由于上述方程对  $x \neq -\frac{d}{c}$  恒成立, 故  $a+d=0$ , 且  $d^2 - a^2 = 0$ , 所以  $d = -a$ .

又  $f(19) = 19, f(97) = 97$ , 即 19、97 是方程  $\frac{ax+b}{cx+d} = x$  的两个根, 即

19、97 是方程  $cx^2 + (d-a)x - b = 0$  的两个根, 故由韦达定理, 得

$$\frac{a-d}{c} = 116, -\frac{b}{c} = 1843.$$

结合  $d = -a$ , 得  $a = 58c, b = -1843c, d = -58c$ , 从而

$$f(x) = \frac{58x - 1843}{x - 58} = 58 + \frac{1521}{x - 58}.$$

于是  $f(x)$  取不到 58 这个数, 即 58 是  $f(x)$  值域外的唯一数.

**例 18** 已知  $f(x), g(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上递增的一次函数,  $f(x)$  为整数当且仅当  $g(x)$  为整数. 证明: 对一切  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) - g(x)$  为整数.

(2010 年中国女子数学奥林匹克)

**证** 设  $f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a > 0, c > 0$ . 我们先证明  $a = c$ . 若不然, 由对称性不妨设  $a > c$ .

当  $x = -\frac{b}{a}$  时,  $f(x) = 0$ , 因此  $g(-\frac{b}{a})$  是整数; 当  $x = -\frac{b-1}{a}$  时,

$f(x) = 1$ , 因此  $g(-\frac{b-1}{a})$  是整数. 故

$$g(-\frac{b}{a}) - g(-\frac{b-1}{a}) = (c \cdot (-\frac{b}{a}) + d) - (c \cdot (-\frac{b-1}{a}) + d) = -\frac{c}{a}$$

是一个整数, 但这与  $a > c > 0$  矛盾, 又当  $x = -\frac{b}{a}$  时,  $f(x) = 0$ , 因此

$g(-\frac{b}{a}) = d - b$  是整数, 因此对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) - g(x) = b - d$  是整数,

从而命题得证.

## 习 题 1

**1** 设  $X$  和  $Y$  是两个集合,  $B \subset A \subset X$ . 举例说明, 存在着映射  $f: X \rightarrow Y$ , 使得

$$f(A - B) \neq f(A) - f(B).$$

并证明, 当  $f$  是单射时,  $f(A - B) = f(A) - f(B)$ .

**2** 设集合

$$M = \{x \mid 1 \leq x \leq 9, x \in \mathbf{N}\},$$

$$F = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in M\}.$$

定义  $F$  到  $Z$  的映射

$$f:(a, b, c, d) \mapsto ab - cd.$$

若  $u, v, x, y$  都是  $M$  中的元素, 且满足

$$f:(u, v, x, y) \mapsto 39,$$

$$(u, y, x, v) \mapsto 66.$$

求  $x, y, u, v$ .

**3** 给定一个正整数  $n(n \geq 6)$ , 有多少个满足条件

$$1 \leq a < b \leq c < d \leq n$$

的四元有序数组  $(a, b, c, d)$ ?

**4** 已知  $f(2x-1) = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 求函数  $f(f(x))$  的值域.

**5** 已知  $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ , 求  $f(x+1)$ .

**6** 已知两个实数集  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{50}\}$ , 若从  $A$  到  $B$  的映射  $f$  使得  $B$  中每一个元素都有原象, 且  $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \dots \leq f(a_{100})$ , 则这样的映射共有多少个? (2002 年全国高中数学联赛试题)

**7** 设  $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ , 计算:

$$f\left(\frac{1}{2006}\right) + f\left(\frac{2}{2006}\right) + f\left(\frac{3}{2006}\right) + \dots + f\left(\frac{2005}{2006}\right).$$

**8** 当  $x \in [-1, 1]$  时, 求

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 26x + 106}{x^2 + 2x + 7}$$

的值域.

**9** 已知函数  $f(x)$  对于任意实数  $x$ , 都有

$$f(x) = f(398 - x) = f(2158 - x) = f(3214 - x),$$

问: 函数值列  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(999)$  中最多有多少个不同的值?

**10** 设  $f$  为  $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  的函数, 对任意正实数  $x$ ,  $f(3x) = 3f(x)$ , 且

$$f(x) = 1 - |x - 2|, 1 \leq x \leq 3.$$

求最小的实数  $x$ , 使得  $f(x) = f(2004)$ .



2

## 函数的基本性质



函数的奇偶性、单调性、周期性是函数的最基本的性质, 它们反映了函数的重要的代数特征.

### 2.1 奇偶性

**定义 2.1** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 且  $D$  是关于原点对称的数集. 若对于任意的  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称  $f(x)$  是奇函数.

若对于任意的  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称  $f(x)$  是偶函数.

**例 1** 已知  $f(x)$  是定义在  $[-6, 6]$  上的奇函数, 且  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上是  $x$  的一次函数, 在  $[3, 6]$  上是  $x$  的二次函数. 当  $3 \leq x \leq 6$  时,  $f(x) \leq f(5) = 3$ ,  $f(6) = 2$ , 求函数  $f(x)$  的解析式.

**分析** 由于  $f(x)$  是  $[-6, 6]$  上的奇函数, 所以我们只需先求出  $f(x)$  在  $[0, 6]$  上的表达式即可. 再把  $[0, 6]$  分成两个区间  $[0, 3]$  和  $[3, 6]$ , 分别求出  $f(x)$  的解析式, 关键是求出  $f(3)$ .

**解** 由于  $f(x)$  在  $[3, 6]$  上是二次函数, 且  $f(5)$  是它的最大值, 故可设

$$f(x) = a(x-5)^2 + 3, \quad 3 \leq x \leq 6,$$

所以  $2 = f(6) = a(6-5)^2 + 3$ .

解方程, 得  $a = -1$ .

故  $f(x) = -(x-5)^2 + 3, \quad 3 \leq x \leq 6$ .

从上可知,  $f(3) = -1$ . 又  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f(0) = 0$ , 设

$$f(x) = kx, 0 \leq x \leq 3,$$

则

$$-1 = f(3) = 3k.$$

解方程, 得  $k = -\frac{1}{3}$ .

所以  $f(x) = -\frac{1}{3}x, 0 \leq x \leq 3.$

由于  $f(x) = -f(-x)$ , 所以

当  $-6 \leq x \leq -3$  时,  $3 \leq -x \leq 6$ , 于是

$$f(x) = -f(-x) = -[-(-x-5)^2 + 3] = (x+5)^2 - 3;$$

当  $-3 \leq x \leq 0$  时,  $0 \leq -x \leq 3$ , 于是

$$f(x) = -f(-x) = -\left(\frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{3}x.$$

综上所述,  $f(x)$  的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 3, & \text{当 } -6 \leq x < -3 \text{ 时,} \\ -\frac{1}{3}x, & \text{当 } -3 \leq x < 3 \text{ 时,} \\ -(x-5)^2 + 3, & \text{当 } 3 \leq x \leq 6 \text{ 时.} \end{cases}$$

020

**说明** 若奇函数的定义域  $D$  包含数  $0$ , 则必有  $f(0) = 0$ , 这是因为  $f(0) = -f(-0)$ , 从而  $f(0) = 0$ .

从奇函数和偶函数的定义知, 奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于  $y$  轴对称.

**例 2** 证明: 任何定义域关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

**证** 设定义域关于原点对称的函数为  $f(x)$ , 则  $f(x)$  与  $f(-x)$  ( $x \in D$ ) 同时有意义. 因为

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

所以, 令  $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ ,  $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , 下面我们来验证  $f_1(x)$  是偶函数,  $f_2(x)$  是奇函数.

$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x),$$

$$f_2(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_2(x).$$

故  $f_1(x)$  为偶函数,  $f_2(x)$  为奇函数, 从而命题得证.

**说明** 证明中的  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  是如何想出来的呢? 其实,  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  是可以“解”出来的. 设  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , 其中  $f_1(x)$  是偶函数,  $f_2(x)$  是奇函数. 则

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$f(-x) = f_1(x) - f_2(x),$$

解方程组, 得

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

**例3** 设函数  $f(x)$  对所有的实数  $x$  都满足  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , 求证: 存在 4 个函数  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 满足:

(1) 对  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $f_i(x)$  是偶函数, 且对任意的实数  $x$ , 有  $f_i(x + \pi) = f_i(x)$ ;

(2) 对任意的实数  $x$ , 有  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)\cos x + f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x$ .  
 (2007 年全国高中数学联赛)

**证** 记  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ ,  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , 则  $f(x) = g(x) + h(x)$ , 且  $g(x)$  是偶函数,  $h(x)$  是奇函数, 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $g(x + 2\pi) = g(x)$ ,  $h(x + 2\pi) = h(x)$ . 令

$$f_1(x) = \frac{g(x) + g(x + \pi)}{2},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(x + \pi)}{2\cos x}, & x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{h(x) - h(x + \pi)}{2\sin x}, & x \neq k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{h(x) + h(x + \pi)}{2\sin 2x}, & x \neq \frac{k\pi}{2}, \\ 0, & x = \frac{k\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{其中 } k \text{ 为任意整数.}$$

容易验证  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  是偶函数, 且对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f_i(x + \pi) = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

下证对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f_1(x) + f_2(x)\cos x = g(x)$ .

当  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  时, 显然成立; 当  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  时, 因为

$$f_1(x) + f_2(x)\cos x = f_1(x) = \frac{g(x) + g(x + \pi)}{2},$$

而

$$\begin{aligned} g(x + \pi) &= g\left(k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = g\left(k\pi + \frac{3\pi}{2} - 2(k+1)\pi\right) \\ &= g\left(-k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = g\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = g(x), \end{aligned}$$

故对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f_1(x) + f_2(x)\cos x = g(x)$ .

下证对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x = h(x)$ .

当  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  时, 显然成立; 当  $x = k\pi$  时,  $h(x) = h(k\pi) = h(k\pi - 2k\pi) =$

$h(-k\pi) = -h(k\pi)$ , 所以  $h(x) = h(k\pi) = 0$ , 而此时

$$f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x = 0,$$

故  $h(x) = f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x$ ;

当  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  时,

$$\begin{aligned} h(x + \pi) &= h\left(k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = h\left(k\pi + \frac{3\pi}{2} - 2(k+1)\pi\right) \\ &= h\left(-k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -h\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -h(x), \end{aligned}$$

故  $f_3(x)\sin x = \frac{h(x) - h(x + \pi)}{2} = h(x)$ , 又  $f_4(x)\sin 2x = 0$ , 从而有

$$h(x) = f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x.$$

于是, 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f_3(x)\sin x + f_4(x)\sin 2x = h(x)$ .

综上所述, 结论得证.

## 2.2 单调性

**定义 2.2** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ . 如果对于任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 当

$x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么就称  $y = f(x)$  在此区间上是增函数, 如图 2-1(1) 所示.

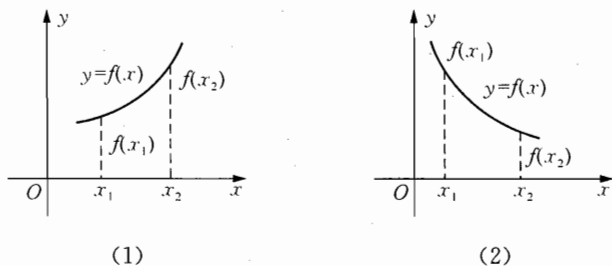


图 2-1

函数的定义域为  $I$ , 如果对于任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 那么就称  $y = f(x)$  在此区间上是减函数, 如图 2-1(2) 所示.

如果函数  $y = f(x)$  在某区间上是增函数或减函数, 那么就称  $y = f(x)$  在此区间上有(严格的)单调性, 这一区间叫做  $y = f(x)$  的单调区间.

对于函数的单调性, 我们应该注意以下几点:

(1) 函数的单调性是函数的一个重要性质, 但讨论函数的单调性必须在定义域内进行, 即函数的单调区间是定义域的子区间.

(2) 函数的单调性是对某一区间而言的, 要指明函数的单调性, 必须指明是在其定义域的哪一个子区间上, 有的函数在其整个定义域上都是增函数, 有的函数在其整个定义域上都是减函数; 而有的函数在定义域的一些子区间上是增函数, 在另一些子区间上是减函数.

(3) 某个函数在一个区间上是增(减)函数, 在另一区间上也是增(减)函数, 绝不能说它在这两个区间的并集上也是增(减)函数. 例如,  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 在  $(-\infty, 0)$  上也是减函数, 它有两个减区间, 但绝不能说  $y = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上也是减函数.

(4) 函数的单调性反映在其图象上是指函数图象的走势. 在单调区间上, 增函数的图象是上升的, 减函数的图象是下降的.

(5) 中学数学教材中所指的单调性是严格单调的, 即必须是  $f(x_1) < f(x_2)$  或  $f(x_1) > f(x_2)$ , 绝不能是  $f(x_1) \leq f(x_2)$  或  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

关于函数的单调性, 有如下性质:

(1) 若函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  在公共区间  $A$  上都是增(减)函数, 则函数  $y = f(x) + g(x)$  在  $A$  上也是增(减)函数.

(2) 若两个正值函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  在公共区间  $A$  上都是增(减)

函数, 则函数  $y = f(x)g(x)$  在  $A$  上也是增(减)函数;

若两个负值函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  在公共区间  $A$  上都是增(减)函数, 则函数  $y = f(x)g(x)$  在  $A$  上是减(增)函数.

(3) 若函数  $y = f(x)$  是区间  $A$  上的增(减)函数, 值域为  $C$ , 则其反函数  $y = f^{-1}(x)$  是  $C$  上的增(减)函数.

(4) 若函数  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  在相关区间上是单调函数, 则函数  $y = f(g(x))$  在此区间上也是单调函数; 并且若  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  的单调性相同(相反), 则  $y = f(g(x))$  是增(减)函数.

**例 4** 求  $y = (3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1) + (2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1)$  的图象与  $x$  轴的交点坐标.

**分析** 仔细观察所给的式子, 发现

$$y = (3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1) + (2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1),$$

从而找到了解题途径.

**解** 因为  $y = (3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1) + (2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1)$ .

令  $f(t) = t(\sqrt{t^2+4}+1)$ , 易知  $f(t)$  是奇函数, 且  $f(t)$  是增函数, 所以

$$y = f(3x-1) + f(2x-3).$$

当  $y = 0$  时,  $f(3x-1) = -f(2x-3) = f(3-2x)$ , 所以

$$3x-1 = 3-2x.$$

解方程, 得  $x = \frac{4}{5}$ .

故图象与  $x$  轴的交点坐标为  $(\frac{4}{5}, 0)$ .

**例 5** 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图象以  $y$  轴为对称轴. 已知  $a + b = 1$ , 并且若点  $(x, y)$  在  $y = f(x)$  的图象上, 则点  $(x, y^2 + 1)$  在函数  $g(x) = f(f(x))$  的图象上.

(1) 求  $g(x)$  的解析式;

(2) 设  $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$ , 问是否存在实数  $\lambda$ , 使  $F(x)$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  内是减函数, 在  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$  内是增函数.

**解** (1) 因  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的对称轴为  $y$  轴, 即  $-\frac{b}{2a} = 0$ , 故  $b = 0$ ,

从而  $a = 1, f(x) = x^2 + c$ .

设  $(x_0, y_0)$  在  $y = f(x)$  的图象上, 由题意知, 点  $(x_0, y_0^2 + 1)$  在  $y = f(f(x))$  的图象上, 即

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0^2 + c, \\ y_0^2 + 1 &= (x_0^2 + c)^2 + c. \end{aligned}$$

从上面两式易知  $c = 1$ . 因此  $f(x) = x^2 + 1$ . 进而

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 + 1.$$

(2) 由第(1)小题, 得

$$F(x) = g(x) - \lambda f(x) = x^4 + (2 - \lambda)x^2 + 2 - \lambda.$$

设  $x_1 < x_2 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 2 - \lambda).$$

要使  $F(x)$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  内为减函数, 只需  $F(x_1) - F(x_2) > 0$ , 又因为  $x_1^2 - x_2^2 > 0$ , 故只要

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 - \lambda > 0.$$

所以  $\lambda < x_1^2 + x_2^2 + 2$ .

然而当  $x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  时,

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 > 3.$$

因此只要  $\lambda \leq 3$ ,  $F(x)$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  内是减函数.

同理, 当  $\lambda \geq 3$  时,  $F(x)$  在  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$  内是增函数.

综上所述, 存在唯一的实数  $\lambda = 3$ , 使得对应的  $F(x)$  满足要求.

**例 6** 已知  $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , 且  $\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0. \end{cases}$  求  $\cos(x + 2y)$  的值. (1994 年全国高中数学联赛试题)

**分析** 此题的特点就是入口非常小, 所求的  $\cos(x + 2y)$  的值好像与题设条件没有什么关系. 我们再对方程组中的三个变量  $x, y, a$  的系数进行观察,

大胆想像,从中利用立方和公式、倍角公式、 $t^3 + \sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的单调性,就能找到一条通向胜利之路.

解 由于 
$$\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0. \end{cases}$$

将第二式乘以 2 与第一式相加并整理,得

$$x^3 + \sin x = (-2y)^3 + \sin(-2y).$$

已知  $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ , 所以  $x, -2y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

构造函数  $f(t) = t^3 + \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . 则由  $f(t) = t^3 + \sin t$  的单调性可知  $x = -2y$ , 所以  $x + 2y = 0$ .

于是  $\cos(x + 2y) = 1$ .

评注 这是一道经典的好题. 好在它既能考查学生基础知识的掌握程度, 又能考查学生对基础知识的灵活应用能力, 还能考查学生对各数学分支的基础知识的综合整合能力. 其中涉及的知识点有代数公式, 方程变形, 三角公式, 函数单调性等等.

026

例 7 已知函数  $f(x) = \frac{\sin(\pi x) - \cos(\pi x) + 2}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\right)$ , 求  $f(x)$  的最小值. (2007 年全国高中数学联赛)

解 因为  $f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) + 2}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\right)$ , 故可设  $g(x) = \sqrt{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\right)$ , 则  $g(x) \geq 0$ ,  $g(x)$  在  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$  上是增函数, 在  $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$  上是减函数, 且  $y = g(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{3}{4}$  对称. 那么对任意  $x_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ , 存在  $x_2 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ , 使得  $g(x_2) = g(x_1)$ . 于是

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{g(x_1) + 2}{\sqrt{x_1}} = \frac{g(x_2) + 2}{\sqrt{x_1}} \\ &\geq \frac{g(x_2) + 2}{\sqrt{x_2}} = f(x_2), \end{aligned}$$

而  $f(x)$  在  $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$  上是减函数, 所以  $f(x) \geq f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , 即  $f(x)$  在



$[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$ 上的最小值是 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ .

**例8** 证明:函数 $3x^2 + x$ 可以表示为两个单调递增的多项式函数之差.

**证** 因为有恒等式

$$3x^2 + x \equiv (x+1)^3 - (x^3 + 2x + 1),$$

而函数 $g(x) = (x+1)^3$ ,  $h(x) = x^3 + 2x + 1$ 都是单调递增的多项式函数,从而命题得证.

**说明** 一般地,任意实系数多项式可表示为两个单调递增的多项式函数之差.

## 2.3 周期性

**定义2.3** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ ,如果存在一个常数 $T \neq 0$ ,使得对每个 $x \in D$ ,都有

$$f(x+T) = f(x),$$

那么称 $f(x)$ 是周期函数, $T$ 为 $f(x)$ 的一个周期.如果 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小值 $T_0$ ,那么称 $T_0$ 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期.

一般说函数的周期都是指最小正周期.

函数 $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ 的周期为 $2\pi$ ,函数 $f(x) = \tan x$ ,  $f(x) = \cot x$ 的周期为 $\pi$ .函数 $f(x) = x - [x]$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ 的周期为1.常量函数 $f(x) = c$ 是以任何正数为周期的周期函数,但不存在最小正周期.

**例9** 证明:函数 $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

**证** 我们常用反证法来证明某个函数不是周期函数.假设 $f(x) = \sin x^2$ 是周期函数, $T$ 是它的一个正周期,那么对每个 $x \in \mathbf{R}$ ,有

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2. \quad \textcircled{1}$$

令 $x=0$ ,得 $\sin T^2 = 0$ .所以 $T^2 = k\pi$ ,  $T = \sqrt{k\pi}$ ,其中 $k$ 是某个正整数,代入 $\textcircled{1}$ 式,得

$$\sin(x + \sqrt{k\pi})^2 = \sin x^2. \quad \textcircled{2}$$

在 $\textcircled{2}$ 中令 $x = \sqrt{2}T (= \sqrt{2k\pi})$ ,得

$$\sin(\sqrt{2}T + T)^2 = \sin(\sqrt{2}T)^2,$$

即  $\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi] = \sin 2k\pi = 0.$

所以  $(\sqrt{2}+1)^2 k\pi = l\pi (l \in \mathbf{N}),$

$$(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{l}{k}.$$

由于  $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$  是无理数, 而  $\frac{l}{k}$  是有理数, 矛盾. 因此  $f(x) = \sin x^2$  不是周期函数.

**例 10** 证明: 若函数  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的图象关于点  $A(a, y_0)$  和直线  $x = b (b > a)$  皆对称, 则函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的周期函数.

**证** 已知函数  $y = f(x)$  的图象关于点  $A(a, y_0)$  与直线  $x = b$  对称, 所以对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 分别有

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad \textcircled{1}$$

$$f(b+x) = f(b-x). \quad \textcircled{2}$$

下面证明  $4(b-a)$  是  $f(x)$  的周期. 事实上, 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 反复利用  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ , 有

$$\begin{aligned} f[x+4(b-a)] &= f[b+(x+3b-4a)] \\ &= f[b-(x+3b-4a)] \\ &= f[a+(3a-2b-x)] \\ &= 2y_0 - f[a-(3a-2b-x)] \\ &= 2y_0 - f[b+(b-2a+x)] \\ &= 2y_0 - f[b-(b-2a+x)] \\ &= 2y_0 - f[a+(a-x)] \\ &= 2y_0 - 2y_0 + f[a-(a-x)] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

同理可证  $f[x-4(b-a)] = f(x)$ .

所以  $4(b-a)$  是函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的一个周期. 故  $f(x)$  是周期函数.

用完全相同的方法可以证明, 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的图象关于直线  $x = a$  与  $x = b (b > a)$  对称, 则函数  $f(x)$  是周期函数 ( $2(b-a)$  是它的一个周期).

**例 11** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 其图象关于直线  $x = 1$  对称, 对任意  $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ , 都有  $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , 且  $f(1) = a > 0$ .

(1) 求  $f(\frac{1}{2})$  和  $f(\frac{1}{4})$ ;

(2) 证明  $f(x)$  是周期函数;

(3) 记  $a_n = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n)$ .

解 (1) 令  $x_1 = x_2 = \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 即  $x \in [0, 1]$ , 有

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, x \in [0, 1].$$

$$a = f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right),$$

所以 
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}.$$

$$\sqrt{a} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{4}\right),$$

所以 
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt[4]{a}.$$

(2) 因为  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 所以

$$f(1+x) = f(1-x), x \in \mathbf{R},$$

于是 
$$f(x) = f(2-x), x \in \mathbf{R}.$$

又  $f(x)$  是偶函数, 所以  $f(-x) = f(x)$ , 故

$$f(-x) = f(2-x), x \in \mathbf{R}.$$

即 
$$f(x) = f(x+2), x \in \mathbf{R}.$$

这就表明  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的周期函数, 2 是它的一个周期.

(3) 由第(1)小题知,  $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ . 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n} + (n-1) \frac{1}{2n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left((n-1) \frac{1}{2n}\right) \\ &= \dots \\ &= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^n, \end{aligned}$$

故 
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = a^{\frac{1}{2n}}.$$

又由第(2)小题知,  $f(x)$  是一个周期函数, 2 是它的一个周期, 所以

$$f\left(2n + \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right).$$

故 
$$a_n = a^{\frac{1}{2n}}.$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \ln a\right) = 0.$$

**例 12** 求函数  $g(x) = |\sin x| + |\cos x|$  的最小正周期.

**解** 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= |\sin x| + |\cos x| \\ &= g(x). \end{aligned}$$

因此,  $g(x)$  是周期函数,  $\frac{\pi}{2}$  是它的一个周期.

下面证明  $\frac{\pi}{2}$  是  $g(x)$  的最小正周期.

设函数  $g(x)$  有小于  $\frac{\pi}{2}$  的正周期  $T$ , 则对  $x \in \mathbf{R}$ , 有

$$|\sin(x+T)| + |\cos(x+T)| = |\sin x| + |\cos x|. \quad ①$$

令  $x = 0$  代入①, 得

$$|\sin T| + |\cos T| = 1.$$

两边平方, 得

$$2|\sin T||\cos T| = 0,$$

即 
$$|\sin 2T| = 0.$$

从而  $\sin 2T = 0$ , 但  $0 < T < \frac{\pi}{2}$ , 不可能.

所以  $g(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$ .

**说明** 本题所用的方法是证明周期函数的某个周期是该函数的最小正周期的常用方法.

**例 13** 设函数  $f(x)$  满足:  $f(x+1) - f(x) = 2x + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 且当  $x \in [0, 1]$  时有  $|f(x)| \leq 1$ , 求证: 当  $x \in \mathbf{R}$  时, 有  $|f(x)| \leq 2 + x^2$ .

(2007年中国东南数学奥林匹克)

证 令  $g(x) = f(x) - x^2$ , 则

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) - (x+1)^2 + x^2 = 0,$$

所以  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上以 1 为周期的周期函数; 又由条件, 当  $x \in [0, 1]$  时有  $|f(x)| \leq 1$ , 可得, 当  $x \in [0, 1]$  时,

$$|g(x)| = |f(x) - x^2| \leq |f(x)| + |x^2| \leq 2,$$

所以周期函数  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有  $|g(x)| \leq 2$ . 据此知, 在  $\mathbf{R}$  上,

$$|f(x)| = |g(x) + x^2| \leq |g(x)| + |x^2| \leq 2 + x^2.$$

**例 14** 在  $\mathbf{R}$  上是否存在非常数的周期函数, 它没有最小正周期?

**解** 答案是肯定的.

定义函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

显然, 任何正的有理数都是  $D(x)$  的周期, 因此  $D(x)$  没有最小正周期.

函数  $D(x)$  称为狄利克莱函数, 在高等数学中还会遇到它.

**例 15** 设  $f(x)$  是周期函数,  $T$  和 1 是  $f(x)$  的周期且  $0 < T < 1$ . 证明:

(1) 若  $T$  为有理数, 则存在素数  $p$ , 使  $\frac{1}{p}$  是  $f(x)$  的周期;

(2) 若  $T$  为无理数, 则存在各项均为无理数的数列  $\{a_n\}$  满足  $1 > a_n > a_{n+1} > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且每个  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 都是  $f(x)$  的周期.

(2008年全国高中数学联赛加试)

**证** (1) 若  $T$  是有理数, 则存在正整数  $m, n$  使得  $T = \frac{n}{m}$  且  $(m, n) = 1$ ,

从而存在整数  $a, b$ , 使得  $ma + nb = 1$ . 于是

$$\frac{1}{m} = \frac{ma + nb}{m} = a + bT = a \cdot 1 + b \cdot T$$

是  $f(x)$  的周期.

又因  $0 < T < 1$ , 从而  $m \geq 2$ . 设  $p$  是  $m$  的素因子, 则  $m = pm'$ ,  $m' \in \mathbf{N}_+$ , 从而

$$\frac{1}{p} = m' \cdot \frac{1}{m}$$

是  $f(x)$  的周期.

(2) 若  $T$  是无理数, 令  $a_1 = 1 - \left[\frac{1}{T}\right]T$ , 则  $0 < a_1 < 1$ , 且  $a_1$  是无理数,

$$\begin{aligned} \text{令} \quad & a_2 = 1 - \left[\frac{1}{a_1}\right]a_1, \\ & \dots\dots \\ & a_{n+1} = 1 - \left[\frac{1}{a_n}\right]a_n, \\ & \dots\dots \end{aligned}$$

由数学归纳法易知  $a_n$  均为无理数且  $0 < a_n < 1$ . 又  $\frac{1}{a_n} - \left[\frac{1}{a_n}\right] < 1$ , 故  $1 < a_n + \left[\frac{1}{a_n}\right]a_n$ , 即  $a_{n+1} = 1 - \left[\frac{1}{a_n}\right]a_n < a_n$ . 因此  $\{a_n\}$  是递减数列.

最后证每个  $a_n$  是  $f(x)$  的周期. 事实上, 因  $1$  和  $T$  是  $f(x)$  的周期, 故  $a_1 = 1 - \left[\frac{1}{T}\right]T$  亦是  $f(x)$  的周期, 假设  $a_k (k \in \mathbf{N}_+)$  是  $f(x)$  的周期, 则  $a_{k+1} = 1 - \left[\frac{1}{a_k}\right]a_k$  也是  $f(x)$  的周期. 由数学归纳法, 证得每个  $a_n (n=1, 2, \dots)$  均是  $f(x)$  的周期.

## 习题 2

- 1 已知  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + c \sin x + 8$  (其中  $a, b, c$  是实常数), 且  $f(-2) = 10$ , 求  $f(2)$  的值.
- 2 已知  $f(\log_a x) = \frac{a(x^2 - 1)}{x(a^2 - 1)}$  ( $a > 0, a \neq 1, x > 0$ ), 判断  $f(x)$  的单调性, 并证明你的结论.
- 3 设  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ , 函数  $g(x)$  的图象与  $y = f^{-1}(x+1)$  的图象关于  $y = x$  对称, 求  $g(3)$  的值.
- 4 已知  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的函数, 且
 
$$f(x+2)[1 - f(x)] = 1 + f(x).$$
  - (1) 求证:  $f(x)$  是周期函数;
  - (2) 若  $f(1) = 2 + \sqrt{3}$ , 求  $f(2001), f(2005)$  的值.
- 5 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数,  $f(1) = 1$ , 且对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有

$$f(x+5) \geq f(x) + 5, f(x+1) \leq f(x) + 1.$$

若  $g(x) = f(x) + 1 - x$ , 求  $g(2002)$ . (2002 年全国高中数学联赛试题)

6 设函数  $y = f(x)$  对一切实数  $x$  都满足

$$f(3+x) = f(3-x),$$

且方程  $f(x) = 0$  恰有 6 个不同的实根, 求这 6 个实根的和.

(1991 年全国高中数学联赛试题)

7 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2x - x^2$ . 问: 是否存在实数  $a, b (a \neq b)$ , 使  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ ?

8 已知

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ 2(1-x), & \text{当 } \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

定义  $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \uparrow f}, n \in \mathbf{N}^*$

(1) 求  $f_{2006}(\frac{2}{15})$ ;

(2) 设  $B = \{x \mid f_{15}(x) = x, x \in [0, 1]\}$ , 求证:  $|B| \geq 9$ .

9 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上是增函数,  $f(2a^2 + a + 1) < f(3a^2 - 2a + 1)$ . 求实数  $a$  的取值范围.

10 设函数  $f(x)$  对所有  $x > 0$  有意义, 且满足下列条件:

(1) 对于  $x > 0$ , 有  $f(x)f[f(x) + \frac{1}{x}] = 1$ ;

(2)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递增.

求  $f(1)$  的值.

11 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的不减函数 (即对于任意的  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ), 且满足:

(1)  $f(0) = 0$ ;

(2)  $f(\frac{x}{3}) = \frac{f(x)}{2}$ ;

(3)  $f(1-x) = 1 - f(x)$ .

求  $f(\frac{18}{1991})$  的值.

12 函数  $f(x)$  的定义域关于原点对称, 但不包括数 0, 对定义域中的任意数

$x$ , 在定义域中存在  $x_1, x_2$ , 使  $x = x_1 - x_2$ ,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 且满足以下三个条件:

(1)  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  定义域中的数,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  或  $0 < |x_1 - x_2| < 2a$ , 则

$$f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)f(x_2) + 1}{f(x_2) - f(x_1)};$$

(2)  $f(a) = 1$  ( $a$  是一个正的常数);

(3) 当  $0 < x < 2a$  时,  $f(x) > 0$ .

证明: (1)  $f(x)$  是奇函数;

(2)  $f(x)$  是周期函数, 并求出它的一个周期;

(3)  $f(x)$  在  $(0, 4a)$  内为减函数.



# 3

## 几个常见的初等函数



这一节我们来讨论几个常见的初等函数的性质及其解题方法.

### 3.1 二次函数

二次函数在中学数学中占有重要地位. 它形式简单, 应用极其广泛.

$f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 称为二次函数. 也常常写成:

$$f(x) = a(x-k)^2 + m \quad (a \neq 0) \text{ (顶点式)}$$

或  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  ( $a \neq 0$ ) (零点式).

二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的性质.

(1) 对称性 对任意实数  $x$ , 有

$$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right).$$

(2)  $f(0) = c$ .

(3) 若  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , 则  $f\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ .

(4) 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在区间  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$  上递减, 在区间  $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  上递增;

当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在区间  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$  上递增, 在区间  $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  上递减.

(5) 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  有最小值  $f_{\min}(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ;

当  $a < 0$  时,  $f(x)$  有最大值  $f_{\max}(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ .

二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象.

(1) 对称轴  $f(x)$ 关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称.

(2) 顶点 对称轴与抛物线的交点  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$  称为顶点. 当  $a > 0$  时, 顶点是抛物线的最低点; 当  $a < 0$  时, 顶点是抛物线的最高点.

(3) 开口 当  $a > 0$  时, 开口向上; 当  $a < 0$  时, 开口向下. 开口大小由  $|a|$  决定.

(4) 二次函数图象与  $x$  轴的位置关系 当  $\Delta > 0$  时, 二次函数图象与  $x$  轴有两个不同的交点; 当  $\Delta = 0$  时, 二次函数图象与  $x$  轴相切; 当  $\Delta < 0$  时, 二次函数与  $x$  轴无交点.

**例1** 设二次函数  $f(x)$  满足  $f(x-2) = f(-x-2)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  的图象在  $y$  轴上的截距为 1, 在  $x$  轴上截得的线段长为  $2\sqrt{2}$ , 求  $f(x)$  的解析式.

**分析** 由  $f(x-2) = f(-x-2)$  知,  $f(x)$  的图象关于  $x = -2$  对称.

**解** 由题设知,  $f(x)$  的图象有对称轴  $x = -2$ , 由  $f(x)$  的图象在  $x$  轴上截得的线段长为  $2\sqrt{2}$ , 可得  $f(x)$  的图象与  $x$  轴的交点为  $(-2-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(-2+\sqrt{2}, 0)$ , 于是可设

$$f(x) = a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}).$$

又  $f(0) = 1$ , 所以

$$a(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 1.$$

解方程, 得  $a = \frac{1}{2}$ .

所以  $f(x) = \frac{1}{2}(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$ ,

即  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ .

**例2** 若函数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$  在区间  $[a, b]$  上的最小值为  $2a$ , 最大值为  $2b$ , 求  $[a, b]$ . (2000 年全国高中数学联赛试题)

**解** 分如下三种情形来讨论区间  $[a, b]$ .

(1) 当  $a < b \leq 0$  时,  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上单调递增, 所以  $f(a) = 2a$ ,  $f(b) = 2b$ , 即

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2a, \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2b. \end{cases}$$

所以  $a, b$  是方程  $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{13}{2} = 0$  的两个不同实根, 而方程  $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{13}{2} = 0$  的两根异号, 不可能.

(2) 当  $a < 0 < b$  时,  $f(x)$  在  $[a, 0]$  上递增, 在  $[0, b]$  上递减. 故  $f(0) = 2b$ , 且  $\min\{f(a), f(b)\} = 2a$ .

由  $f(0) = 2b$ , 得  $b = \frac{13}{4}$ . 于是

$$f(b) = -\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0.$$

而  $a < 0$ , 故  $f(b) \neq 2a$ , 所以  $f(a) = 2a$ , 即

$$-\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2a.$$

解方程, 得  $a = -2 - \sqrt{17}$ . 此时  $[a, b] = \left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right]$ .

(3) 当  $0 \leq a < b$  时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上递减, 于是  $f(a) = 2b, f(b) = 2a$ , 即

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2b, \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2a. \end{cases}$$

解方程组, 得  $a = 1, b = 3$ , 此时  $[a, b] = [1, 3]$ .

综上所述, 所求的区间  $[a, b]$  为  $[1, 3]$  或  $\left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right]$ .

**例3** 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ), 方程  $f(x) = x$  的两个根是  $x_1$  和  $x_2$ , 且  $x_1 > 0, x_2 - x_1 > \frac{1}{a}$ . 又若  $0 < t < x_1$ , 试比较  $f(t)$  与  $x_1$  的大小.

**解** 因为  $x_1, x_2$  是方程

$$ax^2 + bx + c = x$$

的两个根, 所以

$$x_1 + x_2 = -\frac{b-1}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_1.$$

因此  $f(t) - x_1 = (at^2 + bt + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)$   
 $= a(t + x_1)(t - x_1) + b(t - x_1)$   
 $= a(t - x_1)\left(t + x_1 + \frac{b}{a}\right).$

由  $t + x_1 + \frac{b}{a} = t + \left(\frac{1}{a} - x_2\right)$   
 $= \left(t + \frac{1}{a}\right) - x_2 < \left(x_1 + \frac{1}{a}\right) - x_2 < 0,$

及  $a > 0, t - x_1 < 0$ , 得  $f(t) - x_1 > 0$ .

所以, 当  $0 < t < x_1$  时, 有  $f(t) > x_1$ .

**例4** 若关于  $x$  的方程  $3x^2 - 5x + a = 0$  的一根大于  $-2$  而小于  $0$ , 另一根大于  $1$  小于  $3$ , 求  $a$  的取值范围.

**分析** 此题由于抛物线开口向上, 故只要画出一个草图就能发现: 当  $f(-2) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(3) > 0$  时就能使方程的根满足题设条件, 然而这些条件是必需的吗? 对这个问题的分析就要用到二次函数的对称轴了.

此外本题也可采用更为自然的方法, 即利用求根公式将两根用关于  $a$  的代数式表示出来, 再利用两根的分布条件及判别式非负转化为关于  $a$  的不等式.

**解法一** 由于二次函数  $y = 3x^2 - 5x + a = 0$  的开口向上, 而二次方程  $y = 3x^2 - 5x + a = 0$  如有两个不相等的实根, 必位于二次函数  $y = 3x^2 - 5x + a = 0$  的对称轴的两侧. 对称轴左侧, 函数递减; 对称轴右侧, 函数递增. 所以必须有

$$\begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(1) < 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}$$

反过来在这种情况下, 此方程必有两满足题设的相异实根. 解此不等式组得  $-12 < a < 0$ .

**解法二** 此方程的两根为  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12a}}{6}$ . 由题设, 得

$$\begin{cases} 25 - 12a \geq 0, \\ -2 < \frac{5 - \sqrt{25 - 12a}}{6} < 0, \\ 1 < \frac{5 + \sqrt{25 - 12a}}{6} < 3. \end{cases}$$

解不等式组, 得  $-12 < a < 0$ .

**说明** 本题属于二次方程的根的分布问题, 涉及二次方程所对应的二次函数及二次不等式. 解决这类问题的常用工具是求根公式、韦达定理及二次函数的图象特性. 一般需要借助草图帮助思考, 从几何思考入手, 用代数方法解决.

**例 5** 已知函数  $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  ( $a \neq 0$ ), 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $|f(x)| \leq 1$ , 试求  $a$  的最大值.

解 由 
$$\begin{cases} f(0) = c, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}a + b + c, \\ f(1) = 3a + 2b + c \end{cases}$$
 得

$$3a = 2f(0) + 2f(1) - 4f\left(\frac{1}{2}\right).$$

所以 
$$3|a| = \left| 2f(0) + 2f(1) - 4f\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2|f(0)| + 2|f(1)| + 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 8,$$

故  $a \leq \frac{8}{3}$ .

又易知当  $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$  时满足题设条件, 所以  $a$  的最大值为  $\frac{8}{3}$ .

**例 6** 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ) 满足条件:

- (1) 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $f(x-4) = f(2-x)$ , 且  $f(x) \geq x$ ;
- (2) 当  $x \in (0, 2)$  时,  $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ ;
- (3)  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的最小值为 0.

求最大的  $m$  ( $m > 1$ ), 使得存在  $t \in \mathbf{R}$ , 只要  $x \in [1, m]$ , 就有  $f(x+t) \leq x$ .

(2002 年全国高中数学联赛试题)

**分析** 先根据题设条件(1)、(2)、(3), 把  $f(x)$  的解析式求出来, 进而再

确定  $m$  的最大值.

**解** 由  $f(x-4) = f(2-x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 可知二次函数  $f(x)$  的对称轴为  $x = -1$ . 又由(3)知, 二次函数  $f(x)$  的开口向上, 即  $a > 0$ , 故可设

$$f(x) = a(x+1)^2, (a > 0).$$

由(1)知,  $f(1) \geq 1$ , 由(2)知,  $f(1) \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = 1$ .

所以  $f(1) = 1$ , 故

$$1 = a(1+1)^2, a = \frac{1}{4}.$$

所以  $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$ .

因为  $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$  的图象开口向上, 而  $y = f(x+t)$  的图象是由  $y = f(x)$  的图象平移  $|t|$  个单位得到. 要在区间  $[1, m]$  上, 使得  $y = f(x+t)$  的图象在  $y = x$  的图象的下方, 且  $m$  最大, 则 1 和  $m$  应当是关于  $x$  的方程

040

$$\frac{1}{4}(x+t+1)^2 = x \quad \text{①}$$

的两个根.

令  $x = 1$  代入方程①, 得  $t = 0$  或  $t = -4$ .

当  $t = 0$  时, 方程①的解为  $x_1 = x_2 = 1$  (这与  $m > 1$  矛盾!);

当  $t = -4$  时, 方程①的解为  $x_1 = 1, x_2 = 9$ , 所以  $m = 9$ .

又当  $t = -4$  时, 对任意  $x \in [1, 9]$ , 恒有

$$\begin{aligned} (x-1)(x-9) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-4+1)^2 &\leq x, \end{aligned}$$

即  $f(x-4) \leq x$ .

所以,  $m$  的最大值为 9.

**说明** 我们由  $f(x-4) = f(2-x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  导出  $f(x)$  的图象关于  $x = -1$  对称. 一般地, 若  $f(x-a) = f(b-x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 则

$$f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) = f\left(x + \frac{b+a}{2} - a\right) = f\left(b-x - \frac{b+a}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{b-a}{2} - x\right).$$

故  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{b-a}{2}$  对称. 这个性质在解题中常常用到.

### 3.2 幂函数、指数函数和对数函数

形如  $y = x^\alpha$  的函数叫做幂函数, 其中  $x$  是自变量,  $\alpha$  是常数, 在中学阶段, 我们只研究  $\alpha \in \mathbf{Q}$  的情况.

幂函数的图象是不通过第四象限的一条曲线. 当  $\alpha > 0$  时, 图象都通过  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ , 在  $(0, +\infty)$  上是增函数; 当  $\alpha < 0$  时, 图象都通过点  $(1, 1)$ , 在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

形如  $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$  的函数叫做指数函数, 其定义域为  $\mathbf{R}$ , 值域为  $(0, +\infty)$ . 当  $0 < a < 1$  时,  $y = a^x$  是减函数; 当  $a > 1$  时,  $y = a^x$  是增函数.

形如  $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$  的函数叫做对数函数, 其定义域为  $(0, +\infty)$ , 值域为  $\mathbf{R}$ . 当  $0 < a < 1$  时,  $y = \log_a x$  是减函数, 当  $a > 1$  时,  $y = \log_a x$  是增函数.

**例 7** 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$  的单调递增区间是( ).

- A.  $(-\infty, -1)$     B.  $(-\infty, 1)$     C.  $(1, +\infty)$     D.  $(3, +\infty)$

(2002 年全国高中数学联赛试题)

**解** 由  $x^2 - 2x - 3 > 0$ , 得函数的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .

而  $u = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(3, +\infty)$  上单调递增, 所以,  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递增, 在  $(3, +\infty)$  上单调递减, 故应选 A.

**例 8** 已知  $f(x) = \left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)x$ .

(1) 请判断  $f(x)$  的奇偶性, 并证明  $f(x) > 0$ ;

(2) 设  $F(x) = f(x+t) - f(x-t) (t \neq 0)$ , 判断  $F(x)$  的奇偶性.

**分析** 第(1)小题的解决可通过尝试的办法, 根据  $f(x)$  的解析式的结构特点, 计算  $f(x) + f(-x)$  及  $f(x) - f(-x)$  可能比直接判断  $f(x)$  与  $f(-x)$  的关系来得更加方便. 解决第(2)小题的关键在于理解  $t$  是一个与  $x$  无关的常数.

**解** (1) 首先容易确定  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 0\}$ , 关于原点对称, 而

$$f(x) - f(-x) = \left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)x - \left(\frac{1}{2^{-x}-1} + \frac{1}{2}\right)(-x) = 0.$$

于是  $f(x) = f(-x)$ . 故  $f(x)$  是偶函数.

当  $x > 0$  时,  $2^x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ , 而当  $x < 0$  时, 由于  $f(x)$  是偶函数及  $f(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在其定义域上恒大于 0.

(2) 由  $\begin{cases} x+t \neq 0, \\ x-t \neq 0, \end{cases}$  知  $F(x)$  的定义域为  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq \pm t\}$ .

$$\begin{aligned} \text{因为 } F(-x) &= f(-x+t) - f(-x-t) \\ &= f(-(x-t)) - f(-(x+t)) \\ &= f(x-t) - f(x+t) = -F(x). \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  为奇函数.

**说明** 本题在两次判断函数的奇偶性时采用了不同的方法. 这是因为一般来说如果函数的解析式中含有分式、指数式、对数式时, 判断奇偶性用作差法或作商法可能更加简洁自然.

**例 9** 若函数  $g(x)$  的图象与函数  $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$  的图象关于直线  $y = x$  对称, 求  $g\left(\frac{3}{5}\right)$  的值.

042

**解法一** 先求出  $g(x)$  的解析式. 因为

$$f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x},$$

所以

$$2^x = \frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

$$x = \log_2 \frac{1-f(x)}{1+f(x)}.$$

因此  $g(x) = f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1-x}{1+x}, (-1 < x < 1)$ ,

$$\text{所以 } g\left(\frac{3}{5}\right) = \log_2 \frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

**解法二** 由题意知, 函数  $g(x)$  与  $f(x)$  互为反函数, 所以  $g\left(\frac{3}{5}\right)$  的值应是方程  $\frac{1-2^x}{1+2^x} = \frac{3}{5}$  的解. 解方程可得  $x = -2$ , 故  $g\left(\frac{3}{5}\right) = -2$ .

**说明** 解法一是常规的方法, 在求反函数时注意定义域和值域. 解法二



巧妙地利用了反函数的概念, 这是一种非常简便有效的方法.

**例 10** 已知  $0 < a < 1$ ,  $x^2 + y = 0$ , 求证:

$$\log_a(a^x + a^y) \leq \log_a 2 + \frac{1}{8}.$$

(1991 年全国高中数学联赛试题)

**证** 因为  $0 < a < 1$ , 所以  $a^x > 0$ ,  $a^y > 0$ , 由平均不等式

$$a^x + a^y \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^y} = 2a^{\frac{x+y}{2}}.$$

故  $\log_a(a^x + a^y) \leq \log_a(2a^{\frac{x+y}{2}})$

$$= \log_a 2 + \frac{1}{2}(x + y)$$

$$= \log_a 2 + \frac{1}{2}(x - x^2)$$

$$= \log_a 2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

$$\leq \log_a 2 + \frac{1}{8}.$$

**例 11** 已知  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = x^2 - 2ax + 5a - 1$ .

(1) 若函数  $f[g(x)]$  在区间  $[2, 4]$  上是单调函数, 求  $a$  的取值范围;

(2) 求函数  $g[f(x)]$  在区间  $[2, 4]$  上的最小值  $h(a)$ .

**解** (1)  $f[g(x)] = \log_2(x^2 - 2ax + 5a - 1)$ .

由  $f[g(x)]$  在区间  $[2, 4]$  上是单调函数知,  $g(x) = x^2 - 2ax + 5a - 1$  在区间  $[2, 4]$  上是单调函数, 且  $g(x) > 0$ .

$$\text{所以 } \begin{cases} a \leq 2, \\ g(2) = 4 - 4a + 5a - 1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \geq 4, \\ g(4) = 16 - 8a + 5a - 1 > 0. \end{cases}$$

解得  $-3 < a \leq 2$  或  $4 \leq a < 5$ .

故  $a$  的取值范围是  $(-3, 2] \cup [4, 5)$ .

(2)  $g[f(x)] = (\log_2 x)^2 - 2a \log_2 x + 5a - 1$ .

设  $\log_2 x = t$ , 则  $1 \leq t \leq 2$ ,  $g[f(x)] = t^2 - 2at + 5a - 1 = (t - a)^2 - a^2 + 5a - 1$ .

若  $a < 1$ , 则当  $t = 1$  时,  $g[f(x)]$  取得最小值  $3a$ ;

若  $1 \leq a \leq 2$ , 则当  $t = a$  时,  $g[f(x)]$  取得最小值  $-a^2 + 5a - 1$ ;

若  $a > 2$ , 则当  $t = 2$  时,  $g[f(x)]$  取得最小值  $a + 3$ .

**例 12** 设  $f(x) = \lg \frac{1 + 2^x + 4^x a}{3}$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ . 当  $x \in (-\infty, 1]$  时,  $f(x)$

有意义, 求  $a$  的取值范围.

**分析** 首先需理解题意, 当  $x \in (-\infty, 1]$  时,  $f(x)$  有意义, 说明当  $x \leq 1$  时, 恒有  $\frac{1+2^x+4^x a}{3} > 0$ ,

$$\text{即} \quad a > -\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$$

对  $x \leq 1$  恒成立, 故  $a$  就大于  $-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$  ( $x \in (-\infty, 1]$ ) 的最大值.

**解** 由题意知, 当  $x \leq 1$  时, 恒有

$$\frac{1+2^x+4^x a}{3} > 0.$$

$$\text{故} \quad a > -\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right], \quad x \leq 1.$$

令  $u = -\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ ,  $x \leq 1$ , 则

$$u = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}$$

在  $(-\infty, 1]$  上单调递增, 所以, 当  $x = 1$  时, 有

$$u_{\max} = -\frac{3}{4}.$$

所以  $a$  的取值范围为  $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ .

### 3.3 函数 $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$

函数  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ) 具有很广泛的应用, 下面我们来讨论它的一些性质.

$f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

当  $x > 0$  时,  $f(x) = x + \frac{a^2}{x} \geq 2a$ ;

当  $x = a$  时, 等号成立;

当  $x < 0$  时,  $f(x) = -\left((-x) + \frac{a^2}{(-x)}\right) \leq -2a$ ;

当  $x = -a$  时等号成立.

所以,  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  的值域为  $(-\infty, -2a] \cup [2a, +\infty)$ .

易知  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  是奇函数.

设  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 则

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) + a^2 \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \\ &= (x_2 - x_1) \left( 1 - \frac{a^2}{x_1 x_2} \right). \end{aligned}$$

当  $0 < x_1 < x_2 \leq a$  时, 得  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ ;

当  $a \leq x_1 < x_2$  时, 得  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

所以,  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ) 在  $(0, a]$  上是单调递减的, 在  $[a, +\infty)$  上是单调递增的.

用同样的方法可知,  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ) 在  $(-\infty, -a]$  上是单调递增的, 在  $[-a, 0)$  上是单调递减的.

函数  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ) 的图象如图3-1所示.

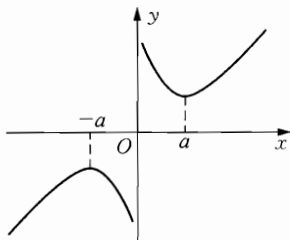


图 3-1

**例 13** 求函数  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+5}$ ,  $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$  的最大值和最小值.

**解** 因为  $x \neq 1$ , 所以

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{x-1 + \frac{4}{x-1}}, x \in \left[ \frac{3}{2}, 2 \right].$$

令  $g(t) = t + \frac{4}{t}$ ,  $t \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , 则  $g(t)$  在  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  上是减函数, 所以

$$g_{\min}(t) = g(1) = 5,$$

$$g_{\max}(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{2}.$$

所以,  $f(x)$  的最大值为  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{5}$ ,  $f(x)$  的最小值为  $f(2) = \frac{2}{17}$ .

**例 14** 设  $x, y \in \mathbf{R}^+$ ,  $x + y = c$ ,  $c$  为常数且  $c \in (0, 2]$ , 求  $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$  的最小值.

**解**  $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq xy + \frac{1}{xy} + 2.$

令  $xy = t$ , 则  $0 < t = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{c^2}{4}$ . 设

$$f(t) = t + \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq \frac{c^2}{4}.$$

由于  $0 < c \leq 2$ , 所以  $\frac{c^2}{4} \leq 1$ . 于是函数  $f(t)$  在  $\left(0, \frac{c^2}{4}\right]$  上是单调递减的,

所以

$$f_{\min}(t) = f\left(\frac{c^2}{4}\right) = \frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2}.$$

故  $u \geq \frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2} + 2.$

当  $x = y = \frac{c}{2}$  时, 等号成立.

046

所以  $u$  的最小值为  $\frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2} + 2.$

**例 15** 设  $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ , 且  $x + y + z = 1$ . 求

$$u = \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2}$$

的最小值. (2003 年湖南省高中数学竞赛试题)

**分析** 对于递增函数  $f(x)$ ,  $x \in D$ , 若  $x_1, x_2 \in D$ , 则

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0.$$

对于递减函数  $f(x)$ ,  $x \in D$ , 若  $x_1, x_2 \in D$ , 则

$$(x_1 - x_2)[f(x_2) - f(x_1)] \leq 0.$$

**解** 令  $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , 则

$$f(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} + t}.$$

由于  $t + \frac{1}{t}$  在  $(0, 1)$  上递减, 所以  $f(t)$  在  $(0, 1)$  上递增. 设  $x \in (0, 1)$ , 则

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left[f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right] \geq 0,$$

即 
$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{10}\right) \geq 0.$$

整理, 得 
$$\frac{3x^2 - x}{1+x^2} \geq \frac{9}{10} \left(x - \frac{1}{3}\right).$$

同理, 得

$$\frac{3y^2 - y}{1+y^2} \geq \frac{9}{10} \left(y - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{3z^2 - z}{1+z^2} \geq \frac{9}{10} \left(z - \frac{1}{3}\right).$$

所以 
$$u \geq \frac{9}{10}(x+y+z-1) = 0,$$

当  $x = y = z = \frac{1}{3}$  时等号成立.

故  $u$  的最小值为 0.

**例 16** 已知不等式

$$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{6}{\sin\theta + \cos\theta} - 2\sin 2\theta < 3a + 6$$

对于  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

(2004 年首届中国东南地区数学奥林匹克试题)

**分析** 首先需把  $a$  解出来, 可得  $a > g(\theta)$  (或  $a < g(\theta)$ ), 于是  $a > g_{\max}(\theta)$  (或  $a < g_{\min}(\theta)$ ). 为了方便起见, 令  $x = \sin\theta + \cos\theta$ , 可以化简.

**解** 令  $x = \sin\theta + \cos\theta$ , 由于  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 则  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , 且

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = x^2 - 1.$$

从而原不等式可化为

$$(2a+3)x + \frac{6}{x} - 2(x^2 - 1) < 3a + 6,$$

$$2x^2 - 2ax - 3x - \frac{6}{x} + 3a + 4 > 0,$$

$$2x\left(x + \frac{2}{x} - a\right) - 3\left(x + \frac{2}{x} - a\right) > 0,$$

即  $(2x - 3)\left(x + \frac{2}{x} - a\right) > 0.$

因为  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , 所以  $2x - 3 < 0$ , 故

$$x + \frac{2}{x} - a < 0.$$

所以  $a > x + \frac{2}{x}$ ,  $x \in [1, \sqrt{2}]$  恒成立.

令  $f(x) = x + \frac{2}{x}$ ,  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , 由于  $f(x)$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上单调递减, 所以

$$f_{\max}(x) = f(1) = 3,$$

$$a > f_{\max}(x) = 3.$$

所以  $a$  的取值范围为  $(3, +\infty)$ .

048

### 习题 3

- 1 如果抛物线  $y = x^2 - (k-1)x - k - 1$  与  $x$  轴的交点为  $A$ 、 $B$ , 顶点为  $C$ , 求  $\triangle ABC$  的面积的最小值.
- 2 设二次函数  $f(x) = x^2 + x + a$  ( $a > 0$ ) 满足  $f(m) < 0$ , 判断  $f(m+1)$  的符号.
- 3 已知  $f(x) = x^2 + 2x + 11$  在  $[t, t+1]$  上的最小值为  $g(t)$ , 求  $g(t)$ .
- 4 已知  $a$  是正整数, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 1)$ , 并且与  $x$  轴有两个不同的交点, 求:
  - (1)  $a$  的最小值;
  - (2)  $b+c$  的最大值.
- 5 设  $f(x) = x^2 + ax + 3 - a$ , 若  $f(x)$  在闭区间  $[-2, 2]$  上恒为非负数, 求实数  $a$  的取值范围.
- 6 设  $a$ 、 $b$  分别是方程  $\log_2 x + x - 3 = 0$  和  $2^x + x - 3 = 0$  的根, 求  $a+b$  及  $\log_2 a + 2^b$  的值.
- 7 (1) 已知函数  $y = f(\log_2 x)$  的定义域为  $[\frac{1}{2}, 2]$ , 求函数  $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right)$  的定义域;

(2) 设函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + 2a)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 求实数  $a$  的取值范围.

**8** 函数  $f(x) = a^{2x} + 2a^x - 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值为 14, 求  $a$  的值.

**9** 设  $f(x) = \min\{3 + \log_{\frac{1}{4}}x, \log_2x\}$ , 其中  $\min\{p, q\}$  表示  $p, q$  中的较小者, 求  $f(x)$  的最大值.

**10** 解方程:

$$\lg^2x - [\lg x] - 2 = 0,$$

其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数. (1995 年全国高中数学联赛试题)

**11** 求函数  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$  的最小值.

**12** 求证:  $\sin^2x + \frac{4}{\sin^2x} \geq 5$ .

**13** 求  $f(x) = \frac{4\sin x \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 1} (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  的最大值和最小值.

**14** 设实数  $a, b, c, m$  满足条件:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0,$$

且  $a \geq 0, m > 0$ . 求证: 方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一根  $x_0$  满足  $0 < x_0 < 1$ .

**15** 设  $a, b$  是整数,  $f(x) = x^2 + ax + b$ . 证明: 若对于所有整数  $x$ , 都有  $f(x) > 0$ , 则对于所有实数  $x$ , 有  $f(x) \geq 0$ .

**16** 求实数  $a$  的取值范围, 使得对任意实数  $x$  和任意  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 恒有

$$(x + 3 + 2\sin\theta\cos\theta)^2 + (x + a\sin\theta + a\cos\theta)^2 \geq \frac{1}{8}.$$

(1996 年全国高中数学联赛试题)

**17** 已知当  $x \in [0, 1]$  时, 不等式

$$x^2 \cos\theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin\theta > 0$$

恒成立, 其中  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 求  $\theta$  的取值范围.

**18** 已知  $f(x) = ax^2 + bx + c$  在  $[0, 1]$  上的函数值的绝对值不超过 1, 求  $|a| + |b| + |c|$  的最大值.

**19** 设函数  $f(x) = ax^2 + 8x + 3 (a < 0)$ , 对于给定的负数  $a$ , 有一个最大的正数  $l(a)$ , 使得在整个区间  $[0, l(a)]$  上, 不等式  $|f(x)| \leq 5$  都成立. 问:

$a$  为何值时,  $l(a)$  最大? 求出这个最大的  $l(a)$ .

(1998 年全国高中数学联赛试题)

- 20** 设函数  $f(x) = x|x-a| + b$ , 常数  $b < 2\sqrt{2} - 3$ , 且对任意  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) < 0$  恒成立. 求常数  $a$  的取值范围.

050

函数与函数方程



# 4

## 函数的最大值与最小值



我们经常会遇到各种各样的求最大值和最小值问题, 这类问题在许多情况下可以归结为求函数的最大值和最小值.

**定义** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 若存在  $x_0 \in D$ , 使得对任意  $x \in D$ , 都有

$$f(x) \leq f(x_0),$$

则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  在  $D$  上的最大值, 简记为  $f_{\max}$ . 若存在  $y_0 \in D$ , 使得对任意  $x \in D$ , 都有

$$f(x) \geq f(y_0),$$

则称  $f(y_0)$  为函数  $f(x)$  在  $D$  上的最小值, 简记为  $f_{\min}$ .

求函数的最大值和最小值问题涉及的知识面较广, 解法也灵活多变, 需要我们有很好的综合能力. 常用的方法有:

(1) 配方法; (2) 判别式法; (3) 不等式法; (4) 换元法; (5) 构造法; (6) 利用函数性质.

下面我们分别来介绍这些方法的应用.

### 4.1 配方法

利用平方数恒大于或等于 0, 将所给的函数配成若干个平方及一些常数的代数和的形式, 然后再求其最值就容易了.

**例 1** 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 求  $u = x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 3$  的最小值.

**分析** 把  $u$  写成若干个非负数的和再加上一个常数, 从而  $u$  就大于等于这个常数, 再说明当  $x, y$  取某值时,  $u$  可以取到这个常数即可.

**解**  $u = x^2 + (y-1)x + y^2 - 2y + 3$

$$= \left[ x^2 + (y-1)x + \frac{(y-1)^2}{4} \right] + y^2 - 2y + 3 - \frac{(y-1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y^2 - 2y + 1) + 2 \\ &= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 + 2 \geq 2, \end{aligned}$$

又当  $x = 0, y = 1$  时等号成立, 所以  $u$  的最小值为 2.

**说明** 在估计  $u$  的下界时, 进行了配方, 需要注意的是这些非负项是可以同时达到 0 的.

**例 2** 设  $x \in \mathbf{R}^+$ , 求函数  $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{x}$  的最小值.

**分析** 先估计  $f(x)$  的下界, 再说明这个下界是可以达到的.

**解**

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 1) + \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) + 1 \\ &= (x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 1 \geq 1, \end{aligned}$$

又当  $x = 1$  时,  $f(x) = 1$ , 所以  $f(x)$  的最小值为 1.

**说明** 在求最大(小)值时, 估计了上(下)界后, 一定要举例说明这个界是可以取到的, 才能说这就是最大(小)值, 否则就不一定对了. 例如, 本题我们也可以这样估计:

052

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 1) + \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) - 3 \\ &= (x-1)^2 + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 3 \geq -3, \end{aligned}$$

但无论  $x$  取何值时,  $f(x) \neq -3$ , 即  $-3$  不能作为  $f(x)$  的最小值.

**例 3** 试求函数  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$  在闭区间  $[-3, 3]$  上的最大值与最小值.

**解** 令  $t = x^2 + 5x$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 5 \\ &= (t+4)(t+6) + 5 \\ &= t^2 + 10t + 29. \end{aligned}$$

当  $x \in [-3, 3]$  时,  $t$  的取值范围是  $\left[-\frac{25}{4}, 24\right]$ , 如图 4-1 所示. 于是原

题转化为在  $\left[-\frac{25}{4}, 24\right]$  内求二次函数  $f(t) = t^2 + 10t + 29$  的最大值和最小值.

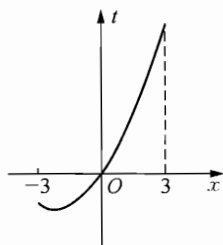


图 4-1

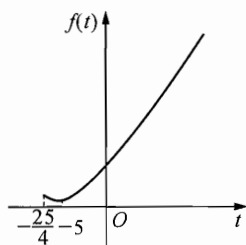


图 4-2

因  $f(t) = (t+5)^2 + 4$ , 又  $-5 \in \left[-\frac{25}{4}, 24\right]$ , 故当  $t = -5$  时,  $f_{\min} = 4$ .

而由  $-5 = x^2 + 5x$  解得  $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 但  $\frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \notin [-3, 3]$ , 故当  $x = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$  时,  $f_{\min} = 4$ . 如图 4-2 所示.

当  $t = -\frac{25}{4}$  时,  $f(t) = 5\frac{9}{16}$ ; 当  $t = 24$  时,  $f(t) = 845$ . 而  $845 > 5\frac{9}{16}$ , 所以当  $t = 24$ , 即  $x = 3$  时,  $f_{\max} = 845$ .

**说明** 一个复杂的函数式, 如能写成二次函数型的复合函数, 即  $f(x) = ag^2(x) + bg(x) + c$  ( $a, b, c$  为常数), 此时用配方法求函数的最值问题往往是行之有效的.

## 4.2 判别式法

利用实系数一元二次方程有实根, 则它的判别式  $\Delta \geq 0$ , 从而可以确定系数中参数的范围, 进而求得最值.

特别地, 对于分式函数  $y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$  的最大值与最小值问题, 常用的方法是去分母后, 化为关于  $x$  的二次方程, 然后用判别式  $\Delta \geq 0$ , 得出  $y$  的取值范围, 进而确定出  $y$  的最大值和最小值.

**例 4** 求函数  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 2x + 1}$  的最大值和最小值.

**分析** 把它写成关于  $x$  的二次方程形式, 利用  $\Delta \geq 0$  来得到  $y$  的范围.

**解** 去分母并整理, 得

$$(2y - 1)x^2 + 2(y + 1)x + (y + 3) = 0.$$

当  $y = \frac{1}{2}$  时,  $x = -\frac{7}{6}$ .

当  $y \neq \frac{1}{2}$  时, 这是一个关于  $x$  的二次方程, 由  $x \in \mathbf{R}$ , 所以

$$\Delta = [2(y+1)]^2 - 4(2y-1)(y+3) \geq 0.$$

解方程, 得  $-4 \leq y \leq 1$ .

当  $y = -4$  时,  $x = -\frac{1}{3}$ ; 当  $y = 1$  时,  $x = -2$ .

由此即知, 当  $x = -\frac{1}{3}$  时,  $y$  取最小值  $-4$ ; 当  $x = -2$  时,  $y$  取最大值  $1$ .

**说明** 在用判别式法求最值时, 应特别注意这个最值能否取到, 即是否有与最值相应的  $x$  值.

**例 5** 函数  $y = \frac{ax^2 + 3x + b}{x^2 + 1}$  的最大值为  $5\frac{1}{2}$ , 最小值为  $\frac{1}{2}$ . 求  $a, b$  的值.

**解** 将原式化为

$$(a-y)x^2 + 3x + (b-y) = 0.$$

$$\Delta = 9 - 4(a-y)(b-y) \geq 0,$$

即  $4y^2 - 4(a+b)y + 4ab - 9 \leq 0$ .

显然  $y$  的值在此不等式所对应的二次方程的两根之间, 根据求根公式, 有

$$\begin{cases} a+b + \sqrt{(a-b)^2 + 9} = 11, \\ a+b - \sqrt{(a-b)^2 + 9} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 6, \\ a-b = \pm 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 5. \end{cases}$$

以上两组都是满足题设的解.

**说明** 本题为判别式法的一种经典应用, 希望读者能熟练掌握. 从严格意义上来说, 此处的判别式法在应用时还必须考虑当  $a-y=0$  的特殊情形, 可以推出, 此时  $b=a$ , 进一步推下去 (用函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  的值域的结论) 可以发现, 这种情形无法满足题设. 虽然如此, 但这一点也必须考虑到.

**例 6** 已知函数  $f(x) = \log_2(x+1)$ , 并且当点  $(x, y)$  在  $y = f(x)$  的图象上运动时, 点  $(\frac{x}{3}, \frac{y}{2})$  在  $y = g(x)$  的图象上运动. 求函数  $p(x) = g(x) -$

$f(x)$  的最大值.

**解** 因点  $(x, y)$  在  $y = f(x)$  的图象上, 故  $y = \log_2(x+1)$ . 又点

$(\frac{x}{3}, \frac{y}{2})$  在  $y = g(x)$  的图象上, 故  $\frac{y}{2} = g(\frac{x}{3})$ . 从而

$$g(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2} \log_2(x+1),$$

即  $g(x) = \frac{1}{2} \log_2(3x+1)$ , 那么

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) - f(x) = \frac{1}{2} \log_2(3x+1) - \log_2(x+1) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 u, \end{aligned}$$

其中,

$$u = \frac{3x+1}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} = -2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}.$$

因此当  $\frac{1}{x+1} = \frac{3}{4}$ , 即  $x = \frac{1}{3}$  时,  $u_{\max} = \frac{9}{8}$ . 从而  $p(x)$  的最大值为  $\frac{1}{2} \log_2 \frac{9}{8}$ .

### 4.3 不等式法

不等式与函数的最值问题有着密切的联系, 利用不等式取等号, 就可得到一个最值问题的解, 而许多不等式又可解释为最值问题的解.

**例7** 已知  $x, y$  是实数, 且满足  $x^2 + xy + y^2 = 3$ , 求  $u = x^2 - xy + y^2$  的最大值与最小值.

**分析** 这是一个有关最值的经典问题, 有多种解法, 这里介绍两种最常见的解法. 由于已知条件都是二次的代数式, 故我们试图将其与判别式或基本不等式建立联系.

**解法一** 将题设中的两式相减再除以 2, 得  $xy = \frac{3-u}{2}$ , 再用题设的第一式相加此式及用题设的第二式相减此式分别得

$$(x+y)^2 = \frac{9-u}{2}$$

和  $(x-y)^2 = \frac{3u-3}{2},$

可得  $1 \leq u \leq 9.$

而容易验证当  $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$  时,  $u = 9;$

当  $x = y = 1$  时,  $u = 1.$

所以  $u_{\max} = 9, u_{\min} = 1.$

**解法二** 因为

$$\begin{aligned} u &= x^2 - xy + y^2 \\ &= x^2 + xy + y^2 - 2xy \\ &= 3 - 2xy, \end{aligned}$$

由于

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ 及 } x^2 + y^2 \geq -2xy,$$

将此两式分别代入  $x^2 + xy + y^2 = 3$ , 得  $xy \leq 1$  和  $xy \geq -3.$

所以  $1 \leq u = 3 - 2xy \leq 9.$

再从推导的过程中可以看到:

当  $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$  时,  $u = 9;$

当  $x = y = 1$  时,  $u = 1.$

所以  $u_{\max} = 9, u_{\min} = 1.$

**例 8** 求函数  $y = \frac{2 - \cos x}{4 + 3\cos x}$  的最大值和最小值.

**分析** 这类问题我们常可以利用  $|\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1, |a\sin x + b\cos x| = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin(x + \varphi)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  来处理.

**解** 由  $y = \frac{2 - \cos x}{4 + 3\cos x}$ , 得

$$\begin{aligned} (3y+1)\cos x &= 2-4y, \\ |3y+1| \cdot |\cos x| &= |2-4y|. \end{aligned}$$

所以  $|3y+1| \geq |2-4y|,$

即  $9y^2 + 6y + 1 \geq 4 - 16y + 16y^2.$

解不等式, 得  $\frac{1}{7} \leq y \leq 3.$

当  $\cos x = 1$ . 即  $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$  时,  $y = \frac{1}{7}$ ;

当  $\cos x = -1$ , 即  $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$  时,  $y = 3$ .

所以  $y_{\min} = \frac{1}{7}, y_{\max} = 3$ .

**例9** 设函数  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  定义为

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时;} \\ \frac{p+1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, 0 < p < q \text{ 时.} \end{cases}$$

求  $f(x)$  在区间  $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$  上的最大值.

**分析** 因为当  $x$  是无理数, 且  $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$  时,  $f(x) = x < \frac{8}{9}$ . 而

$f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17} > \frac{8}{9}$ , 只需证  $x$  是有理数时,  $f(x) \leq \frac{16}{17}$  即可.

**解** 因为  $\frac{7}{8} < \frac{7+8}{8+9} < \frac{8}{9}$ , 即  $\frac{7}{8} < \frac{15}{17} < \frac{8}{9}$ .

由定义知  $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17}$ . 下面证明:  $f(x) \leq \frac{16}{17}, x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ .

(1) 若  $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ , 且  $x$  是无理数, 则  $f(x) = x < \frac{8}{9} < \frac{16}{17}$ .

(2) 若  $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ , 且  $x$  是有理数, 设  $x = \frac{p}{q}$ , 其中  $(p, q) = 1, 0 <$

$p < q$ , 由于  $\frac{7}{8} < \frac{p}{q} < \frac{8}{9}$ , 所以  $\begin{cases} 7q < 8p, \\ 9p < 8q. \end{cases}$  于是  $\begin{cases} 7q+1 \leq 8p, \\ 9p+1 \leq 8q. \end{cases}$  故  $7q+1 \leq$

$8p \leq 8 \cdot \frac{8q-1}{9}$ , 即  $63q+9 \leq 64q-8$ . 所以  $q \geq 17$ . 因此

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+1}{q} \leq \frac{\frac{8q-1}{9}+1}{q} = \frac{8q+8}{9q} \\ &= \frac{8}{9} + \frac{8}{9q} \leq \frac{8}{9} + \frac{8}{9 \times 17} = \frac{16}{17}. \end{aligned}$$

综上所述,  $f(x)$  在区间  $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$  上的最大值为  $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17}$ .

**说明** 对于两个整数  $x, y$ , 若  $x > y$ , 则  $x \geq y+1$ . 这一结论非常有用.

本题就是由  $\begin{cases} 7q < 8p, \\ 9p < 8q \end{cases}$  推出  $\begin{cases} 7q + 1 \leq 8p, \\ 9p + 1 \leq 8q, \end{cases}$  从而得出  $q \geq 17$  的.

## 4.4 换元法

通过换元,把复杂的目标函数变形为较简单的函数形式,或将不易求得最值的函数形式化为易求得最值的形式,从而使问题得到解决.

**例 10** 已知  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 求  $y = \sqrt{5 - 4\sin\alpha} + \sin\alpha$  的最小值和最大值.

**分析** 通过变量代换,把  $y$  表示成二次函数的形式.

**解** 设  $x = \sqrt{5 - 4\sin\alpha}$ , 因为  $0 \leq \sin\alpha \leq 1$ , 所以  $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ , 且  $\sin\alpha = \frac{5 - x^2}{4}$ , 于是

$$y = x + \frac{5 - x^2}{4} = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + \frac{9}{4} \quad (1 \leq x \leq \sqrt{5}).$$

故当  $x = 2$  时,  $y$  的最大值为  $\frac{9}{4}$ ; 当  $x = 1$  时,  $y$  的最小值为  $2$ .

**说明** 通过换元,常常可以把较复杂的形式转化为较简单的形式,从而使问题得以解决.

**例 11** 已知  $x^2 + 4y^2 = 4x$ , 求下列各式的最大值与最小值.

(1)  $u = x^2 + y^2$ ; (2)  $v = x + y$ .

**解** 条件式可化为

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1.$$

设  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 则

$$(1) u = (2 + 2\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 3\left(\cos\theta + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3},$$

故  $u_{\min} = 0, u_{\max} = 16.$

$$(2) v = 2 + 2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \varphi) + 2,$$

所以  $v_{\min} = 2 - \sqrt{5}, v_{\max} = 2 + \sqrt{5}.$

**说明** 若  $u^2 + v^2 = 1$ , 则令  $u = \sin\alpha, v = \cos\alpha, \alpha \in [0, 2\pi)$ . 若  $u, v \in$



$\mathbf{R}^+$ , 且  $u+v=1$ , 则令  $u=\sin^2\alpha$ ,  $v=\cos^2\alpha$ ,  $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$  等等. 这些代换能帮助我们简化问题, 从而解决问题.

**例 12** 在约束条件  $x\geq 0$ ,  $y\geq 0$  及  $3\leq x+y\leq 5$  下, 求函数  $u=x^2-xy+y^2$  的最大值和最小值.

**解** 令  $x=asin^2\theta$ ,  $y=acos^2\theta$ ,  $\theta\in[0, 2\pi)$ , 则  $3\leq a\leq 5$ . 于是

$$\begin{aligned} u &= a^2\sin^4\theta - a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + a^2\cos^4\theta \\ &= a^2[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta] \\ &= a^2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

从而  $\frac{9}{4}\leq u\leq 25$ . 所以  $u_{\min}=\frac{9}{4}$ ,  $u_{\max}=25$ .

注意,  $\frac{9}{4}$  和 25 都是能取到的.

**例 13** 设  $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ , 满足  $f(\cot x)=\cos 2x+\sin 2x$  对所有  $0<x<\pi$  成立, 又  $g(x)=f(x)f(1-x)$ ,  $x\in[-1, 1]$ , 求  $g(x)$  的最大值和最小值.

**解** 因为  $f(\cot x)=\frac{1-\tan^2 x+2\tan x}{1+\tan^2 x}$ , 令  $t=\cot x$ , 则  $f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{故 } g(x) &= \frac{x^2+2x-1}{x^2+1} \cdot \frac{(1-x)^2+2(1-x)-1}{(1-x)^2+1} \\ &= \frac{(x^2-x)^2-8(x^2-x)-2}{(x^2-x)^2+2(x^2-x)+2} \cdot \textcircled{*} \end{aligned}$$

令  $x^2-x=u$ ,  $x\in[-1, 1]$ , 则  $u\in[-\frac{1}{4}, 2]$ . 从而

$$g(u)=\frac{u^2-8u-2}{u^2+2u+2}=1-\frac{10u+4}{u^2+2u+2}=1-2\cdot\frac{5u+2}{u^2+2u+2}.$$

令  $5u+2=s$ ,  $s\in[\frac{3}{4}, 12]$ , 则  $u=\frac{s-2}{5}$ , 于是

$$\begin{aligned} u^2+2u+2 &= \frac{1}{25}(s^2+6s+34), \\ \frac{5u+2}{u^2+2u+2} &= \frac{25s}{s^2+6s+34} = \frac{25}{s+\frac{34}{s}+6}. \end{aligned}$$

由耐克函数的单调性知  $\frac{553}{12} \geq s + \frac{34}{s} \geq 2\sqrt{34}$ , 等号分别在  $s = \sqrt{34}$ ,  $s = \frac{3}{4}$  时取到.

所以

$$g_{\min} = 1 - 2 \times \frac{25}{2\sqrt{34} + 6} = 4 - \sqrt{34},$$

$$g_{\max} = 1 - 2 \times \frac{25}{\frac{553}{12} + 6} = \frac{1}{25}.$$

**说明** 本题来自于越南数学奥林匹克试题, 解决本题最关键也是最难的一步就是⊗式, 需要一定的代数功夫.

### 4.5 构造法

根据欲求最值的函数的特征, 构造反映函数关系的几何图形, 然后借助于图形可较容易地求得最大值和最小值.

**例 14** 求函数  $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$  的最大值, 及此时  $x$  的值.

**分析** 将原式整理成

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-2)^2} - \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$$

后, 可以发现  $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2-2)^2}$  表示点  $P(x, x^2)$  到点  $A(3, 2)$  的距离,  $\sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$  表示点  $P(x, x^2)$  到点  $B(0, 1)$  的距离, 再适当地用几何意义来解题.

**解** 因为  $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-2)^2} - \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$ , 它表示点  $P(x, x^2)$  到点  $A(3, 2)$  与点  $B(0, 1)$  的距离之差, 如图 4-3 所示.

而  $P(x, x^2)$  在抛物线  $y = x^2$  上, 易知

$$|PA| - |PB| \leq |AB|$$

取等号时,  $P$  在  $AB$  的延长线上.  $AB$  的方程为

$$y = \frac{1}{3}x + 1.$$

解方程组  $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{1}{3}x + 1, \end{cases}$  得

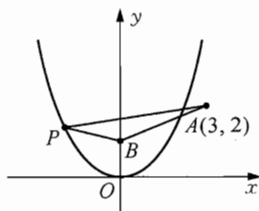


图 4-3

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{37}}{6}.$$

因为点  $P$  在  $AB$  的延长线上, 舍去  $x_2$ , 所以  $x = \frac{1 - \sqrt{37}}{6}$ .

最小距离为  $|AB| = \sqrt{10}$ , 这正是需求的函数的最大值.

**说明** 对于根号里的代数式, 我们常常通过配方, 把它看成平面上两个点之间的距离.

**例 15** 设  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $y \in (0, +\infty)$ , 求

$$(\sqrt{2} \cos x - y)^2 + \left(\sqrt{2} \sin x - \frac{9}{y}\right)^2$$

的最小值.

**分析** 联想到两点间的距离公式,  $(\sqrt{2} \cos x - y)^2 + \left(\sqrt{2} \sin x - \frac{9}{y}\right)^2$  可视为平面直角坐标系中点  $A(\sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \sin x)$  与  $B(y, \frac{9}{y})$  的距离的平方, 而这两点又可看作参数  $x, y$  所确定的曲线上的点, 问题即可转化为求两曲线上点之间距离的最小值问题.

**解** 如图 4-4 所示, 建立直角坐标系  $uOv$ .

$$\text{设 } C_1: \begin{cases} u = \sqrt{2} \cos x, \\ v = \sqrt{2} \sin x, \end{cases} x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{及 } C_2: \begin{cases} u = y, \\ v = \frac{9}{y}, \end{cases} y \in (0, +\infty).$$

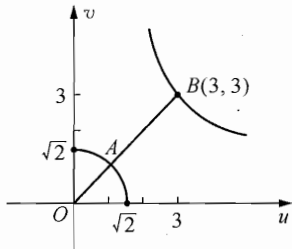


图 4-4

则  $(\sqrt{2} \cos x - y)^2 + \left(\sqrt{2} \sin x - \frac{9}{y}\right)^2$  表示曲线  $C_1$  上点  $A(\sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \sin x)$  与曲线  $C_2$  上点  $B(y, \frac{9}{y})$  之间的距离的平方.

作出曲线  $C_1: u^2 + v^2 = 2 (u > 0, v > 0)$  及  $C_2: uv = 9 (u > 0, v > 0)$  的图象, 显然, 当  $|OB|$  取得最小值而  $O, A, B$  三点共线时,  $|AB|^2$  最小.

$$\text{因为 } |OB| = \sqrt{y^2 + \left(\frac{9}{y}\right)^2} \geq 3\sqrt{2}.$$

当  $y = 3$  时, 等号成立, 所以

$$|AB| = |OB| - |OA| = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$|AB|^2 = 8.$$

所以,  $(\sqrt{2}\cos x - y)^2 + (\sqrt{2}\sin x - \frac{9}{y})^2$  的最小值为 8.

**例 16** 若实数  $x, y$  满足关系

$$\begin{cases} y \geq x^2, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \leq 5, \end{cases}$$

求函数  $w = 2x + y$  的最大值和最小值.

**解** 令  $u = x, v = x + y$ , 则原问题就转化为在约束条件

$$\begin{cases} u^2 + u \leq v, \\ u^2 + v^2 \leq 5 \end{cases}$$

下, 求函数  $w = u + v$  的最大值和最小值.

把约束条件在  $uv$  平面上表示出来, 它就是如图 4-5 所示的阴影部分(包括边界).

令  $u + v = m$ , 即  $v = -u + m$ , 它是倾角为  $\frac{3}{4}\pi$  的直线系,  $m$  为它的纵截距. 我们把问题又转化为在直线系:  $v = -u + m$  中确定这样的直线, 它通过图 4-5 所示的闭区域中的至少一个点, 且使得纵截距取得最大值和最小值.

从图 4-5 中可以看出, 直线系中与抛物线  $v = u^2 + u$  相切于点  $T$  的直线  $l_1$  所对应的  $m_1$  最小, 过抛物线与圆的右边的一个交点  $P$  的直线  $l_2$  所对应的  $m_2$  最大, 下面求  $m_1$  和  $m_2$ . 由

$$\begin{cases} u + v = m_1, \\ v = u^2 + u \end{cases}$$

中消去  $v$ , 得  $u^2 + 2u - m_1 = 0$ .  $\Delta = 4 + 4m_1 = 0$ , 故  $m_1 = -1$ .

**解方程组**

$$\begin{cases} v = u^2 + u, \\ u^2 + v^2 = 5, \end{cases}$$

得点  $P$  的坐标为  $(1, 2)$ . 因  $l_2$  经过点  $P$ , 故  $m_2 = 1 + 2 = 3$ .

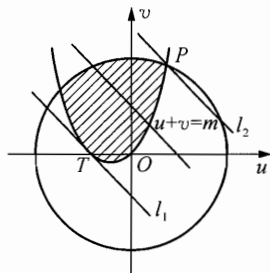


图 4-5

综上所述, 我们有  $w_{\min} = -1$ ,  $w_{\max} = 3$ .

**说明** 在约束条件下, 求函数的最大值和最小值是数学中常见的问题, 利用函数图象的性质和曲线系来求解这类问题, 往往能化繁为简, 出奇制胜.

## 4.6 利用函数性质

若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是增函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $f(b)$ , 最小值为  $f(a)$ ; 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是减函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $f(a)$ , 最小值为  $f(b)$ .

若函数  $f(x)$  满足: 当  $x \leq x_0$  时,  $f(x)$  是增函数, 当  $x \geq x_0$  时,  $f(x)$  是减函数, 则  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的最大值;

若函数  $f(x)$  满足: 当  $x \leq x_0$  时,  $f(x)$  是减函数, 当  $x \geq x_0$  时,  $f(x)$  是增函数, 则  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的最小值.

**例 17** 求函数  $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}$  的最小值.

**解** 先求定义域, 再研究函数的单调区间.

易知定义域为  $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ .

因为  $2x^2 - 3x + 1$  在  $(-\infty, 0]$  上递减, 在  $[2, +\infty)$  上递增, 所以  $\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$  在  $(-\infty, 0]$  上递减, 在  $[2, +\infty)$  上递增.

同理,  $\sqrt{x^2 - 2x}$  在  $(-\infty, 0]$  上递减, 在  $[2, +\infty)$  上递增.

所以  $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}$  在  $(-\infty, 0]$  上递减, 在  $[2, +\infty)$  上递增.

所以  $y_{\min} = \min\{f(0), f(2)\} = \min\{\sqrt{1}, \sqrt{8-6+1}\} = 1$ .

所以  $y_{\min} = 1$  (在  $x = 0$  时取到).

**说明** 本题的函数可看成两个函数的和, 而这两个函数在定义域内的单调性是一致的, 利用“单调性一致的两个函数的和仍具有相同单调性”这一性质求出各个单调区间上的最小值, 再比较得出结论.

**例 18** 设  $a > 0$ ,  $r(x) = \frac{ax^2 + 1}{x} = ax + \frac{1}{x}$ . 试讨论函数  $r(x)$  在  $(0, +\infty)$  中的单调性, 最小值与最大值.

**解** 设  $0 < x_1 < x_2 < +\infty$ , 则

$$r(x_2) - r(x_1) = ax_2 + \frac{1}{x_2} - ax_1 - \frac{1}{x_1} = (x_2 - x_1) \left( a - \frac{1}{x_1 x_2} \right).$$

当  $0 < x_1 < x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$  时, 得

$$\begin{aligned} r(x_2) - r(x_1) &= (x_2 - x_1) \left( a - \frac{1}{x_1 x_2} \right) < (x_2 - x_1) \left( a - \frac{1}{x_2^2} \right) \\ &\leq (x_2 - x_1)(a - a) = 0, \end{aligned}$$

所以在区间  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$  上,  $r(x)$  是单调递减的.

当  $\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x_1 < x_2 < +\infty$  时, 得

$$r(x_2) - r(x_1) = (x_2 - x_1) \left( a - \frac{1}{x_1 x_2} \right) > (x_2 - x_1) \left( a - \frac{1}{x_1^2} \right) \geq 0,$$

所以在区间  $\left[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty\right)$  上,  $r(x)$  是单调递增的.

因此,  $r(x)$  没有最大值, 当且仅当  $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$  时,  $r(x)$  取最小值, 最小值为

$$r\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 2\sqrt{a}.$$

**例 19** 已知  $\alpha, \beta$  是方程  $4x^2 - 4tx - 1 = 0$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 的两个不等实根, 函数  $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$  的定义域为  $[\alpha, \beta]$ .

(1) 求  $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$ ;

(2) 证明: 对于  $u_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 若  $\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3 = 1$ , 则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

(2004 年全国高中数学联赛试题)

**解** (1) 由于  $\alpha < \beta$ , 所以

$$\alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2}, \beta = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}.$$

令  $u = 2x - t$ , 则  $x = \frac{u+t}{2}$ ,

$$f(x) = \frac{u}{\left(\frac{u+t}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4u}{u^2 + 2tu + t^2 + 4}.$$

若  $u = 0$ , 即  $x = \frac{t}{2}$ , 此时  $f(x) = 0$ .

若  $u \neq 0$ , 则

$$f(x) = \frac{4}{u + \frac{t^2 + 4}{u} + 2t}, u \in [-\sqrt{t^2 + 1}, 0) \cup (0, \sqrt{t^2 + 1}].$$

设  $h(u) = u + \frac{t^2 + 4}{u}$ ,  $u \in [-\sqrt{t^2 + 1}, \sqrt{t^2 + 1}]$ , 易知  $h(u)$  在  $[-\sqrt{t^2 + 1}, 0)$  上是递减的, 且  $h(u) < 0$ ,  $h(u)$  在  $(0, \sqrt{t^2 + 1}]$  上也是递减的, 且  $h(u) > 0$ , 所以,  $f(x)$  在  $[-\sqrt{t^2 + 1}, 0)$  上是递增的, 在  $(0, \sqrt{t^2 + 1}]$  上也是递增的, 且当  $u \in [-\sqrt{t^2 + 1}, 0)$  时,  $f(u) < 0$ , 当  $u \in (0, \sqrt{t^2 + 1}]$  时,  $f(u) > 0$ . 于是  $f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上是递增的. 故

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\beta) - f(\alpha) \\ &= \frac{(\beta - \alpha)[t(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta + 2]}{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{8\sqrt{t^2 + 1}(2t^2 + 5)}{16t^2 + 25}. \end{aligned}$$

(2) 因为由(1)知

$$\begin{aligned} g(\tan u_i) &= \frac{8 \cdot \sec u_i (2\sec^2 u_i + 3)}{16\sec^2 u_i + 9} \\ &= \frac{24\cos^2 u_i + 16}{9\cos^3 u_i + 16\cos u_i}, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\tan u_i)} &= \frac{9\cos^3 u_i + 16\cos u_i}{24\cos^2 u_i + 16} \\ &= \frac{3}{8} \cos u_i + \frac{5\cos u_i}{12\cos^2 u_i + 8} \\ &\leq \frac{3}{8} \cos u_i + \frac{5\cos u_i}{2\sqrt{12} \times 8 \cos u_i} \\ &= \frac{3}{8} \cos u_i + \frac{5\sqrt{6}}{48}. \end{aligned}$$

而由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned} &(\cos u_1 + \cos u_2 + \cos u_3)^2 \\ &\leq 3(\cos^2 u_1 + \cos^2 u_2 + \cos^2 u_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3[3 - (\sin^2 u_1 + \sin^2 u_2 + \sin^2 u_3)] \\ &= 9 - 3(\sin^2 u_1 + \sin^2 u_2 + \sin^2 u_3) \\ &\leq 9 - 3 \cdot \frac{1}{3}(\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3)^2 = 8. \end{aligned}$$

所以  $\cos u_1 + \cos u_2 + \cos u_3 \leq 2\sqrt{2}$ .

于是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} \\ &\leq \frac{3}{8}(\cos u_1 + \cos u_2 + \cos u_3) + \frac{5\sqrt{6}}{16} \\ &\leq \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{6}}{16} < \frac{7}{16}\sqrt{6} + \frac{5}{16}\sqrt{6} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

## 习题 4

066

**1** 设  $x, y$  是正整数, 求:

$$f(x, y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

的最小值.

**2** 求函数  $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$  的最大值和最小值.

**3** 已知  $a, b, x, y \in \mathbf{R}^+$ , 且  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ , 求  $x + y$  的最小值.

**4** 求函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}}{x}$  的最大值.

**5** 已知实数  $x, y$  满足  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 求  $u = x^2 + xy + y^2$  的最大值和最小值.

**6** 已知  $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ , 且  $xyz(x + y + z) = 1$ , 求  $(x + y)(y + z)$  的最小值.

**7** 已知函数  $y = \frac{2+x}{\sqrt{1-x^2}+1} + \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ ,  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ ,

求此函数的最大值和最小值.

**8** 设  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ , 求:

函数与函数方程



$u = \sqrt{(1185 - x_1 - x_2)^2 + y_2^2} + \sqrt{x_2^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + (1580 - y_1 - y_2)^2}$   
 的最小值.

**9** 一幢  $k (> 2)$  层楼的公寓有一部电梯, 最多能容纳  $k-1$  个人. 现有  $k-1$  个学生同时在第一层楼乘电梯, 他们中没有两人是住同一层楼的. 电梯只能停一次, 停在任意选择的一层. 而对每一个学生而言, 自己往下走一层感到 1 分不满意, 而往上走一层感到 2 分不满意. 问电梯停在哪一层, 可使不满意的总分达到最小?

**10** 设  $x, y, z$  是 3 个不全为零的实数, 求  $\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$  的最大值.

**11** 已知  $x \geq 1, y \geq 1$ , 且  $\lg^2 x + \lg^2 y = \lg 10x^2 + \lg 10y^2$ , 求  $\lg xy$  的最大值与最小值.

**12** 设  $n (\geq 2)$  是正整数,  $x_i \in [0, 2], i = 1, 2, \dots, n$ . 证明: 二次函数  $f(x) = nx^2 - 2(\sum_{i=1}^n x_i)x + \sum_{i=1}^n x_i^2$  的最小值不超过  $n$ .

**13** 当  $s$  和  $t$  取遍所有实数时, 求  $M = (s + 5 - 3|\cos t|)^2 + (s - 2|\sin t|)^2$  的最小值.

**14** 已知  $x, y \in \mathbf{R}, M = \max\{|x - 2y|, |1 + x|, |2 - 2y|\}$ , 求  $M$  的最小值.

**15** 设  $f(x) = x^2 + px + q, p, q \in \mathbf{R}$ . 若  $|f(x)|$  在  $[-1, 1]$  上的最大值为  $M$ , 求  $M$  的最小值.

**16** 关于  $x$  的一元二次方程  $2x^2 - tx - 2 = 0$  的两个实根为  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ .

(1) 若  $x_1, x_2$  为区间  $[\alpha, \beta]$  上的两个不同的点, 求证:

$$4x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - 4 < 0;$$

(2) 设  $f(x) = \frac{4x-t}{x^2+1}$ ,  $f(x)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上的最大值和最小值分别记

为  $f_{\max}$  和  $f_{\min}$ ,  $g(t) = f_{\max} - f_{\min}$ , 求  $g(t)$  的最小值.

# 5

## 构造函数解题



我们在处理某些方程、不等式、最值问题及一些组合问题时,常常构造一个函数,然后利用函数的图象和性质来解决问题.

### 5.1 构造函数证明不等式

**例 1** 设  $a, b, c$  是绝对值小于 1 的实数,证明:

$$ab + bc + ca + 1 > 0.$$

**证** 构造一次函数:

$$f(x) = (b+c)x + bc + 1, -1 < x < 1.$$

它的图象是一条线段,但不包括两个端点  $(-1, f(-1))$ ,  $(1, f(1))$ ,若能证明其两个端点的函数值  $f(-1)$  和  $f(1)$  均大于 0,则对定义域内的每一点  $x$ ,  $f(x)$  恒大于 0.

$$\text{因为 } f(-1) = -(b+c) + bc + 1 = (b-1)(c-1) > 0,$$

$$f(1) = (b+c) + bc + 1 = (b+1)(c+1) > 0,$$

所以当  $-1 < x < 1$  时,  $f(x)$  恒大于 0,

$$\text{即 } f(a) = a(b+c) + bc + 1 = ab + bc + ca + 1 > 0.$$

**说明** 利用一次函数的单调性来证明不等式是一种常用的方法. 如何“构造”好这个一次函数是解题的关键.

**例 2** 证明柯西不等式: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 则

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

**证** 若  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$ , 则  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , 此时命题显然成立.

若  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$ , 构造一个二次函数

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2.$$

这是一条开口向上的抛物线, 而且  $f(x) \geq 0$  恒成立, 所以

$$\Delta = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - \\ 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0,$$

即

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

其中等号当且仅当  $a_i = kb_i, i = 1, 2, \cdots, n, k$  是某个常数时成立.

**说明** 对于要证明

$$AC \leq (\text{或} \geq) B^2,$$

这类不等式, 我们先把不等式变形为

$$4AC \leq (\text{或} \geq) (2B)^2,$$

然后构造一个二次函数

$$f(x) = Ax^2 - (2B)x + C,$$

再设法证明其判别式  $\geq 0$  (或  $\leq 0$ ).

**例3** 设  $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n (n \geq 2)$  都是实数, 且满足

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1.$$

求证:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n - 1)^2 \\ \geq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1).$$

**证** 当  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$  时, 原不等式显然成立.

当  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$  时, 构造如下关于  $t$  的二次函数

$$f(t) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n - 1)t \\ + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1) \\ = (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \cdots + (x_nt - y_n)^2 - (t - 1)^2.$$

此二次函数的图象是一条开口向下的抛物线, 因为

$$f(1) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \geq 0,$$

所以此抛物线一定与  $x$  轴有交点, 从而

$$\Delta = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n - 1)^2 -$$

$$4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1) \geq 0,$$

即

$$\begin{aligned} & (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n - 1)^2 \\ & \geq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1). \end{aligned}$$

**例4** 设  $x, y \in \mathbf{R}^+$ ,  $x + y = c$ ,  $c$  为定值且  $0 < c \leq 2$ , 求  $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$  的最小值.

**解** 令  $u = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ , 则

$$u = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq xy + \frac{1}{xy} + 2.$$

因为  $0 < xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{c^2}{4}$ ,

构造辅助函数  $f(t) = t + \frac{1}{t}$ ,  $0 < t \leq \frac{c^2}{4}$ .

由于  $0 < c \leq 2$ , 所以  $\frac{c^2}{4} \leq 1$ . 于是函数  $f(t)$  在  $0 < t \leq \frac{c^2}{4}$  上是递减的, 从而  $f(t)$  的最小值为

070

$$f\left(\frac{c^2}{4}\right) = \frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2}.$$

所以  $u \geq \frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2} + 2.$

当  $x = y = \frac{c}{2}$  时, 上面等号成立.

所以  $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$  的最小值为  $\frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2} + 2.$

**说明** 利用函数的单调性来证明不等式或求函数最值, 也是非常有用的方法.

**例5**  $\triangle ABC$  的三边长  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 1$ , 求证:

$$5(a^2 + b^2 + c^2) + 18abc \geq \frac{7}{3}.$$

**证** 因为

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 1 - 2(ab + bc + ca), \end{aligned}$$

所以原不等式等价于

$$5 - 10(ab + bc + ca) + 18abc \geq \frac{7}{3},$$

即 
$$\frac{5}{9}(ab + bc + ca) - abc \leq \frac{4}{27}. \quad (*)$$

构造辅助函数

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - x^2 + (ab+bc+ca)x - abc. \end{aligned}$$

一方面

$$f\left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \frac{5}{9}(ab + bc + ca) - abc.$$

另一方面, 由于  $a, b, c$  是三角形的三边长, 所以,  $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ , 从而

$\frac{5}{9} - a, \frac{5}{9} - b, \frac{5}{9} - c$  均大于 0, 故

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{9}\right) &= \left(\frac{5}{9} - a\right)\left(\frac{5}{9} - b\right)\left(\frac{5}{9} - c\right) \\ &\leq \frac{1}{27}\left[\left(\frac{5}{9} - a\right) + \left(\frac{5}{9} - b\right) + \left(\frac{5}{9} - c\right)\right]^3 \\ &= \frac{8}{729}. \end{aligned}$$

所以 
$$\frac{8}{729} \geq \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \frac{5}{9}(ab + bc + ca) - abc,$$

即 
$$\frac{5}{9}(ab + bc + ca) - abc \leq \frac{4}{27}.$$

此即(\*)式, 从而命题成立.

## 5.2 构造函数解方程与求函数值

**例 6** 已知方程

$$(ax + 1)^2 = a^2(1 - x^2),$$

其中,  $a > 1$ . 证明: 方程的正根比 1 小, 负根比 -1 大.

**证** 原方程整理后, 得  $2a^2x^2 + 2ax + 1 - a^2 = 0$ .

$$\text{令} \quad f(x) = 2a^2x^2 + 2ax + 1 - a^2,$$

则  $f(x)$  是开口向上的抛物线, 且  $f(0) = 1 - a^2 < 0$ . 故此二次函数  $f(x) = 0$  有一个正根, 一个负根. 要证明正根比 1 小, 只需证  $f(1) > 0$ . 要证明负根比 -1 大, 只需证  $f(-1) > 0$ . 因为

$$\begin{aligned} f(1) &= 2a^2 + 2a + 1 - a^2 = (a+1)^2 > 0, \\ f(-1) &= 2a^2 - 2a + 1 - a^2 = (a-1)^2 > 0, \end{aligned}$$

从而命题得证.

**例 7** 求  $y = (3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1) + (2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1)$  的图象与  $x$  轴的交点的坐标.

**分析** 仔细观察所给式子的特点, 发现

$$\begin{aligned} y &= (3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1) + \\ &\quad (2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1), \end{aligned}$$

从而可以找到解题的途径.

**解** 因为

$$\begin{aligned} y &= (3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1) + \\ &\quad (2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1). \end{aligned}$$

**构造函数**

$$f(t) = t(\sqrt{t^2+4}+1).$$

因为  $f(-t) = -t(\sqrt{t^2+4}+1) = -f(t)$ , 所以  $f(t)$  是奇函数. 又因为当  $t \geq 0$  时,  $f(t)$  是递增的, 所以, 当  $t \in \mathbf{R}$  时,  $f(t)$  也是递增的(易证), 而

$$y = f(3x-1) + f(2x-3).$$

当  $y = 0$  时, 得

$$f(3x-1) = -f(2x-3) = f(3-2x),$$

$$\text{所以} \quad 3x-1 = 3-2x.$$

$$\text{解方程, 得 } x = \frac{4}{5}.$$

故图象与  $x$  轴的交点坐标为  $(\frac{4}{5}, 0)$ .

**例 8** 设  $f(x)$  是一个 98 次的多项式, 使得

$$f(k) = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, 99.$$

求  $f(100)$  的值.

**解** 构造一个函数

$$g(x) = xf(x) - 1,$$

则  $g(1) = g(2) = \dots = g(99) = 0,$

并且  $g(x)$  是 99 次多项式, 所以

$$g(x) = a(x-1)(x-2)\dots(x-99).$$

其中  $g(x)$  的首项系数  $a$  是一个待定常数. 由于

$$f(x) = \frac{g(x) + 1}{x} = \frac{a(x-1)(x-2)\dots(x-99) + 1}{x}$$

是一个 98 次多项式, 故  $a(x-1)(x-2)\dots(x-99) + 1$  的常数项必须为 0, 即

$$-99!a + 1 = 0,$$

所以  $a = \frac{1}{99!}.$

因此  $f(x) = \frac{\frac{1}{99!}(x-1)(x-2)\dots(x-99) + 1}{x},$

所以  $f(100) = \frac{1+1}{100} = \frac{1}{50}.$

**说明** 对于二次三项式  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 若  $f(x) = 0$  有两个根  $x_1, x_2$ , 则  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ . 一般地, 一个  $n (\geq 2)$  次多项式  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , 若它的  $n$  个根为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则  $f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ .

### 5.3 构造函数解决其他问题

**例 9** 整数  $a, b, c$  使得  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  和  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  仍为整数, 求证:

$$|a| = |b| = |c|.$$

**证** 先证一个引理.

**引理** 设  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  是整系数多项式, 若

$\frac{p}{q}$  ( $p$  和  $q$  是互质的整数) 是它的一个有理根, 则  $p \mid a_0, q \mid a_n$ .

事实上, 我们有

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

$$\frac{a_n p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0.$$

所以  $q \mid a_n p^n$ , 而  $(q, p^n) = 1$ , 所以  $q \mid a_n$ .

又因为

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

所以  $p \mid a_0 q^n$ , 而  $(p, q^n) = 1$ , 从而  $p \mid a_0$ .

下面我们来证明本题.

构造一个三次函数

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{a}{b}\right) \left(x - \frac{b}{c}\right) \left(x - \frac{c}{a}\right) \\ &= x^3 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) x^2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) x - 1, \end{aligned}$$

074

由题设知,  $f(x)$  是一个整系数多项式, 它的三个有理根为  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ , 而由引理,  $f(x)$  的有理根只能为  $\pm 1$ , 从而

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b}{c}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1,$$

故

$$|a| = |b| = |c|.$$

**说明** 本题当然用数论的方法也能解决, 但是我们通过构造一个三次多项式, 利用引理来解显得非常巧妙.

**例 10** 正五边形的每个顶点对应一个整数, 使得这五个整数的和为正; 若其中三个相邻顶点对应的整数依次为  $x, y, z$ , 而中间的  $y < 0$ , 则要进行如下的变换: 整数  $x, y, z$  分别换为  $x+y, -y, x+y$ . 要是所得的五个整数中还有一个为负时, 这种变换就继续进行, 问: 这样的变换进行有限次后是否必定终止?

**解** 问题的答案是肯定的. 也就是说, 这样的变换进行有限次后必定终止.

为了方便起见, 把五个数的环列写成横列



$$v, w, x, y, z.$$

这里的  $v, z$  在环列中是相邻的. 并且由题设知

$$v + w + x + y + z > 0.$$

不妨设  $y < 0$ , 经变换后得到的环列是

$$v, w, x + y, -y, y + z.$$

构造函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + (x_1 + x_2)^2 + \\ &\quad (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + \\ &\quad (x_4 + x_5)^2 + (x_5 + x_1)^2, \end{aligned}$$

那么, 变换前后函数值的差为

$$\begin{aligned} &f(v, w, x + y, -y, y + z) - f(v, w, x, y, z) \\ &= [v^2 + w^2 + (x + y)^2 + (-y)^2 + (y + z)^2 + (v + w)^2 + (w + \\ &\quad x + y)^2 + x^2 + z^2 + (y + z + v)^2] - [v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 + \\ &\quad (v + w)^2 + (w + x)^2 + (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + v)^2] \\ &= 2y(v + w + x + y + z) < 0. \end{aligned}$$

由于当变量取整数值时  $f$  的函数值为非负整数, 所以

$$f(v, w, x + y, -y, y + z) \leq f(v, w, x, y, z) - 1,$$

即每经一次变换,  $f$  的值至少减少 1. 所以经有限次变换后, 就不能再变换下去了.

**说明** 本题是第 27 届国际数学奥林匹克竞赛中的一道试题, 是那届得分最低的一题. 但美国选手约瑟夫·基内对这题的解法获得了特别奖. 他构造的辅助函数是

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \sum_{i=1}^5 |x_i| + \sum_{i=1}^5 |x_i + x_{i+1}| + \\ &\quad \sum_{i=1}^5 |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}| + \\ &\quad \sum_{i=1}^5 |x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}|, \end{aligned}$$

其中,  $x_6 = x_1, x_7 = x_2, x_8 = x_3$ .

请读者自己验证一下.

函数的实质就是映射. 有时候构造一个映射, 可以使问题化繁为简, 出奇

制胜. 下面的例 11 是 1991 年全国高中数学联赛第二试的第三题. 这里给出的是复旦大学舒五昌先生告诉作者的一个利用映射的精妙解法.

**例 11** 设  $a_n$  为下述自然数  $N$  的个数:  $N$  的各位数字之和为  $n$  且每位数字只能取 1, 3 或 4. 求证  $a_{2n}$  是完全平方数, 这里  $n = 1, 2, \dots$ .

**证** 记集  $A$  为数码仅有 1, 3, 4 的数的全体,  $A_n = \{N \in A \mid N \text{ 的各位数码之和为 } n\}$ , 则  $|A_n| = a_n$ . 欲证  $a_{2n}$  是完全平方数.

再记集  $B$  为数码仅有 1, 2 的数的全体,  $B_n = \{N \in B \mid N \text{ 的各位数码之和为 } n\}$ , 令  $|B_n| = b_n$ , 下证  $a_{2n} = b_n^2$ .

作映射  $f: B \rightarrow N_+$ , 对于  $N \in B$ ,  $f(N)$  是由  $N$  按如下法则得到的一个数: 把  $N$  的数码从左向右看, 凡见到 2, 把它与后面的一个数相加, 用和代替, 再继续看下去, 直到不能做为止 (例如  $f(1\ 221\ 212) = 14\ 132$ ,  $f(21\ 121\ 221) = 31\ 341$ ). 易知  $f$  是单射. 于是

$$f(B_{2n}) = A_{2n} \cup A'_{2n-2}.$$

其中,  $A'_{2n-2} = \{10k + 2 \mid k \in A_{2n-2}\}$ . 所以

$$b_{2n} = a_{2n} + a_{2n-2}.$$

但  $b_{2n} = b_n^2 + b_{n-1}^2$ ,

076

这是因为  $B_{2n}$  中的数或是两个  $B_n$  中的数拼接而成, 或是两个  $B_{n-1}$  中的数中间放 2 拼接而成. 所以

$$a_{2n} + a_{2n-2} = b_n^2 + b_{n-1}^2 \quad (n \geq 2).$$

因为  $a_2 = b_1^2 = 1$ , 由上式便知, 对一切正整数  $n$ ,  $a_{2n} = b_n^2$ , 即  $a_{2n}$  是完全平方数.

## 习题 5

**1** 设  $x, y, z \in (0, 1)$ , 求证:

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1.$$

**2** 已知实数  $x, y$  满足

$$(3x + y)^5 + x^5 + 4x + y = 0,$$

求  $4x + y$  的值.

**3** 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 且满足

$$\begin{cases} (x-1)^3 + 2005(x-1) = -1, \\ (y-1)^3 + 2005(y-1) = 1, \end{cases}$$

求  $x+y$  的值.

4. 设  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , 且满足

$$(a+b+c)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2) + 4d,$$

求证:  $ab+bc+ca \geq 3d$ .

5. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  均为正实数, 且  $a_1^2 > a_2^2 + \dots + a_n^2$ , 求证:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \\ & \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2. \end{aligned}$$

6. 已知  $a, b$  为不全为 0 的实数, 求证: 方程

$$3ax^2 + 2bx - (a+b) = 0$$

在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

7.  $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ , 周长为 2, 求证:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

8. 已知方程  $x^2 + bx + c = 0$  有两个实数根  $s, t$ , 并且  $|s| < 2, |t| < 2$ . 求证:

$$(1) |c| < 4;$$

$$(2) |b| < 4 + c.$$

9. 设  $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$ , 且  $a > b > c$ , 求证:  $-\frac{1}{3} < c < 0$ .

10. 若抛物线  $y = x^2 + ax + 2$  与连接两点  $M(0, 1), N(2, 3)$  的线段(包括  $M, N$  两点)有两个相异的交点, 求  $a$  的取值范围.

11. 设  $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 2$ , 且  $x_2 + x_3 + x_4 \geq x_1$ , 求证:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \leq 4x_1x_2x_3x_4.$$

12. 证明: 存在两个函数  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得函数  $f(g(x))$  在  $\mathbf{R}$  上是严格递减的, 而  $g(f(x))$  在  $\mathbf{R}$  上是严格递增的. (2011 年罗马尼亚大师杯)

6

## 函数的迭代



### 6.1 函数迭代的定义

先看两个有趣的例子.

一个是李政道博士 1979 年 4 月到中国科技大学给少年班的同学面试的试题:

五只猴子, 分一堆桃子, 怎么也平分不了, 于是大家同意先去睡觉, 明天再说. 夜里一个猴子偷偷起来, 把一个桃子吃掉后正好可以分成 5 份, 收藏起自己的一份后又去睡觉了. 第二只猴子起来后, 像先前的那个猴子一样, 先吃掉一个, 剩下的又刚好分成 5 份, 也把自己的一份收藏起来睡觉去了. 第三、四、五只猴子也都是这样: 先吃掉一个, 剩下的刚好分成 5 份, 问这堆桃子至少是多少个?

这个题目有好几种解法, 下面介绍一种:

设桃子的总数有  $x$  个, 第  $i$  个猴子吃掉一个并拿走一份后, 剩下的桃子数目为  $x_i$  个, 则

$$x_i = \frac{4}{5}(x_{i-1} - 1), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

且  $x_0 = x$ .

设函数  $f(x) = \frac{4}{5}(x - 1) = \frac{4}{5}(x + 4) - 4$ , 于是

$$x_1 = f(x) = \frac{4}{5}(x + 4) - 4,$$

$$x_2 = f(f(x)) = \left(\frac{4}{5}\right)^2(x + 4) - 4,$$

$$x_3 = f(f(f(x))) = \left(\frac{4}{5}\right)^3(x + 4) - 4,$$

$$x_4 = f(f(f(f(x)))) = \left(\frac{4}{5}\right)^4(x + 4) - 4,$$

$$x_5 = f(f(f(f(f(x)))))) = \left(\frac{4}{5}\right)^5(x + 4) - 4.$$

由于剩下的桃子数都是整数, 所以  $5^5 \mid (x+4)$ , 因此, 最小的  $x$  为  $x = 5^5 - 4 = 3121$ .

另一个例子是 1993 年新加坡小学数学奥林匹克的试题:

某男孩付一角钱进入第一家商店, 他在店里花了剩余的钱的一半, 走出商店时又付了一角钱. 之后, 他又付一角钱进入第二家商店, 在这里他花了剩余的钱的一半, 走出商店时又付了一角钱. 接着, 他又用同样的方式进出第三和第四家商店, 当他走出第四家商店后, 这时, 他身上只剩下一角钱, 问: 他进入第一家商店之前身上有多少钱?

设这个男孩进入第  $i$  个商店之前身上的钱为  $x_i$  角,  $i=1, 2, 3, 4$ , 且设  $x_5=1$ , 于是

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i - 1) - 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{2}(x - 1) - 1 = \frac{1}{2}(x + 3) - 3, \text{ 则}$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + 3) - 3,$$

$$x_3 = f(f(x_1)) = \frac{1}{2^2}(x_1 + 3) - 3,$$

$$x_4 = f(f(f(x_1))) = \frac{1}{2^3}(x_1 + 3) - 3,$$

$$x_5 = f(f(f(f(x_1)))) = \frac{1}{2^4}(x_1 + 3) - 3.$$

$$\text{因为} \quad \frac{1}{2^4}(x_1 + 3) - 3 = 1,$$

$$\text{故} \quad x_1 = 61,$$

即这个男孩进入第一家商店之前身上有 6.10 元.

上面两题的解答中, 我们都利用了一个函数自身复合多次. 这便是函数的迭代.

**定义 6.1** 设  $f: D \rightarrow D$  是一个函数, 对任意  $x \in D$ , 记

$$f^{(0)}(x) = x,$$

$$f^{(1)}(x) = f(x),$$

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)),$$

$$f^{(3)}(x) = f(f(f(x))),$$

.....

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)),$$

.....

则称  $f^{(n)}(x)$  是函数  $f(x)$  在  $D$  上的  $n$  次迭代, 并称  $n$  是  $f^{(n)}(x)$  的迭代指数.

如果  $f^{(n)}(x)$  有反函数, 则记为  $f^{(-n)}(x)$ , 于是, 迭代指数可取所有整数.

求一个函数的  $n$  次迭代, 是数学竞赛中的一种基本题型. 对于一些简单的函数, 它的  $n$  次迭代是容易得到的.

若  $f(x) = x + c$ , 则  $f^{(n)}(x) = x + nc$ ,  $f^{-1}(x) = x - c$ ,  $f^{(-n)}(x) = x - nc$ .

若  $f(x) = x^3$ , 则  $f^{(n)}(x) = x^{3^n}$ ,  $f^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $f^{(-n)}(x) = x^{\frac{1}{3^n}}$ .

若  $f(x) = ax + b$ , 则  $f^{(n)}(x) = a^n \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$ ,  $f^{(-1)}(x) =$

$$\frac{1}{a} \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, f^{(-n)}(x) = \frac{1}{a^n} \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

下面看一些例子.

**例 1** 已知  $f(x)$  是一次函数, 且

$$f^{(10)}(x) = 1024x + 1023,$$

求  $f(x)$  的解析式.

**解** 设  $f(x) = ax + b$ , 则

$$f^{(10)}(x) = a^{10} \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

$$\text{故} \quad a^{10} \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} = 1024x + 1023.$$

比较上式两边系数, 得

$$\begin{cases} a^{10} = 1024, \\ -\frac{a^{10}b}{1-a} + \frac{b}{1-a} = 1023. \end{cases}$$

解方程组得  $a_1 = 2, b_1 = 1; a_2 = -2, b_2 = -3$ .

因此, 所求的一次函数为

$$f(x) = 2x + 1 \text{ 或 } f(x) = -2x - 3.$$

**例 2**  $f(n)$  是定义在  $\mathbf{N}_+$  上的函数, 并且满足

$$(1) f(f(n)) = 4n + 9, n \in \mathbf{N}_+;$$

$$(2) f(2^k) = 2^{k+1} + 3, k \in \mathbf{N}_+ \cup \{0\}.$$

求  $f(1789)$  的值.

$$\text{解 } f(4n+9) = f^{(3)}(n) = f^{(2)}(f(n)) = 4f(n)+9,$$

$$\text{而 } 1789 = 4^4 \times 2^2 + 4^3 \times 9 + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(1789) &= f(4^4 \times 2^2 + 4^3 \times 9 + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9) \\ &= 4f(4^3 \times 2^2 + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9) + 9 \\ &= 4^2 f(4^2 \times 2^2 + 4 \times 9 + 9) + 4 \times 9 + 9 \\ &= 4^3 f(4 \times 2^2 + 9) + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \\ &= 4^4 f(2^2) + 4^3 \times 9 + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \\ &= 4^4(2^3 + 3) + 4^3 \times 9 + 4^2 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \\ &= 3581. \end{aligned}$$

**例3** 设  $f(x) = 3x + 2$ , 证明: 存在  $m \in \mathbf{N}_+$ , 使  $f^{(100)}(m)$  能被 2005 整除.

**证** 由  $f(x) = 3x + 2$ , 知

$$f^{(100)}(x) = 3^{100}x + (3^{99} + 3^{98} + \cdots + 1) \times 2,$$

$$\text{故 } f^{(100)}(m) = 3^{100}m + 2(3^{99} + 3^{98} + \cdots + 1).$$

由于  $(3, 2005) = 1$ , 故  $(3^{100}, 2005) = 1$ , 根据 Bezout 定理, 存在  $u, v \in \mathbf{Z}$ , 使

$$2005u - 3^{100}v = 1.$$

记  $n = 2(3^{99} + 3^{98} + \cdots + 3 + 1)$ , 那么由  $2005 \mid (3^{100}v + 1)$ ,

$$\text{知 } 2005 \mid n(3^{100}v + 1).$$

此时, 取  $m = nv$ , 那么

$$2005 \mid (3^{100}m + n),$$

$$\text{即 } 2005 \mid f^{(100)}(m).$$

从而命题得证.

**说明** Bezout 定理是: 若  $x, y$  是两个互质的正整数, 则存在整数  $u, v$ , 使得  $ux - vy = 1$ .

**例4** 设  $n$  是不小于 3 的正整数, 以  $f(n)$  表示不是  $n$  的因数的最小正整数 (例如  $f(12) = 5$ ). 如果  $f(n) \geq 3$ , 又可作  $f(f(n))$ . 类似地, 如果  $f(f(n)) \geq 3$ , 又可作  $f(f(f(n)))$  等等. 如果  $f^{(k)}(n) = 2$ , 就将  $k$  称为  $n$  的“长度”, 记为  $l_n$ . 试对任意  $n \in \mathbf{N}_+$ ,  $n \geq 3$ , 求  $l_n$ , 并证明你的结论.

**解** 首先证明任意  $n \in \mathbf{N}_+$ ,  $n \geq 3$ ,  $f(n)$  不会是两个大于等于 2 的互素的数的乘积.

事实上, 若  $f(n) = pq$ , 其中  $p \geq 2, q \geq 2, (p, q) = 1$ . 由  $f$  的定义,  $p, q$  均为  $n$  的因数, 即  $p | n, q | n$ . 由  $(p, q) = 1$  知,  $pq | n$ , 这便与  $f(n) = pq$  矛盾.

由于  $f(n)$  不可能是两个互素的 ( $\geq 2$ ) 数的积, 因而  $f(n)$  必为  $p^k$  形式的数, 其中  $p$  是素数,  $k \in \mathbf{N}_+$ .

因此, 对  $n \in \mathbf{N}_+, n \geq 3$ , 或者  $f(n) = 2$  (当且仅当  $2 \nmid n$ ) 或者  $f(n) = 2^k (k \geq 2)$ , 此时  $f(f(n)) = 3$ , 即  $l_n = 3$ . 此外,  $f(n) = p^k (p$  是奇素数,  $k \geq 1)$ , 这时  $l_n = 2$ .

综上所述,

$$l_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \text{ 是奇数时;} \\ 3, & \text{有大于 1 的正整数 } k, \text{ 使得对任何 } < 2^k \text{ 的素数 } p \text{ 及} \\ & \text{满足 } p^j < 2^k \text{ 的正整数 } j, p^j | n, \text{ 且 } 2^k \nmid n \text{ 时;} \\ 2, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

**例 5** 对任意  $k \in \mathbf{N}_+$ , 令  $f(k)$  表示  $k$  的各位数字的平方和, 且对于  $n \geq 2$ , 令  $f^{(n)}(k) = f(f^{(n-1)}(k))$ , 求  $f^{(2005)}(2^{2002})$  的值.

**解** 设正整数  $a$  的位数为  $m$ , 则当  $a \leq b$  时,  $m \leq 1 + \lg b$ , 因此

$$f(a) \leq 9^2 m^2 \leq 81(1 + \lg b)^2 < (4 \log_2 16b)^2.$$

由此得

$$f(2^{2002}) < (4 \log_2 (16 \times 2^{2002}))^2 = 2^4 \times 2006^2 < 2^4 \times 2048^2 = 2^{26},$$

$$f^{(2)}(2^{2002}) < (4 \log_2 (16 \times 2^{26}))^2 = (4 \times 30)^2 = 14\,400.$$

$$\text{而 } (9 + 9 + 9 + 9)^2 < 14\,400 < (1 + 9 + 9 + 9 + 9)^2,$$

故  $f^{(2)}(2^{2002})$  的各位数字之和  $\leq 4 \times 9$ , 因此

$$f^{(3)}(2^{2002}) < 36^2 = 1296, f^{(4)}(2^{2002}) < (9 + 9 + 9)^2 = 729,$$

$$f^{(5)}(2^{2002}) < (6 + 9 + 9)^2 = 24^2.$$

另一方面, 因为  $f(k) \equiv k^2 \pmod{9}$ , 故

$$f(2^{2002}) \equiv (2^{2002})^2 \equiv (2^4)^2 \times ((2^3)^{666})^2 \equiv (2^4)^2 \equiv 4 \pmod{9},$$

$$f^{(2)}(2^{2002}) \equiv 4^2 \equiv -2 \pmod{9},$$

$$f^{(3)}(2^{2002}) \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{9}.$$

由数学归纳法容易证明



$$f^{(n)}(2^{2002}) \equiv \begin{cases} 4 \pmod{9}, & \text{当 } 2 \nmid n \text{ 时;} \\ -2 \pmod{9}, & \text{当 } 2 \mid n \text{ 时.} \end{cases}$$

因此, 由  $f^{(5)}(2^{2002}) < 24^2$ ,  $f^{(5)}(2^{2002}) \equiv 4 \pmod{9}$ , 且  $f^{(5)}(2^{2002})$  应为完全平方数知,  $f^{(5)}(2^{2002}) \in \{4, 49, 121, 256, 400\}$ , 所以  $f^{(6)}(2^{2002}) \in \{16, 169\}$ ,  $f^{(7)}(2^{2002}) \in \{49, 256\}$ ,  $f^{(8)}(2^{2002}) = 169$ ,  $f^{(9)}(2^{2002}) = 256$ ,  $f^{(10)}(2^{2002}) = 169, \dots$ , 即当  $n \geq 8$  时, 有

$$f^{(n)}(2^{2002}) = \begin{cases} 169, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ 256, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

因此,  $f^{(2005)}(2^{2002}) = 256$ .

## 6.2 $f^{(n)}(x)$ 的求法

### (1) 数学归纳法

这里用到的是先猜后证的想法, 即先对函数  $f(x)$  迭代几次, 观察出其规律, 然后猜测出  $f^{(n)}(x)$  的表达式, 最后用数学归纳法证之. 这种方法只适用于一些较为简单的函数. 下面看一些例子.

**例 6** 设  $f(x) = ax + b$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解**  $f(x) = ax + b$ ,

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b,$$

$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = a(a^2x + ab + b) + b$$

$$= a^3x + a^2b + ab + b,$$

.....

由此猜测

$$f^{(n)}(x) = a^n x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b.$$

下面用数学归纳法证明.

① 当  $n = 1$  时, 命题成立.

② 假设  $f^{(k)}(x) = a^k x + a^{k-1}b + \dots + ab + b$  成立, 那么

$$f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)) = a(a^k x + a^{k-1}b + \dots + ab + b) + b$$

$$= a^{k+1}x + a^k b + \dots + ab + b,$$

即  $n = k + 1$  时, 命题亦成立.

由①、②就证得了

$$f^{(n)}(x) = a^n x + a^{n-1}b + \dots + ab + b.$$

例7 已知  $f(x) = \frac{x}{a+bx}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

解  $f(x) = \frac{x}{a+bx}$ ,

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{a+bx}}{a+b \cdot \frac{x}{a+bx}} = \frac{x}{a^2+bx(1+a)},$$

$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = \frac{\frac{x}{a^2+bx(1+a)}}{a+b \cdot \frac{x}{a^2+bx(1+a)}} = \frac{x}{a^3+bx(1+a+a^2)},$$

.....

因此猜测

$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{a^n+bx(1+a+\dots+a^{n-1})} = \frac{x}{a^n+bx \cdot \frac{1-a^n}{1-a}}.$$

用数学归纳法是容易证明的. 事实上,

...(略)

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)) = \frac{\frac{x}{a^n+bx \cdot \frac{1-a^n}{1-a}}}{a+b \cdot \frac{x}{a^n+bx \cdot \frac{1-a^n}{1-a}}} = \frac{x}{a^{n+1}+bx \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}.$$

于是命题获证.

### (2) 递归法

设  $f(x)$  是定义在  $D$  上且取值于  $D$  的函数, 由此定义数列  $\{a_n\}$ :  $a_0$  已知, 且  $a_0 \in D$ ,  $a_n = f(a_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ . 一方面, 若已求得  $f^{(n)}(x) = g(x)$ , 则  $a_n = f(a_{n-1}) = f^{(2)}(a_{n-2}) = \dots = f^{(n)}(a_0)$ , 即  $\{a_n\}$  的通项公式; 另一方面, 如果已求得  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = g(a_0)$ , 则取  $a_0 = x$ ,  $a_n = g(x)$ , 而  $a_n = f(a_{n-1}) = \dots = f^{(n)}(a_0) = f^{(n)}(x)$ , 从而  $f^{(n)}(x) = g(x)$ , 即  $f^{(n)}(x)$  的表达式.

由上述知, 函数的  $n$  次迭代可以通过构造数列的方法来解, 其步骤为

- (1) 设  $a_0 = x, a_n = f^{(n)}(x)$ ;  
 (2) 由  $a_n = f^{(n)}(x) = f(a_{n-1})$ , 求出  $a_n = g(a_0)$ ;  
 (3)  $f^{(n)}(x) = g(a_0) = g(x)$ .  
 前面的例 1 和例 2 均可由递归法解决, 下面再举两例.

**例 8** 设  $f(x) = 3\sqrt[3]{x(\sqrt[3]{x} + 1)} + x + 1$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解**  $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^3$ , 设  $a_0 = x, a_n = f^{(n)}(x)$ ,

则 
$$a_n = f(a_{n-1}) = (\sqrt[3]{a_{n-1}} + 1)^3,$$

即 
$$\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a_{n-1}} = 1.$$

从而 
$$\sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a_0} + n = \sqrt[3]{x} + n,$$

故 
$$a_n = (\sqrt[3]{x} + n)^3,$$

即 
$$f^{(n)}(x) = (\sqrt[3]{x} + n)^3.$$

**例 9** 设  $f(x) = \sqrt{2+x}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 设  $a_0 = x, a_n = f^{(n)}(x)$ , 则  $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ .

(1) 若  $|x| \leq 2$ , 则令  $x = 2\cos\theta$ , 取  $\theta = \arccos \frac{x}{2}$ , 则

$$a_0 = 2\cos\theta, a_1 = \sqrt{2+2\cos\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}, a_2 = 2\cos\frac{\theta}{2^2}, \dots,$$

$$a_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n} = 2\cos\left(\frac{1}{2^n}\arccos\frac{x}{2}\right) \text{ (用数学归纳法易证).}$$

因此 
$$f^{(n)}(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2^n}\arccos\frac{x}{2}\right) (|x| \leq 2).$$

(2) 若  $|x| > 2$ , 则令  $x = t + \frac{1}{t}$ , 取  $t = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4})$ , 则  $a_0 = t + \frac{1}{t}$ ,  $a_1 = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ ,  $a_2 = t^{\frac{1}{2^2}} + t^{-\frac{1}{2^2}}$ , 由数学归纳法易得

$$a_n = t^{\frac{1}{2^n}} + t^{-\frac{1}{2^n}},$$

故 
$$f^{(n)}(x) = t^{\frac{1}{2^n}} + t^{-\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} (|x| > 2).$$

综上所述,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{1}{2^n}\arccos\frac{x}{2}\right), & \text{当 } |x| \leq 2 \text{ 时;} \\ \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}, & \text{当 } |x| > 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

### (3) 相似法

相似法是求函数  $f(x)$  的  $n$  次迭代的一个重要方法.

若存在一个函数  $\varphi(x)$  以及它的反函数  $\varphi^{-1}(x)$ , 使得

$$f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x))),$$

我们就称  $f(x)$  通过  $\varphi(x)$  和  $g(x)$  相似, 简称  $f(x)$  和  $g(x)$  相似, 记为  $f \sim g$ , 其中  $\varphi(x)$  称为桥函数.

相似关系是一个等价关系, 也就是说它满足:

- (1)  $f \sim f$  (自身性);
- (2) 若  $f \sim g$ , 则  $g \sim f$  (对称性);
- (3) 若  $f \sim g$ ,  $g \sim h$ , 则  $f \sim h$  (传递性).

如果  $f(x)$  与  $g(x)$  相似, 即

$$f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x))),$$

086

那么

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= f(f(x)) = \varphi^{-1}(g(\varphi(f(x)))) \\ &= \varphi^{-1}(g(\varphi(\varphi^{-1}(g(\varphi(x))))) \\ &= \varphi^{-1}(g^{(2)}(\varphi(x))). \end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))).$$

事实上,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f(f^{(n)}(x)) \\ &= f(\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))) \\ &= \varphi^{-1}g(\varphi(\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))) \\ &= \varphi^{-1}(g^{(n+1)}(\varphi(x))). \end{aligned}$$

这样一来, 我们便把  $f$  的迭代问题转化为  $g$  的迭代问题.

**例 10** 设  $f(x) = ax + b$ , 用相似法求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 取  $g(x) = ax$ ,  $\varphi(x) = x - \frac{b}{1-a}$ , 则

$$\varphi^{-1}(x) = x + \frac{b}{1-a}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}(a\varphi(x)) \\ &= \varphi^{-1}\left(a\left(x - \frac{b}{1-a}\right)\right) \\ &= a\left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \\ &= ax + b = f(x). \end{aligned}$$

所以  $f \sim g$ . 而  $g^{(n)}(x) = a^n x$ , 因此

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= \varphi^{-1}(a^n \varphi(x)) \\ &= a^n \left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

**例 11** 设  $f(x) = \frac{x}{1+ax}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 令  $g(x) = x + a$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ . 容易验证  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ , 即  $f \stackrel{\varphi}{\sim} g$ . 所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x) + na) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x} + na} = \frac{x}{1+na}. \end{aligned}$$

**例 12** 设  $f(x) = 2x^2 - 1$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 令  $g(x) = 2x$ ,  $\varphi(x) = \arccos x$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = \cos x$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 1 \\ &= 2\cos^2(\arccos x) - 1 \\ &= \cos 2(\arccos x) \\ &= \varphi^{-1}(g(\varphi(x))). \end{aligned}$$

所以  $f \stackrel{\varphi}{\sim} g$ . 而  $g^{(n)}(x) = 2^n x$ , 因此

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= \cos(2^n \arccos x). \end{aligned}$$

这个迭代结果就是切比雪夫多项式.

一般来说, 要找出桥函数  $\varphi(x)$  往往并不容易, 要对  $f(x)$  进行观察、变形,

并利用经验来完成.

**例 13** 试求一个函数  $p(x)$ , 使  $p^{(8)}(x) = x^2 + 2x$ .

**解** 令  $f(x) = x^2 + 2x$ ,  $\varphi(x) = x + 1$ ,  $g(x) = x^2$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = x - 1$ .

于是

$$f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x))).$$

再令  $h(x) = x^{8\sqrt{2}}$ , 那么

$$h^{(8)}(x) = x^2 = g(x).$$

于是取  $p(x) = \varphi^{-1}(h(\varphi(x))) = (x + 1)^{8\sqrt{2}} - 1$ , 那么

$$\begin{aligned} p^{(8)}(x) &= \varphi^{-1}(h^{(8)}(\varphi(x))) \\ &= \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) \\ &= f(x) = x^2 + 2x. \end{aligned}$$

所以,  $p(x) = (x + 1)^{8\sqrt{2}} - 1$ , 即为所求.

**例 14** 设  $p(x) = x^2 - 2$ , 试证对任意正整数  $n$ , 方程  $p^{(n)}(x) = x$  的根全是相异实根.

**证** 先看  $p^{(n)}(x) = x$  且  $x \in [-2, 2]$  时的情形.

当  $x \in [-2, 2]$  时, 令  $x = 2\cos t$ ,  $t = \arccos \frac{x}{2}$ . 设  $g(x) = 2x$ ,  $t = \varphi(x) = \arccos \frac{x}{2}$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = 2\cos x$ , 于是

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}\left(g\left(\arccos \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(2\arccos \frac{x}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(2\arccos \frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1\right) \\ &= x^2 - 2 = p(x). \end{aligned}$$

所以  $p(x) \sim g(x)$ . 于是

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= 2\cos\left(2^n \arccos \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

于是方程  $p^{(n)}(x) = x$ , ( $x \in [-2, 2]$ ) 变为

$$2\cos\left(2^n \arccos \frac{x}{2}\right) = x,$$

即  $2\cos(2^n t) = 2\cos t \quad (t \in [0, \pi]).$

故  $\cos(2^n t) = \cos t.$

解方程, 得  $t = \frac{2l\pi}{2^n - 1}$  或  $t = \frac{2m\pi}{2^n + 1} \quad (m, l \in \mathbf{Z}).$

所以方程  $p^{(n)}(x) = x$  在  $[-2, 2]$  中有  $2^n$  个不同的实根  $x = 2\cos \frac{2l\pi}{2^n - 1},$

$$l = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1, x = 2\cos \frac{2m\pi}{2^n + 1}, m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}.$$

由于  $p^{(n)}(x)$  是  $2^n$  次多项式,  $p^{(n)}(x) = x$  至多有  $2^n$  个实根, 故知方程  $p^{(n)}(x) = x$  的所有根都是实数且各不相同.

以上两例是比较难的利用桥函数来解决的问题. 在介绍完下一种方法后, 我们再来介绍一种寻找桥函数的方法.

#### (4) 不动点法

不动点法的基本思想是根据函数的不动点得出桥函数的一个性质, 进而确定桥函数的形状, 然后利用相似法求出函数的  $n$  次迭代. 我们先给出不动点的定义和性质.

**定义 6.2**  $f(x) = x$  的根称为  $f(x)$  的不动点.

函数的不动点具有如下性质:

(1) 若  $x_0$  是  $f(x)$  的不动点, 则  $f^{(n)}(x_0) = x_0$ , 即  $x_0$  也是  $f^{(n)}(x)$  的不动点.

(2) 设  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ , 因此有  $\varphi(f(x)) = g(\varphi(x))$ . 若  $f(x_0) = x_0$ , 则有  $\varphi(x_0) = g(\varphi(x_0))$ , 即  $\varphi(x_0)$  是  $g(x)$  的不动点.

对于一些简单的函数, 利用不动点, 把函数变形后再迭代, 最后用数学归纳法证之, 会使算法简单些. 先看两个例子.

**例 15** 用不动点法求本节例 1(且设  $a \neq 1$ ).

**解** 令  $f(x) = x$ , 得  $f(x)$  的唯一不动点  $x = \frac{b}{1-a}$ .

$$f(x) = a\left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a},$$

故

$$f^{(2)}(x) = a^2\left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a},$$

.....

由归纳法, 得

$$f^{(n)}(x) = a^n \left( x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

**例 16** 设  $f(x) = \sqrt{19x^2 + 93}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 先求  $f(x)$  的不动点. 由  $\sqrt{19x^2 + 93} = x$ , 得  $x^2 = -\frac{31}{6}$ . 所以

$$f(x) = \sqrt{19 \left( x^2 + \frac{31}{6} \right) - \frac{31}{6}},$$

$$f^{(2)}(x) = \sqrt{19^2 \left( x^2 + \frac{31}{6} \right) - \frac{31}{6}},$$

.....

由归纳法, 得

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{19^n \left( x^2 + \frac{31}{6} \right) - \frac{31}{6}}.$$

下面介绍利用不动点寻找桥函数的方法. 由不动点性质知, 桥函数  $\varphi$  具有下列性质: 它将  $f$  的不动点  $x_0$  映成  $g$  的不动点  $\varphi(x_0)$ , 通常为了便于求  $g^{(n)}(x)$ ,  $g(x)$  通常取为  $ax$ ,  $x+a$ ,  $ax^2$ ,  $ax^3$  等, 这时,  $g(x)$  的不动点为 0 或  $\infty$ , 此时, 若  $f(x)$  只有唯一不动点  $\alpha$  时, 则可考虑取  $\varphi(x) = x - \alpha$  (或  $\frac{1}{x-\alpha}$ ), 这时  $\varphi(\alpha) = 0$  (或  $\infty$ ); 若  $f(x)$  有两个不动点  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ), 则可考虑取  $\varphi(x) = \frac{x-\alpha}{x-\beta}$ , 这里  $\varphi(\alpha) = 0$ ,  $\varphi(\beta) = \infty$ .

090

**例 17** 设  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 令  $f(x) = x$ , 求得  $f(x)$  的不动点为  $x_0 = 0$  或  $1$ , 取  $\varphi(x)$  使满足  $\varphi(0) = \infty$ ,  $\varphi(1) = 0$ , 最简单的取法是  $\varphi(x) = \frac{x-1}{x}$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{1-x}$ , 算出  $g(x) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x))) = x^2$ , 则  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ .

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad f^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2^n}} = \frac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x-1)^{2^n}}. \end{aligned}$$

**例 18** 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 对于二次函数, 并不是所有的情形都能很简单地得到  $f^{(n)}(x)$  的表达式, 下面只考虑当  $c = \frac{b^2 - 2b}{4a}$  时的情形.



由 
$$ax^2 + bx + \frac{b^2 - 2b}{4a} = x,$$

得两个不动点  $-\frac{b}{2a}, \frac{b+2}{2a}$ . 取其中一个  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

令  $g(x) = ax^2, \varphi(x) = x - x_0$ , 则  $\varphi^{-1}(x) = x + x_0$ , 于是

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}(g(x - x_0)) \\ &= \varphi^{-1}(a(x - x_0)^2) \\ &= a(x - x_0)^2 + x_0 \\ &= ax^2 + bx + c = f(x). \end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) \\ &= \varphi^{-1}(g^{(n)}(x - x_0)) \\ &= \varphi^{-1}(a^{2^n - 1}(x - x_0)^{2^n}) \\ &= a^{2^n - 1}(x - x_0)^{2^n} + x_0 \\ &= a^{2^n - 1}\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

**例 19** 设  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0, ad \neq bc$ ), 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 分两种情况.

(1) 若  $f(x) = x$  有两个不相等的不动点  $x_1, x_2$ , 则取  $g(x) = \frac{a - cx_1}{a - cx_2}x$ ,

$\varphi(x) = \frac{x - x_1}{x - x_2}$ , 于是  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ .

(2) 若  $f(x) = x$  有唯一的不动点  $x_0$ , 则取

$$g(x) = x + \frac{2c}{a+d}, \varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}.$$

同样有  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ .

下面给出(1)、(2)的证明.

对于(1), 由  $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ , 得

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

故  $x_1 + x_2 = \frac{a-d}{c}, x_1x_2 = -\frac{b}{c}$ .

又  $\varphi(x) = \frac{x - x_1}{x - x_2}$ , 所以  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x_1 - x_2x}{1 - x}$ , 于是

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}\left(g\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{a-cx_1}{a-cx_2} \cdot \frac{x-x_1}{x-x_2}\right) \\ &= \frac{x_1 - \frac{a-cx_1}{a-cx_2} \cdot \frac{x-x_1}{x-x_2}}{1 - \frac{a-cx_1}{a-cx_2} \cdot \frac{x-x_1}{x-x_2}} \cdot x_2 \\ &= \frac{ax - x_1x_2c}{cx + a - c(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{ax + b}{cx + d} = f(x). \end{aligned}$$

对于(2), 由于  $cx^2 + (d-a)x - b = 0$  有唯一不动点, 所以  $x_0^2 = -\frac{b}{c}$ . 于是

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{x-x_0} + \frac{2c}{a+d}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x-x_0} + \frac{2c}{a+d}} + x_0 \\ &= \frac{(a+d+2cx_0)x - 2cx_0^2}{2c + (a+d-2cx_0)}. \end{aligned}$$

092

因为  $2x_0 = \frac{a-d}{c},$

所以  $2cx_0 + a + d = 2a,$   
 $-2cx_0 + a + d = 2d,$

从而  $\varphi^{-1}(g(\varphi(x))) = \frac{2ax + 2b}{2cx + 2d} = f(x).$

下面来求  $f^{(n)}(x)$ .

对于(1),  $f^{(n)}(x) = \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$

$$\begin{aligned} &= \frac{x_1 - \left(\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\right)^n \cdot \frac{x-x_1}{x-x_2} \cdot x_2}{1 - \left(\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\right)^n \cdot \frac{x-x_1}{x-x_2}} \\ &= \frac{x_1(a-cx_2)^n(x-x_2) - x_2(a-cx_1)^n(x-x_1)}{(a-cx_2)^n(x-x_2) - (a-cx_1)^n(x-x_1)}. \end{aligned}$$

对于(2),  $f^{(n)}(x) = \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{1}{x-x_0} + \frac{2nc}{a+d}} + x_0 \\ &= \frac{(a+d+2ncx_0)x - 2ncx_0^2}{2ncx + a + d - 2ncx_0} \end{aligned}$$

对于不动点这一重要方法还有两点需要说明:

(1) 不动点在求解某些特殊的函数方程中往往会有意想不到的简便方法, 而且有时会是唯一的方法, 这会在后面的章节中举例.

(2) 由于函数的迭代与数列的关系(具体可见前面递归法的叙述), 利用不动点可以求一些数列的通项公式和研究数列通项具有的性质, 我们给读者留作练习题.

最后再看几个数学竞赛中有关不动点的例子.

**例 20**  $M$  是形如  $f(x) = ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 的实变量  $x$  的非零函数集, 且  $M$  具有下列性质:

(1) 若  $f(x), g(x) \in M$ , 则  $g(f(x)) \in M$ ;

(2) 若  $f \in M$ , 且  $f(x) = ax + b$ , 则反函数  $f^{-1} \in M$ , 这里  $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

( $a \neq 0$ );

(3) 对  $M$  中每一个  $f$ , 存在一个  $x_j \in \mathbf{R}$ , 使  $f(x_j) = x_j$ .

求证: 总存在一个  $k \in \mathbf{R}$ , 对所有  $f \in M$ , 均有  $f(k) = k$ .

**证** 条件(3)表明, 对每一个  $f \in M$ , 都有一个不动点  $x_j$ , 使  $f(x_j) = x_j$ . 现要证集  $M$  中所有函数  $f$ , 必有一个公共不动点  $k$ .

设  $f(x) = ax + b$  的不动点为  $x_j$ , 即  $ax_j + b = x_j$ .

若  $a \neq 1$ , 则  $x_j = \frac{-b}{a-1}$  是唯一不动点;

若  $a = 1$  且  $b = 0$ , 则任何实数均是  $f$  的不动点;

若  $a = 1$  且  $b \neq 0$ , 则  $f$  无不动点, 此时  $f \notin M$ .

因此, 只需证明: 当  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 1$ )  $\in M$  时, 必有  $\frac{-b}{a-1}$  是一个常数. 这时, 取  $k = \frac{-b}{a-1}$  知命题获证.

首先证明, 若  $g_1(x) = ax + b_1 \in M$ ,  $g_2(x) = ax + b_2 \in M$ , 则  $b_1 = b_2$ . 事实上, 由性质(1)、(2)有

$$g_2^{-1}(g_1(x)) = \frac{(ax + b_1) - b_2}{a} = x + \frac{b_1 - b_2}{a} \in M.$$

由性质(3)知,  $g_2^{-1}(g_1(x))$  存在不动点, 故  $b_1 = b_2$ .

其次, 对形如  $h(x) = x + b$  的函数, 当  $b \neq 0$  时,  $h(x) \in M$ ; 当  $b = 0$  时, 对任意  $k \in \mathbf{R}$  有  $h(k) = k$ . 故只需考虑  $M$  中形如  $f(x) = ax + b (a \neq 1)$  的函数. 设  $f_1(x) = a_1x + b_1 (a_1 \neq 1) \in M$ ,  $f_2(x) = a_2x + b_2 (a_2 \neq 1) \in M$ . 那么由性质(1), 得

$$\begin{aligned} f_1(f_2(x)) &= a_1(a_2x + b_2) + b_1 \\ &= a_1a_2x + a_1b_2 + b_1 \in M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &= a_2(a_1x + b_1) + b_2 \\ &= a_1a_2x + a_2b_1 + b_2 \in M. \end{aligned}$$

则  $a_1b_2 + b_1 = a_2b_1 + b_2$ .

变形, 得  $\frac{-b_1}{a_1 - 1} = \frac{-b_2}{a_2 - 1}$ .

此式表明, 对任意  $f(x) = ax + b (a \neq 1) \in M$ ,  $\frac{-b}{a - 1}$  是常数. 取  $k = \frac{-b}{a - 1}$ , 则  $f(k) = f\left(\frac{-b}{a - 1}\right) = a\left(\frac{-b}{a - 1}\right) + b = \frac{-b}{a - 1} = k$ , 即知题中结论成立.

**例 21** 设  $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$ , 且对每个  $n \in \mathbf{N}_+$ , 均有

$$f(n+1) > f(f(n)).$$

求证: 每个正整数均为  $f$  的不动点.

**证** 结论其实就是要证对任意正整数  $n$ ,  $f(n) = n$ . 先证一个辅助命题: 对任意两个正整数  $m, n$ , 只要  $m \geq n$ , 就有  $f(m) \geq n$ .

对  $n$  用数学归纳法.

$n = 1$  时, 显然  $f(m) \geq 1$ .

设  $n = k$  时, 命题成立, 当  $n = k + 1$  时, 任取一个正整数  $m \geq k + 1$ , 要证明的是  $f(m) \geq k + 1$ .

事实上, 由于  $m \geq k + 1$ , 故  $m - 1 \geq k$ , 由归纳假设, 知  $f(m - 1) \geq k$ , 再用一次归纳假设, 又有

$$f(f(m - 1)) \geq k.$$

由题设  $f(m) > f(f(m - 1))$ ,

所以  $f(m) > k$ ,

从而  $f(m) \geq k + 1$ .

于是命题获证.

在辅助命题中令  $m = n$ , 就得  $f(n) \geq n$ . 再用一次辅助命题, 有

$f(f(n)) \geq f(n)$ , 又有

$$f(n+1) > f(f(n)) \geq f(n),$$

即  $f(n)$  是严格递增的. 于是由  $f(n+1) > f(f(n))$  可得  $n+1 > f(n)$ , 综合两方面, 有

$$n \leq f(n) < n+1,$$

从而

$$f(n) = n.$$

**例 22** 设  $M$  为整数集  $\mathbf{Z}$  的一个含 0 的有限子集, 又设  $f, g: M \rightarrow M$  为两个单调减函数, 且满足  $g(f(0)) \geq 0$ . 求证: 在  $M$  中存在整数  $p$  使得  $g(f(p)) = p$ .

**证** 定义  $F: M \rightarrow M$ ,

$$F(x) = g(f(x)), x \in M.$$

则  $F$  是单调增函数. 事实上, 对任意的  $x, y \in M, x \leq y$ , 由  $f$  的单调减性知,  $f(x) \geq f(y)$ . 由  $f(x), f(y) \in M$  及  $g$  的单调减性, 有  $F(x) = g(f(x)) \leq g(f(y)) = F(y)$ . 因此,  $F$  是单调增函数.

如果  $g(f(0)) = 0$ , 取  $p = 0$  即可. 否则,  $F(0) > 0$ . 又由  $F(0), 0 \in M$  及  $F$  的单调增性, 有  $F(F(0)) \geq F(0)$ . 令  $D = \{x \in M \mid x \leq F(x)\}$ . 则  $F(0) \in D$ .

由  $D \subset M$ , 而  $M$  是有限集, 故  $D$  是有限集. 设  $p \in D$  为  $D$  中的最大数, 则  $p \leq F(p)$ .

再由  $F$  的单调增性, 有  $F(p) \leq F(F(p))$ , 从而  $F(p) \in D$ . 由  $p$  是  $D$  中的最大数, 有  $F(p) = g(f(p)) = p$ .

## 6.3 函数迭代的应用

(1) 几何中的应用

**例 23** 将一张地图按比例缩小之后放入原地图中, 证明: 有且仅有一点代表了两张地图的同一位置(不动点).

**证** 如图 6-1 所示, 先把两张地图放入一个复平面上. 记  $A, B$  两点对应的复数为  $0, 1, A', B'$  两点对应的复数为  $z_1, z_2$ , 那么  $|z_1 - z_2| < 1$ .

在小地图中任取一点  $P$ (对应复数  $z$ ), 连结  $PA, PB$ . 再在小地图中另找一点  $Q$ (对应复数  $f(z)$ ), 使  $\triangle QA'B' \sim \triangle PAB$ .

若  $f(z) = z$ , 则点  $P$  就是不动点. 否则, 再计

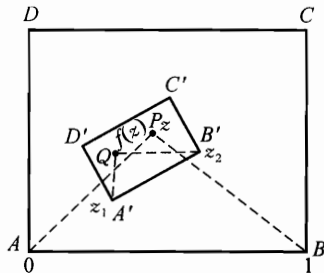


图 6-1

算  $f^{(2)}(z), \dots$ . 下面证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z)$  一定存在.

因为  $\triangle QA'B' \sim \triangle PAB$ ,

所以  $\frac{f(z) - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z - O}{1 - O}$ .

$$f(z) = (z_2 - z_1)z + z_1,$$

$$f^{(2)}(z) = (z_2 - z_1)f(z) + z_1 = (z_2 - z_1)^2 z + (z_2 - z_1)z_1 + z_1,$$

.....

$$f^{(n)}(z) = (z_2 - z_1)^n z + \frac{1 - (z_2 - z_1)^n}{1 + z_1 - z_2} z_1.$$

因为  $|z_2 - z_1| < 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \frac{z_1}{1 + z_1 - z_2}$ .

因此,  $\frac{z_1}{1 + z_1 - z_2}$  对应的点即为所求. 而不可能有两个不动点, 否则两张地图一样大. 证毕.

**例 24** 设圆  $O$  中有一个任意内接  $\triangle ABC$ , 取  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  的中点分别记为  $C_1, A_1, B_1$ , 得到一个新的内接  $\triangle A_1 B_1 C_1$ ; 取  $\widehat{A_1 B_1}, \widehat{B_1 C_1}, \widehat{C_1 A_1}$  的中点分别记为  $C_2, A_2, B_2$ , 又得一内接  $\triangle A_2 B_2 C_2$ ; 如此继续, 得一组内接三角形  $A_n B_n C_n$ , 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle C_n = \frac{\pi}{3}.$$

**证** 显然,  $\angle A_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$ . 记  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ ,  $x_0 = \angle A$ , 则有

$$\angle A_1 = f(x_0),$$

$$\angle A_2 = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0),$$

.....

$$\angle A_n = f^{(n)}(x_0).$$

而  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ , 从而

$$f^{(n)}(x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \angle A + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{同理 } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle C_n = \frac{\pi}{3}.$$

## (2) 数列通项的估值

用迭代估计数列通项, 基本思想是根据以下定理:

**定理** 设  $f, g, h$  都是定义在  $I$  上且可迭代的函数, 如果  $g$  和  $h$  都是单调增函数, 且对  $x \in I$ , 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

那么必有

$$g^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(x) \leq h^{(n)}(x).$$

定理由数学归纳法立得, 读者可自行完成.

我们最后来看一个经典问题, 需用一些高等数学知识.

**\* 例 25** 设  $f(x) = \sin x$ , 对于  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 给出  $f^{(n)}(x_0)$  的估计式.

**解** 我们证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{3}.$$

这表明  $f^{(n)}(x_0)$  与  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  是同价无穷小量, 并且不依赖于初始值  $x_0$ .

令  $\varphi(x) = \varphi(x, c) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3c^2}}}$ , 其中  $c > 0$  是参数. 利用泰勒公式展

开, 知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\varphi(x) = \varphi(x, c) = x - \frac{1}{6c^2}x^3 + o(x^3).$$

故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < x < \delta$  时, 有

$$\varphi(x, 1 - \epsilon) < \sin x < \varphi(x, 1 + \epsilon).$$

再根据  $\varphi(x)$  与  $\sin x$  的单调性, 得

$$\varphi^{(n)}(x, 1-\varepsilon) < f^{(n)}(x) < \varphi^{(n)}(x, 1+\varepsilon).$$

由于

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, 1-\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{n}{3(1-\varepsilon)^2}}} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)^2}{x^2} + \frac{n}{3}}} \\ &> \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{n}{3}}}. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, 1+\varepsilon) &= \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)^2}{x^2} + \frac{n}{3}}} \\ &< \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{n}{3}}}. \end{aligned}$$

所以

$$\left| \sqrt{n} f^{(n)}(x) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{3}}} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{3}}}.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x_0) = 0$  ( $0$  是  $\sin x$  的唯一不动点), 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{N}_+$ , 使

$$0 < f^{(m)}(x_0) < \delta.$$

现  $\forall n > m$ , 令  $f^{(n)}(x_0) = y_0$ , 于是有

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{n-m} f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n-m)y_0^2} + \frac{1}{3}}} \right| \\ &= \left| \sqrt{n-m} f^{(n-m)}(y_0) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n-m)y_0^2} + \frac{1}{3}}} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{(n-m)y_0^2} + \frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$



令  $n \rightarrow \infty$ , 有

$$|\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-m} f^{(n)}(x_0) - \sqrt{3}| \leq \sqrt{3}\epsilon.$$

$$\begin{aligned} & \text{又} \quad |\sqrt{n} f^{(n)}(x_0) - \sqrt{3}| \\ & = |(\sqrt{n} - \sqrt{n-m}) f^{(n)}(x_0) + \sqrt{n-m} f^{(n)}(x_0) - \sqrt{3}| \\ & \leq \frac{m}{\sqrt{n} + \sqrt{n-m}} f^{(n)}(x_0) + |\sqrt{n-m} f^{(n)}(x_0) - \sqrt{3}| \\ & \leq \frac{m f^{(n)}(x_0)}{2\sqrt{n-m}} + \sqrt{3}\epsilon + o(0). \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad |\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} f^{(n)}(x_0) - \sqrt{3}| \leq \sqrt{3}\epsilon.$$

由  $\epsilon$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} f^{(n)}(x_0) = \sqrt{3}.$$

上面这个例子表明, 当  $f$  的  $n$  次迭代比较复杂时, 我们可用较简单的函数去逼近它, 从而取得较好的结果.



## 习 题 6

099

**1** 求下列函数的  $n$  次迭代:

$$(1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) f(x) = \frac{x+6}{x+2};$$

$$(3) f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1;$$

$$(4) f(x) = \sqrt{7x^2+2}.$$

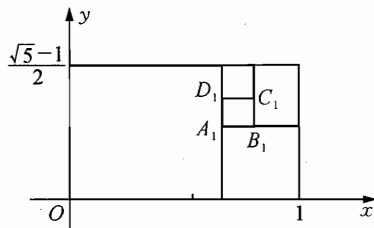
**2** 已知  $f^{(3)}(x) = 8x + 7$ , 求一次函数  $f(x)$ .

**3**  $n$  为自然数,  $f(n)$  为  $n^2 + 1$  (十进制) 的数字之和, 求  $f^{(100)}(1990)$  的值.

**4** 若  $x_1 = a > 2$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求  $\{x_n\}$  的通项.

**5** 设  $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . 求证: 对任意给定的  $n \in \mathbf{N}_+$ , 必有  $x_0$  使  $f^{(n)}(x_0) = x_0$ , 但当  $k < n$ ,  $k \in \mathbf{N}_+$  时,  $f^{(k)}(x_0) \neq x_0$ .

- 6 设一个长方形长为1, 宽为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 按如图  
 所示放入直角坐标中, 然后按逆时针  
 方向不断割去正方形, 那么剩下的长方  
 形将收缩至一点, 求该点坐标.



(第6题)

- 7 已知  $f(x) = 4x(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  
 (1) 求  $f^{(n)}(x)$ ;  
 (2) 设  $f^{(n)}(x)$  取最大和最小的  $x$  的个  
 数  $a_n, b_n$ . 试用  $n$  表示  $a_n$  和  $b_n$ .
- 8 设  $D = \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $f: D \rightarrow D$ , 且  $f$  是一一映射, 令  $f^{(1)}(x) = f(x)$ ,  
 $f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x))$ , 试求  $D$  的某一个排列  $\{x_i\}_{i=1}^{10}$ , 使  $\sum_{i=1}^{10} x_i f^{(2520)}(i) = 220$ .
- 9 设  $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$ ,  $p, k$  是两个固定正整数, 且  $f^{(p)}(n) = n+k$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ , 求  
 证:  $f$  存在的充要条件是  $p|k$ .

# 7

## 函数方程的解法



### 7.1 代换法

代换法是解函数方程的常用手段,其基本思想是:将函数方程中的自变量适当地以别的自变量代换(当然在代换时应特别注意函数的定义域不能发生变化),得到一个新的函数方程,然后设法求得未知函数.

代换法在单变量函数方程中尤为多用.

**例1** 求解函数方程:

$$f(\sin x - 1) = \cos^2 x + 2 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

**解** 令  $y = \sin x - 1$ , 则

$$\sin^2 x = (y + 1)^2.$$

$$\text{所以 } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (y + 1)^2.$$

从而

$$f(y) = 1 - (y + 1)^2 + 2 = -y^2 - 2y + 2.$$

$$\text{所以 } f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad (-2 \leq x \leq 0).$$

经检验,  $f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad (-2 \leq x \leq 0)$  是函数方程的解.

**说明** 这里的“检验”是解函数方程的一个组成部分,因为求  $f(x)$  时,首先假定了函数方程存在解  $f(x)$ , 这样求出的  $f(x)$  只是满足必要性,也就是说,只有函数方程有解,求出的  $f(x)$  才是函数方程的解. 如果函数方程无解. 那么求出的  $f(x)$  并不是原函数方程的解. 因此,我们必须检验充分性,有时候所得解显然满足原函数方程,我们就省略了.

**例2** 求解函数方程:

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \quad (x \neq 0, 1). \quad \textcircled{1}$$

解 我们希望通过适当的代换以消去  $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ . 为此, 令  $y = \frac{x-1}{x}$ , 则

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{1-x}. \text{ 代入 ①, 得}$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{x-1}{x}. \quad \text{②}$$

从①和②中虽可消去  $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ , 但又多出了  $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ .

再令  $y = \frac{1}{1-x}$ , 则  $\frac{y-1}{y} = x$ , 代入①, 得

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 1 + \frac{1}{1-x}. \quad \text{③}$$

①+③-②得

$$f(x) = \frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}.$$

**例 3** 证明: 恰有一个定义在所有非零实数上的函数  $f$ , 满足条件:

(1) 对所有非零实数  $x$ ,  $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

(2) 对所有  $x \neq -y$  的非零实数对  $(x, y)$ , 有

$$f(x) + f(y) = 1 + f(x+y).$$

**证**  $f(x) = x+1$  显然适合(1)、(2). 下证唯一性. 即设  $f(x)$  满足(1)、(2), 那么  $f(x) = x+1$ .

在(2)中, 令  $y = 1$ , 得

$$f(x) + f(1) = 1 + f(x+1) \quad (x \neq -1, x \neq 0). \quad \text{①}$$

在(2)中, 以  $-x$  代换  $x$ ,  $x+1$  代换  $y$ , 得

$$f(-x) + f(x+1) = 1 + f(1) \quad (x \neq -1, x \neq 0). \quad \text{②}$$

综合①、②, 得

$$f(x) + f(-x) = 2 \quad (x \neq -1, x \neq 0). \quad \text{③}$$

③在  $x = 1$  时成立, 所以在  $x = -1$  时也成立.

由(1)及③, 当  $x \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} f(x) &= xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left[2 - f\left(-\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= 2x + \left[-xf\left(-\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= 2x + f(-x). \end{aligned}$$

所以  $f(x) - f(-x) = 2x.$  ④

从③、④中消去  $f(-x)$ , 得  $f(x) = x + 1.$

**例4** 求所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得对任意实数  $x, y$ , 都有

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2). \quad \text{①}$$

**解** 令  $x = y \neq 0$ , 得

$$f(0) = 0.$$

设  $u = x + y, v = x - y$ . 那么  $u + v = 2x, u - v = 2y$ , 于是①式成为

$$vf(u) - uf(v) = uv(u^2 - v^2).$$

若  $uv \neq 0$ , 则上式为

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2,$$

即对任意非零实数  $u, v$ , 有

$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

所以  $\frac{f(x)}{x} - x^2 = c$  为一常数,  $x \neq 0$ .

于是对  $x \in \mathbf{R}$ , 所求的函数为

$$f(x) = x^3 + cx,$$

其中  $c$  为某个常数.

经检验,  $f(x) = x^3 + cx$  ( $c$  是常数) 是欲求的函数.

**例5** 已知函数  $f: \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$  满足:

- (1)  $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ ;
- (2)  $f(2) = 0$ ;
- (3) 当  $0 \leq x < 2$  时,  $f(x) \neq 0$ .

求函数  $f(x)$ .

**解** 当  $x > 2$  时, 令  $x = 2 + t$  ( $t > 0$ ), 有

$$f(tf(2))f(2) = f(t+2) = f(x).$$

因为  $f(2) = 0$ , 所以  $f(x) = 0 (x \geq 2)$ .

当  $0 \leq x < 2$  时, 令  $x+t = 2 (t > 0)$ , 有

$$0 = f(2) = f(x+t) = f(tf(x))f(x).$$

又因为  $f(tf(x)) = 0$ , 故  $tf(x) \geq 2$ , 即

$$f(x) \geq \frac{2}{t} = \frac{2}{-x+2}.$$

但  $f(x) > \frac{2}{2-x}$  在  $x \in [0, 2]$  时不成立.

若有  $x_1 \in [0, 2]$ , 且

$$f(x_1) > \frac{2}{2-x_1},$$

则可得

$$f(x_1)(2-x_1) > 2.$$

这时总可找到  $y < 2-x_1$ , 使  $f(x_1) \cdot y \geq 2$ , 做

$$f(yf(x_1)) = 0,$$

也即

$$f(x_1+y) = f(yf(x_1))f(x_1) = 0.$$

此式与  $x_1+y \geq 2$  矛盾, 即  $f(x) = \frac{2}{2-x}$ .

从而 
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \geq 2 \text{ 时;} \\ \frac{2}{2-x}, & \text{当 } 0 \leq x < 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

**例6** 求所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  使得

$$f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y \quad ①$$

对所有  $x, y \in \mathbf{R}$  成立.

**解** 易见  $f(x) \equiv 0$  或  $f(x) = x^2$  皆为上述方程①的解. 我们来证明它们是唯一的解.

设对某个  $a$ ,  $f(a) \neq a^2$ .

在①中令  $y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$ , 得

$$f(x) \cdot (x^2 - f(x)) = 0. \quad ②$$

由于  $f(a) \neq a^2$ , 故只能  $f(a) = 0$ , 并且可见  $a \neq 0$  (否则  $a^2 = 0 = f(a)$  与  $a$  的定义相违).

于是我们得到, 对任何  $x$ , 要么  $f(x) = 0$ , 要么  $f(x) = x^2$ .

在②中令  $x = 0$ , 有  $f(0) = 0$ .

在①中令  $x = 0$ , 有

$$f(y) = f(-y).$$

在①中令  $x = a$ , 并用  $-y$  替换  $y$ , 得

$$f(a^2 + y) = f(-y) = f(y).$$

从上式可见  $f$  以  $a^2$  为周期, 进而我们有

$$f(f(x)) = f(f(x) + a^2) = f(x^2 - a^2) + 4f(x)a^2.$$

在①中令  $y = 0$ , 有

$$f(f(x)) = f(x^2).$$

利用  $f(x)$  的周期性, 得  $f(x) \cdot a^2 = 0$ .

所以  $f(x) = 0$  (因为  $a \neq 0$ ).

也就是说, 若  $f(x) \neq x^2$ , 则必有  $f(x) \equiv 0$  成立. 因此结论成立.

下面举一个二元函数方程的例子.

**例7** 求满足下列条件的多项式  $f(x, y)$ :

(1)  $f(x, y)$  对于  $x, y$  是齐次的, 即对任意实数  $t, x, y$ , 若  $f$  是  $n$  次的, 则有

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y);$$

(2) 对任意  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(a+b, c) + f(b+c, a) + f(c+a, b) = 0;$$

(3)  $f(1, 0) = 1$ .

**解** 在(2)中令  $a = b = c = x$ , 得

$$f(2x, x) = 0.$$

根据多项式的因式定理, 有

$$f(x, y) = (x - 2y)g(x, y). \quad \textcircled{1}$$

这里  $g(x, y)$  是  $n-1$  次齐次多项式.

再在(2)中令  $a = b = x, c = 2y$ , 得

$$f(2x, 2y) = -2f(x + 2y, x).$$

由  $f$  的齐次性, 得

$$2^n f(x, y) = -2f(x + 2y, x).$$

将①式代入上式, 得

$$2^{n-1} g(x, y) = g(x + 2y, x). \quad ②$$

由此利用条件(3), 在①中令  $x = 1, y = 0$ , 得

$$g(1, 0) = 1.$$

由②式递推, 得

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= 2^{n-1}, g(3, 1) = 4^{n-1}, \\ g(5, 3) &= 8^{n-1}, g(11, 5) = 16^{n-1}, \dots, \end{aligned}$$

即存在无限多对  $(x, y)$ , 使  $g(x, y) = (x + y)^{n-1}$  成立, 由多项式恒等定理, 知

$$g(x, y) = (x + y)^{n-1}.$$

所以  $f(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}$ .

经检验, 可知上述的函数满足题中条件.

## 7.2 赋值法

所谓赋值法, 就是对自变量赋予某些特殊的数值, 从而挖掘出题中隐含的条件, 并且通过这些新条件简化函数方程, 逼近最终目标.

先来看两道整数集上函数方程的例子.

**例 8** 求所有满足下列条件的函数  $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$ , 使得

- (1)  $f(2) = 2$ ;
- (2)  $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$  对所有  $m, n \in \mathbf{N}_+$  成立;
- (3) 若  $m < n$ , 则  $f(m) < f(n)$ .

**解** 由(2), 取  $m = n = 1$  代入, 得

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2,$$

所以  $f(1) = 1$ .

再取  $m = n = 2$  代入(2)中, 又

$$f(4) = f(2)^2 = 4.$$



现在利用(3), 由于  $f(2) < f(3) < f(4)$ , 可知  $2 < f(3) < 4$ , 而  $f(3) \in \mathbf{N}_+$ , 故  $f(3) = 3$ .

因此,  $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6$ .

同样, 由  $f(4) < f(5) < f(6)$ , 我们可确定  $f(5) = 5$ .

上述过程已经告诉了我们该如何解决问题. 我们可以通过数学归纳法来确定  $f$ .

假设已经证得  $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(2k) = 2k$ .

由(2), 我们有

$$f(2k+2) = f(2) \cdot f(k+1) = 2(k+1) = 2k+2 \quad (k+1 \leq 2k).$$

而由(3), 得

$$2k = f(2k) < f(2k+1) < f(2k+2) = 2k+2.$$

从而  $f(2k+1) = 2k+1$ .

因此, 由数学归纳法即知  $f(n) = n$  对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  成立.

**例9** 求所有满足下列条件的函数  $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$ : 满足

(1)  $f(2) = 2$ ;

(2)  $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$  对所有  $m, n \in \mathbf{N}_+$ , 且  $\gcd(m, n) = 1$  成立 ( $\gcd(x, y)$  表示  $x, y$  的最大公约数);

(3) 若  $m < n$ , 则  $f(m) < f(n)$ .

**解** 和上题相比, 本题的条件放宽了.

同上题, 我们可以得到  $f(1) = 1$ . 但是, 已经不能由(2)得出  $f(4) = f(2)^2$  了, 因为(2)的条件是  $m, n$  必须互素.

如果我们能证明  $f(3) = 3$ , 那将是一个很重要的突破口. 比如接着我们能得到  $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6$ , 再利用(3), 有

$$3 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 6,$$

于是立即可得  $f(4) = 4, f(5) = 5$ .

由于对任何正整数  $k \geq 2, \gcd(k-1, k) = 1$ . 我们可以通过数学归纳法给出  $f(n) = n$  的证明:

假设已证得对所有  $k \leq n, f(k) = k$ .

利用(2), 得  $f((n-1)n) = f(n-1)f(n) = (n-1)n$ .

由(3), 又

$$\begin{aligned} n &= f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \dots < f(n^2 - n - 1) < f(n^2 - n) \\ &= f((n-1)n) = (n-1)n. \end{aligned}$$

从上式不难发现  $f(n+1) = n+1, f(n+2) = n+2, \dots, f((n-1)n-1) = (n-1)n-1, f((n-1)n) = (n-1)n$ .

这样就完成了归纳步骤.

下面我们就来设法证明  $f(3) = 3$  这一关键之处.

我们有

$$f(3) \cdot f(5) = f(15) < f(18) = f(2 \cdot 9) = f(2) \cdot f(9) = 2f(9), \quad ①$$

$$\text{以及} \quad f(9) < f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) \cdot f(5) = 2f(5). \quad ②$$

由①和②两个不等式,有

$$f(3)f(5) < 2f(9) < 4f(5),$$

故  $f(3) < 4$ , 而  $2 = f(2) < f(3) < 4$ , 即得  $f(3) = 3$ .

因此,  $f(n) = n$  对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  成立.

**说明** 通过赋特殊值, 我们得到了一些特定点上的函数值, 而这些值往往“透露”了函数的信息, 帮助我们猜出函数的解析式, 进而设法(如用数学归纳法)加以证实.

**例 10** 解函数方程: 对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 都有

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot \cos y.$$

**解** 令  $x = 0, y = t$ , 得

$$f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t. \quad ①$$

令  $x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}$ , 得

$$f(\pi+t) + f(t) = 0. \quad ②$$

令  $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$ , 得

$$f(\pi+t) + f(-t) = -2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t. \quad ③$$

由(①+②-③)/2, 得

$$f(t) = f(0)\cos t + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

所以

$$f(x) = a\cos x + b\sin x,$$

其中  $a = f(0), b = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  为常数.

经检验,  $f(x) = a\cos x + b\sin x$  满足题设条件.

**例 11** 求所有满足下列条件的  $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$f(n+m) + f(n-m) = f(3n), \quad n, m \in \mathbf{N}_+, n \geq m.$$

**解** 令  $m = 0$ , 得

$$2f(n) = f(3n), \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

令  $m = n = 0$ , 得  $f(0) = 0$ .

令  $m = n$ , 得

$$f(2n) + f(0) = f(3n),$$

即  $f(2n) = f(3n)$ .

于是, 对任意  $m \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$f(4m) = f(6m) = f(9m). \quad \textcircled{1}$$

另一方面, 在原恒等式中令  $n = 3m$ , 得

$$f(4m) + f(2m) = f(9m).$$

因此, 对任意  $m \in \mathbf{N}_+$ , 都有  $f(2m) = 0$ . 于是, 对任意  $n \in \mathbf{N}_+$ , 都有

$$f(n) = \frac{1}{2}f(3n) = \frac{1}{2}f(2n) = 0.$$

故所求的  $f(n) \equiv 0$  才能满足题意.

**例 12** 函数  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  均非常数, 且满足:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y), & \textcircled{1} \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y). & \textcircled{2} \end{cases}$$

求  $f(0)$  与  $g(0)$  的所有可能值.

**解** 自然地, 令  $x=y=0$ , 代入①、②, 得

$$\begin{cases} f(0) = 2f(0)g(0), & \textcircled{3} \\ g(0) = g^2(0) - f^2(0). & \textcircled{4} \end{cases}$$

若  $f(0) \neq 0$ , 则由③,  $g(0) = \frac{1}{2}$ . 由④, 有

$$f^2(0) = g^2(0) - g(0) = -\frac{1}{4} < 0, \text{ 矛盾!}$$

所以  $f(0) = 0$ , 因此

$$g(0) = g^2(0).$$

若  $g(0) = 0$ , 在 ① 中令  $y = 0$ , 得

$$f(x) \equiv 0.$$

与题设不符.

所以  $g(0) = 1$ .

综上所述,  $f(0) = 0, g(0) = 1$ .

**说明** 我们经常会遇到函数在某个点上取值可能不确定的情况, 这就需要我们去伪存真, 并意识到题目可能会有多解.

**例 13** 求所有满足  $f(1) = 2$  和  $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, x, y \in \mathbf{Q}$  的函数  $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q}$  为有理数集).

**解** 在原恒等式中令  $y = 1$ , 得

$$f(x) = f(x) \cdot f(1) - f(x+1) + 1, x \in \mathbf{Q}.$$

即

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

因此,  $f(n) = f(1) + n - 1 = n + 1$ .

另外, 在原恒等式中取  $x = \frac{1}{n}, y = n, n \in \mathbf{Z}$ , 有

$$f\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1,$$

即

$$2 = f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1.$$

所以

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

最后, 我们取  $x = p, y = \frac{1}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$ , 得

$$f\left(p, \frac{1}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1.$$

故

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \frac{1}{q} - p = \frac{p}{q} + 1.$$

所以, 只有函数  $f(x) = x + 1$  满足条件.

**说明** 这种“爬坡式”的推理技巧称为柯西方法, 后面我们会专门讲述.

**例 14** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足如下条件:

(1) 对任意实数  $x, y$ , 有

$$f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2}\right)\right);$$

(2) 对任意实数  $x, y$ , 有

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)f(x - y) + (x - y)f(x + y).$$

求  $f(2012 + \sqrt{2012} + \sqrt[3]{2012})$  的值.

解 令  $u = x + y, v = x - y$ , 则

$$f(u + v) = f\left(\sin\frac{u\pi}{2}\right) + f\left(\sin\frac{v\pi}{2}\right), \quad ①$$

$$f(uv) = uf(v) + vf(u). \quad ②$$

在②中令  $u = 0, v = 2$ , 得  $f(0) = 0$ .

令  $u = 0$ , 代入①, 得  $f(v) = f\left(\sin\frac{v\pi}{2}\right)$ , 同理  $f(u) = f\left(\sin\frac{u\pi}{2}\right)$ , 所以

$$f(u + v) = f(u) + f(v). \quad ③$$

在②中令  $u = v = 1$ , 得  $f(1) = 0$ .

在③中令  $v = 1$ , 得  $f(u + 1) = f(u)$ , 从而  $f(2012) = 0$ .

在②中令  $u = v$ , 得

$$f(u^2) = 2uf(u). \quad ④$$

所以,  $f(2012) = 2 \cdot \sqrt{2012} f(\sqrt{2012})$ , 故  $f(\sqrt{2012}) = 0$ .

在②中令  $v = u^2$ , 得

$$f(u^3) = uf(u^2) + u^2 f(u) = 3u^2 f(u),$$

所以,  $f(2012) = 3 \cdot 2012^{\frac{2}{3}} f(\sqrt[3]{2012})$ , 于是  $f(\sqrt[3]{2012}) = 0$ .

所以

$$f(2012 + \sqrt{2012} + \sqrt[3]{2012}) = f(2012) + f(\sqrt{2012}) + f(\sqrt[3]{2012}) = 0.$$

**例 15** 确定所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 其中  $\mathbf{R}$  的实数集, 使得对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 恒有

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1. \quad ①$$

解 记  $I$  为函数  $f$  的象集. 设  $f(0) = c$ .

在①中令  $x = y = 0$ , 有

$$f(-c) = f(c) + c - 1.$$

所以  $c \neq 0$ .

在①中令  $x = f(y)$ , 有

$$f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1,$$

$$\text{故} \quad f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad \textcircled{2}$$

在①中令  $y = 0$ , 又有

$$f(x-c) = f(c) + cx + f(x) - 1.$$

$$\text{所以} \quad f(x-c) - f(x) = f(c) - 1 + cx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

注意到  $c \neq 0$ , 因此当  $x$  取遍实数集的时候,  $cx + f(c) - 1$  也取遍整个实数集. 即

$$\{f(c) - 1 + cx \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}.$$

$$\text{于是} \quad \{f(x-c) - f(x) \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}.$$

因此, 对任何实数  $x$ , 存在  $y_1 = f(x' - c)$  及  $y_2 = f(x')$ , 使得

$$x = y_1 - y_2.$$

再利用②, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) \\ &= f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 \\ &= c - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad \textcircled{3}$$

比较②、③两式即得  $c = 1$ .

于是, 所求的函数为  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 不难验证其满足所有条件.

**说明** 解法中蕴含的“算两次”的思想值得我们重视.

下面我们看一个二元多项式的例子.

**例 16** 设  $f(x, y)$  是二元多项式, 且满足下列条件:

- (1)  $f(1, 2) = 2$ ;
- (2)  $yf(x, f(x, y)) = xf(f(x, y), y)^2$ .

试确定所有这样的  $f(x, y)$ .

**解** 由(1),  $f(1, 2) = 2$ . 再反复利用(2), 得

$$f(2, 2) = f(f(1, 2), 2) = (f(1, 2))^2 = 4,$$

$$f(4, 2) = \frac{1}{2}(2f(f(2, 2), 2)) = \frac{1}{2}(f(2, 2))^2 = 8,$$

.....

不难用数学归纳法证明(这里略), 对任意自然数  $n$ , 有

$$f(2^n, 2) = 2^{n+1}.$$

于是, 关于  $x$  的多项式  $f(x, 2) - 2x$  有无限多个根  $2^n (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 所以  $f(x, 2) \equiv 2x$ .

由于  $f(x, 2)$  和  $f(x, y)$  中对各项的  $x$  次数不变, 所以,  $f(x, y) = xg(y)$ , 其中  $g(y)$  是关于  $y$  的一元多项式.

另外, 由  $f(2, 2) = 4$ , 反复利用(2), 得

$$f(2, 4) = \frac{1}{2}(2f(2, f(2, 2))) = 8,$$

.....

同样用数学归纳法易证, 对任意自然数  $n$ , 有  $f(2, 2^n) = 2^{n+1}$ .

类似地, 得

$$f(x, y) = yh(x).$$

所以  $f(x, y) = xy$ .

**例 17** 求所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得对任意实数  $x, y, z$ , 有

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}. \quad \textcircled{1}$$

**解** 题设所给的是一个不等式, 而不是方程, 而且变元有三个, 即  $x, y, z$ . 我们设法通过取一些特殊值来寻求结果.

令  $x = y = z = 1$ , 代入  $\textcircled{1}$ , 得

$$f(1) - (f(1))^2 \geq \frac{1}{4}.$$

所以  $(f(1) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ .

故  $f(1) = \frac{1}{2}. \quad \textcircled{2}$

令  $y = z = 1$ , 代入 ① 并利用 ②, 得

$$f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4}.$$

所以  $f(x) \geq \frac{1}{2}$ . ③

令  $x = y = z = 0$ , 代入 ①, 得

$$f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}.$$

所以  $f(0) = \frac{1}{2}$ . ④

令  $x = 0$ , 代入 ① 并利用 ④, 得

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

故  $f(yz) \leq \frac{1}{2}$ ,

即  $f(x) \leq \frac{1}{2}$ . ⑤

114

综合③和⑤, 即得  $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ .

**例 18** 求所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得等式

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \quad ①$$

对所有  $x, y \in \mathbf{R}$  成立. (这里  $[z]$  表示不超过实数  $z$  的最大整数)  
 (2010 年国际数学奥林匹克试题)

**解** 答案是  $f(x) = C$  (常数), 这里  $C = 0$  或者  $1 \leq C < 2$ .

令  $x = 0$  代入 ①, 得

$$f(0) = f(0)[f(y)] \quad ②$$

对所有  $y \in \mathbf{R}$  成立. 于是有如下两种情形:

(1) 当  $f(0) \neq 0$  时, 由 ② 知,  $[f(y)] = 1$  对所有  $y \in \mathbf{R}$  成立. 所以, ① 式为  $f([x]y) = f(x)$ . 令  $y = 0$ , 得  $f(x) = f(0) = C \neq 0$ .

由  $[f(y)] = 1 = [C]$ , 知  $1 \leq C < 2$ .

(2) 当  $f(0) = 0$  时, 若存在  $0 < \alpha < 1$ , 使得  $f(\alpha) \neq 0$ , 令  $x = \alpha$  代入 ① 式, 得



$$0 = f(0) = f(\alpha)[f(y)]$$

对所有  $y \in \mathbf{R}$  成立, 所以  $[f(y)] = 0$  对所有  $y \in \mathbf{R}$  成立. 令  $x = 1$  代入①式, 得  $f(y) = 0$  对所有  $y \in \mathbf{R}$  成立, 这与  $f(\alpha) \neq 0$  矛盾.

所以, 我们有  $f(\alpha) = 0, 0 \leq \alpha < 1$ . 对于任意实数  $z$ , 存在整数  $N$ , 使得  $\alpha = \frac{z}{N} \in [0, 1)$ . 由①式, 有

$$f(z) = f([N]\alpha) = f(N)[f(\alpha)] = 0$$

对所有  $z \in \mathbf{R}$  成立.

经检验,  $f(x) = C$  (常数), 这里  $C = 0$  或者  $1 \leq C < 2$  满足题设.

### 7.3 柯西法

用柯西法解函数方程的步骤是: 先求出对于自变量取所有正整数值时函数方程的解具有的形式, 然后依次证明对自变量取整数值、有理数值以及实数值时函数方程的解仍具有这种形式, 从而得到函数方程的解.

**例 19** 如果非零连续函数  $f(x)$  满足函数方程

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y), x, y \in \mathbf{R}. \quad \textcircled{1}$$

证明:  $f(x) = (f(1))^{x^2}$ .

**证** 易知  $f(x)$  是偶函数, 所以只需对  $x \geq 0$  的情形进行证明.

当  $x = 0$  时, 在①中取  $x = y = 0$ , 得

$$f(0) = (f(0))^2.$$

因为  $f(x) \neq 0$ , 故  $f(0) = 1$ , 从而

$$f(0) = (f(1))^{0^2}.$$

当  $x = n$  是正整数时, 先证如下命题:

$$f(\sqrt{ny}) = (f(y))^n, \text{ 其中 } n \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{R}^+. \quad \textcircled{2}$$

$n = 1$  时, ②显然成立.

设  $n = k$  时②式成立. 当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{k+1}y) &= f(\sqrt{ky^2 + y^2}) = f(\sqrt{ky})f(y) \\ &= (f(y))^k f(y) = (f(y))^{k+1}, \end{aligned}$$

从而②式得证.

令  $y = 1$  及  $y = \sqrt{n}$  代入 ② 式, 分别得

$$f(\sqrt{n}) = (f(1))^n, f(n) = (f(\sqrt{n}))^n.$$

所以  $f(n) = (f(1))^n$ .

当  $x = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbf{N}_+$ ) 为有理数时, 由于

$$\begin{aligned} f(p) &= (f(1))^{p^2}, \\ f(p) &= f\left(\sqrt{q^2} \cdot \frac{p}{q}\right) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^{q^2}. \end{aligned}$$

于是  $f\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2} = (f(1))^{p^2}$ , ③

所以  $f\left(\frac{p}{q}\right) = (f(1))^{\frac{p^2}{q^2}}$ .

由  $f$  的连续性, 知对于无理数  $x$ , 也有

$$f(x) = (f(1))^{x^2}.$$

**说明** 以上证明过程中尚有一点需说明, 在对 ③ 式两边开方时必须要求  $f(x) > 0$ , 这是不难证的. 事实上,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(|x|) = F\left(\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

又  $f(x) \neq 0$ , 故  $f(x) > 0$ .

**例 20** 函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足  $f(1) = 1$ , 且对任意  $a, b \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(a+b) = f(a) + f(b); \tag{1}$$

对任意  $x \neq 0$ , 有

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1. \tag{2}$$

求证:  $f(x) = x$ .

**证** 由题设, 得

$$1 = f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0),$$

所以  $f(0) = 0$ .

又因为  $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ ,

所以  $f(x)$  是奇函数. 下面只需证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x$  即可.  
 由①式, 用数学归纳法易证得: 对任意正整数  $n$  及正实数  $x$ , 有

$$f(nx) = nf(x).$$

令  $x = 1$ , 便有

$$f(n) = n.$$

令  $x = \frac{1}{n}$ , 得

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) = \frac{1}{n}.$$

于是对于正有理数  $\frac{m}{n}$ , 有

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

最后, 讨论  $x$  是无理数的情况, 为此先证  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

对于任意实数  $y > 2$ , 必存在正实数  $x$ , 满足  $x + \frac{1}{x} = y$ , 于是

$$|f(y)| = \left| f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right| \geq 2\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

因此, 当  $y < \frac{1}{2}$  时,

$$|f(y)| = \left| \left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 总存在正整数  $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$ , 当  $x < \frac{1}{2N}$  时, 有

$$|f(x)| = \frac{1}{N} |f(Nx)| \leq \frac{1}{2N} < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ . ③

对于正无理数  $x$ , 存在一有理数数列  $\{x_m\}$ ,  $x_m \rightarrow x (m \rightarrow \infty)$ , 于是

$$f(x) = f(x_m) + f(x - x_m) = x_m + f(x - x_m).$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 利用③式, 得

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x.$$

下面介绍多变元函数方程中,最著名又是最基本的柯西方程:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R}. \quad (*)$$

许多函数方程可以转化为柯西方程后加以解决.

**例 21** 设  $f(x)$  满足柯西方程,且在  $\mathbf{R}$  上连续,求  $f(x)$ .

**解** 利用 $(*)$ ,用数学归纳法易得:对任意正整数  $n$  和实数  $x$ ,有

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

令  $x = 1$ ,有  $f(n) = nf(1)$ .

记  $a = f(1)$ ,那么对一切正整数  $n$ ,有  $f(n) = an$ .

再令  $x = \frac{m}{n}$  ( $m, n$  是正整数) 为正有理数,有

$$nf\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) = f(m \cdot 1) = mf(1) = am,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n}.$$

$$\text{又 } f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

$$\text{所以 } f(0) = 0 = a \cdot 0.$$

$$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x),$$

$$\text{所以 } f(x) = -f(-x),$$

即  $f(x)$  是奇函数. 于是从上面可知,对一切有理数  $r$ ,有  $f(r) = ar$ .

所以,  $g(x) = f(x) - ax$  在有理数集上处处等于 0. 因  $f(x)$  连续,所以  $g(x)$  也连续,进而  $g(x) = 0$ .

事实上,若  $g(x_0) \neq 0$ ,由  $g$  的连续性知,存在  $x_0$  的一个邻域  $u(x_0, \epsilon)$ ,使  $g(x)$  在此邻域内处处不等于 0. 这与它在有理点为 0 矛盾.

所以,对一切实数  $x$ ,都有:  $f(x) = ax$ , 其中  $a = f(1)$ .

**说明** 在本题中,我们要求  $f(x)$  连续,其实这个要求太强了. 我们只要  $f(x)$  在某个区间内有界,或  $f(x)$  在某区间内单调均可导出  $f(x) = ax$  ( $a = f(1)$ ).

**例 22** 求二元一次函数方程:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一切单调函数的解.

**解** 同上题可证:对一切有理数 $r$ ,有 $f(r) = ar$ ,其中 $a = f(1)$ .设 $\lambda$ 是任意无理数,则必存在有理数 $r_1, r_2$ ,使得 $r_1 < \lambda < r_2$ .

根据题目条件,不妨设 $f(x)$ 是单调递增的,故

$$f(r_1) \leq f(\lambda) \leq f(r_2),$$

即

$$ar_1 \leq f(\lambda) \leq ar_2.$$

因为可使 $r_1, r_2$ 无限接近于 $\lambda$ ,故 $f(\lambda) = a\lambda$ .

综上所述,对任意实数 $x$ ,有 $f(x) = ax$ ,其中 $a = f(1)$ .

我们用柯西方法来解稍复杂的函数方程.

**例 23** 设 $f: \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}^+$  ( $\mathbf{Q}^+$ 为正有理数的全体)满足

$$f(x) = f(xf(y))y. \quad \textcircled{1}$$

试求其一个解.

**解** 在①中取 $x = y = 1$ ,得 $f(1) = f(f(1))$ .

在①中取 $y = f(1)$ ,得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(xf(f(1)))f(1) = f(xf(1))f(1) \\ &= f(x)f(1). \end{aligned}$$

于是 $f(1) = 1$ .因此,再从①中取 $x = 1$ ,得

$$yf(f(y)) = f(1) = 1. \quad \textcircled{2}$$

另外,从①中取 $y = f(t)$ ,得

$$f(x) = f(t)f(xf(f(t))) = f(t)f\left(\frac{x}{t}\right).$$

继续取 $x = st$ ,得

$$f(st) = f(t)f(s). \quad \textcircled{3}$$

显然,若 $f(x)$ 满足②和③,则 $f(x)$ 也必满足①.事实上, $f(xf(y)) = f(x)f(f(y)) = \frac{f(x)}{y}$ .我们利用这一充要条件②和③来构造解.

首先,当 $x$ 为素数时构造 $f(x)$ .记 $p_k$ 是从小到大的第 $k$ 个素数.令

$$f(p_k) = \begin{cases} p_{k+1}, & \text{当 } k = 2m + 1, m = 0, 1, 2, \dots \text{ 时;} \\ \frac{1}{p_{k-1}}, & \text{当 } k = 2m, m = 1, 2, \dots \text{ 时.} \end{cases}$$

它显然满足②.

其次, 对任意正整数  $x$  定义  $f(x)$ . 令  $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是非负整数.

由③, 得

$$f(x) = (f(p_1))^{\alpha_1} (f(p_2))^{\alpha_2} \cdots (f(p_s))^{\alpha_s}.$$

最后, 对任意正有理数  $x$ , 即  $x = \frac{n}{m} \in \mathbf{Q}^+$ , 其中  $m, n \in \mathbf{N}_+$ .

由③, 得

$$f(n) = f(mx) = f(m)f(x).$$

从而

$$f(x) = \frac{f(n)}{f(m)}.$$

这样, 最终我们给出了原函数方程在  $\mathbf{Q}^+$  上的一个解.

## 7.4 递归法

函数方程的递归解法, 是一种借助于数列对函数方程加以研究的方法.

设  $f(n)$  是定义在正整数集  $\mathbf{N}_+$  上的函数, 如果存在一个递推关系  $S$  和初始条件  $f(1) = a_1$ , 当知道  $f(1), f(2), \dots, f(n)$  的值后, 由  $S$  可以唯一地确定  $f(n+1)$  的值, 我们就称  $f(n)$  为递归函数, 递归法主要解决递归函数.

**例 24** 已知定义的正整数集  $\mathbf{N}_+$  上的函数  $f(n)$  满足:  $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ , 且  $f(1) = f(2) = 1$ . 求  $f(n)$ .

**解** 所给递归函数的特征方程为  $x^2 = x + 1$ . 解方程, 得  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$$\text{所以 } f(n) = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

由初始条件  $f(1) = f(2) = 1$ , 得

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_2 = 1,$$

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 c_1 + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 c_2 = 1.$$

解方程组, 得  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . 所以

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

这就是著名的斐波那契数列.

**例 25** 定义在正整数集  $\mathbf{N}_+$  上的函数  $f(n)$  满足  $f(1) = a$ ,

$$f(n) = rf(n-1) + qp^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \textcircled{1}$$

其中  $p, q, r$  为常数, 求  $f(n)$ .

**解** 反复利用①式, 有

$$\begin{aligned} f(n) &= rf(n-1) + qp^{n-1} \\ &= r(rf(n-2) + qp^{n-2}) + qp^{n-1} \\ &= r^2 f(n-2) + q(rp^{n-2} + p^{n-1}) \\ &= r^2 (rf(n-3) + qp^{n-3}) + q(rp^{n-2} + p^{n-1}) \\ &= r^3 f(n-3) + q(r^2 p^{n-3} + rp^{n-2} + p^{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

易知

$$f(n) = r^k f(n-k) + q(r^{k-1} p^{n-k} + r^{k-2} p^{n-k+1} + \dots + p^{n-1}). \quad \textcircled{2}$$

上式用数学归纳法容易证明, 在②式中令  $k = n-1$ , 便得

$$\begin{aligned} f(n) &= r^{n-1} f(1) + q(r^{n-2} p + r^{n-3} p^2 + \dots + p^{n-1}) \\ &= \begin{cases} r^{n-1} [a + (n-1)q], & \text{当 } p = r \text{ 时;} \\ r^{n-1} (a - q) + q \cdot \frac{p^n - r^n}{p - r}, & \text{当 } p \neq r \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

**例 26** 已知函数  $f$  定义在正整数集  $\mathbf{N}_+$  上,  $f(1) = \frac{3}{2}$ , 并且对任意正整数  $m, n$ , 均有

$$f(m+n) = \left(1 + \frac{n}{m+1}\right) f(m) + \left(1 + \frac{m}{n+1}\right) f(n) + m^2 n + mn + nm^2.$$

求  $f$ .

**解** 令  $n = 1$ , 得

$$f(m+1) = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) f(m) + \left(1 + \frac{m}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} + m^2 + 2m.$$

整理, 得

$$\frac{f(m+1)}{m+2} - \frac{f(m)}{m+1} = m + \frac{3}{4}.$$

于是, 利用累差求和的方法, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{f(k+1)}{k+2} - \frac{f(k)}{k+1} \right) &= \sum_{k=1}^{m-1} \left( k + \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{(m-1)m}{2} + \frac{3}{4}(m-1). \end{aligned}$$

所以

$$\frac{f(m)}{m+1} - \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{4}(m-1)(2m+3),$$

故 
$$f(m) = \frac{1}{4}m(m+1)(2m+1).$$

因此所求的函数即为

$$f(m) = \frac{1}{4}m(m+1)(2m+1).$$

**例 27** 设  $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q}$  为有理数集) 且

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy, \text{ 对任意 } x, y \in \mathbf{Q}. \quad \textcircled{1}$$

如果  $f(-1)f(1) \geq 4$ , 求  $f(x)$ .

**解** 取  $x = y = 0$ , 由 ①, 得  $f(0) = 0$ .

在 ① 中取  $x = 1$  和  $y = -1$ , 得

$$f(0) = f(1) + f(-1) - 4,$$

即  $f(1) + f(-1) = 4$ .

因为  $f(-1)f(1) \geq 4$ , 所以  $f(1)$  和  $f(-1)$  皆为正数, 从而

$$4 = f(1) + f(-1) \geq 2\sqrt{f(1)f(-1)} \geq 4.$$

上式等号成立, 所以  $f(1) = f(-1) = 2$ .

再在 ① 中取  $y = 1$ , 得

$$f(x+1) = f(x) + 4x + 2. \quad \textcircled{2}$$

对 ② 递推, 有

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + 4 \cdot 1 + 2,$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + 4 \cdot 2 + 2,$$

.....

$$f(n) = f(n-1+1) = f(n-1) + 4(n-1) + 2.$$

因此



$$f(n) = f(1) + 4(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + 2(n-1) = 2n^2. \quad \textcircled{3}$$

又因为  $f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{4k}{n^2},$

即  $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{4k}{n^2}.$

利用  $f(1) = 2$ , 对  $k$  从 1 到  $n-1$  求和, 得

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}. \quad \textcircled{4}$$

同理对  $k$  从 1 到  $m-1$  求和, 得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 2 \frac{m^2}{n^2}.$$

最后, 令  $x = \frac{m}{n}, y = -\frac{m}{n}$ , 由 ①, 有

$$f(0) = f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(-\frac{m}{n}\right) - \frac{4m^2}{n^2},$$

故  $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2}.$

因此对所有  $x \in \mathbf{Q}$ , 有  $f(x) = 2x^2$ .

构造递推数列来解函数方程是非常巧妙的方法. 如何构造数列是一个难点, 请看下例.

**例 28** 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x^2) - f(x) = 1$ , 求  $f(x)$ .

**解** 构造数列  $\{x_n\}$  如下:

$$x_0, x_1 = x_0^2, x_2 = x_1^2, \cdots, x_n = x_{n-1}^2.$$

将它们代入所给函数方程, 得

$$f(x_1) - f(x_0) = 1,$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 1,$$

.....

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = 1.$$

将上面这些等式相加, 有  $f(x) - f(x_0) = n$ .

因为  $x = x_0^{2^n}$ , 所以  $\log_2 \log_2 x - \log_2 \log_2 x_0 = n$ . 因此

$$f(x) = f(x_0) + \log_2 \log_2 x - \log_2 \log_2 x_0.$$

令  $c = f(x_0) - \log_2 \log_2 x_0$ , 那么

$$f(x) = \log_2 \log_2 x + c.$$

容易验证, 上面的  $f(x)$  即为所求.

## 7.5 综合题

**例 29** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 若  $f(0) = 2008$ , 且对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 满足

$$f(x+2) - f(x) \leq 3 \cdot 2^x, \quad f(x+6) - f(x) \geq 63 \cdot 2^x,$$

求  $f(2008)$  的值. (2008 年全国高中数学联赛填空题改编)

**解法一** 由题设条件知

$$\begin{aligned} f(x+2) - f(x) &= -(f(x+4) - f(x+2)) - (f(x+6) - f(x+4)) + \\ &\quad (f(x+6) - f(x)) \\ &\geq -3 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+4} + 63 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x, \end{aligned}$$

因此有  $f(x+2) - f(x) = 3 \cdot 2^x$ , 故

$$\begin{aligned} f(2008) &= f(2008) - f(2006) + f(2006) - f(2004) + \cdots + \\ &\quad f(2) - f(0) + f(0) \\ &= 3 \cdot (2^{2006} + 2^{2004} + \cdots + 2^2 + 1) + f(0) \\ &= 3 \cdot \frac{4^{1003+1} - 1}{4 - 1} + f(0) \\ &= 2^{2008} + 2007. \end{aligned}$$

**解法二** 令  $g(x) = f(x) - 2^x$ , 则

$$\begin{aligned} g(x+2) - g(x) &= f(x+2) - f(x) - 2^{x+2} + 2^x \leq 3 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 0, \\ g(x+6) - g(x) &= f(x+6) - f(x) - 2^{x+6} + 2^x \geq 63 \cdot 2^x - 63 \cdot 2^x = 0, \end{aligned}$$

即  $g(x+2) \leq g(x), g(x+6) \geq g(x)$ ,

故  $g(x) \leq g(x+6) \leq g(x+4) \leq g(x+2) \leq g(x)$ ,

得  $g(x)$  是周期为 2 的周期函数, 所以

$$f(2008) = g(2008) + 2^{2008} = g(0) + 2^{2008} = 2^{2008} + 2007.$$

**例 30** 设  $f$  是一个定义在整数集上取值为正整数的函数, 已知对任意两个整数  $m, n$ , 差  $f(m) - f(n)$  能被  $f(m-n)$  整除. 证明: 对所有整数  $m, n$ , 若

$f(m) \leq f(n)$ , 则  $f(n)$  被  $f(m)$  整除. (2011 年国际数学奥林匹克试题)

证 设整数  $x, y$  使得  $f(x) < f(y)$  (若  $f(x) = f(y)$ , 结论显然成立), 令  $m = x, n = y$ , 得  $f(x-y) \mid |f(x) - f(y)|$ ,

即  $f(x-y) \mid f(y) - f(x)$ , ①

所以  $f(x-y) \leq f(y) - f(x) < f(y)$ ,

故差  $d = f(x) - f(x-y)$  满足

$$-f(y) < -f(x-y) < d < f(x) < f(y).$$

令  $m = x, n = x-y$ , 得  $f(y) \mid d$ , 故  $d = 0$ , 从而  $f(x) = f(x-y)$ .

由①式, 得  $f(x) \mid f(y) - f(x)$ , 故  $f(x) \mid f(y)$ . 从而命题得证.

例 31 求所有的函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , 满足对所有的正实数  $w, x, y, z, wx = yz$ , 都有

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

(2008 年国际数学奥林匹克试题)

解 令  $w = x = y = z = 1$ , 得  $(f(1))^2 = f(1)$ , 所以  $f(1) = 1$ .

对任意  $t > 0$ , 令  $w = t, x = 1, y = z = \sqrt{t}$ , 得  $\frac{(f(t))^2 + 1}{2f(t)} = \frac{t^2 + 1}{2t}$ , 去分母整理得  $(tf(t) - 1)(f(t) - t) = 0$ , 所以, 对每个  $t > 0$ ,

$$f(t) = t, \text{ 或者 } f(t) = \frac{1}{t}. \quad \textcircled{*}$$

若存在  $b, c \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(b) \neq b, f(c) \neq \frac{1}{c}$ , 则由②式知,  $b, c$  都不等于 1, 且  $f(b) = \frac{1}{b}, f(c) = c$ . 令  $w = b, x = c, y = z = \sqrt{bc}$ , 则

$$\frac{\frac{1}{b^2} + c^2}{2f(bc)} = \frac{b^2 + c^2}{2bc},$$

所以  $f(bc) = \frac{c + b^2 c^3}{b(b^2 + c^2)}$ .

因为  $f(bc) = bc$ , 或者  $f(bc) = \frac{1}{bc}$ . 若  $f(bc) = bc$ , 则

$$bc = \frac{c + b^2 c^3}{b(b^2 + c^2)},$$

得  $b^4c = c, b = 1$ , 矛盾! 若  $f(bc) = \frac{1}{bc}$ , 则

$$\frac{1}{bc} = \frac{c + b^2c^3}{b(b^2 + c^2)},$$

得  $b^2c^4 = b^2, c = 1$ , 矛盾!

所以, 或者  $f(x) = x, x \in (0, +\infty)$ , 或者  $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ .

经检验,  $f(x) = x, x \in (0, +\infty)$  和  $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$  都满足要求.

**例 32** 给定整数  $n \geq 2$ . 求所有的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足对任意实数  $x, y$ , 都有

$$f(x - f(y)) = f(x + y^n) + f(f(y) + y^n).$$

(2011 年国家集训队选拔考试)

**解** 令  $x = f(y)$ , 则  $f(f(y) + y^n) = \frac{1}{2}f(0)$ . 令  $z = x - f(y)$ , 则

$$x + y^n = z + f(y) + y^n.$$

于是有

$$f(z) = f(z + f(y) + y^n) + \frac{1}{2}f(0). \quad \textcircled{1}$$

令  $S = \{f(y) + y^n \mid y \in \mathbf{R}\}$ . 下面分两种情形讨论.

情形一:  $S$  中仅含一个元素, 于是存在常数  $a$  使得  $f(y) + y^n = a$  对任意  $y$  成立. 代入  $\textcircled{1}$  式中即得

$$f(z) = f(z + a) + \frac{1}{2}f(0),$$

即有  $-z^n + a = -(z + a)^n + a + \frac{1}{2}a$  对所有实数  $z$  成立, 故  $a = 0$ . 易验证  $f(x) = -x^n$  满足要求.

情形二:  $S$  含有多于一个元素. 由  $\textcircled{1}$  式知对任意  $s \in S$ , 都有  $f(z) = f(z + s) + \frac{1}{2}f(0)$ . 于是对  $s_1, s_2 \in S$  (不妨设  $s_1 > s_2$ ),  $f(z + s_1) = f(z + s_2)$  成立, 即  $f$  是以  $s_1 - s_2$  为周期的周期函数. 由于  $S$  至少含有两个元素, 故存在  $\lambda > 0$ , 使得  $f$  以  $\lambda$  为周期. 于是

$$(f(y+\lambda) + (y+\lambda)^n) - (f(y) + y^n) = (y+\lambda)^n - y^n$$

也是  $f$  的周期. 这是关于  $y$  的  $n-1$  次多项式, 因为首项系数  $n\lambda > 0$ , 所以该多项式可以取到充分大的所有实数, 即充分大的实数均为  $f$  的周期, 于是所有实数均为  $f$  的周期, 这样  $f$  是常数函数. 由 ① 式即知  $f(x) = 0$ , 易验证  $f(x) = 0$  满足要求.

综上所述, 所有满足要求的函数为  $f(x) = -x^n$  和  $f(x) = 0$ .

**例 33** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是一个定义在实数集上的实值函数, 满足对所有实数  $x, y$ , 都有

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)), \quad ①$$

证明: 对所有实数  $x \leq 0$ , 有  $f(x) = 0$ . (2011 年国际数学奥林匹克试题)

证 令  $y = t - x$ , 则 ① 式可写为

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \quad ②$$

在 ② 式中分别令  $t = f(a)$ ,  $x = b$  和  $t = f(b)$ ,  $x = a$ , 可得

$$\begin{aligned} f(f(a)) - f(f(b)) &\leq f(a)f(b) - bf(b), \\ f(f(b)) - f(f(a)) &\leq f(a)f(b) - af(a). \end{aligned}$$

把上面两式相加得

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b).$$

令  $b = 2f(a)$ , 得  $2f(a)f(b) \geq af(a) + 2f(a)f(b)$ , 即  $af(a) \leq 0$ . 所以

$$f(a) \geq 0, \text{ 当 } a < 0 \text{ 时}. \quad ③$$

假设存在某个实数  $x$ , 使得  $f(x) > 0$ . 由 ② 式, 对每个  $t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}$ , 有  $f(t) < 0$ , 这与 ③ 矛盾. 所以, 对所有实数  $x$

$$f(x) \leq 0, \quad ④$$

结合 ③ 知, 对所有实数  $x < 0$ , 有  $f(x) = 0$ .

在 ② 中令  $t = x < 0$ , 得  $f(x) \leq f(f(x))$ , 故  $0 \leq f(0)$ , 结合 ④, 知  $f(0) = 0$ .

综上可知, 对任意  $x \leq 0$ , 都有  $f(x) = 0$ .

**例 34** 对每一个正整数  $n$ , 求具有下述性质的最大常数  $C_n$ : 对任意  $n$  个定义在闭区间  $[0, 1]$  上的实值函数  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ , 都存在实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 满足  $0 \leq x_i \leq 1$ , 且  $|f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) -$

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq C_n. \quad (2010 \text{年罗马尼亚大师杯})$$

解 所求的最大常数  $C_n = \frac{n-1}{2n}$ .

一方面, 取  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ , 得题中不等式的左式  $= \left| \sum_{i=1}^n f_i(1) - 1 \right|$ , 取  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ , 得不等式左式  $= \left| \sum_{i=1}^n f_i(0) \right|$ , 取  $x_i = 0, x_j = 1 (j \neq i)$ , 得不等式左式  $= \left| \sum_{j \neq i} f_j(1) + f_i(0) \right|$ . 由三角形不等式可知

$$\begin{aligned} & (n-1) \left| \sum_{i=1}^n f_i(1) - 1 \right| + \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j \neq i} f_j(1) + f_i(0) \right| + \left| \sum_{i=1}^n f_i(0) \right| \\ & \geq \left| (n-1) \left( \sum_{i=1}^n f_i(1) - 1 \right) - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \neq i} f_j(1) + f_i(0) \right) + \sum_{i=1}^n f_i(0) \right| = n-1. \end{aligned}$$

故  $\left| \sum_{i=1}^n f_i(1) - 1 \right|, \left| \sum_{i=1}^n f_i(0) \right|, \left| \sum_{j \neq i} f_j(1) + f_i(0) \right| (i=1, 2, \dots, n)$  中必有一个数不小于  $\frac{n-1}{2n}$ , 从而,  $C_n \geq \frac{n-1}{2n}$ .

另一方面, 令  $f_i(x) = \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2n^2}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 我们证明: 对任意实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ , 都有  $\left| f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n \right| \leq \frac{n-1}{2n}$ .

为此, 只需证明:  $1-n \leq n x_1 \cdots x_n - \sum_{i=1}^n x_i \leq 0$ .

左边不等式等价于  $(n-1)x_1 \cdots x_n + (x_1-1)(x_2 \cdots x_n - 1) + \cdots + (x_{n-1}-1)(x_n-1) \geq 0$ , 此式中每一个加项都不小于0, 故成立.

右边不等式等价于  $\sum_{i=1}^n x_i - n x_1 \cdots x_n \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \left( 1 - \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} \right) \geq 0$ , 同上可知亦成立. 所以,  $C_n \leq \frac{n-1}{2n}$ .

综上所述, 所求的最大常数  $C_n = \frac{n-1}{2n}$ .

## 习 题 7

### 1 求函数方程:

$$2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \sin x \quad (x > 0)$$

在 $(0, +\infty)$ 上的解.

**2** 已知  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数, 并且

$$f(x) + g(x) = 1993x \sqrt{9-x^2} + x^{1994},$$

求  $f(x)$  和  $g(x)$ .

**3** 求所有满足方程:

$$f(x) + f(y) + g(x) - g(y) = \sin x + \cos y, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

的函数  $f(x)$  与  $g(x)$ .

**4** 设  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  严格递减, 对所有  $x, y \in \mathbf{R}^+$ ,  $f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x)))$ .

求证:  $f(f(x)) = x$ .

**5** 求出满足以下要求的所有  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  的函数  $f, g, h$ , 对任意的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(x) - g(y) = (x - y)h(x + y).$$

**6** 设  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  满足: 对所有  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \leq 0$ ;  $f(1) = 1$  并且对所有  $x, y \in [0, 1]$  以及  $x + y \in [0, 1]$  的  $x, y$ , 有

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y).$$

求证:  $f(x) \leq 2x$ .

**7**  $f$  是定义在  $(1, +\infty)$  上且在  $(1, +\infty)$  中取值的函数, 满足条件: 对任何  $x, y > 1$  及  $u, v > 0$ ,

$$f(x^u y^v) \leq f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{1}{4v}} \quad \textcircled{1}$$

都成立, 试确定所有这样的函数  $f$ .

**8** 证明: 如果函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足下面两个恒等式中的一个, 则必满足另一个:

$$f(x + y) \equiv f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R};$$

$$f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

**9** 求所有函数  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x + yg(x)) = g(x) + xf(y).$$

**10** 求所有满足下面方程的函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ : 对任意实数  $x, y$ ,

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

**11** 设函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y}, \quad x, y \in \mathbf{R}, x+y \neq 0.$$

求  $f(x)$ .

**12** 设  $M$  是满足  $f(0) \neq 0$  与

$$f(n)f(m) \equiv f(n+m) + f(n-m), \quad n, m \in \mathbf{Z}$$

的函数  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  之集合, 试求:

(1) 满足  $f(1) = \frac{5}{2}$  的所有函数  $f(n) \in M$ ;

(2) 满足  $f(1) = \sqrt{3}$  的所有函数  $f(n) \in M$ .

**13** 设  $f(n)$  是定义在整数集  $\mathbf{Z}$  上的函数, 且满足:

(1)  $f(0) = 1, f(1) = 0$ ;

(2)  $f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n), m, n \in \mathbf{Z}$ .

求  $f(n)$ .

**14** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足: 对任意实数  $x, y$ , 有

$$f(2x) + f(2y) = f(x+y)f(x-y).$$

又  $f(\pi) = 0$ , 但  $f(x)$  不恒等于零.

(1) 确定函数  $f(x)$  的奇偶性;

(2) 证明:  $f(x)$  是周期函数.

**15** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 对任意  $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{\ln 2\}$ , 有

$$f(x+y) + f(x-y) = e^{x+y}(f(x) + f(y)),$$

若  $f(0) = 1$ , 求  $f(x)$ .

**16**  $a$  为已知实数,  $0 < a < 1$ .  $f$  为  $[0, 1]$  上的函数, 满足  $f(0) = 0, f(1) = 1$  及对所有  $x \leq y$ ,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y),$$

求  $f\left(\frac{1}{7}\right)$  的值.

**17** 已知多项式  $f(x)$  满足:

$$f(2x^2 + 1) - 4f(x) = 4(f(x))^2 + 1.$$



且  $f(0) = 0$ , 求  $f(x)$ .

**18** 对任意  $x, y \in \mathbf{Q}^+$  ( $\mathbf{Q}^+$  为正有理数集), 恒有:  $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ .

若  $f(2) = a, f(3) = b$ , 求  $f(3^n), f(486)$ .

**19** 设  $f(x)$  的定义域、值域都为  $\mathbf{R}$ , 解函数方程

$$f^{n+1}(x) = f^n(x) + ef^n(x), x \in \mathbf{R}.$$

**20** 记  $N$  为所有非负整数的集合, 求所有函数  $f: N \rightarrow N, g: N \rightarrow N, h: N \rightarrow N$  满足下述两个条件:

- (1) 对任何  $m, n \in N, f(m+n) = g(m) + h(n) + 2mn$ ;
- (2)  $g(1) = h(1) = 1$ .

**21** 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的连续函数, 且满足:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \text{对任意 } x, y \in \mathbf{R}.$$

求  $f(x)$ .

**22** 求函数方程  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 对任意  $x > 0, y > 0$  都成立的连续解.

**23** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是连续函数, 且满足:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R}.$$

求  $f(x)$ .

**24** 设  $f(x)$  满足柯西方程 $\textcircled{*}$ , 但存在某一个数  $\alpha$ , 使  $f(\alpha) \neq \alpha f(1)$ . 求证: 对任给的区间  $(u, v)$  和  $(s, t)$ , 必存在  $c \in (u, v)$ , 使  $f(c) \in (s, t)$ .

**25** 求满足函数方程:

$$\frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)} = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) (x \neq y)$$

的所有连续函数  $f(x)$ .

**26** 试解函数方程:  $f(n+1) = 2f(n) + 1$ , 且  $f(1) = 1, n \in \mathbf{N}_+$ .

**27** 定义在正整数集  $\mathbf{N}_+$  上的函数  $f$  满足  $f(1) = 1$ , 且对任意正整数  $m, n$ , 有

$$f(m) + f(n) = f(m+n) - mn.$$

求  $f$ .

**28** 求函数方程:

$$f(4x) = f(2x) + f(x) (x \in (-\infty, +\infty))$$

的所有解.

**29** 函数  $f$  定义在有序正整数对的集合上, 且满足下列性质:

(1)  $f(x, x) = x$ ;

(2)  $f(x, y) = f(y, x)$ ;

(3)  $(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y)$ .

求  $f(14, 52)$ .

**30** 证明存在唯一的一个  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ , 使得对任意  $x \in \mathbf{R}^+$ , 都有

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

**31** 证明: 存在唯一的函数  $f(x, y)$ , 这里  $x, y \in \mathbf{N}_+$ , 使得对任意  $x, y \in \mathbf{N}_+$ , 均有

$$f(x, x) = x,$$

$$f(x, y) = f(y, x),$$

$$(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y).$$

# 习题解答



## 习 题 1

1. 取  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $X = Y = \mathbf{N}_+$ . 则  $f: 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4$ , 则  $f(A - B) = \{4\}$ ,  $f(A) - f(B) = \{4, 5\} - \{4, 5\} = \emptyset$ , 故  $f(A - B) \neq f(A) - f(B)$ . 当  $f$  是单射时, 若  $y \in f(A) - f(B)$ , 则  $y \in f(A)$ , 且  $y \notin f(B)$ , 故存在  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ , 由于  $f$  是单射, 故  $x \notin B$ , 从而  $x \in A - B$ , 于是  $y \in f(A - B)$ , 所以  $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ ; 若  $y \in f(A - B)$ , 则存在  $x \in A - B$ , 使得  $y = f(x)$ , 所以  $y \in f(A)$ , 但  $x \notin B$ , 且  $f$  是单射, 故  $y \notin f(B)$ , 从而  $y \in f(A) - f(B)$ , 即  $f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$ . 故当  $f$  为单射时, 有  $f(A - B) = f(A) - f(B)$ .

2. 由题意, 得 
$$\begin{cases} uw - xy = 39, & \textcircled{1} \\ uy - xv = 66. & \textcircled{2} \end{cases}$$
  $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ ,  $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ , 得  $(u - x)(v + y) = 3 \times 5 \times 7 \cdots \textcircled{3}$ ,  $(y - v)(u + x) = 3 \times 3 \times 3 \cdots \textcircled{4}$ . 因为  $|u - x| < 9$ ,  $0 < v + y \leq 18$ ,  $|y - v| < 9$ ,  $0 < u + x \leq 18$ , 所以, 由  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ , 得  $u - x = 7$ ,  $v + y = 15$ ,  $y - v = 3$ ,  $u + x = 9$ . 解得  $u = 8$ ,  $v = 6$ ,  $x = 1$ ,  $y = 9$ .

3. 作映射  $f: (a, b, c, d) \mapsto (a, b, c + 1, d + 1)$ , 于是  $f$  是从四元整数集  $A = \{(a, b, c, d) \mid 1 \leq a < b \leq c < d \leq n\}$  到四元整数集  $B = \{(a', b', c', d') \mid 1 \leq a' < b' < c' < d' \leq n + 1\}$  的一个一一映射, 所以  $|A| = |B| = C_{n+1}^4$ .

4. 令  $y = 2x - 1$ , 则  $x = \frac{1}{2}(y + 1)$ , 所以  $f(y) = \frac{1}{4}(y + 1)^2$ .  $f(f(x)) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}(x + 1)^2 + 1 \right]^2 = \frac{1}{64} [(x + 1)^2 + 4]^2$ . 函数  $f(f(x))$  的定义域是  $\mathbf{R}$ . 当  $x = -1$  时,  $f(f(x))$  取最小值. 即  $f(f(x)) \geq \frac{1}{4}$ . 所以  $f(f(x))$  的值域是  $\left[ \frac{1}{4}, +\infty \right)$ .

5. 设  $u = x - \frac{1}{x}$ , 则  $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ , 于是  $f(u) = u^2 + 3$ , 所以  $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$ .

6. 不妨设  $b_1 < b_2 < \dots < b_{50}$ , 将  $A$  中元素  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  按顺序分为非空的 50 组. 定义映射  $f: A \rightarrow B$ , 使第  $i$  组的元素在  $f$  之下的象都是  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ), 易知这样的  $f$  满足题设要求. 而所有这样的分组与满足条件的映射一一对应, 于是满足题设要求的映射  $f$  的个数与  $A$  按下标顺序分为 50 组的分法相等, 而  $A$  的分法数为  $C_{99}^{49}$ , 故这样的映射共有  $C_{99}^{49}$ .

7. 因为  $f(x) + f(1-x) = 1$ , 故有  $f\left(\frac{1}{2006}\right) + f\left(\frac{2}{2006}\right) + f\left(\frac{3}{2006}\right) + \dots + f\left(\frac{2005}{2006}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2006}\right) + f\left(\frac{2005}{2006}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2006}\right) + f\left(\frac{2004}{2006}\right)\right] + \dots + \left[f\left(\frac{1002}{2006}\right) + f\left(\frac{1004}{2006}\right)\right] + f\left(\frac{1003}{2006}\right) = 1002 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1002 \frac{1}{2}$ .

8.  $f(x) = x^2 + 2x + 7 + \frac{64}{x^2 + 2x + 7} - 1$ , 令  $u = x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6$ , 则  $6 \leq u \leq 10$ . 当  $u \in [6, 8]$  时,  $f(u) = u + \frac{64}{u} - 1$  递减, 当  $u \in [8, 10]$  时,  $f(u) = u + \frac{64}{u} - 1$  递增(参见第三节). 又  $f(6) > f(10)$ , 故  $f(8) \leq f(u) \leq f(6)$ , 即  $15 \leq f(u) \leq 15 \frac{2}{3}$ .

9. 由  $f(398 - x) = f(2158 - x)$ , 得  $f(x) = f(x + 1760)$ . 由  $f(2158 - x) = f(3214 - x)$ , 得  $f(x) = f(x + 1056)$ . 故  $f(x) = f(x + 1056) = f(x + 2112) = f(x + 352)$ . 从而  $f(x)$  为周期函数, 且它的一个周期为 352. 又由于  $f(x) = f(398 - x)$ , 故  $f(x)$  关于  $x = 199$  对称. 于是当  $f$  在  $x \in [23, 199]$  定义后, 由  $f(x)$  的对称性知  $x \in [199, 375]$  时,  $f$  亦可定义; 再由  $f(x)$  的周期性知对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f$  可定义. 故在一个周期内, 每一个函数值至少对应两个不同的  $x$ , 其中  $x \neq 199 + 352k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ). 因此,  $f(0), f(1), \dots, f(999)$  至多有  $\frac{1}{2} \cdot 352 + 1 = 177$  个不同的值, 且当  $f(23), f(24), \dots, f(199)$  两两不等时, 177 可以取到. 因此, 所求的最大值为 177.

10. 由已知条件得  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时;} \\ 3 - x, & \text{当 } 2 \leq x \leq 3 \text{ 时.} \end{cases}$  当  $3 \leq x \leq 6$  时, 令  $t = \frac{x}{3}$ , 则  $1 \leq t \leq 2$ , 此时  $f(x) = f(3t) = 3f(t) = 3(t - 1) = x - 3$ . 即得  $f(x) = |x - 3|$ ,  $2 \leq x \leq 6$ . 当  $6 \leq x \leq 18$  时, 令  $t = \frac{x}{3}$ , 则  $2 \leq t \leq 6$ ,

于是  $f(x) = f(3t) = 3f(t) = 3|t-3| = |x-9|$ . 依次类推, 得

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时;} \\ |x-3|, & \text{当 } 2 \leq x \leq 6 \text{ 时;} \\ |x-9|, & \text{当 } 6 \leq x \leq 18 \text{ 时;} \\ |x-27|, & \text{当 } 18 \leq x \leq 54 \text{ 时;} \\ |x-81|, & \text{当 } 54 \leq x \leq 162 \text{ 时;} \\ |x-243|, & \text{当 } 162 \leq x \leq 486 \text{ 时;} \\ |x-729|, & \text{当 } 486 \leq x \leq 1458 \text{ 时;} \\ |x-2187|, & \text{当 } 1458 \leq x \leq 4374 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以  $f(2004) = 2187 - 2004 = 183$ . 由于  $162 - 81 < 183$ ,  $486 - 243 > 183$ , 而  $243 - 162 < 183$ , 所以, 最小的满足  $f(x) = f(2004)$  的实数  $x = 243 + 183 = 426$ .

## 习 题 2

1. 设  $g(x) = f(x) - 8$ , 则  $g(x)$  是奇函数, 且  $g(-2) = f(-2) - 8 = 10 - 8 = 2$ . 所以  $g(2) = -g(-2) = -2$ . 从而  $f(2) = g(2) + 8 = -2 + 8 = 6$ .

2. 设  $t = \log_a x (x > 0)$ , 则  $f(t_1) - f(t_2) = \frac{a(x_1^2 - 1)}{x_1(a^2 - 1)} - \frac{a(x_2^2 - 1)}{x_2(a^2 - 1)} =$

$$\frac{a(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2 (a^2 - 1)}.$$

(1) 当  $a > 1$  时, 若  $t_1 < t_2$ , 则  $0 < x_1 < x_2$ ,  $f(t_1) < f(t_2)$ . (2) 当  $0 < a < 1$  时, 若  $t_1 < t_2$ , 则  $x_1 > x_2 > 0$ ,  $f(t_1) < f(t_2)$ . 由(1), (2)可知  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数.

3. 设  $g(3) = a$ , 则  $f^{-1}(a+1) = 3$ , 由此得  $f(3) = a+1$ , 即  $a+1 = \frac{9}{2}$ ,

故  $a = \frac{7}{2}$ .

4. (1) 由题设, 得  $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ,  $f(x+4) = f(2+(x+2)) =$

$$\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)} = -\frac{1}{f(x)}, f(x+8) = f((x+4)+4) = -\frac{1}{f(x+4)} = f(x).$$

所以,  $f(x)$  是以 8 为周期的周期函数. (2)  $f(2001) = f(8 \times 250 + 1) = f(1) = 2 + \sqrt{3}$ ,  $f(2005) = f(8 \times 250 + 5) = f(5) = f(1+4) = -\frac{1}{f(1)} =$

$\sqrt{3} - 2$ .

5. 因为  $f(x) = g(x) + x - 1$ , 所以  $g(x+5) + (x+5) - 1 \geq g(x) + (x-1) + 5$ ,  $g(x+1) + (x+1) - 1 \leq g(x) + (x-1) + 1$ , 即  $g(x+5) \geq g(x)$ ,  $g(x+1) \leq g(x)$ . 故  $g(x) \leq g(x+5) \leq g(x+4) \leq g(x+3) \leq g(x+2) \leq g(x+1) \leq g(x)$ , 所以  $g(x+1) = g(x)$ , 即  $g(x)$  是周期为 1 的周期函数, 故  $g(2002) = g(1) = 1$ .

6. 由题设知, 函数  $f(x)$  的图象是关于直线  $x = 3$  对称的, 因而每两个关于  $x = 3$  对称的根的和为 6. 于是这 6 个根的和为  $3 \times 6 = 18$ . 其实, 下面的说法似乎更自然一些.

若  $3+x_0$  为  $f(x) = 0$  的根, 则由题设知  $f(3-x_0) = f(3+x_0) = 0$ , 所以  $3-x_0$  也是  $f(x) = 0$  的根. 于是可设这 6 个根为  $3 \pm x_1, 3 \pm x_2, 3 \pm x_3$ , 故它们的和为 18.

7. 利用条件:  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为奇函数, 且  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2x - x^2$ , 可以

得到  $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ 2x + x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$  根据区间概念可推知,  $\begin{cases} a < b, \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a - b < 0, \\ \frac{a-b}{ab} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ab > 0$ , 故只能有  $0 < a < b$  或  $a < b < 0$  两种形式. (1) 当

$0 < a < b$  时,  $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$ , 从而  $\frac{1}{a} \leq 1$ , 即  $a \geq$

1, 再考虑到以上提供出来的  $a, b$  情况有:  $1 \leq a < b$ , 而  $y = f(x)$  在  $[a, b]$

上为减函数, 则  $\begin{cases} f(a) = \frac{1}{a}, \\ f(b) = \frac{1}{b}. \end{cases}$  这两个关系又等价于“ $a, b$  是方程  $f(x) = \frac{1}{x}$  的

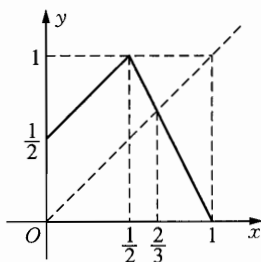
两个根, 且  $1 \leq a < b$ ”, 解方程  $2x - x^2 = \frac{1}{x}$ , 得  $\begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$  (2) 当  $a <$

$b < 0$  时, 与(1)相仿, 得  $\begin{cases} a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ b = -1. \end{cases}$

8. (1) 利用所给的函数解析式, 得  $f_1\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{19}{30}$ ,  $f_2\left(\frac{2}{15}\right) = f\left(\frac{19}{30}\right) = 2\left(1 - \frac{19}{30}\right) = \frac{11}{15}$ ,  $f_3\left(\frac{2}{15}\right) = f\left(\frac{11}{15}\right) = 2\left(1 - \frac{11}{15}\right) = \frac{8}{15}$ ,  $f_4\left(\frac{2}{15}\right) = f\left(\frac{8}{15}\right) = 2\left(1 - \frac{8}{15}\right) = \frac{14}{15}$ ,  $f_5\left(\frac{2}{15}\right) = f\left(\frac{14}{15}\right) = 2\left(1 - \frac{14}{15}\right) = \frac{2}{15}$ . 所以,  $f_n\left(\frac{2}{15}\right)$

对  $n$  来说是以 5 为周期变化的, 即  $f_{5k+r}\left(\frac{2}{15}\right) = f_r\left(\frac{2}{15}\right)$ . 所以  $f_{2006}\left(\frac{2}{15}\right) = f_{5 \times 401+1}\left(\frac{2}{15}\right) = f_1\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{19}{30}$ .

(2) 设  $A = \left\{\frac{2}{15}, \frac{19}{30}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}\right\}$ . 由第(1)小题知, 对于  $a \in A$ , 有  $f_5(a) = a$ , 故  $f_{15}(a) = a$ . 所以  $A \subset B$ . 画出  $f(x)$  的图象, 如图所示, 由图象可知(也可通过函数计算),  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ , 所以  $f_{15}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ . 故  $\frac{2}{3} \in B$ . 设  $C = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ . 由于  $f(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ,  $f(1) = 0$ , 则对于  $c \in C$ , 有  $f_3(c) = c$ , 所



(第 8 题)

以  $f_{15}(c) = c$ . 故  $C \subset B$ . 综上, 得  $\left\{\frac{2}{15}, \frac{19}{30}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \subset B$ , 故  $B$  中至少含有 9 个元素.

9. 先证  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的减函数. 任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$ ,  $x_1 < x_2$ , 则  $-x_2 < -x_1$ , 且  $-x_2, -x_1 \in (-\infty, 0)$ . 因为  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上是增函数, 所以  $f(-x_2) < f(-x_1)$ , 即  $f(x_2) < f(x_1)$ . 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数. 因为  $2a^2 + a + 1 > 0$ ,  $3a^2 - 2a + 1 > 0$ , 由  $f(2a^2 + a + 1) < f(3a^2 - 2a + 1)$ , 可得  $2a^2 + a + 1 > 3a^2 - 2a + 1$ , 解不等式得  $0 < a < 3$ . 所以,  $a$  的取值范围是  $0 < a < 3$ .

10. 设  $f(1) = a$ , 则当  $x = 1$  时, 由条件(1)得  $f(a+1) = \frac{1}{a}$ . 令  $x = a+1$ , 由条件(1)得  $f(a+1)f\left[f(a+1) + \frac{1}{a+1}\right] = 1$ , 即  $f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right) = a = f(1)$ . 由于  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是递增的, 所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = 1$ , 解方程得  $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . 若  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , 则  $1 < a = f(1) < f(a+1) = \frac{1}{a} < 1$ , 矛盾. 所以,  $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , 即  $f(1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

11. 易知  $f(1) = 1 - f(0) = 1$ ,  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ . 所以  $f(x)$  在  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$  上的值恒为  $\frac{1}{2}$ . 反复利用条件(2), 可得

$$f\left(\frac{18}{1991}\right) = \frac{1}{2^4} f\left(\frac{3^4 \times 18}{1991}\right) = \frac{1}{16} f\left(\frac{1458}{1991}\right), f\left(\frac{1458}{1991}\right) = 1 - f\left(\frac{533}{1991}\right) = 1 - \frac{1}{2} f\left(\frac{1599}{1991}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left[1 - f\left(\frac{392}{1991}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f\left(\frac{392}{1991}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1176}{1991}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}, \text{ 所以, } f\left(\frac{18}{1991}\right) = \frac{5}{128}.$$

12. (1) 对定义域中的  $x$ , 由题设在定义域中存在  $x_1, x_2$ , 使  $x = x_1 - x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则  $f(x) = f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)f(x_2) + 1}{f(x_2) - f(x_1)} = -f(x_2 - x_1) = -f(-x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数. (2) 因  $f(a) = 1$ , 所以  $f(-a) = -f(a) = -1$ . 于是  $f(-2a) = f(-a - a) = \frac{f(-a)f(a) + 1}{f(a) - f(-a)} = 0$ . 若  $f(x) \neq 0$ , 则  $f(x + 2a) = f[x - (-2a)] = \frac{f(x)f(-2a) + 1}{f(-2a) - f(x)} = \frac{1}{-f(x)}, f(x + 4a) = f[x + 2a + (2a)] = \frac{1}{-f(x + 2a)} = f(x)$ . 若  $f(x) = 0$ , 则  $f(x + a) = f[x - (-a)] = \frac{f(x)f(-a) + 1}{f(-a) - f(x)} = -1, f(x + 3a) = f[(x + a) + 2a] = \frac{1}{-f(x + a)} = 1, f(x + 4a) = f[(x + 3a) - (-a)] = \frac{f(x + 3a)f(-a) + 1}{f(-a) - f(x + 3a)} = 0$ . 仍有  $f(x + 4a) = f(x)$ . 所以,  $f(x)$  为周期函数,  $4a$  是它的一个周期. (3) 先证在  $(0, 2a]$  内  $f(x)$  为减函数. 事实上, 设  $0 < x_1 < x_2 \leq 2a$ , 则  $0 < x_2 - x_1 < 2a, f(x_1) > 0, f(x_2) \geq 0$  (当  $x_2 = 2a$  时,  $f(x_2) = -f(-2a) = 0$ ),  $\frac{f(x_2)f(x_1) + 1}{f(x_1) - f(x_2)} = f(x_2 - x_1) > 0$ . 所以  $f(x_1) > f(x_2)$ . 当  $2a < x_1 < x_2 < 4a$  时,  $0 < x_1 - 2a < x_2 - 2a < 2a, f(x_1 - 2a) > f(x_2 - 2a) > 0$ , 于是  $f(x) = f[(x - 2a) + 2a] = -\frac{1}{f(x - 2a)}, f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{f(x_1 - 2a)} + \frac{1}{f(x_2 - 2a)} > 0$ , 即在  $(2a, 4a)$  内,  $f(x)$  也是减函数. 从而命题得证.

### 习 题 3

1. 首先, 由  $\Delta = (k - 1)^2 + 4(k + 1) = k^2 + 2k + 5 = (k + 1)^2 + 4 > 0$  知, 对任意的  $k$  值, 抛物线与  $x$  轴总有两个交点. 设抛物线与  $x$  轴的两个交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 那么  $|AB| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{k^2 + 2k + 5}$ . 又抛物线的顶点坐标是



$C\left(\frac{k-1}{2}, -\frac{k^2+2k+5}{4}\right)$ , 所以,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2+2k+5} \cdot \left| -\frac{k^2+2k+5}{4} \right| = \frac{1}{8} \sqrt{(k^2+2k+5)^3}$ . 因为  $k^2+2k+5 = (k+1)^2+4 \geq 4$ , 当且仅当  $k=-1$  时等号成立, 所以  $S_{\triangle ABC} \geq \frac{1}{8} \sqrt{4^3} = 1$ . 故  $\triangle ABC$  的面积的最小值为 1.

2. 因为  $a > 0$ ,  $f(m) = m^2 + m + a < 0$ , 所以  $m^2 + m = m(m+1) < 0$ , 于是  $\begin{cases} m < 0, \\ m+1 > 0. \end{cases}$  所以  $f(m+1) = (m+1)^2 + m + 1 + a > 0$ , 故  $f(m+1)$  的符号为正.

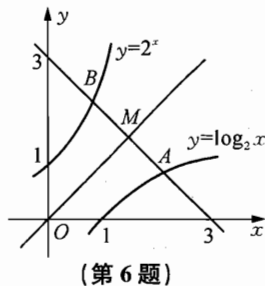
3.  $f(x)$  的对称轴为  $x = -1$ . (1) 当  $t+1 < -1$  时, 即  $t < -2$  时, 有  $f_{\min}(x) = f(t+1) = t^2 + 4t + 14$ . (2) 当  $t+1 \geq -1$ , 且  $t \leq -1$  时, 即  $-2 \leq t \leq -1$  时,  $f_{\min}(x) = 10$ . (3) 当  $t > -1$  时, 有  $f_{\min}(x) = f(t) = t^2 + 2t + 11$ . 所以  $g(t) = \begin{cases} t^2 + 4t + 14, & \text{当 } t < -2 \text{ 时;} \\ 10, & \text{当 } -2 \leq t \leq -1 \text{ 时;} \\ t^2 + 2t + 11, & \text{当 } t > -1 \text{ 时.} \end{cases}$

4. (1) 因为抛物线过点  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 1)$ , 所以  $a - b + c = 4 \cdots \textcircled{1}$ ,  $4a + 2b + c = 1 \cdots \textcircled{2}$ , 且  $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \cdots \textcircled{3}$ . 由  $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$  可得  $b = -1 - a$ ,  $c = 3 - 2a$ . 代入  $\textcircled{3}$ , 得  $(-1 - a)^2 - 4a(3 - 2a) > 0$ ,  $(9a - 1)(a - 1) > 0$ . 由于  $a \geq 1$ , 故  $9a - 1 > 0$ , 所以  $a > 1$ , 从而  $a \geq 2$ . 又当  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = -1$  时, 满足题意. 所以  $a$  的最小值为 2. (2) 由上题知,  $b + c = 2 - 3a \leq 2 - 3 \times 2 = -4$ , 当  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = -1$  时等号成立, 所以  $b + c$  的最大值为  $-4$ .

5.  $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 3 - a - \frac{a^2}{4}$ .  $f(x) \geq 0$  在  $x \in [-2, 2]$  上恒成立, 等价于  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的最小值非负. (1) 当  $-\frac{a}{2} < -2$ , 即  $a > 4$  时,  $f_{\min}(x) = f(-2) = 7 - 3a \geq 0$ . 解不等式, 得  $a \leq \frac{7}{3}$ , 与  $a > 4$  矛盾. (2) 当  $-2 \leq -\frac{a}{2} \leq 2$ , 即  $-4 \leq a \leq 4$  时, 有  $f_{\min}(x) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = 3 - a - \frac{a^2}{4} \geq 0$ , 解不等式得  $-6 \leq a \leq 2$ . 故此时可得  $-4 \leq a \leq 2$ . (3) 当  $-\frac{a}{2} > 2$ , 即  $a < -4$  时, 有  $f_{\min}(x) = f(2) = 7 + a \geq 0$ , 解不等式得  $a \geq -7$ . 故此时  $-7 \leq a < -4$ . 综上,  $a$  的范围为  $[-7, 2]$ .

6. 在直角坐标系内分别作出函数  $y = 2^x$  和  $y = \log_2 x$  的图象, 再作直线  $y = x$  和  $y = -x + 3$ , 如图所示. 由于  $y = 2^x$  和  $y = \log_2 x$  互为反函数, 故它

们的图象关于直线  $y = x$  对称. 方程  $\log_2 x + x - 3 = 0$  的根  $a$  就是直线  $y = -x + 3$  与对数曲线  $y = \log_2 x$  的交点  $A$  的横坐标, 方程  $2^x + x - 3 = 0$  的根  $b$  就是直线  $y = -x + 3$  与指数曲线  $y = 2^x$  的交点  $B$  的横坐标. 设  $y = -x + 3$  与  $y = x$  的交点为  $M$ , 则点  $M$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . 所以  $a + b = 2x_M = 3$ ,  $\log_2 a + 2^b = 2y_M = 3$ .

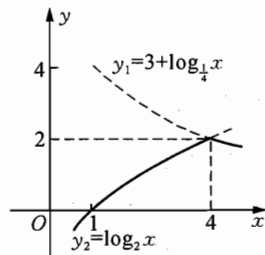


(第6题)

7. (1) 由题意知,  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ , 所以,  $\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$ , 即  $-1 \leq \log_2 x \leq 1$ . 故  $y = f(x)$  的定义域为  $[-1, 1]$ . 解不等式  $-1 \leq (\frac{1}{2})^x - 2 \leq 1$ , 得  $-\log_2 3 \leq x \leq 0$ , 所以,  $f((\frac{1}{2})^x - 2)$  的定义域为  $[-\log_2 3, 0]$ . (2) 只需  $x^2 + 2x + 2a$  能取到一切正实数, 从而  $\Delta = 4 - 8a < 0$ , 故  $a > \frac{1}{2}$ .

8. 令  $t = a^x$ , 则  $y = t^2 + 2t - 1$ . 因为  $x \in [-1, 1]$ , 所以有如下两种情形: (1) 当  $0 < a < 1$  时, 则  $a \leq t \leq \frac{1}{a}$ , 于是  $y = (t+1)^2 - 2$  的对称轴为  $t = -1 < a$ , 所以  $y = t^2 + 2t - 1$  在  $[a, \frac{1}{a}]$  上是单调增函数, 故当  $t = \frac{1}{a}$  时,  $y$  取最大值 14, 即  $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 1 = 14$ . 解方程得  $a = \frac{1}{3}$  或  $a = -\frac{1}{5}$  (舍去), 故  $a = \frac{1}{3}$ . (2) 当  $a > 1$  时,  $\frac{1}{a} \leq t \leq a$ , 于是  $y = (t+1)^2 - 2$  的对称轴  $t = -1 < \frac{1}{a}$ , 故  $y = t^2 + 2t - 1$  在  $[\frac{1}{a}, a]$  上为单调增函数, 所以, 当  $t = a$  时,  $y$  取最大值 14, 即  $a^2 + 2a - 1 = 14$ . 解方程得  $a = 3$  或  $a = -5$  (舍去), 故  $a = 3$ . 综上所述,  $a$  的值为  $\frac{1}{3}$  或 3.

9. 易知  $f(x)$  的定义域是  $(0, +\infty)$ . 因为  $y_1 = 3 + \log_{\frac{1}{4}} x$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数,  $y_2 = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 而当  $y_1 = y_2$ , 即  $3 + \log_{\frac{1}{4}} x = \log_2 x$  时,  $x = 4$ , 所以由  $y_1 = 3 + \log_{\frac{1}{4}} x$  和  $y_2 = \log_2 x$  的图象可知  $f(x) = \begin{cases} 3 + \log_{\frac{1}{4}} x, & \text{当 } x \geq 4 \text{ 时;} \\ \log_2 x, & \text{当 } 0 < x < 4 \text{ 时.} \end{cases}$  故当  $x = 4$  时, 得  $f(x)$  的最大值为 2.



(第9题)

10. 由 $[x]$ 的定义知,  $[x] \leq x$ , 故原方程可变为不等式  $\lg^2 x - \lg x - 2 \leq 0$ ,  $(\lg x + 1)(\lg x - 2) \leq 0$ , 所以  $-1 \leq \lg x \leq 2$ . 当  $-1 \leq \lg x < 0$  时,  $[\lg x] = -1$ , 原方程为  $\lg^2 x = 1$ , 所以  $\lg x = -1$ ,  $x = \frac{1}{10}$ . 当  $0 \leq \lg x < 1$  时,  $[\lg x] = 0$ , 原方程为  $\lg^2 x = 2$ , 所以  $\lg x = \pm\sqrt{2}$ , 均不符合  $[\lg x] = 0$ . 当  $1 \leq \lg x < 2$  时,  $[\lg x] = 1$ , 原方程为  $\lg^2 x = 3$ , 所以  $\lg x = \sqrt{3}$ ,  $x = 10^{\sqrt{3}}$ . 当  $\lg x = 2$  时, 即  $x = 100$  满足原方程. 所以原方程的解为  $x_1 = \frac{1}{10}$ ,  $x_2 = 10^{\sqrt{3}}$ ,  $x_3 = 100$ .

11.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ . 设  $\sqrt{x^2 + 4} = t, t \in [2, +\infty)$ . 令  $g(t) = t + \frac{1}{t}$ , 则  $g(t)$  在  $[2, +\infty)$  上是单调递增的, 所以  $g_{\min}(t) = g(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ . 从而  $f(x)$  的最小值为  $\frac{5}{2}$ .

12. 令  $t = \sin^2 x$ , 则  $0 < t \leq 1$ . 设  $f(t) = t + \frac{4}{t}, t \in (0, 1]$ . 则  $f(t)$  在  $(0, 1]$  上是单调递减的, 从而  $f(t) \geq f(1) = 5$ , 故  $\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} \geq 5$ .

13. 设  $\sin x + \cos x = t$ , 则  $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ , 于是  $f(x) = \frac{2t^2 - 1}{t + 1} = 2(t + 1) + \frac{1}{t + 1} - 4$ . 令  $g(t) = 2(t + 1) + \frac{1}{t + 1}$ , 则  $g(t)$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上单调递增, 故  $g(t)$  的最小值为  $g(1) = \frac{9}{2}$ ,  $g(t)$  的最大值为  $g(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 1$ . 所以,  $f(x)$  的最小值为  $\frac{1}{2}$ , 最大值为  $3(\sqrt{2} - 1)$ .

14. 当  $a = 0$  时, 若  $b \neq 0$ , 则  $x_0 = -\frac{c}{b} = \frac{m}{m+1}$ , 此时  $0 < x_0 < 1$ ; 若  $b = 0$ , 则  $c = 0$ , 这时一切实数  $x$  都满足方程, 当然也有  $0 < x_0 < 1$ , 故当  $a = 0$  时, 结论成立. 当  $a > 0$  时, 令  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 则  $f\left(\frac{m}{m+1}\right) = a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 + b\left(\frac{m}{m+1}\right) + c = a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 - \frac{am}{m+2} = -\frac{am}{(m+1)^2(m+2)} < 0$ . 若  $c > 0$ , 因  $f(0) = c > 0$ , 故必有一根  $x_0$  满足  $0 < x_0 < \frac{m}{m+1} < 1$ ; 若  $c \leq 0$ , 因  $f(1) = a + b + c = (m+2)\frac{a}{m+2} + (m+1)\frac{b}{m+1} + c = \frac{a}{m+2} + (m+$

$$1) \left( \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} \right) - \frac{c}{m} = \frac{a}{m+2} - \frac{c}{m} > 0, \text{ 故必有一根 } x_0 \text{ 满足 } 0 < \frac{m}{m+1} < x_0 < 1.$$

15. 用反证法. 若  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ , 则由  $a^2 - 4b$  是整数知,  $a^2 - 4b \geq 1$ . 设方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两实根为  $x_1, x_2$ , 则  $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 - 4b} \geq 1$ , 从而在  $x_1$  与  $x_2$  之间一定存在一个整数  $x_0$ , 对于这个整数  $x_0$ , 有  $f(x_0) \leq 0$ , 与题设矛盾. 所以  $\Delta \leq 0$ , 从而对一切实数  $x$ , 都有  $f(x) \geq 0$ .

16. 原不等式等价于  $(3 + 2\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta - a\cos\theta)^2 \geq \frac{1}{4}, \theta \in$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ 解不等式得 } a \geq \frac{3 + 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}}{\sin\theta + \cos\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 或 } a \leq$$

$$\frac{3 + 2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}}{\sin\theta + \cos\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ 先求 } \frac{3 + 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}}{\sin\theta + \cos\theta} \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \text{ 的}$$

$$\text{最大值. 令 } x = \sin\theta + \cos\theta, \text{ 则 } x \in [1, \sqrt{2}], \text{ 于是 } f(x) = \frac{3 + (x^2 - 1) + \frac{1}{2}}{x} =$$

$$x + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}. \text{ 易知 } f(x) \text{ 在 } [1, \sqrt{2}] \text{ 上是减函数, 所以 } f_{\max}(x) = f(1) = \frac{7}{2}, \text{ 从}$$

$$\text{而 } a \geq \frac{7}{2}. \text{ 再求 } \frac{3 + 2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}}{\sin\theta + \cos\theta} \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \text{ 的最小值. 令 } x = \sin\theta +$$

$$\cos\theta, \text{ 则 } x \in [1, \sqrt{2}], \text{ 于是 } g(x) = \frac{3 + (x^2 - 1) - \frac{1}{2}}{x} = x + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}, \text{ 当 } \sin\theta + \cos\theta = x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时等号成立. 从而 } a \leq g_{\min}(x) = \sqrt{6}.$$

综上,  $a$  的取值范围为  $(-\infty, \sqrt{6}] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$ .

17. 设  $f(x) = x^2\cos\theta - x(1-x) + (1-x)^2\sin\theta = (1 + \sin\theta + \cos\theta)x^2 - (1 + 2\sin\theta)x + \sin\theta$ . 因为,  $f(0) = \sin\theta > 0, f(1) = \cos\theta > 0$ , 所以  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

由于  $f(x)$  的对称轴  $x = \frac{1 + 2\sin\theta}{2(1 + \sin\theta + \cos\theta)} > 0$ , 且  $\frac{1 + 2\sin\theta}{2(1 + \sin\theta + \cos\theta)} =$

$\frac{1 + 2\sin\theta}{1 + 2\sin\theta + 1 + 2\cos\theta} < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最小值就是  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的

最小值, 它大于 0. 故  $\frac{4\sin\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)-(1+2\sin\theta)^2}{4(1+\sin\theta+\cos\theta)} > 0$ . 即  $4\sin\theta$

$\cos\theta - 1 > 0$ ,  $\sin 2\theta > \frac{1}{2}$ . 所以  $\frac{\pi}{6} < 2\theta < \frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$ .  $\theta$  的取值范围

是  $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$ .

18. 由已知得 
$$\begin{cases} a = 2f(1) + 2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right), \\ b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0), \\ c = f(0). \end{cases}$$
 因此  $|a| = |2f(1) +$

$$2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right)| \leq 2|f(1)| + 2|f(0)| + 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 8, |b| = |4f\left(\frac{1}{2}\right) -$$

$$f(1) - 3f(0)| \leq 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f(1)| + 3|f(0)| \leq 8, |c| = |f(0)| \leq 1.$$

$|a| + |b| + |c| \leq 8 + 8 + 1 = 17$ . 对于二次函数  $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ , 当  $x \in [0, 1]$  时,  $|f(x)| \leq 1$ , 且  $|a| + |b| + |c| = 17$ , 所以  $|a| + |b| + |c|$  的最大值为 17.

19.  $f(x) = a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + 3 - \frac{16}{a}$ . (1) 当  $3 - \frac{16}{a} > 5$ , 即  $-8 < a < 0$

时,  $l(a)$  是方程  $ax^2 + 8x + 3 = 5$  的较小根, 故  $l(a) = \frac{-8 + \sqrt{64 + 8a}}{2a}$ .

(2) 当  $3 - \frac{16}{a} \leq 5$ , 即  $a \leq -8$  时,  $l(a)$  是方程  $ax^2 + 8x + 3 = -5$  的较大根, 故

$$l(a) = \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a}. \text{ 综上, } l(a) = \begin{cases} \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a}, & \text{当 } a \leq -8 \text{ 时;} \\ \frac{-8 + \sqrt{64 + 8a}}{2a}, & \text{当 } -8 < a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

当  $a \leq -8$  时,  $l(a) = \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a} = \frac{4}{\sqrt{4 - 2a} - 2} \leq \frac{4}{\sqrt{20} - 2} =$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}; \text{ 当 } -8 < a < 0 \text{ 时, } l(a) = \frac{2}{\sqrt{16 + 2a} + 4} < \frac{2}{4} < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \text{ 所以, 当}$$

$a = -8$  时,  $l(a)$  取到最大值  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .

20. 因  $b < 2\sqrt{2} - 3$ , 当  $x = 0$  时, 显然  $a$  取任意实数. 下面考虑  $x \in (0,$

$1]$ , 则  $f(x) = x|x - a| + b < 0 \Leftrightarrow x|x - a| < -b \Leftrightarrow |x - a| < -\frac{b}{x} \Leftrightarrow x +$

$$\frac{b}{x} < a < x - \frac{b}{x},$$

此不等式对任意  $x \in (0, 1]$  恒成立, 故上式  $\Leftrightarrow a > \left(x + \frac{b}{x}\right)_{\max}$  ①

且  $a < \left(x - \frac{b}{x}\right)_{\min}$  (其中,  $x \in (0, 1]$ ). ②

对式①,  $b < 0$ , 由耐克函数性质知,  $g(x) = x + \frac{b}{x}$  在  $(0, 1]$  上单调递增,

故

$$a > \left(x + \frac{b}{x}\right)_{\max} = g(1) = 1 + b. \quad ③$$

对式②, 当  $-1 \leq b < 0$  时, 由均值不等式  $x - \frac{b}{x} = x + \frac{-b}{x} \geq 2\sqrt{-b}$ ,

当且仅当  $x = \sqrt{-b} \in (0, 1]$  时等号成立, 所以  $\left(x - \frac{b}{x}\right)_{\min} = 2\sqrt{-b}$ , 故

$$a < 2\sqrt{-b}. \quad ④$$

由式③、④要使  $a$  存在, 必须  $\begin{cases} 1 + b < 2\sqrt{-b}, \\ -1 \leq b < 2\sqrt{2} - 3, \end{cases}$  此时, 存在  $1 + b <$

144

$$a < 2\sqrt{-b}.$$

当  $b < -1$  时,  $f(x) = x - \frac{b}{x}$  在  $(0, 1]$  上单调递减(耐克函数性质), 所以

$$\left(x - \frac{b}{x}\right)_{\min} = f(1) = 1 - b.$$

综上所述, 当  $-1 \leq b < 2\sqrt{2} - 3$  时,  $a \in (1 + b, 2\sqrt{-b})$ ; 当  $b < -1$  时,  $a \in (1 + b, 1 - b)$ .

说明:(1) 本题多次用到耐克函数性质;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $D$  上存在最大值或最小值, 则  $f(x) \geq a (\leq a)$ ,  $a$  是常数,  $\forall x \in D \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a (f(x)_{\max} \leq a)$ .

#### 习 题 4

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= \left(\frac{x^4}{y^4} - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 1\right) + \left(\frac{y^4}{x^4} - 2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \\ &\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) + 2 = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left[\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right]^2 + \end{aligned}$$

$2 \geq 2$ , 并且当且仅当  $x = y$  时上述等号成立. 故  $f_{\min} = 2$ .

2. 去分母, 并整理成关于  $x$  的二次方程  $yx^2 + (y-2)x + y = 0$ . 因  $x$  是实数, 当  $y \neq 0$  时, 判别式需恒大于或等于 0, 即  $\Delta = (y-2)^2 - 4y^2 \geq 0$ , 解不等式得  $-2 \leq y \leq \frac{2}{3}$ . 而当  $x = -1$  时,  $y = -2$ ; 当  $x = 1$  时,  $y = \frac{2}{3}$ . 故  $y_{\min} = -2, y_{\max} = \frac{2}{3}$ .

3. 令  $\begin{cases} \frac{a}{x} = \sin^2 \alpha, \\ \frac{b}{y} = \cos^2 \alpha, \end{cases} \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则  $x + y = \frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\cos^2 \alpha} = a \csc^2 \alpha +$

$b \sec^2 \alpha = a + b + a \cot^2 \alpha + b \tan^2 \alpha \geq a + b + 2\sqrt{ab}$ , 所以,  $(x+y)_{\min} = a + b + 2\sqrt{ab}$ .

4. 显然当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ , 因此其最大值应在  $x > 0$  时取得. 当  $x > 0$  时, 由于  $\frac{\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^4+1}}{x} =$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

$y = x + \frac{1}{x}$  的值域为  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ , 且  $x^2 > 0 (x \neq 0)$ , 所以

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^4+1}}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \text{ 并且可以看出, 当}$$

$x = 1$  时,  $f_{\max}(x) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

5. 利用不等式  $-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ , 可得  $u = x^2 + y^2 + xy \leq$

$$x^2 + y^2 + \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{3}{2}(x^2+y^2) \leq \frac{3}{2} \times 4 = 6, \text{ 当 } x = y = \sqrt{2} \text{ 时等号成立;}$$

$$u = x^2 + y^2 + xy \geq x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \text{ 当 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时等号成立. 所以, } u \text{ 的最大值为 } 6, \text{ 最小值为 } \frac{1}{2}.$$

6. 由平均不等式  $(x+y)(y+z) = y(x+y+z) + xz \geq 2\sqrt{y(x+y+z) \cdot xz} = 2$ , 当  $x = z = 1, y = \sqrt{2} - 1$  时等号成立. 故最小值为 2.

7. 由  $|x| \leq 1$  且  $x \neq 0$ , 可令  $x = \sin \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  $y =$

$$\frac{2(1+x)}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1+\sin \theta)}{1+\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{2(1+\sin \theta)}{1+\cos \theta} = \frac{2\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}} =$$

$\left(\tan \frac{\theta}{2} + 1\right)^2$ , 当  $\tan \frac{\theta}{2} = -1$  时,  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , 即  $x = -1$  时,  $y_{\min} = 0$ ; 当

$\tan \frac{\theta}{2} = 1$ , 即  $x = 1$  时,  $y_{\max} = 4$ .

8. 在直角坐标平面上, 取点  $A(1185, 0), X(x_1+x_2, y_2), Y(x_1, y_1+y_2), B(0, 1580)$ . 则  $AX = \sqrt{(1185-x_1-x_2)^2+y_2^2}, XY = \sqrt{x_2^2+y_1^2}, YB = \sqrt{x_1^2+(1580-y_1-y_2)^2}$ . 所以  $u = AX + XY + YB \geq AB = \sqrt{1185^2+1580^2} = 1925$ . 故  $u$  的最小值为 1925.

9. 设电梯停在第  $x$  层, 则不满意的总分为  $S = (1+2+\dots+x-2) + 2(1+2+\dots+k-x) = \frac{1}{2}[3x^2 - (4k+5)x] + k^2 + k + 1$ . 所以当  $x = N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$  时,  $S$  最小, 其中  $N(a)$  表示最接近于  $a$  的整数. 例如  $N(3) = 3,$

146

$N(3.6) = 4, N(2.1) = 2, N(2.5) = 2$  或  $3$ . 故当电梯停在  $N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$  层时, 不满意的总分最小.

10. 引入两个正参数  $\alpha, \beta$ , 有  $\alpha^2 x^2 + y^2 \geq 2\alpha xy, \beta^2 y^2 + z^2 \geq 2\beta yz$ . 所以  $xy \leq \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{1}{2\alpha} y^2, 2yz \leq \beta y^2 + \frac{1}{\beta} z^2$ . 因此  $xy + 2yz \leq \frac{\alpha}{2} x^2 + \left(\frac{1}{2\alpha} + \beta\right) y^2 + \frac{1}{\beta} z^2$ . 令  $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\alpha} + \beta = \frac{1}{\beta}$ , 解得  $\alpha = \sqrt{5}, \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ . 故  $xy + 2yz \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(x^2 +$

$y^2 + z^2)$ , 即  $\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ . 解方程组  $\begin{cases} \frac{\alpha}{2} x^2 = \frac{1}{2\alpha} y^2, \\ \beta y^2 = \frac{1}{\beta} z^2, \end{cases}$  可得一组解  $(x, y,$

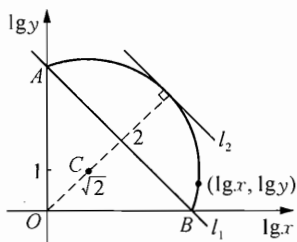
$z) = (1, \sqrt{5}, 2)$ , 即当  $x = 1, y = \sqrt{5}, z = 2$  时,  $\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$  取  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 从而它的

最大值为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

11. 由题设  $\lg^2 x + \lg^2 y = \lg 10x^2 + \lg 10y^2$ , 得  $(\lg x - 1)^2 + (\lg y - 1)^2 = 4$ . 由于  $\lg x \geq 0, \lg y \geq 0$ , 所以  $(\lg x, \lg y)$  在以点  $(1, 1)$  为圆心、2 为半径的



圆弧上, 如图所示, 易知此圆弧的两个端点  $A(0, 1+\sqrt{3})$ ,  $B(1+\sqrt{3}, 0)$ . 令  $u = \lg xy = \lg x + \lg y$ , 则  $u$  是直线系:  $\lg y = -\lg x + u$  的纵截距. 因此直线系需与圆弧有公共点, 故当它过  $A$ 、 $B$  两点时截距最小, 当它与圆弧相切时, 截距最大. 所以  $u_{\min} = \sqrt{3} + 1$ ,  $u_{\max} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2) = 2\sqrt{2} + 2$ .



(第 11 题)

12. 由题设知  $f(x) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \dots + (x-x_n)^2$ . 由于  $x_i \in [0, 2]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 所以  $0 \leq |1-x_i| \leq 1$ ,  $0 \leq (1-x_i)^2 \leq 1$ . 于是  $f(1) = (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 + \dots + (1-x_n)^2 \leq n$ . 所以,  $f_{\min}(x) \leq f(1) \leq n$ .

13. 设  $l: \begin{cases} x = s + 5, \\ y = s, \end{cases}$   $C: \begin{cases} x = 3 |\cos t|, \\ y = 2 |\sin t|. \end{cases}$  则  $M$  表示直线  $l$  上的点与曲线  $C$  上的点之间距离的平方. 作出直线  $l: y = x - 5$  及椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ). 则所求的  $M$  的最小值为  $A(3, 0)$  到直线  $l$  的距离的平方. 即为 2.

14. 因为  $M$  是  $|x-2y|$ ,  $|1+x|$ ,  $|2-2y|$  中的最大者, 故  $M$  不小于这三者的算术平均, 即  $M \geq \frac{1}{3}(|x-2y| + |1+x| + |2-2y|) \geq \frac{1}{3} |(2y-x) + (x+1) + (2-2y)| = 1$ , 另一方面, 当  $x=0, y=\frac{1}{2}$  时,  $|x-2y| = |1+x| = |2-2y| = 1$ , 此时  $M=1$ , 故  $M$  的最小值为 1.

15. 由于  $M = \max_{-1 < x < 1} |f(x)|$ , 所以  $M \geq |f(1)|, M \geq |f(0)|, M \geq |f(-1)|$ , 故  $4M \geq |1+p+q| + 2|-q| + |1-p+q| \geq |1+p+q-2q+1-p+q| = 2$ . 所以  $M \geq \frac{1}{2}$ , 而当  $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$  时,  $M = \frac{1}{2}$ . 所以  $M$  的最小值为  $\frac{1}{2}$ .

16. (1) 不妨设  $\alpha \leq x_1 < x_2 \leq \beta$ . 由题设知,  $\alpha + \beta = \frac{t}{2}, \alpha\beta = -1$ . 于是由  $(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta) \leq 0$ , 得  $x_1x_2 - (\alpha x_2 + \beta x_1) + \alpha\beta \leq 0, 4x_1x_2 - 4(\alpha x_2 + \beta x_1) - 4 \leq 0$ . 所以  $4x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - 4 \leq 4(\alpha x_2 + \beta x_1) - t(x_1 + x_2) = 4(\alpha x_2 + \beta x_1) - 2(\alpha + \beta)(x_1 + x_2) = 2(\alpha x_2 + \beta x_1) - 2(\alpha x_1 + \beta x_2) = 2(x_2 - x_1)(\alpha - \beta) < 0$ .

(2)  $\alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 + 16}}{4}, \beta = \frac{t + \sqrt{t^2 + 16}}{4}$ , 所以  $f(\alpha) = \frac{-8}{\sqrt{t^2 + 16} - t}$ .

$f(\beta) = \frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}$ . 设  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ,  $x_1 < x_2$ , 则  $f(x_2) - f(x_1) = \frac{4x_1x_2 - t(x_1+x_2) - 4}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(x_2-x_1) > 0$ , 所以,  $f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上是增函数, 故

$g(t) = f(\beta) - f(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t} + \frac{8}{\sqrt{t^2+16}-t} = \sqrt{t^2+16} \geq 4$ , 当  $t = 0$  时等号成立. 故  $g(t)$  的最小值为 4.

### 习 题 5

1. 设  $f(x) = (1-y-z)x + y + z - yz - 1$ . 把  $y, z$  看作常数, 则  $f(x)$  是关于  $x$  的一次函数. 因为  $f(0) = y + z - yz - 1 = -(y-1)(z-1) < 0$ ,  $f(1) = (1-y-z) + y + z - yz - 1 = -yz < 0$ , 所以, 对于  $0 < x < 1$ , 都有  $f(x) < 0$ , 即  $(1-y-z)x + y + z - yz - 1 < 0$ , 所以  $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$ .

2. 原方程可写成  $(3x+y)^5 + (3x+y) = (-x)^5 + (-x)$ . 令  $f(t) = t^5 + t$ , 则  $f(t)$  在  $\mathbf{R}$  上是单调增加的, 于是由  $f(3x+y) = f(-x)$ , 得  $3x+y = -x$ , 故  $4x+y = 0$ .

3. 原方程组可变形为  $\begin{cases} (x-1)^3 + 2005(x-1) = -1, \\ (1-y)^3 + 2005(1-y) = -1. \end{cases}$  所以  $(x-1)^3 + 2005(x-1) = (1-y)^3 + 2005(1-y)$ . 令  $f(t) = t^3 + 2005t$ , 则  $f(t)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数, 故由  $f(x-1) = f(1-y)$ , 得  $x-1 = 1-y$ , 故  $x+y = 2$ .

4. 题设不等式可变形为  $c^2 - 2(a+b)c + [(a^2+b^2) - 2ab + 4d] \leq 0$ , 于是可构造函数  $f(x) = x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 - 2ab + 4d$ .  $f(x)$  是开口向上的抛物线, 且  $f(c) \leq 0$ , 从而抛物线与  $x$  轴有交点, 于是  $\Delta = 4(a+b)^2 - 4(a^2 + b^2 - 2ab + 4d) \geq 0$ , 所以  $ab \geq d$ . 同理可证  $bc \geq d, ca \geq d$ . 所以  $ab + bc + ca \geq 3d$ .

5. 若  $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}$  都相等, 记它们等于  $k$ , 则  $b_i = ka_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 代入原不等式知等式成立. 若这  $n$  个比值不全相等, 不妨设  $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$ , 则  $\frac{b_1}{a_1}a_2 - b_2 \neq 0$ . 构造二次函数  $f(x) = (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)x + (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) = (a_1x - b_1)^2 - (a_2x - b_2)^2 - \dots - (a_nx - b_n)^2$ ,  $f(x)$  的二次项系数为正, 且当  $x = \frac{b_1}{a_1}$  时, 有  $f(\frac{b_1}{a_1}) < 0$ . 因此  $f(x)$  与  $x$  轴有交点, 其判别式  $\Delta \geq 0$ , 故  $(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 -$

$$a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2.$$

6. 若  $a = 0$ , 则  $b \neq 0$ , 此时方程的根为  $x = \frac{1}{2}$ , 满足题意. 当  $a \neq 0$  时,

令  $f(x) = 3ax^2 + 2bx - (a+b)$ . (1) 若  $a(a+b) < 0$ , 则  $f(0)f(\frac{1}{2}) = -(a+b) \cdot (-\frac{1}{4}a) = \frac{1}{4}a(a+b) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  内有一实根.

(2) 若  $a(a+b) \geq 0$ , 则  $f(\frac{1}{2})f(1) = -\frac{1}{4}a(2a+b) = -\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a(a+b) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有一实根.

7. 由  $a+b+c=2$ , 得  $a^2+b^2+c^2=4-2(ab+bc+ca)$ , 原不等式等价于  $ab+bc+ca-abc > 1$ . 令  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ , 则  $f(1) = 1 - 2 + (ab+bc+ca) - abc = ab+bc+ca - abc - 1$ . 另一方面, 由  $a, b, c \in (0, 1)$ , 得  $f(1) = (1-a)(1-b)(1-c) > 0$ , 所以  $ab+bc+ca-abc > 1$ .

8. (1) 由韦达定理知  $|c| = |st| = |s||t| < 4$ . (2) 设  $f(x) = x^2 + bx + c$ , 则  $y = f(x)$  的图象是开口向上的抛物线, 且与  $x$  轴的两交点在  $-2$  与  $2$  之间, 所以  $f(\pm 2) > 0$ , 即  $4 + 2b + c > 0, 4 - 2b + c > 0$ , 所以  $\pm 2b < 4 + c, 2|b| < 4 + c$ , 故  $|b| \leq 2|b| < 4 + c$ .

9. 因为  $a+b+c=1$ , 所以  $a+b=1-c$ . 所以  $a^2+b^2+2ab=1+c^2-2c$ , 而  $a^2+b^2=1-c^2$ , 于是  $ab=c^2-c$ . 则  $a, b$  为方程  $x^2 - (1-c)x + c^2 - c = 0$  的两实根. 而  $a > b > c$ , 故方程有均大于  $c$  的两个不等实根. 设  $f(x) = x^2 -$

$$(1-c)x + c^2 - c, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ \frac{1-c}{2} > 0, \\ f(c) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (1-c)^2 + 4(c^2 - c) > 0, \\ \frac{1-c}{2} > c, \\ c^2 - (1-c)c + c^2 - c > 0, \end{cases} \text{ 解不等式}$$

组, 得  $-\frac{1}{3} < c < 0$ .

10. 易知过点  $(0, 1), (2, 3)$  的直线方程为  $y = x + 1$ , 而抛物线  $y = x^2 + ax + 2$  与线段  $MN$  有两个交点就是方程  $x^2 + ax + 2 = x + 1$ . 在区间  $[0, 2]$  上有两个不等实根. 令  $f(x) = x^2 + (a-1)x + 1$ , 则

$$\begin{cases} 0 < -\frac{a-1}{2} < 2, \\ \Delta = (a-1)^2 - 4 > 0, \\ f(0) = 1 \geq 0, \\ f(2) = 2a + 3 \geq 0. \end{cases} \text{ 解不等式组, 得 } a \text{ 的范围是 } -\frac{3}{2} \leq a < -1.$$

11. 令  $a = x_2 + x_3 + x_4$ ,  $b = x_2 x_3 x_4$ , 则原不等式为  $(x_1 + a)^2 \leq 4x_1 b$ , 即  $x_1^2 + 2(a - 2b)x_1 + a^2 \leq 0$ . 令  $f(x) = x^2 + 2(a - 2b)x + a^2$ , 则只需证明  $f(x_1) \leq 0$ . 因为  $\Delta = 4(a - 2b)^2 - 4a^2 = 16b(b - a)$ , 而  $\frac{a}{b} = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{x_3 x_4} + \frac{1}{x_2 x_4} + \frac{1}{x_2 x_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$ , 所以  $b > a$ , 从而  $\Delta > 0$ ,  $f(x)$  与  $x$  轴有两个不同的交点. 易知这两个交点为  $u = 2b - a - 2\sqrt{b(b - a)}$ ,  $v = 2b - a + 2\sqrt{b(b - a)}$ . 下面证明  $x_1 \in [u, v]$ . 因  $a \leq 3x_1 \leq 3a$ , 故  $x_1 \in [\frac{a}{3}, a]$ , 只需证  $[\frac{a}{3}, a] \subset [u, v]$ , 即  $u \leq \frac{a}{3}$ ,  $a \leq v$ . 由于  $v = 2b - a + 2\sqrt{b(b - a)} > 2b - a > a$ ,  $u = 2b - a - 2\sqrt{b(b - a)} = (\sqrt{b} - \sqrt{b - a})^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{b - a}}\right)^2 = \frac{a}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a} - 1}\right)^2} \leq \frac{a}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{a}{3}$ , 所以  $x_1 \in [u, v]$ , 从而必有  $f(x_1) \leq 0$ .

12. 设  $A = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} ([-2^{2k+1}, -2^{2k}) \cup (2^{2k}, 2^{2k+1}])$ ,  $B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} ([-2^{2k}, -2^{2k-1}) \cup (2^{2k-1}, 2^{2k}])$ , 则  $A = 2B$ ,  $B = 2A$ ,  $A = -A$ ,  $B = -B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 并且  $A \cup B \cup \{0\} = \mathbf{R}$ . 现在令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \in B, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{而 } g(x) = 2f(x),$$

那么,  $f(g(x)) = f(2f(x)) = -2x$ , 而  $g(f(x)) = 2f(f(x)) = 2x$ . 所以, 满足条件的函数存在.

## 习 题 6

1. (1) 用数学归纳法,  $f^{(n)}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ ; (2) 用递归法,  $f^{(n)}(x) = \frac{(2 \cdot (-4)^n + 3)x + 6((-4)^n - 1)}{((-4)^n - 1)x + (3 \cdot (-4)^n + 2)}$ ; (3) 令  $\varphi(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2x$ , 则  $f^{(n)}(x) = (\sin(2^n \arcsin \sqrt{x}))^2$ ; (4) 用不动点法,  $f^{(n)}(x) = \sqrt{7^n \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}}$ .

2. 设  $f(x) = ax + b$ , 代入求得  $f(x) = 2x + 1$ .

3. 11.

4. 设  $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}$ . 取  $\varphi(x) = 1 - \frac{2}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,

则  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ , 于是  $f^{(n)}(x) = \frac{2}{1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2^n}}$ . 取  $x_1 = a$ , 则

$$x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n) = f^{(n)}(x_1), \text{ 故 } x_{n+1} = \frac{2}{1 - \left(1 - \frac{2}{a}\right)^{2^n}}.$$

5. 令  $x = \phi(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$ , 则  $f(\phi(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) = \phi(2t)$ .

故取  $t = \varphi(x) = \phi^{-1}(x) = \arccos(2x - 1)$ ,  $g(x) = 2x$ , 得  $f(x) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ , 于是  $f^{(n)}(x) = \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) = \frac{1}{2}\{1 + \cos[2^n \arccos(2x - 1)]\}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . 方程  $f^{(n)}(x) = x$  化为  $\frac{1}{2}\{1 + \cos[2^n \arccos(2x - 1)]\} = x$ ,

即  $\cos[2^n \arccos(2x - 1)] = 2x - 1$ , 故此方程有且只有  $2^n$  个不同实根. 由于  $f^{(k)}(x) = x$  是  $2^k$  次方程, 至多有  $2^k$  个根, 故当一切正整数  $k < n$ , 方程  $f^{(k)}(x) = x$  的根的总数目不超过  $2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 2$ , 于是有实数  $x_0$ , 它是  $f^{(n)}(x) = x$  的根而不是任一方程  $f^{(k)}(x) = x$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) 的根.

6. 仿照 6.3 例 1 解得点  $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ .

7. (1) 令  $\varphi(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2x$ , 则可求得  $f^{(n)}(x) = (\sin(2^n \arcsin \sqrt{x}))^2$ ; (2)  $a_n = 2^{n-1}$ ,  $b_n = 2^{n-1} + 1$ .

8. 对  $i = 1, 2, \dots, 10$ , 由  $\{i, f_1(i), \dots, f_{10}(i)\} \subseteq D$ , 据抽屉原则, 并注意到  $f$  是一一映射, 知存在  $1 \leq r_i \leq 10$ , 使  $fr_i(i) = i$ . 又  $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  为  $1, 2, \dots, 10$  的最小公倍数, 故上述  $r_i | 2520$ , 于是  $f_{2520}(i) = i$  对一切  $i \in D$  成立, 原式为  $\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot i = 220$ . 又由排序不等式  $\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot i \geq 1 \times 10 + \dots + 10 \times 1 = 220$ . 从而所求排列为  $10, 9, 8, \dots, 1$ .

9. 若  $k$  是  $p$  的倍数, 即存在  $s \in \mathbf{N}_+$ , 使  $k = p \cdot s$ , 易知  $f(n) = n + s$  满足条件  $f^{(p)}(n) = n + k$ . 反过来, 设  $f$  存在, 记  $A = \mathbf{N}_+ \setminus f(\mathbf{N}_+)$ , 由于  $f^{(p)}(n) = n + k$ ,  $|A_1|$  为有限值, 令  $A_2 = \mathbf{N}_+ \setminus f^{(2)}(\mathbf{N}_+) = A_1 \cup f(A_1)$ ,  $\dots$ ,  $A_p = \mathbf{N}_+ \setminus f^{(p)}(\mathbf{N}_+) = A_1 \cup \dots \cup f^{(p-1)}(A_1)$ , 不难得到  $f^{(i)}(A_1) \cap f^{(j)}(A_1) = \emptyset$  ( $i \neq j$ ),  $|f^{(i)}(A_1)| = |f^{(j)}(A_1)| = |A_1|$ , 故  $|A_p| = k = p |A_1|$ , 即  $p | k$ .

## 习 题 7

1. 将函数方程中的  $x$  用  $\frac{1}{x}$  代换, 得  $2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , 即  $f(x) + 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . 将上面方程与原方程联立消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 得  $f(x) = \frac{2}{3}\left(\sin x - \frac{x^2}{2}\sin \frac{1}{x}\right)$ .

2. 由题设知,  $f(x), g(x)$  的定义域为  $[-3, 3]$ . 用  $-x$  代换方程中的  $x$ , 并将原方程与所得的新方程联立得 
$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 1993x \sqrt{9-x^2} + x^{1994}, \\ f(x) - g(x) = -1993x \sqrt{9-x^2} + x^{1994}. \end{cases}$$
 解方程组得  $f(x) = x^{1994}, g(x) = 1993x \sqrt{9-x^2} (-3 \leq x \leq 3)$ .

3. 令  $x = y$  代入题设方程, 得  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2}$ . 于是  $\frac{\sin x + \cos x}{2} + \frac{\sin y + \cos y}{2} + g(x) - g(y) = \sin x + \cos y$ , 即  $g(x) - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = g(y) - \frac{1}{2}\sin y + \frac{1}{2}\cos y$ . 令  $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ , 那么对任意的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 都有  $h(x) = h(y)$ . 因此,  $h(x)$  恒等于一个常数. 所以满足题设方程的函数是  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2}, g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + C$ , 其中  $C$  为常数.

4. 令  $y = x$ , 得  $f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x))) \cdots \textcircled{1}$ . 将  $x$  换成  $f(x)$ , 有  $f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) \cdots \textcircled{2}$ .  $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$  两式相减得  $f(2f(f(x))) - f(2x) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) - f(2f(x + f(x)))$ . 若  $f(f(x)) > x$ , 则上式左边为负, 而右边却为正, 矛盾! 同样, 若  $f(f(x)) < x$  也会导致左右符号不一致的矛盾. 所以  $f(f(x)) = x$ .

5. 记原式为  $\textcircled{1}$  式. 在  $\textcircled{1}$  中令  $x = y$ , 得  $f(x) - g(x) = 0$ , 所以  $f(x) = g(x)$ . 于是  $\textcircled{1}$  式为  $f(x) - f(y) = (x - y)h(x + y) \cdots \textcircled{2}$ . 在  $\textcircled{2}$  中令  $y = 0$ , 并记  $f(0) = c$ , 得  $f(x) = c + xh(x) \cdots \textcircled{3}$ . 将  $\textcircled{3}$  代入  $\textcircled{2}$  中, 得  $xh(x) - yh(y) = (x - y)h(x + y) \cdots \textcircled{4}$ . 在  $\textcircled{4}$  中令  $y = -x$ , 并记  $h(0) = b$ , 则  $x(h(x) + h(-x)) = 2bx$ . 从而  $h(x) + h(-x) = 2b \cdots \textcircled{5}$ . 再在  $\textcircled{4}$  式中用  $x + y$  代换  $x$ ,  $-y$  代换  $y$ , 得  $(x + y)h(x + y) + yh(-y) = (x + 2y)h(x) \cdots \textcircled{6}$ . 在  $\textcircled{6}$  式中将  $x, y$  互换, 得  $(x + y)h(x + y) + xh(-x) = (2x + y)h(y) \cdots \textcircled{7}$ .  $\textcircled{7} - \textcircled{6}$ , 得  $xh(-x) + xh(x) - yh(-y) - yh(y) = 2xh(y) - 2yh(x) \cdots \textcircled{8}$ . 由  $\textcircled{5}$  和  $\textcircled{8}$ , 便得  $2bx - 2by = 2xh(y) - 2yh(x)$ . 即  $xh(y) - yh(x) = b(x - y), x(h(y) -$

$b) = y(h(x) - b)$ . 对  $x \neq 0, y \neq 0$ , 有  $\frac{h(x) - b}{x} = \frac{h(y) - b}{y}$ . 于是对任意的  $x (\neq 0)$ ,  $\frac{h(x) - b}{x}$  为常数, 设为  $a$ . 那么  $h(x) = ax + b, x \neq 0 \cdots \textcircled{9}$ , 易知  $\textcircled{9}$  式对  $x = 0$  也成立. 将  $\textcircled{9}$  代入  $\textcircled{3}$ , 得  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . 所以  $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c, h(x) = ax + b$ . 其中的  $a, b, c$  为任意常数. 经检验,  $f(x), g(x), h(x)$  满足题设方程.

**6.** 对于条件  $f(x) + f(y) \leq f(x+y) \cdots \textcircled{1}$ . 在  $\textcircled{1}$  中令  $y = 1 - x$ , 得  $f(x) + f(1 - x) \leq f(1) = 1$ . 故对任意  $x \in [0, 1], f(x) \leq 1$ . 且  $f(0) \leq 0$  (取  $x = 1$  即可). 在  $\textcircled{1}$  中令  $y = x$ , 可得对所有  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , 有  $2f(x) \leq f(2x)$ . 利用数学归纳法, 我们有  $2^n f(x) \leq f(2^n x)$ . 对所有使得  $2^n x \in [0, 1]$  的  $x$  成立. 即  $x \in [0, \frac{1}{2^n}]$ . 如果  $x > \frac{1}{2}$ , 那么  $f(x) \leq 1 < 2x$ . 现在假设  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , 选取  $n \geq 1$ , 使得  $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$ . 于是有  $2^n x \in [0, 1]$ , 并且  $2^n f(x) \leq f(2^n x) \leq 1 < 2^{n+1} x = 2^n(2x)$ , 所以, 同样有  $f(x) < 2x$ . 综上所述, 对所有  $x \in [0, 1]$ , 都有  $f(x) \leq 2x$  成立.

**7.** 本题所给的是一个函数不等式, 而不是一个等式, 我们设法先把它变成一个等式. 令  $x = y, u = v$ , 代入  $\textcircled{1}$ , 得  $f(x^{2u}) \leq f(x)^{\frac{1}{2u}}$ . 再将  $2u$  用  $u$  代换, 对所有  $x > 1, u > 0$ , 均有  $f(x^u) \leq f(x)^{\frac{1}{u}} \cdots \textcircled{2}$ . 令  $y = x^u, v = \frac{1}{u}$ , 则  $x = y^{\frac{1}{v}} = y^v, u = \frac{1}{v}$ , 代入  $\textcircled{2}$  式, 得  $f(y) \leq f(y^v)^v$ , 用  $x$  代换  $y, u$  代换  $v$ , 则对所有  $x > 1, u > 0$ , 又有  $f(x^u) \geq f(x)^{\frac{1}{u}} \cdots \textcircled{3}$ . 由  $\textcircled{2}, \textcircled{3}$  便知  $f(x^u) = f(x)^{\frac{1}{u}} \cdots \textcircled{4}$ . 现在来求  $\textcircled{4}$  的解. 取  $x = e, t = e^u$  (则  $u = \ln t$ ), 当  $u$  从  $0$  变化到  $+\infty$  时,  $t$  从  $1$  变化到  $+\infty$ , 于是  $\textcircled{4}$  式为  $f(t) = f(e)^{\frac{1}{\ln t}}$ . 令  $f(e) = a > 1$ , 用  $x$  代换  $t$ , 便得  $f(x) = a^{\frac{1}{\ln x}}, a > 1, \cdots \textcircled{5}$ . 下面验证  $\textcircled{5}$  所给出的函数满足  $\textcircled{1}$

式. 利用算术—调和平均不等式, 有  $\frac{u \ln x + v \ln y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{u \ln x} + \frac{1}{v \ln y}}$ , 所以

$\frac{1}{4u \ln x} + \frac{1}{4v \ln y} \geq \frac{1}{u \ln x + v \ln y}$ , 从而  $f(x^u y^v) = a^{\frac{1}{4u \ln x + 4v \ln y}} \leq a^{\frac{1}{u \ln x + v \ln y}} = f(x)^{\frac{1}{u}} f(y)^{\frac{1}{v}}$ . 这就证明了对所有  $a > 1, \textcircled{5}$  式所给出的函数  $f(x)$  即为所求.

**8.** 如果函数  $f(x)$  满足第一个恒等式, 那么  $f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R}$ , 即  $f(x)$  也满足第二个恒等式. 现在设函数  $f(x)$  满足第二个恒等式, 令  $y = u + v + w$ , 得  $f(x + u + v +$

$uw + xu + xv + xuv \equiv f(x) + f(u+v+uw) + f(xu+xv+xuv)$ . 又  $f(u+v+uw) \equiv f(u) + f(v) + f(uw)$ . 故  $f(x+u+v+xu+xv+uw+xuv) \equiv f(x) + f(u) + f(v) + f(uw) + f(xu+xv+xuv) \cdots \textcircled{1}$ . 在 $\textcircled{1}$ 中变换变量  $x$  和  $u$  的位置, 又得  $f(x+u+v+xu+xv+uw+xuv) \equiv f(x) + f(u) + f(v) + f(xv) + f(xu+uw+xuv) \cdots \textcircled{2}$ . 由 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{2}$ , 有  $f(uw) + f(xu+xv+xuv) \equiv f(xv) + f(xu+uw+xuv) \cdots \textcircled{3}$ . 在 $\textcircled{3}$ 中令  $x=1$ , 有  $f(uw) + f(u+v+uw) \equiv f(v) + f(u+2uw)$ . 所以  $f(uw) + f(u) + f(v) + f(uw) \equiv f(v) + f(u+2uw)$ , 即  $f(u) + 2f(uw) \equiv f(u+2uw) \cdots \textcircled{4}$ . 在 $\textcircled{4}$ 中令  $u=0$ , 易得  $f(0) = 0 \cdots \textcircled{5}$ . 在 $\textcircled{4}$ 中令  $u=-1$ , 有  $f(-u) \equiv f(u) + 2f(-u)$ . 从而  $f(-u) = -f(u)$ . 在 $\textcircled{4}$ 中令  $v = -\frac{1}{2}$ , 有  $f(0) \equiv f(u) + 2f(-\frac{u}{2}) \cdots \textcircled{6}$ . 由 $\textcircled{5}$ 和 $\textcircled{6}$ , 我们得到  $f(u) \equiv 2f(-\frac{u}{2})$ , 即  $f(2u) = 2f(u) \cdots \textcircled{7}$ . 由 $\textcircled{4}$ 和 $\textcircled{7}$ , 有  $f(u+2uw) \equiv f(u) + f(2uw)$ . 在上式中再令  $2v=t$ , 得到  $f(u+ut) \equiv f(u) + f(ut) \cdots \textcircled{8}$ . 所以当  $x \neq 0$  时, 由 $\textcircled{8}$ , 有  $f(x+y) \equiv f(x + \frac{y}{x}) \equiv f(x) + f(x \cdot \frac{y}{x}) \equiv f(x) + f(y)$ . 另一方面, 当  $x=0$  时, 由 $\textcircled{5}$ ,  $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$  成立. 因此,  $f(x, y)$  满足第一个恒等式.

9. (1)  $f(x) \equiv 0, g(x) \equiv 0$  为此函数方程的平凡解. (2) 下面我们考虑非平凡解. 令  $x=0$ , 则  $f(yg(0)) = g(0)$ . 若  $g(0) \neq 0$ , 则  $f(x) = g(0)$ , 即  $f(x)$  为常数  $c$ ; 于是  $g(0) = g(x) + xg(0), g(x) = (1-x)g(0)$ . 故  $f(x) = c, g(x) = (1-x)c$  为解. (3) 若  $g(0) = 0$ , 则  $f(0) = 0$ . 令  $y=0$ , 有  $f(x) = g(x) + xf(0) = g(x)$ , 任意  $x \in \mathbf{R}$ . 故问题转化为求一个函数方程:  $f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y)$  (对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ ) 的解. 令  $y=0$ , 则  $f(x) = f(x) + xf(0)$ , 故  $f(0) = 0$ ; 若  $f(x) = 0$ , 则  $0 = xf(y)$ , 因而  $x=0$ . 即  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \cdots \textcircled{*}$ . 令  $x=1$ , 得  $f(1+yf(1)) = f(1) + f(y) \cdots \textcircled{1}$ . 若  $f(1) \neq 1$ , 取  $y = \frac{1}{1-f(1)}$ , 代入 $\textcircled{1}$ , 得  $f(1) = 0$ , 与 $\textcircled{*}$ 矛盾. 所以  $f(1) = 1$ , 故  $f(1+y) = 1 + f(y)$ , 任意  $y \in \mathbf{R} \cdots \textcircled{2}$ . 特别地,  $f(n) = n, n \in \mathbf{Z}$ . 取  $x = n \in \mathbf{Z}, y = z-1$ , 代入方程得  $f(nz) = f(n + f(z-1))f(n) = n + nf(z-1) = nf(z)$ , 任意  $n \in \mathbf{Z}, z \in \mathbf{R}$ . 因此  $f(rx) = rf(x)$ , 任意  $r \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{R} \cdots \textcircled{3}$ . 由 $\textcircled{3}$ ,  $f(a) + f(-a) = 0 = f(a-a)$ . 当  $a+b \neq 0$  时,  $f(a) +$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\frac{a-b}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) =$$



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a+b}{2} \cdot f\left[\frac{\frac{a-b}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right] + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a+b}{2} f\left[\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right] =$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a+b). \text{ 所以 } f(x+yf(x)) = f(x) + f(yf(x)), x+yf(x) \neq$$

0. 又  $f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y)$ , 因此  $f(yf(x)) = xf(y)$ . 令  $y = 1$ , 则  $f(f(x)) = x$ , 故  $f$  为双射. 将  $x$  换成  $f(x)$ , 有  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 任意  $x, y \in \mathbf{R}$ . 令  $y = x$ , 则  $f(x^2) = f^2(x) > 0$ . 令  $y = -x$ , 则  $f(-x^2) = f(x)f(-x)$ , 故  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ . 又因为  $f(x-f(x)) = f(x) - x = -(x-f(x))$ , 所以  $f(x) - x = 0, x \in \mathbf{R}$ . 从而  $f(x) = g(x) = x$ , 任意  $x \in \mathbf{R}$ .

10. 取  $x = y = 1$  代入题设方程, 得  $2f(1) = 2(f(1))^2$ , 所以  $f(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ . (1) 若  $f(1) = 0$ . 取  $y = 1$  代入原方程, 得  $xf(1) + f(x) = (x+1)f(x)f(1)$ , 所以  $f(x) = 0$ . (2) 若  $f(1) = 1$ , 取  $y = 1$  代入原方程, 得  $x + f(x) = (x+1)f(x)$ ,  $x(f(x) - 1) = 0$ . 所以  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \\ \text{任意实数,} & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$

11. 令  $y = 1$ , 得  $f(x) = \frac{f(x) + f(1)}{x+1}$ ,  $x \neq -1$ . 故  $xf(x) = f(1)$ . 当  $x = 0$  时,  $f(1) = 0$ . 从而当  $x \neq 0, x \neq -1$  时,  $f(x) = 0$ . 令  $x = 2, y = 0$ , 得  $f(0) = \frac{f(2) + f(0)}{2}$ , 所以  $f(0) = f(2) = 0$ . 令  $x = -1, y = 0$ , 得  $f(0) = \frac{f(-1) + f(0)}{2}$ , 所以  $f(-1) = f(0) = 0$ . 综上所述,  $f(x) = 0$ .

12. 在题述的恒等式中, 取  $n = m = 0$ , 得  $(f(0))^2 = 2f(0)$ . 但是  $f(0) \neq 0$ , 因此  $f(0) = 2$ . 再在恒等式中取  $m = 1$ , 得  $f(n)f(1) \equiv f(n+1) + f(n-1), n \in \mathbf{Z}$ . 如果在  $n = 0$  与  $n = 1$  时函数值  $f(n)$  确定, 那么由上面的恒等式可唯一确定  $f(2)$  与  $f(-1)$  的值, 继而可确定  $f(3)$  与  $f(-2)$  的值, 等等. 这样一来对每个  $n \in \mathbf{Z}$  皆可确定  $f(n)$  的值. 于是, 若已知  $f(0) = 2$ , 且  $f(1) = \frac{5}{2}$  (在(1)中) 或  $f(1) = \sqrt{3}$  (在(2)中), 则我们可唯一确定  $f(n)$ . 下面

证明: 函数  $f(n) = 2^n + \frac{1}{2^n}$  与函数  $f(n) = 2\cos \frac{n\pi}{6}$  分别满足(1)和(2). 事实上, 有 (1)  $f(0) = 2^0 + 2^0, f(1) = 2^1 + \frac{1}{2^1} = \frac{5}{2}, f(n)f(m) = \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)\left(2^m + \frac{1}{2^m}\right) = \left(2^{n+m} + \frac{1}{2^{n+m}}\right) + \left(2^{-n-m} + \frac{1}{2^{-n-m}}\right) = f(n+m) + f(n-$

$m, n \in \mathbf{Z}$ . (2)  $f(0) = 2\cos 0, f(1) = 2\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, f(n)f(m) = 4\cos \frac{n\pi}{6} \cos \frac{m\pi}{6} = 2\cos \frac{(m+n)\pi}{6} + 2\cos \frac{(n-m)\pi}{6} = f(n+m) + f(n-m), m, n \in \mathbf{Z}$ .

13. 在条件(2)中令  $n = 1$ , 得  $f(m+1) + f(m-1) = 0$ . 即  $f(m+1) = -f(m-1) \cdots \textcircled{1}$ . 在 $\textcircled{1}$ 式中用  $m+2$  代换  $m$ , 得  $f(m+3) = -f(m+1) \cdots \textcircled{2}$ . 由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 式, 可得  $f(m+3) = f(m-1)$ . 即  $f(m+4) = f(m)$ . 因此,  $f(n)$  是周期为 4 的周期函数. 取  $m = 1$  代入 $\textcircled{1}$ , 得  $f(2) = -f(0) = -1$ . 取  $m = 2$  代入 $\textcircled{1}$ , 得  $f(3) = -f(1) = 0$ . 所以  $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \\ 1, & \text{当 } n = 4k, k \in \mathbf{Z} \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } n = 4k + 2, k \in \mathbf{Z} \text{ 时.} \end{cases}$

14. (1) 取  $x = y = \frac{1}{2}$  代入 $\textcircled{1}$ , 得  $2f(t) = f(t)f(0)$ . 因  $f(x)$  不恒等于零, 所以  $f(0) = 2$ . 取  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$  代入 $\textcircled{1}$ , 得  $f(t) + f(-t) = f(0)f(t)$ , 即  $f(-t) = f(t)$ , 所以,  $f(x)$  是偶函数; (2) 令  $x = t + \frac{\pi}{2}, y = t - \frac{\pi}{2}$  代入 $\textcircled{1}$ , 得  $f(2t + \pi) + f(2t - \pi) = f(2t)f(\pi)$ , 所以  $f(2t + \pi) = -f(2t - \pi) \cdots \textcircled{2}$ . 取  $x = 2t - \pi$  代入 $\textcircled{2}$ , 得  $f(x + 2\pi) = -f(x)$ . 故  $f(x + 4\pi) = -f(x + 2\pi) = f(x)$ , 即  $f(x)$  是以  $4\pi$  为周期的周期函数.

15. 在所给等式中令  $x = 0$ , 并将  $y$  用  $x$  代替, 得  $f(x) + f(-x) = e^x(f(x) + 1)$ . 即  $(1 - e^x)f(x) + f(-x) = e^x$ . 注意到当  $x, y$  互换后所给等式的右边不变, 则有  $f(x - y) = f(y - x)$ . 在上式中取  $y = 0$ , 则  $f(x) = f(-x)$ , 故  $f(x)$  为偶函数. 因而  $(2 - e^x)f(x) = e^x$ . 于是  $f(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{\ln 2\}$ .

16. 在恒等式中, 取  $x = 0, y = 1$ , 有  $f\left(\frac{1}{2}\right) = a \cdots \textcircled{1}$ . 又有  $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{0 + \frac{1}{2}}{2}\right) = af\left(\frac{1}{2}\right) = a^2 \cdots \textcircled{2}, f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}\right) = (1 - a)a + a \cdots \textcircled{3}$ . 因此,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2}\right) = (1 - a)a^2 + a(a + a(1 - a)) \cdots \textcircled{4}$ . 由 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{4}$ , 得  $a = (1 - a)a^2 + a(a + a(1 - a))$ , 因为  $a \neq 0, 1$ , 由上式可解出  $a = \frac{1}{2}$ .

从而原恒等式化为  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ . 设  $f\left(\frac{1}{7}\right) = t$ , 则  $t =$

$$f\left[\frac{0+\frac{2}{7}}{2}\right] = \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{7}\right), \text{ 所以 } f\left(\frac{2}{7}\right) = 2t. \text{ 进而由 } f\left(\frac{1}{7}\right) = t, f\left(\frac{2}{7}\right) = 2t,$$

可知  $f\left(\frac{3}{7}\right) = 3t$ . 依次类推. 最后, 我们有  $f(1) = 7t$ . 故  $f\left(\frac{1}{7}\right) = t = \frac{1}{7}$ .

17. 原函数方程可化为  $f(2x^2+1) = (2f(x)+1)^2 \cdots \textcircled{1}$ . 取  $x=0$  代入  $\textcircled{1}$ , 得  $f(1) = (2f(0)+1)^2 = 1$ . 取  $x=1$  代入  $\textcircled{1}$ , 并利用  $f(1) = 1$ , 得  $f(3) = (2f(1)+1)^2 = 3^2$ . 取  $x=3$  代入  $\textcircled{1}$ , 并利用  $f(3) = 3^2$ , 得  $f(19) = (2f(3)+1)^2 = 19, \cdots$ . 作数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n^2 + 1, n = 1, 2, \cdots$ . 用数学归纳法易证  $f(a_n) = a_n^2, n \in \mathbf{N}_+$ . 事实上, 假设  $f(a_k) = a_k^2$ , 那么  $f(a_{k+1}) = f(2a_k^2 + 1) = (2f(a_k) + 1)^2$  (利用  $\textcircled{1}$ )  $= (2a_k^2 + 1)^2$  (利用归纳假设)  $= a_{k+1}^2$ . 设  $f(x) - x^2$  是  $m$  次多项式, 由代数基本定理知它有  $m$  个根. 但上面已证  $f(x) - x^2$  有无穷多个根, 从而  $f(x) - x^2 \equiv 0$ . 即  $f(x) = x^2$ .

18. 取  $x = y = 1$ , 有  $f(f(1)) = f(1) \cdots \textcircled{1}$ . 取  $y = f(1)$ , 有  $f(xf(f(1))) = \frac{f(x)}{f(1)} \cdots \textcircled{2}$ . 取  $y = 1$ , 有  $f(xf(1)) = f(x) \cdots \textcircled{3}$ . 把  $\textcircled{1}$  代入

$\textcircled{3}$  并利用  $\textcircled{2}$ , 有  $f(x) = f(xf(f(1))) = \frac{f(x)}{f(1)}$ . 所以  $f(1) = 1$ . 在原恒等式

中令  $x = 1$ , 有  $f(f(y)) = \frac{f(1)}{y} = \frac{1}{y} \cdots \textcircled{4}$ . 取  $y = f(t)$ , 由原恒等式及  $\textcircled{4}$  有

$$f(x) = f(t)f(xf(f(t))) = f(t)f\left(\frac{x}{t}\right). \text{ 令 } x = st, \text{ 由上式, 得 } f(st) =$$

$$f(s)f(t). \text{ 因此 } f(3^n) = (f(3))^n = b^n, f(486) = f(3^5 \times 2) = ab^5.$$

19. 因为  $f(x)$  值域为  $\mathbf{R}$ , 所以对任意  $y_0 \in \mathbf{R}$ , 存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 满足:  $f(x_0) = y_0$ . 又因为  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 所以存在  $x_1 \in \mathbf{R}$ , 满足  $f(x_1) = x_0$ . 即  $y_0 = f(f(x_1)) = f^2(x_1), \cdots$ , 依次继续下去, 则必存在  $x_{n-1} \in \mathbf{R}$ , 使得  $y_0 = f^n(x_{n-1})$ . 把  $x_{n-1}$  代入原方程, 有  $f(y_0) = y_0 + e^{y_0}$ . 由于  $y_0$  是任意取的, 所以  $f(x) = x + e^x, x \in \mathbf{R}$ .

20. 在(1)中, 令  $n = 0$ , 有  $f(m) = g(m) + h(0)$ , 即  $g(m) = f(m) - h(0) \cdots \textcircled{1}$ . 在(1)中, 令  $m = 0$ , 有  $f(n) = g(0) + h(n)$ , 即  $h(n) = f(n) - g(0) \cdots \textcircled{2}$ . 在(1)中, 令  $m = n = 0$ , 有  $f(0) = g(0) + h(0) \cdots \textcircled{3}$ . 将  $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$  代入  $\textcircled{1}$  中, 得  $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn - f(0)$ . 注意: 原来有三个函数的方程, 现在只剩下一个了. 在上式中, 令  $m = 1$ , 得  $f(n+1) = f(n) + 2n + (f(1) - f(0))$ . 用  $n-1, n-2, \cdots, 0$  依次替换上式中的  $n$ , 有  $f(n) =$

$f(n-1) + 2(n-1) + (f(1) - f(0))$ ,  $f(n-1) = f(n-2) + 2(n-2) + (f(1) - f(0))$ ,  $\dots$ ,  $f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + (f(1) - f(0))$ ,  $f(1) = f(0) + 2 \cdot 0 + (f(1) - f(0))$ . 把以上  $n$  个等式相加, 得  $f(n) = f(0) + 2 \cdot [1 + 2 + \dots + (n-1)] + n(f(1) - f(0))$ , 也即  $f(n) = n(n-1) + nf(1) - (n-1)f(0) \dots \textcircled{4}$ . 在 $\textcircled{1}$ 式中, 令  $m=1$ , 有  $g(1) = f(1) - h(0)$ . 在 $\textcircled{2}$ 式中, 令  $n=1$ , 有  $h(1) = f(1) - g(0)$ . 利用条件(2), 有  $f(1) = h(0) + 1 = g(0) + 1$ . 因而  $h(0) = g(0) = a$  ( $a$  为非负整数). 代入 $\textcircled{3}$ , 得  $f(0) = 2a$ . 并且有  $f(1) = h(0) + 1 = a + 1$ . 将以上两式代入 $\textcircled{4}$ , 有  $f(n) = n(n-1) + n(a+1) - (n-1) \cdot 2a$ . 即  $f(n) = n^2 - an + 2n \dots \textcircled{5}$ . 将 $\textcircled{5}$ 代入 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ , 得  $g(n) = n^2 - an + a \dots \textcircled{6}$ .  $h(n) = n^2 - an + a \dots \textcircled{7}$ . 下面讨论  $a$  的取值范围. 显然, 当  $n$  为非负整数时, 如果  $g(n)$  是非负整数, 那么  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$  都是非负整数. 因此只需对  $g(n)$  作讨论. 如果  $a = 2k$  ( $k$  为非负整数), 那么  $g(n) = n^2 - 2kn + 2k = (n-k)^2 - k^2 + 2k$ . 于是,  $g(n)$  的最小值为  $g(k) = -k^2 + 2k$ . 由题意,  $g(k) \geq 0$ . 所以  $k = 0, 1, 2$ . 从而  $a = 0, 2, 4$ . 如果  $a = 2k + 1$  ( $k$  为非负整数), 那么  $g(n) = n^2 - (2k+1)n + (2k+1) = \left(n - \frac{2k+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(2k+1)^2 + (2k+1)$ . 而  $n$  为非负整数, 则  $g(n)$  的最小值为  $g(k) = g(k+1) = -k^2 + k + 1$ . 由题意  $g(k) \geq 0$ . 即  $-k^2 + k + 1 = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \geq 0$ . 所以  $k = 0, 1$ . 从而  $a = 1, 3$ . 反之, 当  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  时, 易检验: 函数  $f(n) = n^2 - an + 2a$ ,  $g(n) = h(n) = n^2 - an + a$  符合题意, 综上, 本题的全部解为  $f(n) = n^2 - an + 2a$ ,  $g(n) = h(n) = n^2 - an + a$ . 其中  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**21.** 由原恒等式知  $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$ . (1) 若上式等号成立, 则存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使  $f(x_0) = 0$ . 那么  $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 在这种情形下, 有  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . (2) 若等号恒不成立, 即对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) > 0$ . 对原恒等式两端取对数, 有  $\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$ . 令  $g(x) = \ln f(x)$ , 则  $g(x)$  满足柯西方程 $\textcircled{*}$ , 因此  $g(x) = ax$ , 其中  $a = g(1) = \ln f(1)$ . 从而  $f(x) = e^{ax} = c^x$ . 其中  $c = f(1)$ . 综上所述, 原方程的连续解为  $f(x) = c^x$ ,  $c = f(1) > 0$  或  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

**22.** 除去  $f(x) \equiv 0$ ,  $x > 0$  这样的平凡解外, 若  $f(x)$  不恒为 0, 则必有  $f(x) > 0$ , 对任意  $x > 0$ . 令  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$ . 原方程转化为  $f(e^{u+v}) = f(e^u)f(e^v)$ , 任意  $u, v \in \mathbf{R} \dots \textcircled{1}$ . 令  $\varphi(x) = f(e^x)$ , 则 $\textcircled{1}$ 又成为  $\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v)$ , 任意  $a, u \in \mathbf{R} \dots \textcircled{2}$ . 由上题知 $\textcircled{2}$ 的连续解只有  $\varphi(x) \equiv 0$  或  $\varphi(x) = [\varphi(1)]^x$ , 因此, 原方程的连续解只能为  $f(x) \equiv 0$  或  $f(x) = \varphi(\ln x) =$

$(\varphi(1))^{\ln x} = x^a$ , 其中  $a = \ln \varphi(1) = \ln f(e)$ .

23. 设  $f(0) = b$ . 由题给函数方程得  $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(0)] = \frac{1}{2}[f(x) + b]$ . 另外  $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x+y) + b]$ . 所以  $f(x+y) = f(x) + f(y) - b$ . 令  $g(x) = f(x) - b$ , 代入上式得  $g(x+y) = g(x) + g(y)$ . 这正是柯西方程, 所以  $g(x) = ax$ , 其中  $a = g(1) = f(1) - b$ . 所以  $f(x) = ax + b$ . 其中  $a = f(1) - f(0)$ ,  $b = f(0)$ .

24. 因为  $f(x)$  满足柯西方程 $\textcircled{*}$ , 不难证明对所有的有理数  $x$ , 有  $f(x) = f(1)x$ . 因而  $\alpha$  必为无理解. 令  $p = \frac{u+v}{2}$ ,  $q = \frac{s+t}{2}$ . 考虑下列方程组:

$$\begin{cases} \alpha x + y = p, \\ f(\alpha)x + f(1)y = q. \end{cases} \dots \textcircled{1}$$
 由于此方程组的行列式  $\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ f(\alpha) & f(1) \end{vmatrix} = \alpha f(1) - f(\alpha) \neq 0$ , 故它必有唯一解  $(x, y)$ , 但  $x, y$  不一定是无理数. 在  $x, y$  附近取两个有理数  $x_0, y_0$ , 使  $|x_0 - x|$  和  $|y_0 - y|$  非常小, 以至:

$$\begin{cases} |\alpha(x_0 - x)| + |y_0 - y| < \frac{1}{4}|u - v|, \\ |f(\alpha)(x_0 - x)| + |f(1)(y_0 - y)| < \frac{1}{4}|s - t|. \end{cases}$$

所以, 由  $p, q$  意义及

$\textcircled{1}$  知  $\begin{cases} (\alpha x_0 + y_0) \in (u, v), \\ (f(\alpha)x_0 + f(1)y_0) \in (s, t). \end{cases}$  取  $c = \alpha x_0 + y_0$ , 则  $c \in (u, v)$ , 又  $x_0, y_0 \in \mathbf{Q}$ , 故  $f(c) = f(\alpha x_0 + y_0) = f(\alpha x_0) + f(y_0) = x_0 f(\alpha) + y_0 f(1) \in (s, t)$ . 因此结论成立. 可见, 柯西方程的解  $f(x)$ , 只要在某一点连续, 或只要在某一小区间上有上界或下界, 则必为  $f(1)x$ .

25. 显然  $f(x) = x$  是原方程的解, 下证只有这个解. 在原恒等式中令  $y = kx$ , 得  $\frac{f(x) + f(kx)}{f(x) - f(kx)} = f\left(\frac{x+kx}{x-kx}\right) = f\left(\frac{1+k}{1-k}\right) = \frac{f(1) + f(k)}{f(1) - f(k)}$ . 从而,  $f(kx) = \frac{f(x)}{f(1)} \cdot f(k)$ . 令  $k = 0$ , 有  $f(0) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{f(1)}\right) = 0$ . 由于  $f(x)$  不恒等于  $f(1)$ , 所以  $f(0) = 0$ . 在原恒等式中令  $y = 0$ , 得  $f(1) = 1$ . 于是  $f(kx) = f(k)f(x) \dots \textcircled{1}$ . 我们的目标是去证对  $n \in \mathbf{N}_+$ , 有  $f(n) = n$ . 先证明  $f(2) = 2$ . 由  $\textcircled{1}$ ,  $f(4) = f^2(2) \dots \textcircled{2}$ . 再由原恒等式及  $\textcircled{1}$ ,  $\frac{f(2) + 1}{f(2) - 1} = f(3) \dots \textcircled{3}$ ,  $\frac{f(4) + 1}{f(4) - 1} = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{f(5)}{f(3)} \dots \textcircled{4}$ ,  $\frac{f(3) + f(2)}{f(3) - f(2)} = f(5) \dots \textcircled{5}$ . 在  $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$  中消去  $f(3)$ 、 $f(4)$ 、 $f(5)$ , 有  $\frac{f^2(2) + 1}{f^2(2) - 1} = \frac{(f^2(2) + 1)(f(2) - 1)}{(f(2) + 1)(1 + 2f(2) - f^2(2))}$ .

即  $f^2(2) = 2f(2)$ . 如果  $f(2) = 0$ , 那么  $f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 0$ , 与  $f(1) = 1$  矛盾. 所以  $f(2) = 2$ . 若  $f(n) = n$  对  $n < 2m$  成立, 则  $f(2m) = f(2)f(m) = 2f(m) = 2m$ ,  $f(2m+1) = \frac{f(m+1) + f(m)}{f(m+1) - f(m)} = \frac{m+1+m}{m+1-m} = 2m+1$ . 故  $f(n) = n$  对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  成立. 在原恒等式中令  $y = -x$ , 得  $f(x) + f(-x) = 0$ . 即  $f(-x) = -f(x)$ . 故  $f(n) = n$  对一切整数  $n$  成立. 再由  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p}{q}$ , 所以  $f(n) = n$  对一切有理数  $n = \frac{p}{q}$  成立. 最后利用连续性, 即知  $f(x) = x$ , 任意  $x \in \mathbf{R}$ .

26. 因为  $f(1) = 1$ ,  $f(n+1) = 2f(n) + 1$ . 所以  $f(1) + 1 = 2$ ,  $f(n+1) + 1 = 2[f(n) + 1]$ . 即  $\{f(n) + 1\}$  是首次为 2, 公比为 2 的等比数列. 从而有  $f(n) + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ . 故  $f(n) = 2^n - 1$  即为所求函数.

27. 在①中令  $n = 1$ , 得  $f(m) + f(1) = f(m+1) - m$ , 即  $f(m+1) - f(m) = m+1$ . 于是有  $f(m) - f(m-1) = m$ ,  $f(m-1) - f(m-2) = m-1, \dots, f(2) - f(1) = 2$ . 将上面这  $m-1$  个等式相加, 得  $f(m) - f(1) = 2 + 3 + \dots + m$ , 所以  $f(m) = \frac{m(m+1)}{2}$ . 经检验,  $f(m) = \frac{m(m+1)}{2}$  是原方程的解.

28. 在原恒等式中取  $x = 0$ , 得  $f(0) = 0$ . 若任取  $x = a \neq 0$ , 设

$$f(a) = b_1, f(2a) = b_2. \text{ 由原恒等式可得 } \begin{cases} f(4a) = b_1 + b_2, \\ f(8a) = b_1 + 2b_2, \\ f(18a) = 2b_1 + 3b_2, \\ \dots \end{cases} \text{ 将原恒}$$

等式改写为  $f(x) = f(4x) - f(2x)$ . 于是  $f\left(\frac{x}{2}\right) = f(2x) - f(x)$ . 从而

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) = b_2 - b_1, \\ f\left(\frac{a}{4}\right) = -b_2 + 2b_1, \\ f\left(\frac{9}{8}\right) = 2b_2 - 3b_1, \\ \dots \end{cases}$$

可见, 只要任给  $f$  在  $x = a$  及  $x = 2a$  两处的值,  $f$  在集

合  $\{2^n a \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  上的取值就唯一确定了下来. 因此, 只要任给了  $f(x)$  在区间  $[1, 2)$  和  $[2, 4)$  上的值,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上就完全确定了. 同样, 再

给定  $f$  在  $[-4, -2]$  和  $(-2, -1]$  上的值,  $f$  在  $(-\infty, 0)$  上也唯一确定了. 记  $t_n = f(2^n x)$ . 于是, 由函数方程  $f(4x) = f(2x) + f(x)$ , 知  $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ . 对应的特征方程为  $x^2 = x + 1$ . 其根  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . 故  $t_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$ . 由于

$$t_0 = f(x), \quad t_1 = f(2x), \quad \text{有} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = f(x), \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 = f(2x). \end{cases} \quad \text{所以}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( f(2x) - \frac{1-\sqrt{5}}{2} f(x) \right), \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( f(2x) - \frac{1+\sqrt{5}}{2} f(x) \right). \end{cases} \quad \text{因此, 函数方程的解可表达如下:}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{当 } 1 \leq x < 4 \text{ 或 } -4 < x \leq 1, \quad g(x) \text{ 任意给定;} \\ \alpha_1 \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, & \text{当 } 2^n \leq x < 2^{n+1} \text{ 或者} \\ & -2^{n+1} < x \leq -2^n, \quad n = -1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots; \end{cases}$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( g\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - \frac{1-\sqrt{5}}{2} g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right), \\ \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -g\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right). \end{cases}$$

29. 令  $y = z - x$  代入所给条件(3)中, 得  $f(x, z) = \frac{z}{z-x} f(x, z-x) \cdots$

①. 利用条件(2)和①式, 有  $f(14, 52) = \frac{52}{38} f(14, 38) = \frac{52}{24} f(14, 24) = \frac{52}{10} f(14, 10) = \frac{52}{10} f(10, 14) = \frac{52 \times 14}{10 \times 4} f(10, 4) = \frac{52 \times 14}{10 \times 4} f(4, 10) = \frac{52 \times 14}{4 \times 6} f(4, 6) = \frac{52 \times 14}{4 \times 2} f(4, 2) = \frac{52 \times 14}{4 \times 2} f(2, 4) = \frac{52 \times 14}{4} f(2, 2)$ , 因为由条件(1)知,  $f(2, 2) = 2$ , 所以  $f(14, 52) = 364$ .

30. 构造正数列  $\{a_n\}$  如下:  $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{6}{1+a_n} \cdots$  ①. 用数学归纳法容易证明(证明留给读者):  $\{a_{2n-1}\}$  递减,  $\{a_{2n}\}$  递增, 并且  $a_{2n-1} > 2 > a_{2n}$ . 因此  $\{a_{2n-1}\}$  和  $\{a_{2n}\}$  均有极限, 分别设为  $\alpha, \beta$ . 由①式知  $\alpha = \frac{6}{1+\beta}, \beta = \frac{6}{1+\alpha}$ . 解得  $\alpha = \beta = 2$ . 对每个正实数  $x$ , 显然有  $f(x) < 6x = a_1 x$ . 若对每个  $x \in \mathbf{R}^+$ , 有  $f(x) < a_{n-1} x$ , 那么  $6x - f(x) = f(f(x)) < a_{n-1} f(x)$ . 即  $f(x) > \frac{6x}{1+a_{n-1}} =$

$a_n x$ . 同样, 若对每个  $x \in \mathbf{R}^+$ , 有  $f(x) > a_n x$ , 则必有  $f(x) < a_{n+1} x$ . 于是  
 不难得到对每个  $n \in \mathbf{N}_+$ , 有  $a_{2n} x < f(x) < a_{2n-1} x$ . 令  $n \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} =$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n-1} = 2$ . 所以  $f(x) = 2x$ . 容易验证  $f(x) = 2x$  满足题设条件.

31. 我们依次来定  $f(x, y)$  的值. (1) 对任意  $n \in \mathbf{N}_+$ , 均有  $f(1, n) = f(n, 1) = n$ . 上式只需在条件中令  $x = 1$ , 利用数学归纳法易证. (2)  $f(2, 2n) = 2n$ ;  $f(2, 2n + 1) = 2(2n + 1)$ . 事实上, 由条件,  $\frac{f(x, x+y)}{x+y} = \frac{f(x, y)}{y}$ , 故  $\frac{f(2, 2n)}{2n} = \frac{f(2, 2n-2)}{2(n-1)} = \dots = \frac{f(2, 2)}{2} = 1$ , 所以  $f(2, 2n) = 2n$ . 又  $\frac{f(2, 2n+1)}{2n+1} = \frac{f(2, 2n-1)}{2n-1} = \dots = \frac{f(2, 1)}{1} = 2$ , 所以  $f(2, 2n+1) = 2(2n+1)$ . 一般地, 设  $f(n, y)$  的值都已确定, 这里  $n \geq 2, 1 \leq y \leq n-1$ , 下面来确定  $f(n, m)$ ,  $m > n$  的值. 考虑带余除法  $m = qn + r, 0 \leq r \leq n-1$ . 若  $r = 0$ , 则有  $\frac{f(n, nq)}{nq} = \frac{f(n, n(q-1))}{n(q-1)} = \dots = \frac{f(n, n)}{n} = 1$ , 所以  $f(n, nq) = nq$ . 若  $1 \leq r \leq n-1$ , 则有  $\frac{f(n, nq+r)}{nq+r} = \frac{f(n, n(q-1)+r)}{n(q-1)+r} = \dots = \frac{f(n, r)}{r}$ , 故  $f(n, m) = \frac{m}{r} f(n, r)$ . 综上所述, 满足条件的  $f(x, y)$  可由上述递推式加以确定. 故它存在且唯一.



## 图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 函数与函数方程/熊斌, 朱臻, 苏勇编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2011. 12  
 ISBN 978-7-5617-9170-7

I. ①数… II. ①熊…②朱…③苏… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 261992 号

## 数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷 函数与函数方程(第二版)

编 著 熊 斌 朱 臻 苏 勇  
 总 策 划 倪 明  
 项目编辑 孔令志  
 审读编辑 朱洪敏  
 装帧设计 高 山  
 责任发行 郑海兰

出版发行 华东师范大学出版社  
 社 址 上海市中山北路3663号 邮编200062  
 网 址 www.ecnupress.com.cn  
 电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105  
 客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887  
 地 址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口  
 网 店 http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者 昆山市亭林彩印厂有限公司  
 开 本 787 × 1092 16开  
 插 页 1  
 印 张 10.5  
 字 数 190千字  
 版 次 2012年7月第二版  
 印 次 2013年3月第二次  
 印 数 13 001-21 000  
 书 号 ISBN 978-7-5617-9170-7/G · 5474  
 定 价 21.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

厦门郑剑雄数学

全国小学奥数群221739457, 中考数学群579251397, 初中奥数学生群253736211, 初中奥数教练群112464128, 高考数学群536036395, 高中奥数学生群591782992, 高中奥数教练群195949359, 大学数学群702457289, 初中物竞教练群271751304, 高中物竞教练群271751860, 初中化竞教练群296982275, 高中化竞教练群271751511, 生竞教练群254139830, 信息竞赛教练群281798334  
公众号: 新浪微博@郑剑雄 (不是微信, 用微博搜索) 微信: v136257437 QQ: 136257437 抖音: zjx187

初升高自招群271737073 高考全科资料群271752763 全国少年班资料群700120188 大学自招群336746900 中考物理群227284641 初中物竞群271751304 高考物理群213480679 高中物竞学生群271733226 高中物竞教练群271751860 大学物理群718011655 中考化学群462100609 初中化竞群296982275 高考化学群5139062 高中化竞学生群: 168730781 高中化竞教练群271751511 大学化学群691761499 中考生物群260595347 初高中生物竞赛群254139830 高考生物群628540619 大学生物群734414430 信息竞赛群281798334 英语口语群168570356 心算交流群131033273 初地理群208573393 高地理群271753054 初历史群271752907 高历史群271753829 初政治群57085681 高政治群261712470