数学奥林匹克小丛书 第二版

高中卷 3

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

三角函数

曹瑞彬　周益忠　编著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 三角函数的图象与性质

1. 三角函数性质

奇偶性：正弦函数 $y=\sin x$ 和正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 在其定义域上为奇函数，余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域上为偶函数. 一般判断三角函数的奇偶性时，有的需要先将三角函数解析式恒等变形化简，有的需要将 $f(-x)$ 进行变形.

单调性：三角函数单调性在平面几何、立体几何、解析几何、复数等分支中均有广泛地应用. 解决三角函数的单调性问题时，一般先将三角函数转化为基本三角函数，然后利用基本三角函数的单调性来解决. 基本三角函数的单调性如下：

$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上为增函数，在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上为减函数($k\in\mathbf{Z}$).

$y=\cos x$ 在 $[-\pi+2k\pi,\ 2k\pi]$ 上为增函数，在 $[2k\pi,\ \pi+2k\pi]$ 上为减函数 ($k\in\mathbf{Z}$).

$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 上为增函数 ($k\in\mathbf{Z}$). $y=\cot x$ 在 $(k\pi,\ \pi+k\pi)$ 上为减函数 ($k\in\mathbf{Z}$).

周期性：周期函数的本质是，存在非零常数 T，使定义域中的任意 x 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立. 下面列举与周期函数相关的几个结论：

(1) 周期函数的定义域是无界的.

(2) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的周期函数 $f(x)$，若 T 是周期，则 $nT(n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0)$ 仍是函数的周期.

(3) 设 $f(x)$ 是非常数的周期函数，且定义域为 D，若 $f(x)$ 在 D 上，则 $f(x)$ 有最小正周期.

(4) 若函数 $f(x)$ 有最小正周期 T，那么除 $nT(n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0)$ 外，函数无其他周期.

(5) 函数 $y=f(x)$ 是数集 M 上的周期函数，则：

① $af(x)+b$（a，b 是常数）是 M 上的周期函数；

② $|f(x)|$ 是 M 上的周期函数；

③ $\dfrac{1}{f(x)}$ 是 $\{x \mid f(x)\neq 0,\ x\in M\}$ 上的周期函数；

④ $f(ax+b)$ 是 $\{x \mid ax+b,\ x\in M\}$ 上的周期函数.

(6) 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 M，$u=g(x)$ 是 M 上的周期函数，如果当 $x\in M_1$ 时，$g(x)\in M$，那么 $f(g(x))$ 是 M_1 上的周期函数.

(7) 设函数 $y=f(x)$，如果对任意实数 x，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)(a\neq b)$，则 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=2(b-a)$.

(8) 设函数 $y=f(x)$，如果它的图形关于两点 (a_1,b) 和 $(a_2,b)(a_1\neq a_2)$ 对称，那么 $f(x)$ 是周期函数，其周期 $T=2(a_1-a_2)$.

(9) 设函数 $y=f(x)$，如果对任意实数 x，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=-f(b-x)$，$(a\neq b)$，则 $f(x)$ 是周期函数，其周期为 $T=4(b-a)$.

(10) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$；$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ $(\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$，$y=A\cot(\omega x+\varphi)$ $(\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

对于复杂的三角函数，一般须先将其转化为基本三角函数，然后可以得到它的周期性. 这里要求在变形过程中必须是等价的，特别要注意的是定义域的变化.

2. 三角函数的图象变换

(1) 平移变换

① 左右平移：$y=\sin x\to y=\sin(x+\varphi)$

$\varphi>0$ 向左平移 φ 个单位，$\varphi<0$ 向右平移 $|\varphi|$ 个单位.

② 上下平移：$y=\sin x\to y=\sin x+k$

$k>0$ 向上平移 k 个单位，$k<0$ 向下平移 $|k|$ 个单位.

(2) 周期变换：$y=\sin x\to y=\sin\omega x$

① 当 $\omega>1$ 时，纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍；

② 当 $0<\omega<1$ 时，纵坐标不变，横坐标伸长为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍.

(3) 振幅变换：$y=\sin x\to y=A\sin x$

① 当 $A>1$ 时，横坐标不变，纵坐标伸长为原来的 A 倍；

② 当 $0<A<1$ 时，横坐标不变，纵坐标缩短为原来的 A 倍.

例 1 求函数 $y=\sqrt{-\tan x-1}+\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{1-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin x}$ 的定义域.

解 要使原函数有意义,当且仅当

$$\begin{cases}-\tan x-1\geqslant 0, & ①\\ 16-x^2\geqslant 0, & ②\\ 1-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin x\neq 0, & ③\\ \sin x>0. & ④\end{cases}$$

由①式,得 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant k\pi+\dfrac{3}{4}\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

由②式,得 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

由③式,得 $x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 且 $x\neq 2k\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

由④式,得 $2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

取交集有 $x\in\left[-4,\ -\dfrac{5}{4}\pi\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi\right)\cup\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right]$,即为原函数定义域.

评注 求函数的定义域通常是解不等式组,利用“数形结合”的数学思想,借助于数轴画线求交集的方法进行.在求解三角函数,特别是综合性较强的三角函数的定义域时,我们同样可以利用“数形结合”的数学思想,在单位圆中画三角函数线,求表示各三角不等式解集的扇形区域的交集来完成.

例 2 (2007 上海交大自主招生)设函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$,

(1) 试讨论函数的性质(有界性,奇偶性,单调性,周期性),求出其极值,并作出其在$[0,\ 2\pi]$上的图象;

(2) 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域.

解 (1) $f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$,所以这是一个偶函数.

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x),$$

所以这是一个周期为$\dfrac{\pi}{2}$的周期函数.

$$2=2(\sin^2x+\cos^2x)\geqslant f^2(x)\geqslant \sin^2x+\cos^2x=1,$$

所以 $1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$,所以 $f(x)$有上下界.

由于 $f(x)$ 是一个周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数，所以我们只需要考查它在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性即可.

此时 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，那么 $f(x)$ 在 $\left(k\frac{\pi}{2},\ k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 上递增，在 $\left(k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ 上递减.

图象如右：

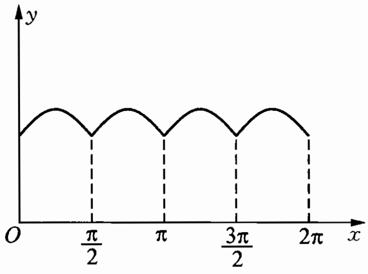


图 1－1

(2) $y^4\geqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow y\geqslant 1$，

$(\sin x+\cos x)^2\leqslant 2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$，

$\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，

$(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2\leqslant 2(\sin x+\cos x)=2\sqrt{2}$，$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}$.

这时我们有 $y\in[1,\ 2^{\frac{3}{4}}]$，而假设 $\sin^2 x=a$，那么 $y=a^{\frac{1}{4}}+(1-a)^{\frac{1}{4}}$ 在 $a\in[0,\ 1]$ 上是连续的，因此 y 可以取到 1 到 $2^{\frac{3}{4}}$ 之间的任何一个值，所以所求值域为 $[1,\ 2^{\frac{3}{4}}]$.

评注　这两道题都是考查的三角函数的基本性质，第二题里面反复运用了均值不等式，不过难度都不高，这种题往往需要学生细心谨慎，不要算错或者写错了，关于第一问如何看出 $\frac{\pi}{2}$ 是周期，实际上最后可以用图象分析出来，因为画图后发现是一样的.

例 3　(2010 北大保送生考试)已知 $f(x)=ax+\sin x$ 表示的图象上有两条切线相互垂直，求 a 的值.

解　$f(x)=ax+\sin x\Rightarrow f'(x)=a+\cos x$，从而如果有两条切线垂直，那么存在这样的 x_1，x_2 使得 $(a+\cos x_1)(a+\cos x_2)=-1$，从函数图象来看，一个二次函数的两个根都在 $(-1,\ 1)$ 上，首项系数为 1，并且开口朝上，可以感觉到能取到的最小值只有在尽量的往下移动，也就是在两个根分别是 -1，1 的时候最小值可以尽可能的小，此时刚好等于 -1，因此可以感觉到这道题实际上卡得很死(指的中间的放缩)，我们具体的操作如下：

不妨设 $\cos x_1\leqslant\cos x_2$，$(a+\cos x_1)(a+\cos x_2)<0$，从而 $a\in(-\cos x_2,\ -\cos x_1)$，此时可以得到 $0<a+\cos x_2\leqslant a+1$，$a-1\leqslant a+\cos x_1<0$，那么

$$-1=(a+\cos x_1)(a+\cos x_2)\leqslant(a+1)(a-1)=a^2-1\leqslant -1.$$

所以中间不等号必须全部取等号，此时只能 $a=0$，并且在 $x_1=\pi$，$x_2=0$ 的时候两个点的切线互相垂直.

评注 本题是挺不错的一道题，考查学生对函数基本性质的理解. 实际上在得出结论之前，如果能够想象出图象是最好了，这样会对最后结果的把握很有帮助，具体的分析都比较常规，没必要细讲. 但是要注意一个陷阱，有些学生的做法会存在逻辑问题，并没有真的得出 $a=0$，可以给学生强调这一点，这种题每一步的逻辑要对.

例 4 设函数 $f(x)=\sin^2 x+(2a-1)\sin x+a^2+\dfrac{1}{4}$，已知 $x\in\left[\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$，求 $f(x)$ 的最值.

解 设 $\sin x=t$，则 $t\in\left[-1,\ \dfrac{1}{2}\right]$.

$f(x)=g(t)=t^2+(2a-1)t+a^2+\dfrac{1}{4}$，对称轴为 $t=\dfrac{1-2a}{2}$.

当 $\dfrac{1-2a}{2}\leqslant -1$ 即 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$\left[-1,\ \dfrac{1}{2}\right]$ 为 $g(t)$ 的单调增区间，所以

$$f_{\min}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4},\ f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a.$$

当 $-1<\dfrac{1-2a}{2}\leqslant-\dfrac{1}{4}$ 即 $\dfrac{3}{4}\leqslant a<\dfrac{3}{2}$ 时，$g(-1)\leqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,\ f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a.$$

当 $-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1-2a}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 即 $0\leqslant a<\dfrac{3}{4}$ 时，$g(-1)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,\ f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}.$$

当 $\dfrac{1-2a}{2}>\dfrac{1}{2}$ 即 $a<0$ 时，$\left[-1,\ \dfrac{1}{2}\right]$ 为 $g(t)$ 的单调减区间，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a,\ f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}.$$

评注 求形如 $f(x)=A\sin^2 x+B\sin x+C$ 形式的最值，通常用换元法，化成二次函数在区间的最值问题.

例 5 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域、值域、最小正周期；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解 (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}}=\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$

$$=\begin{cases}\tan x,\ x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\tan x,\ x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}k\in\mathbf{Z},$$

定义域：$\left\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为：$\mathbf{R}$，最小正周期为 $T=2\pi$.

(2) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{|\cos(-x)|}=-\dfrac{\sin x}{|\cos x|}=-f(x)$，且定义域关于原点对称，所以 $f(x)$ 为奇函数.

评注 判断函数周期性时，一要恒等变形，二要注意定义域的影响.

例 6 已知函数 $f(x)=\dfrac{a-2\cos x}{3\sin x}$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数，求 a 的取值范围.

分析 根据增函数的定义，列出不等式，求 a 的取值范围.

解法一 由条件得：当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a-2\cos x_1}{3\sin x_1}-\frac{a-2\cos x_2}{3\sin x_2}<0,$$

因为 $\sin x_2>\sin x_1>0$，所以去分母得

$$a\sin x_2-2\cos x_1\sin x_2-a\sin x_1+2\cos x_2\sin x_1<0,$$

整理得 $$a(\sin x_2-\sin x_1)-2\sin(x_2-x_1)<0,$$

故 $$a<\frac{2\sin(x_2-x_1)}{\sin x_2-\sin x_1}=\frac{4\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}\cos\dfrac{x_2-x_1}{2}}{2\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}}=\frac{2\cos\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}}.$$

由于 $$\cos\frac{x_2-x_1}{2}=\cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}+\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2}$$

$$>\cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}-\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2}$$

$$=\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0,$$

所以 $\dfrac{\cos\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}}>1$，从而 $a\leqslant 2$，即 a 的取值范围为$(-\infty,\ 2]$.

解法二　记 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，且 $t\in(0,\ 1)$，

所以
$$g(t)=f(x)=\frac{a-2\times\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{3\times\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{(a-2)+(a+2)t^2}{6t}$$
$$=\frac{a-2}{6t}+\frac{a+2}{6}\cdot t.$$

设 $0<t_1<t_2<1$，则
$$g(t_1)-g(t_2)=\left(\frac{a-2}{6t_1}+\frac{a+2}{6}t_1\right)-\left(\frac{a-2}{6t_2}+\frac{a+2}{6}t_2\right)<0,$$

去分母得
$$(a-2)t_2+(a+2)t_1^2t_2-(a-2)t_1-(a+2)t_1t_2^2<0,$$

整理得
$$(t_2-t_1)(a-at_1t_2-2-2t_1t_2)<0.$$

而 $0<t_1<t_2<1$，所以 $a<\dfrac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1t_2}$.

显然 $\dfrac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2}>1$，故 $a\leqslant 2$，即 a 的取值范围为$(-\infty,\ 2]$.

评注　对于含参数不等式的问题，如 $a<f(t)$ 恒成立，则应取 $f(t)$的最小值后得 a 的取值范围；如 $a>f(t)$，则取 $f(t)$的最大值后得 a 的取值范围，如 $f(t)$无最值，则取它的变化趋势的最值.

例 7　设函数 $f(x)$，$g(x)$对任意实数 x 均有 $-\dfrac{\pi}{2}<f(x)+g(x)<\dfrac{\pi}{2}$，并且 $-\dfrac{\pi}{2}<f(x)-g(x)<\dfrac{\pi}{2}$. 求证：对任意实数 x 均有 $\cos f(x)>\sin f(x)$，并由此证明：对任意实数 x 均有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

证明　由条件可得 $-\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<g(x)<\dfrac{\pi}{2}$.

若 $0\leqslant f(x)<\dfrac{\pi}{2}$，得到 $-\dfrac{\pi}{2}<g(x)<\dfrac{\pi}{2}-f(x)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上为单调增函数，故 $\sin g(x)<\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-f(x)\right]=\cos f(x)$.

若 $-\frac{\pi}{2}<f(x)<0$，则由条件 $-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}+f(x)<\frac{\pi}{2}$，同样由 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调增函数，故 $\sin g(x)<\sin\left[\frac{\pi}{2}+f(x)\right]=\cos f(x)$.

评注 对任意实数 x，均有 $|\cos x\pm\sin x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，根据已证的不等式，就有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

利用正、余弦函数的单调性，结合正、余弦函数的有界性以及上述结论，我们还有如下的一些结论：$\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$，$\sin(\sin(\sin x))<\sin(\cos(\cos x))<\cos(\cos(\cos x))$ 等.

例 8 已知函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域；

(2) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 中，求 $f(x)$ 的单调区间；

(3) 判定方程 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上解的个数.

解 (1) 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

又函数 $y=\tan x$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ 处无定义，且

$$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]\subsetneqq(-\pi,\ \pi),$$

所以令 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=\pm\frac{\pi}{2}$，则 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，解之得：$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的定义域是 $A=\left\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且}\ x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

因为 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内的值域为 $(-\infty,\ +\infty)$，而当 $x\in A$ 时，函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$ 的值域 B 满足 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq B$，所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,\ +\infty)$.

(2) 由 $f(x)$ 的定义域知，$f(x)$ 在 $[0,\ \pi]$ 中的 $x=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 处无定义.

设 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$，则当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$ 时，$t\in$

$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$，且以 t 为自变量的函数 $y=\tan t$ 在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$上分别单调递增.

又因为当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$时，函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增，且 $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增，且 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$时，函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减，且 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$；

当 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$时，函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减，且 $t\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{13}}\sin x\right)$ 在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$上分别是单调递增函数；在$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$上是单调递减函数.

又 $f(x)$是奇函数，所以区间$\left(-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$，$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right)$也是 $f(x)$的单调递增区间，$\left[-\pi,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2}\right]$是 $f(x)$的单调递减区间.

故在区间$(-\pi,\ \pi)$中，$f(x)$的单调递增区间为：$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$，单调递减区间为：$\left[-\pi,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(-\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$.

(3) 由 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$，得 $\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)=\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=k\pi+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ (k\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow\sin x=k\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\ (k\in\mathbf{Z}).\quad ①$$

又因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，$\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$，所以 $k=0$ 或 $k=-1$.

当 $k=0$ 时，从①得方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

当 $k=1$ 时，从①得方程 $\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

显然方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$，在 $(-\pi,\pi)$ 上各有两个解，故 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上共有 4 个解.

评注 本题是正弦函数与正切函数的复合.(1)求 $f(x)$ 的定义域和值域，应当先搞清楚 $y=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 的值域与 $y=\tan x$ 的定义域的交集;(2)求 $f(x)$ 的单调区间，必须先搞清 $f(x)$ 的基本性质，如奇偶性、周期性、复合函数单调性等.

例 9 求函数 $y=\cos x(1+\cos x)\tan\frac{x}{2}$ 的周期.

分析 利用半角的正切公式变形可将函数解析式化为 $y=\cos x(1+\cos x)\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\sin 2x$，虽然最后所得函数形式的周期为 π，但由于在运用公式变形过程中 x 的范围有了变化，原函数中要求 $x\neq 2k\pi$，即根据等价变形的要求，最后原函数等价于函数 $y=\frac{1}{2}\sin 2x\ (x\neq 2k\pi)$，故原函数的周期为 2π.

评注 由于有些三角公式本身只是一般的恒等式，而两边的范围并非是等价的，因此运用这些公式需要附加一定的条件，或者说可能会出现运用公式的前后范围不相同.

例 10 证明函数 $g(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数.

分析 当结论出现否定的形式时，宜采用反证法.

证明 假设 $g(x)$ 是周期函数，非零常数 T 是它的一个周期，则 $\cos\sqrt[3]{x+T}=\cos\sqrt[3]{x}$ 对一切实数 x 都成立.取 $x=0$，得 $\cos\sqrt[3]{T}=1$，从而 $\sqrt[3]{T}=2k\pi\ (k\neq 0,\ k\in\mathbf{Z})$.

取 $x=T$，得 $\cos\sqrt[3]{2T}=\cos\sqrt[3]{T}=1$，有 $\sqrt[3]{2T}=2e\pi\ (e\neq 0,\ e\in\mathbf{Z})$. 于是 $\frac{\sqrt[3]{2T}}{\sqrt[3]{T}}=\frac{2e\pi}{2k\pi}=\frac{e}{k}$，即 $\sqrt[3]{2}=\frac{e}{k}$，从而 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数，这与 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数相矛盾，故函数 $g(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数.

评注 当结论是肯定或否定形式，含有“至多”、“至少”等字样时，可利用反证法证明问题. 又如:求证函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

易知 $\frac{\pi}{2}$ 是它的周期，再证 $\frac{\pi}{2}$ 是它的最小正周期. 假设 $0<T<\frac{\pi}{2}$ 是 $y=$

$|\sin x|+|\cos x|$的周期，则$|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|$对任意$x$都成立，于是取$x=0$，得$|\sin T|+|\cos T|=|\sin 0|+|\cos 0|=1$，但$|\sin T|+|\cos T|=\sin T+\cos T=\sqrt{2}\sin\left(T+\frac{\pi}{4}\right)>1$，故矛盾，所以$T$不存在，原命题正确.

例 11 若方程$\sin^2 x+\cos x+a=0$有解，求实数a的取值范围.

分析 将原方程化归为一元二次方程后，根据根的分布特征求a的取值范围；也可将原方程化归为二次函数后，根据值域求a的取值范围.

解法一 原方程可变形为$\cos^2 x-\cos x-1-a=0$，当$\Delta=(-1)^2-4(-1-a)=5+4a\geqslant 0$，即$a\geqslant -\frac{5}{4}$时，$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{5+4a}}{2}$. 但$|\cos x|\leqslant 1$，所以$-1\leqslant\frac{1+\sqrt{5+4a}}{2}\leqslant 1$或$-1\leqslant\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}\leqslant 1$，解这两个不等式，得$-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1$.

解法二 设$t=\cos x$，则$f(t)=t^2-t-a-1$，且$t\in[-1,1]$，因原方程有解，所以$f(t)$的图象与横轴t在$[-1,1]$上有交点，有下列三种情形：

如图(1)(2)，满足$f(1)f(-1)\leqslant 0$；

如图(3)，满足$\begin{cases}f(1)\geqslant 0,\\ f(-1)\geqslant 0,\\ \Delta\geqslant 0,\\ -1<\frac{1}{2}<1,\end{cases}$

即$(1-a)(-1-a)\leqslant 0$，或$\begin{cases}1-a\geqslant 0,\\ -1-a\geqslant 0,\\ 5+4a\geqslant 0.\end{cases}$解之得$-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1$，所以$a$的取值范围为$\left[-\frac{5}{4},1\right]$.

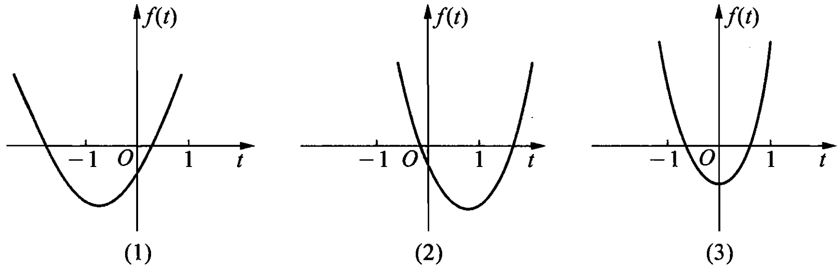


图 1-2

解法三 原方程可变形为 $a=\cos^2 x-\cos x-1=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，因为 $|\cos x|\leqslant 1$，所以 $a_{\max}=1$，$a_{\min}=-\frac{5}{4}$，故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{5}{4},1\right]$.

评注 有关 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的三角方程有解的问题，转化为二次函数的方法最为简洁. 另外，在本题中因二次函数的对称轴为 $t=\frac{1}{2}$，所以图(1)实际上是不可能的，可不考虑.

例 12 求函数 $y=(a+\cos x)(a+\sin x)$ 的值域.

分析 对于含参数的函数，应对 a 进行分类讨论.

解 $y=a^2+a(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x.$

设 $\sin x+\cos x=t$，则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，所以

$$y=a^2+at+\frac{1}{2}(t^2-1)=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2}.$$

(1) 当 $a\geqslant\sqrt{2}$ 时，当 $t=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=a^2+\sqrt{2}a+\frac{1}{2}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$；

当 $t=-\sqrt{2}$ 时，$y_{\min}=a^2-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为 $\left[\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(2) 当 $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时，当 $t=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$；

当 $t=-a$ 时，$y_{\min}=\frac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\frac{a^2-1}{2},\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(3) 当 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时，当 $t=-\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$；

当 $t=-a$ 时，$y_{\min}=\frac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\frac{a^2-1}{2},\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(4) 当 $a<-\sqrt{2}$ 时，当 $t=-\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$；

当 $t=\sqrt{2}$ 时，$y_{\min}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为$\left[\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

评注　有关含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的二次函数值域问题，必须注意隐含条件 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$.

例 13　设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意实数 α、β 有

$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

(1) 求证：$f(-x)=f(x)=-f(\pi-x)$；

(2) 若 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，求证：$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减；

(3) 求 $f(x)$的最小周期并加以证明.

分析　正确理解所给等式，通过赋值法、定义法解答本题.

解　(1) 因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)f(0)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $f(0)=1$.

又 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$，故 $f(x)=f(-x)$.

又由于 $f(x)+f(\pi-x)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故有

$$f(x)=f(-x)=-f(\pi-x).$$

(2) 由 $f(-x)=f(x)$ 且 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，得当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$.

设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(\pi-x_2)=2f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)$.

因为 $0\leqslant\frac{x_1-x_2+\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2-\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)>0$，$f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)>0$. 从而 $f(x_1)>f(x_2)$，即$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减.

(3) 由 (1)$f(-x)=-f(\pi-x)$，得 $f(x)=-f(\pi+x)$，$f(\pi+x)=-f(2\pi+x)$.

所以 $f(2\pi+x)=f(x)$，说明 2π 是原函数的一个周期.

假设 T_0 也是原函数的一个周期，且 $T_0 \in (0,\ 2\pi)$，则由 $f(T_0+x)=f(x)$，得 $f(0)=f(T_0)$.

但若 $T_0 \in (0,\ \pi]$ 时，因原函数是单调递减函数，所以 $f(0)>f(T_0)$，两者矛盾；

若 $T_0 \in (\pi,\ 2\pi)$ 时，$2\pi - T_0 \in (0,\ \pi)$，从而 $f(0)>f(2\pi-T_0)=f(-T_0)=f(T_0)$，两者矛盾，所以 T_0 不是原函数的一个周期，即 2π 是原函数的最小正周期.

评注 有关周期函数有下面几个结论：(1) 若 $f(x)$ 的图象有两条对称轴 $x=a$ 和 $x=b$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2|b-a|$ 是它的一个周期；

(2) 若 $f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a,\ 0)$ 和 $(b,\ 0)$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2|b-a|$ 是它的一个周期；

(3) 若 $f(x)$ 的图象有一个对称中心 $(a,\ 0)$ 和一条对称轴 $x=b$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4|b-a|$ 是它的一个周期.

上述结论中，不妨证明结论(1)：

因为
$$f(2a-x)=f(x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x),$$
$$f(2b-x)=f(x)\Leftrightarrow f(b+x)=f(b-x),$$
则
$$f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x).$$

即 $f[x+2(b-a)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 $2|b-a|$ 为周期的周期函数.

读者不妨对结论(2)和(3)加以证明.

例 14 设函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{11}{6}\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 对于任意的正数 α，是否总能找到不小于 α，且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a 和 b，使 $f(a)=1$ 而 $f(b)=-1$？请回答并论证；

(3) 若 α 限定为任意自然数，请重新回答和论证上述问题.

分析 本题的第(2)、(3)题实际上说的是能否找到一个长度为 1 的区间，使在此区间上，$f(x)$ 既取得最大值，又能取得最小值.

解 (1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{11}{6}\pi}=\dfrac{12}{11}$.

(2) 由于 $T>1$，因此在长为 1 的区间上，$f(x)$ 不能得出一段完整周期的图形.

现任取一使 $f(x)$ 取最大值 1 的 x 值为 a，如取 $a=\dfrac{1}{11}$，则 $f\left(\dfrac{1}{11}\right)=$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1$，令 $\alpha=a-\frac{5.5}{11}=-\frac{9}{22}$，则 $\alpha+1=-\frac{9}{22}+1=\frac{13}{22}$，则对于 $\alpha=-\frac{9}{22}$，就不能在区间 $\left(-\frac{9}{22},\frac{13}{22}\right)$ 上找到 b，使 $f(b)=-1$.

(3) 使 $f(x)$ 取最大值 1 的 x 集合为 $\left\{x \middle| x=\frac{12}{11}k+\frac{1}{11},k\in\mathbf{Z}\right\}$（只须令 $\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即可解出这些值）.

使 $f(x)$ 取最小值 -1 的 x 集合为 $\left\{x \middle| x=\frac{12}{11}k+\frac{7}{11},k\in\mathbf{Z}\right\}$，由于

$$\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{6}{11},$$

$$\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{12}{11},$$

故若 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n\ (n\in\mathbf{Z})$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），则 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$ 或 $n+1$，且 $\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]=n+1$ 或 $n+2$，而 $k=0$ 时，$\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=0$，这说明对于任一自然数 n，必存在 k，使 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$ 或 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$.

若对某一自然数 n，有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$，令 $\alpha=\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)-n$，则当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{11}$ 时，$\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\in(n,n+1]$. 当 $\frac{6}{11}\leqslant\alpha\leqslant\frac{10}{11}$ 时，$\frac{12}{11}(k-1)+\frac{7}{11}\in[n,n+1)$，总之，在 $[n,n+1]$ 中，存在二数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

若对某一自然数 n，有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$，且 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n-1$，则令 $\alpha'=\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-n$，显然 $\alpha'<\frac{6}{11}$，即 $0\leqslant\alpha'\leqslant\frac{5}{11}$，此时 $\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]\in(n,n+1]$，即在 $[n,n+1]$ 中仍可找到二数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

综上所述，对于任意自然数 n，总能找到不小于 n 且不大于 $(n+1)$ 的两个数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

评注 对于存在性问题的探索，通常以举出反例来说明其不存在，而必须通过严密论证来说明其存在.

例 15 （2009 年北大自主招生）是否存在实数 x，使 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+$

$\sqrt{3}$是有理数?

分析 假设不存在实数 x,使 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 是有理数.

证明 若 $\tan x+\sqrt{3}$ 是有理数,则存在 $p,q\in\mathbf{Z}$ 且 $(p,q)=1$,使得 $\tan x+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$,故 $\tan x=\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}$,同理存在既约分数 s,t,使得 $\cot x=\dfrac{s}{t}-\sqrt{3}$,所以 $\left(\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{s}{t}-\sqrt{3}\right)=1$,即$\sqrt{3}(pt+qs)=2qt+ps$.

有理数分析知 $pt+qs=0$ 且 $2qt+ps=0$,把前两式移项相乘得 $p^2=2q^2$.

奇偶性分析知 p,q 都为偶数,这与 $(p,q)=1$ 矛盾.

评注 (1)反证法是解决这类问题的常用方法;(2)用有理数、奇偶性分析来找整数问题的矛盾.

例 16 (1996 年全国高中数学联赛)求实数 a 的取值范围,使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

解 令 $\sin\theta+\cos\theta=u$,则 $2\sin\theta\cos\theta=u^2-1$,当 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$u\in[1,\sqrt{2}]$.

并记 $f(x)=(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2$.

所以 $f(x)=(x+2+u^2)^2+(x+au)^2=2x^2+2(u^2+au+2)x+(u^2+2)^2+(au)^2=2\left[x+\dfrac{1}{2}(u^2+au+2)\right]^2+\dfrac{1}{2}(u^2-au+2)^2$.

所以 $x=-\dfrac{1}{2}(u^2+au+2)$ 时,$f(x)$取得最小值 $\dfrac{1}{2}(u^2-au+2)^2$. 所以 $u^2-au+2\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $u^2-au+2\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

所以 $a\leqslant u+\dfrac{3}{2u}$ 或$a\geqslant u+\dfrac{5}{2u}$. 当 $u\in[1,\sqrt{2}]$ 时,$u+\dfrac{3}{2u}\in\left[\sqrt{6},\dfrac{5}{2}\right]$,$u+\dfrac{5}{2u}\in\left[\dfrac{9}{4}\sqrt{2},\dfrac{7}{2}\right]$.

所以 $a\leqslant\sqrt{6}$ 或 $a\geqslant\dfrac{7}{2}$.

评注 在三角函数式中,如果同时出现 $\sin x\pm\cos x$ 及 $\sin x\cos x$ 的式子,常用换元法,通常将三角函数转变成二次函数问题来求解.

例 17 (1997 年全国高中数学联赛)设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\dfrac{\pi}{12}$,且 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$.

求乘积 $\cos x \cdot \sin y \cdot \cos z$ 的最大值及最小值.

解　由于 $x \geqslant y \geqslant z \geqslant \frac{\pi}{12}$，故

$$\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \times 2 = \frac{\pi}{3}.$$

所以 $\cos x \sin y \cos z = \cos x \times \frac{1}{2}[\sin(y+z) + \sin(y-z)] = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x \sin(y-z) \geqslant \frac{1}{2}\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$. 即为最小值（由于 $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$，$y \geqslant z$，故 $\cos x \sin(y-z) \geqslant 0$），当 $y = z = \frac{\pi}{12}$，$x = \frac{\pi}{3}$ 时，$\cos x \sin y \cos z = \frac{1}{8}$.

因为

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \cos z &= \cos z \times \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)] \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 z - \frac{1}{2}\cos z \sin(x-y), \end{aligned}$$

由于 $\sin(x-y) \geqslant 0$，$\cos z > 0$，故

$$\cos x \sin y \cos z \leqslant \frac{1}{2}\cos^2 z = \frac{1}{2}\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

当 $x = y = \frac{5\pi}{12}$，$z = \frac{\pi}{12}$ 时取得最大值.

所以最大值 $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$，最小值 $\frac{1}{8}$.

评注　本题是 1997 年全国高中数学联赛试题. 巧妙应用积化和差公式及放缩法是解本题的关键.

例 18　（1983 年全国高中数学联赛）函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论.

分析　$|\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x + Ax + B| = \left|\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + Ax + B\right|$. 故 $F(x)$ 是一个三角函数与一个一次函数之和，因为三角函数是一个周期函数，而 $Ax+B$ 是一个一次或零次函数，所以不管怎样，只要 A、B 中有一个不为 0，$F(x)$ 最大值显然增大. 故猜想 M 的最小值在 $A=B=0$ 时取得.

解 $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$. 取 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=g\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$g\left(\frac{5\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$.

取 $h(x)=Ax+B$，若 $A=0$，$B\neq0$，则当 $B>0$ 时，$F\left(\frac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$，当 $B<0$ 时，$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)<\sqrt{2}$. 从而 $M>\sqrt{2}$.

若 $A\neq0$，则当 $h\left(\frac{5\pi}{8}\right)<0$ 时，$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$，当 $h\left(\frac{5\pi}{8}\right)\geqslant0$ 时，由于 $h(x)$ 是一次函数，当 $A>0$ 时，$h(x)$ 递增，$h\left(\frac{9\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$，此时 $F\left(\frac{9\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$；当 $A<0$ 时，$h(x)$ 递减，$h\left(\frac{\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$，此时 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$. 故此时 $M>\sqrt{2}$.

若 $A=B=0$，显然有 $M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$，这个最小值在 $A=B=0$ 时取得.

例 19 （18 届俄罗斯中学生数学竞赛）已知 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$，$\theta_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，求 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$ 的最大值.

解 因为

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\\&=(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2-2\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\&=4\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2)\\&=2\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1\right)+1+\cos(\theta_1+\theta_2),\end{aligned}$$

当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1<0$；

当 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1=0$；

当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1>0$.

由此可得出，当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，θ_1 与 θ_2 有一个为零时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值；当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$，且 $|\theta_1-\theta_2|$ 越小时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 值越大.

当 $n=3$ 时，即 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ 时，容易证明

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3\leqslant\frac{9}{4}.$$

而当 $n \geqslant 4$ 时，可知 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 中必有两个角不超过 $\frac{\pi}{2}$.

由前面结论知，$\theta_1+\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，当 θ_1 与 θ_2 有一个为零时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值. 于是所求的最大值可转化成三个角的和为 π，其正弦值的平方的最大值问题.

另一方面 $n=2$ 时，$\theta_1+\theta_2=\pi$，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2 \leqslant 2$.

综上所述，当 $n=2$ 时，$(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)_{\max}=2$.

当 $n \geqslant 3$ 时，$(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\cdots+\sin^2\theta_n)_{\max}=\frac{9}{4}$，且当 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{\pi}{3}$，$\theta_4=\theta_5=\cdots=\theta_n=0$ 时，取等号.

例 20 （2003 年日本数学竞赛）求所有的实数 α 的值，使数列 $a_n=\cos 2^n\alpha$ $(n=1, 2, \cdots)$ 中每一项都为负数.

证明 首先，若 α 是满足条件的实数，则 $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.

事实上：若 $\cos\alpha \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$，则

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 < -\frac{7}{8}.$$

$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 > 0$，矛盾.

由上述推导可知：对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $\cos 2^n\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$，于是

$$\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{4},$$

注意到 $\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right| = \left|\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right| = 2\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right| \left|\cos\alpha-\frac{1}{2}\right|$，

有
$$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right) \leqslant \cdots$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$，故 $\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=0$.

所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，即 $\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

另一方面，当 $\alpha=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $\cos 2^n\alpha=-\frac{1}{2}$ 满足条件.

综上所述，$\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

习　题　1

一、选择题

1 函数 $y=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$ 的图象(　　).

(A) 关于 x 轴对称　　(B) 关于 y 轴对称

(C) 关于原点对称　　(D) 关于直线 $x=-\frac{3}{2}\pi$ 对称

2 与正弦曲线 $y=\sin x$ 关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称的曲线是(　　).

(A) $y=\sin x$　　(B) $y=\cos x$

(C) $y=-\sin x$　　(D) $y=-\cos x$

3 函数 $y=-3\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y=-3\cos(-2x)$ 的图象(　　).

(A) 向左平移$\frac{\pi}{3}$得到　　(B) 向右平移$\frac{\pi}{3}$得到

(C) 向左平移$\frac{\pi}{6}$得到　　(D) 向右平移$\frac{\pi}{6}$得到

4 已知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x)$的图象(　　).

(A) 与 $g(x)$的图象相同

(B) 与 $g(x)$的图象关于 x 轴对称

(C) 是由 $g(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到

(D) 是由 $g(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到

5 函数 $y=2^{-\cos x}$ 的单调递增区间是(　　).

(A) $[2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$　　(B) $[k\pi+\pi,\ k\pi+2\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left[2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　(D) $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$

6 函数 $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$ 的定义域是(　　).

(A) $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

(B) $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

(C) $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$

(D) $x\in\mathbf{R}$

7 存在 $x\in[0,2\pi)$，使 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\frac{4m-6}{4-m}$ 成立，则 m 的取值范围是(　　).

(A) $\left[-1,\frac{7}{3}\right]$　　(B) $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

(C) $[-1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$

8 $f(x)$是以 5 为周期的奇函数，$f(-1)=1$，且 $\tan\alpha=3$，则 $f(20\sin\alpha\cos\alpha)$的值是(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) 3　　(D) 8

9 函数 $f(x)=\frac{1}{\sec^2 x}+\sin x$ 在 $|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 上的最小值是(　　).

(A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　(B) $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　(C) -1　　(D) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

10 下列四个命题中，正确的是(　　).

(A) 正切函数在整个定义域内是增函数

(B) 周期函数一定有最小正周期

(C) 函数 $y=3\tan\sqrt{x^2}$ 的图象关于 y 轴对称

(D) 若 x 是第一象限的角，则 $\sin x$ 是增函数，$\cos x$ 是减函数

二、填空题

11 将正弦曲线 $y=\sin(-x)$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，所得到的函数图象的解析式是________；将余弦曲线 $y=\cos(-2x)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，所得到的函数图象的解析式是________.

12 函数 $y=\sqrt{\cos x-2\cos^2 x}$ 的定义域是________，值域是________.

13 函数 $y=\sin x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期是________.

14 已知 $f(x)=a\sin^3 x+b\sqrt[3]{x}\cdot\cos^3 x+4$ $(a,b\in\mathbf{R})$，且 $f(\sin 10^\circ)=5$，则

$f(\cos 100°)=$________.

15 函数 $f(x)=\sqrt{\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1}$ 的定义域是________.

16 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴是________.

17 函数 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象的对称中心是________.

18 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，给出四个判断：

① 它的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称；　② 它的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称；

③ 它的最小正周期是 π；　④ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 上是增函数.

以其中两个论断作为条件，另两个论断作为结论，你认为正确的两个命题是________.

19 有四个函数：①$y=\sin^2 x$；②$y=\sin|x|$；③$y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$；④$y=|\sin x|$. 其中周期为 π，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数的为________.

20 方程 $\sin x=\frac{x}{100}$ 的实根个数有________个.

三、解答题

21 作出函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$ 在一个周期上的图象，并指出它与 $y=\sin x$ 的图象间的关系.

22 已知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\left(x+\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{3}$.

(1) 化简 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，求 θ 值，使函数 $f(x)$ 为偶函数；

(3) 在(2)的条件下，求满足 $f(x)=1$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 x 集合.

23 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，试求 θ 的取值范围.

24 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，求 φ 和 ω 的值.

25 正实数 α、β、a、b 满足条件 $\alpha<\beta$，$\alpha+\beta<\pi$，$a+b<\pi$ 并且 $\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，求证：$a<b$.

26 (1) 求函数 $f(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值；

(2) 求函数 $g(\theta)=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值.

27 教室的墙壁上挂着一块黑板，它的上下边缘分别在学生的水平视线上方 a 米和 b 米，问学生距墙壁多远时看黑板的视角最大？

28 已知函数 $f(x)=\tan x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，若 x_1，$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，求证：$\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

29 试求正整数 k，使 $f(x)=\sin kx\cdot\sin^k x+\cos kx\cdot\cos^k x-\cos^k 2x$ 的值不依赖于 x.

2 三角函数恒等变换

1. 三角恒等变形是三角的灵魂，它通过变名变角变次，公式的顺用与逆用使三角函数充满技巧，凸显其灵活性. 主要题型有化简、求值、恒等式证明.

2. 三角函数化简和求值过程中的基本策略.

(1) 常值代换：特别是用“1”的代换，如 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\tan x\cdot\cot x=\tan 45^\circ$ 等.

(2) 项的分拆与角的配凑. 如分拆项：$\sin^2 x+2\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x=1+\cos^2 x$；配凑角：$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 等.

(3) 降次与升次. 即倍角公式降次与半角公式升次.

(4) 化弦(切)法. 将三角函数利用同角三角函数基本关系化成弦(切).

(5) 引入辅助角. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$，这里辅助角 φ 所在象限由 a、b 的符号确定，φ 角的值由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 确定.

(6) 万能代换法. 巧用万能公式可将三角函数化成 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的有理式.

3. 三角恒等式包括绝对恒等式和条件恒等式两类. 证明三角恒等式时，首先要观察已知与求证或所证恒等式等号两边三角式的繁简程度，以决定恒等变形的方向；其次要观察已知与求证或所证恒等式等号两边三角式的角、函数名称、次数以及结构的差别与联系，抓住其主要差异，选择恰当的公式对其进行恒等变形，从而逐步消除差异，统一形式，完成证明. “和差化积”、“积化和差”、“切割化弦”、“降次”等是我们常用的变形技巧. 当然有时也可以利用万能公式“弦化切割”，将题目转化为一个关于 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 的代数恒等式的证明问题.

4. 证明三角不等式的方法：比较法、配方法、反证法、分析法，利用函数的单调性，利用正、余弦函数的有界性，利用单位圆三角函数线及判别法等.

5. 两角和、差的三角函数的公式是所有三角公式的核心和基础. 此外，三

角是代数与几何联系的"桥梁"，与复数也有紧密的联系，因而许多三角问题往往可以从几何或复数角度获得巧妙的解法.

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

万能公式：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

由 $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ 可以推导积化和差公式：

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

由 $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ 可以推导：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

和差化积公式：

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

其他的一些公式：

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha),$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha\cos(65^\circ+\alpha),$$

$$\tan 3\alpha=\tan(60^\circ-\alpha)\tan\alpha\cdot\tan(60^\circ+\alpha),$$
$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$
$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta),$$
$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),\text{其中}\tan\theta=\frac{b}{a}.$$

例 1 (1)（2008 年清华自主招生）求 $\sin^4 10^\circ+\sin^4 50^\circ+\sin^4 70^\circ$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$；

(3)（2010 北大保送生考试）圆 $x^2+y^2=1$ 上有三点，坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，且 $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$. 求证：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

分析 第一小题和第二小题都可以采用二倍角公式进行计算.

解 (1) $\sin^4 10^\circ+\sin^4 50^\circ+\sin^4 70^\circ$

$$=\left(\frac{1-\cos 20^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos 100^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos 140^\circ}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ)+\frac{1}{4}(\cos^2 20^\circ+\cos^2 100^\circ+\cos^2 140^\circ)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(2\cos 60^\circ\cos 40^\circ-\cos 40^\circ)+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 40^\circ}{2}+\frac{1+\cos 200^\circ}{2}+\frac{1+\cos 280^\circ}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-0+\frac{1}{8}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ-\cos 20^\circ)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}(2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ)=\frac{9}{8}.$$

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$

(3) 我们假设 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 对应的三个点为 A, B, C, 原点为 O, 原题说的实际上就是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，也就是说 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$，画

图马上可以得出 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，同理可以得出 $\angle BOC=\angle COA=\frac{2\pi}{3}$.

假设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，那么有 $B\left(\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$，$C\left(\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$，

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2+x_3^2&=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha+1+\cos 2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+1+\cos 2\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(3+\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2=3$ 是显然的，所以 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

评注　前两道题都是基本的倍角公式＋和差化积变形以及基本的计算，注意在三角函数里面看到平方或者高次方降次数的方法就是倍角公式法，能将平方化为一次的，最后一道题实际上计算步骤和前两道一样，但是如何得出三角形是一个等边三角形有很多种思路可循，还有一种思路是，该三角形的重心和外心重合，都是原点，所以只能是等边三角形.

例 2　(1)（2009 年清华自主招生）若 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，求 $\left|2+2e^{\frac{2}{5}\pi i}+e^{\frac{6}{5}\pi i}\right|$；

(2)（2011 卓越联盟自主招生）已知 $\sin 2(\alpha+\gamma)=n\sin 2\beta$，则 $\frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}$ 的值是________；

(3)（2008 南大自主招生）求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)$.

解　(1) $2+2e^{\frac{2}{5}\pi i}+e^{\frac{6}{5}\pi i}=2+2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi+i\left(2\sin\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{6}{5}\pi\right)$，

$$\begin{aligned}&\left|2+2e^{\frac{2}{5}\pi i}+e^{\frac{6}{5}\pi i}\right|\\&=\left(2+2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi\right)^2+\left(2\sin\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{6}{5}\pi\right)^2\\&=4+4\left(2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi\right)+\left(2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi\right)^2+\\&\quad\left(2\sin\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{6}{5}\pi\right)^2\\&=4+4\left(2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi\right)+4+1+4\left(\cos\frac{2}{5}\pi\cos\frac{6}{5}\pi+\sin\frac{2}{5}\pi\sin\frac{6}{5}\pi\right)\end{aligned}$$

$$= 9+4\left(2\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{6}{5}\pi+\cos\left(\frac{6}{5}\pi-\frac{2}{5}\pi\right)\right)$$
$$= 9+8\left(\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi\right).$$

我们要求 $\cos\frac{2}{5}\pi$，$\cos\frac{4}{5}\pi$ 的大小，这点可以画图求，用传统的相似三角形做几何图进行求解，但是我们只用三角函数也是可以做的：

设 $2\left(2\cos^2\frac{1}{5}\pi-1\right)^2-1=2\cos^2\frac{2}{5}\pi-1=\cos\frac{4}{5}\pi=-\cos\frac{1}{5}\pi$，

可以求得

$$\left(\cos\frac{1}{5}\pi+1\right)\left(\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0,$$

很容易分析得出 $\cos\frac{1}{5}\pi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) 如果觉得看起来有点复杂，可以先分析里面的情况，我们发现 α，γ 绑在一起，所以直接假设 $\alpha+\gamma=\varphi$，从而条件转化为 $\sin 2\varphi=n\sin 2\beta$，所以 $\frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{\tan(\varphi+\beta)}{\tan(\varphi-\beta)}=\frac{\sin(\varphi+\beta)\cos(\varphi-\beta)}{\cos(\varphi+\beta)\sin(\varphi-\beta)}$ 想到利用积化和差公式，因此

$$\begin{aligned}\frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}&=\frac{\sin(\varphi+\beta)\cos(\varphi-\beta)}{\cos(\varphi+\beta)\sin(\varphi-\beta)}\\&=\frac{\sin((\varphi+\beta)+(\varphi-\beta))+\sin((\varphi+\beta)-(\varphi-\beta))}{\sin((\varphi+\beta)+(\varphi-\beta))-\sin((\varphi+\beta)-(\varphi-\beta))}\\&=\frac{\sin 2\varphi+\sin 2\beta}{\sin 2\varphi-\sin 2\beta}=\frac{n+1}{n-1}.\end{aligned}$$

实际上本题最好还强调一下在 $n=1$ 并且在 $\sin(\varphi-\beta)=0$，即 $\alpha-\beta+\gamma=k\pi$，$k=0,1,2\cdots$ 的时候表达式并无意义.

(3) 一般这种情况可以考虑配对相乘：

$$(1+\tan\alpha)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=(1+\tan\alpha)\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}\right)=2.$$

因此，原式 $=[(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)][(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 43^\circ)]\cdots[(1+\tan 22^\circ)(1+\tan 23^\circ)](1+\tan 45^\circ)=2^{23}$.

评注　这些题目依旧考查三角函数的变形能力，不过比第一问要稍难一

点，并且第二问第三问涉及到了技巧运算，第二问一开始可以不讲最后无意义的情况，如果学生自动提出，可以适当鼓励，第三问如果学生觉得配对相乘有点难以接受的话，可以考虑采用如下方法，直接考查单项进行变形：

$$1+\tan\alpha=1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)},$$

那么原式 $=(\sqrt{2})^{44}\cdot\frac{\sin 46^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\frac{\sin 47^\circ}{\sin 88^\circ}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin 89^\circ}{\sin 46^\circ}\cdot 2=2^{23}$.

这种做法强调一种变形后分子分母尽量形式调整为一样的想法，因为肯定能消掉，所以形式相同更容易看出来如何消掉.

例 3　求下列各式的值：

(1) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$；

(2) $\sin^2 80^\circ-\sin^2 40^\circ+\sqrt{3}\sin 40^\circ\cos 80^\circ$；

(3) $\sin^2 20^\circ-\sin 5^\circ\left(\sin 5^\circ+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cos 20^\circ\right)$.

分析　在第(1)题中，因 $40^\circ-10^\circ=30^\circ$，所以可转化到 30° 与 10° 这两角的关系式而求解；同理，第(2)题中，因 $80^\circ+40^\circ=120^\circ$，所以可转化到 120° 与 40° 这两角的关系而求解；第(3)题中 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 虽非特殊值，但若知道 $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，则 $20^\circ=15^\circ+5^\circ$，可转化到 15° 的三角函数值.

(1) **解法一**

$$\begin{aligned}&\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ\\
=&\sin^2 10^\circ+\cos^2(30^\circ+10^\circ)+\sin 10^\circ\cdot\cos(30^\circ+10^\circ)\\
=&\sin^2 10^\circ+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\sin 10^\circ\right)^2\\
&+\sin 10^\circ\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\sin 10^\circ\right)\\
=&\sin^2 10^\circ+\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\frac{1}{4}\sin^2 10^\circ\\
&+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\sin^2 10^\circ\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{4}\sin^2 10°+\frac{3}{4}\cos^2 10°=\frac{3}{4}.$$

解法二　利用先降次再和差化积与积化和差.

$$原式=\frac{1-\cos 20°}{2}+\frac{1+\cos 80°}{2}+\frac{\sin 50°-\sin 30°}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\cos 80°-\cos 20°+\sin 50°\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2\sin\frac{80°+20°}{2}\sin\frac{80°-20°}{2}+\sin 50°\right)=\frac{3}{4}.$$

（2）**解法一**　$\sin^2 80°-\sin^2 40°+\sqrt{3}\sin 40°\cos 80°$

$$=\sin^2(120°-40°)-\sin^2 40°+\sqrt{3}\sin 40°\cdot\cos(120°-40°)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40°+\frac{1}{2}\sin 40°\right)^2-\sin^2 40°$$

$$+\sqrt{3}\sin 40°\left(-\frac{1}{2}\cos 40°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cos^2 40°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°\cos 40°+\frac{1}{4}\sin^2 40°$$

$$-\sin^2 40°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°\cos 40°+\frac{3}{2}\sin^2 40°$$

$$=\frac{3}{4}\cos^2 40°+\frac{3}{4}\sin^2 40°=\frac{3}{4}.$$

解法二　$原式=\frac{1-\cos 160°}{2}-\frac{1-\cos 80°}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sin 120°-\sin 40°)$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 80°+\cos 20°+\frac{3}{2}-\sqrt{3}\sin 40°\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 50°\cos 30°-\sqrt{3}\sin 40°\right)=\frac{3}{4}.$$

（3）　$\sin^2 20°-\sin 5°\left(\sin 5°+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cos 20°\right)$

$$=\sin^2 20°-\sin^2 5°-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin 5°\cos 20°$$

$$=\sin(20°+5°)\sin(20°-5°)-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}[(\sin(5°+20°)+\sin(5°-20°)]$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\sin 25°-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin 25°+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin 15°$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

评注　仔细观察本题，第(1)题可改写成 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\sin^2 10^\circ+\sin^2 50^\circ-2\sin 10^\circ\sin 50^\circ\cos 120^\circ=\sin^2 120^\circ$，于是，我们猜想：若 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，则 $\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$，这与我们今后学到的三角形中正余弦定理十分类似，读者不妨根据原题中的解答部分证明一下.

事实上，我们还可以证明：等式 $\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$ 成立的充要条件是 $A=2k\pi\pm(B-C)$ 或 $A=(2k+1)\pi\pm(B+C)$.

略证　充分性：当 $A=2k\pi\pm(B-C)$ 时，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos[2k\pi\pm(B-C)]\\&=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos B\cos C-2\sin^2 B\sin^2 C\\&=\sin^2 B\cos^2 C-2\sin B\sin C\cos B\cos C+\sin^2 C\cos^2 B\\&=(\sin B\cos C-\cos B\sin C)^2=\sin^2(B-C)=\text{右边}.\end{aligned}$$

同理当 $A=(2k+1)\pi\pm(B+C)$ 时，等式成立.

必要性：因为 $\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$，

即
$$\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A=1-\cos^2 A,$$

整理得
$$(\cos A-\sin B\sin C)^2=\cos^2 B\cos^2 C,$$

所以
$$\cos A=\sin B\sin C\pm\cos B\cos C.$$

当 $\cos A=\sin B\sin C+\cos B\cos C=\cos(B-C)$ 时，

$$A=2k\pi\pm(B-C),\ k\in\mathbf{Z};$$

当 $\cos A=\sin B\sin C-\cos B\cos C=-\cos(B+C)$ 时，

$$A=(2k+1)\pi\pm(B+C),\ k\in\mathbf{Z}.$$

根据上述结论，请读者利用公式计算本例中的第(1)、(2)题. 至于第(3)题是上述公式的变形：即当 $C=(2k+1)\pi-(A-B)$ 或 $C=2k\pi-(A-B)$ 时，有 $\sin^2 A-\sin^2 B-2\cos A\sin B\sin(A-B)=\sin^2(A-B)$. 于是，第(3)题也能套用公式.

例 4　不查表，求 $\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{5}\right)$ 的值.

分析　熟练应用和差化积与积化和差公式.

解法一　$\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{5}\right)$

$$=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$$

$$=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$=1+\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=1+\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$$

$$=1+\frac{2\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}$$

$$=1+\frac{\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}$$

$$=1+\frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{4\cos\frac{\pi}{10}}$$

$$=1+\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{4\cos\frac{\pi}{10}}$$

$$=\frac{5}{4}.$$

解法二　设原式 $=A=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$，令 $\theta=\frac{\pi}{5}$，则 $2\theta=\pi-3\theta$，于是 $\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$，即

$$4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0.$$

因式分解得 $(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$.

因为 $\cos\theta+1\neq 0$，所以 $4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$. 即 $\cos\frac{\pi}{5}$ 是方程 $4x^2-2x-1=0$ 的一根. 同理可证 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 也是方程 $4x^2-2x-1=0$ 的一根. 由韦达定理得 $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{1}{4}$，故 $A=\frac{5}{4}$.

评注　本题解法一具有很强的技巧性，在解题过程中，出现了形如 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$ 的算式. 当它乘以 $\cos\frac{\pi}{10}$ 后，则可连续应用二倍角正弦公式进行计算化简. 与此类似的如：

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{8\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{16}{7}\pi}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{8},$$

而

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}.$$

我们再观察一下：$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$，于是，归纳猜想

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$$

证明如下：令

$$S=\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

$$T=\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1},$$

则

$$ST=\frac{1}{2^n}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\sin\frac{6\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{3\pi}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n}T.$$

从而 $S=\frac{1}{2^n}$.

例5 已知 $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$,求证:$\frac{\sin^{4n}x}{a^{2n-1}}+\frac{\cos^{4n}x}{b^{2n-1}}=\frac{1}{(a+b)^{2n-1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

证明一 令 $\begin{cases}u=\sin^2 x,\\ v=\cos^2 x,\end{cases}$ 则 $0\leqslant u,\ v\leqslant 1$,且 $u+v=1$.

因为
$$\begin{cases}\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}=\frac{1}{a+b}\\ u+v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{a}{a+b},\\ v=\frac{b}{a+b},\end{cases}$$

所以
$$\frac{\sin^{4n}x}{a^{2n-1}}+\frac{\cos^{4n}x}{b^{2n-1}}=\frac{u^{2n}}{a^{2n-1}}+\frac{v^{2n}}{b^{2n-1}}=\frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n}}{a^{2n-1}}+\frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n}}{b^{2n-1}}$$
$$=\frac{a}{(a+b)^{2n}}+\frac{b}{(a+b)^{2n}}=\frac{1}{(a+b)^{2n-1}}.$$

证明二 因为
$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geqslant\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{a+b}=\frac{1}{a+b},$$
当且仅当 $\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}$ 即 $\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$ 时,等号成立.

所以 $\sin^2 x=\frac{a}{a+b}$, $\cos^2 x=\frac{b}{a+b}$,代入即可.

评注 证明二中我们利用不等式的方式来证明等式,有时是迫不得已,有时是出奇制胜.

例6 求证:对于任意 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$, $|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1$ 成立的充要条件是 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos 2\alpha$.

证明 充分性:当 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos 2\alpha$ 时,显然有
$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1.$$

必要性:若 $|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant 1$ 对于任意 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 均成立,则

(1) 当 $b>-1$ 时,
$$2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1+a\cos\alpha+(b+1).$$

由于 $b+1>0$,取 α,使 $a\cos\alpha=|a|$,则

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=1+|a|+(b+1)>1+|a|\geqslant 1,$$

矛盾.

(2) 当 $b<-1$ 时，令 $\cos\alpha=0$，则

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=|b|>1,$$

矛盾.

由(1)，(2)可知：$b=-1$，现取 α，使 $a\cos\alpha=|a|$，则

$$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=1+|a|\geqslant 1,$$

故 $|a|=0$，即 $a=0$.

这样 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$.

例 7 （42 届俄罗斯数学竞赛）已知锐角 α、β 满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

证明一 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=-\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)$ ①

$\Leftrightarrow \sin\alpha[\sin\alpha-\sin(90^\circ-\beta)]+\sin\beta[\sin\beta-\sin(90^\circ-\alpha)]=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\beta\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\alpha\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\beta\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0.$

不妨设 $\alpha\geqslant\beta$，则 $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$.

所以 $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，$\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，当然 $\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$.

所以 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，又因为 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}=0$，即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

证明二 由①式知，$\sin\alpha-\cos\beta$ 与 $\cos\alpha-\sin\beta$ 同号或同为 0.

若 $\sin\alpha>\cos\beta$ 且 $\cos\alpha>\sin\beta$，则 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，矛盾.

若 $\sin\alpha<\cos\beta$ 且 $\cos\alpha<\sin\beta$，则 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha<\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，矛盾.

故 $\cos\alpha=\sin\beta$ 且 $\sin\alpha=\cos\beta$，又因为 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

评注 本题是俄罗斯数学竞赛试题，有时正面不好证明的情况下，可考虑反证法.

例 8 已知 α、β 为锐角，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件为：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$.

证明 必要性：因为 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，$\cos^2\alpha=\sin^2\beta$，则

$$\text{左边}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1=\text{右边}.$$

充分性：

证法一 由 Cauchy 不等式知

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}\geqslant\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\frac{1^2}{1}=1.$$

当且仅当
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta},$$
即
$$\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta=0,$$
即
$$(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0,$$
即 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$ 时等号成立.

又因为 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

证法二
$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\beta\geqslant 2\sin^2\alpha,$$
$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\sin^2\beta\geqslant 2\cos^2\alpha,$$
相加得：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}\geqslant 1$，所以 $\begin{cases}\sin^2\alpha=\cos^2\beta,\\ \cos^2\alpha=\sin^2\beta,\end{cases}$ 同上可得.

评注 下面给出与此类似的一些推广问题.

推广 1 已知 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件为：$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=1$.

证明 必要性显然.

下证充分性：

证法一
$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos\beta\sin\alpha}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin\beta\cos\alpha}\geqslant\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\geqslant 1,$$

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\beta\sin\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\beta\cos\alpha},\\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$即 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时取“=”.

证法二 $\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\cos^2\beta\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\cdot\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\cdot\cos^2\beta}=3\sin^2\alpha,$

同理，$$\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\sin^2\beta\geqslant 3\cos^2\alpha,$$

两式相加即有：$\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\geqslant 1.$

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}=\cos^2\beta,\\ \dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=\sin^2\beta,\end{cases}$即 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时取“=”.

推广 2 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 的充要条件为：

$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}=1,\ k\in\mathbf{N}^*.$$

证明 必要性显然.

下证充分性：

证法一 (i) 当 $k=2m$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，

$$\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}+\underbrace{\cos^2\beta+\cos^2\beta+\cdots+\cos^2\beta}_{m\text{个}}$$
$$\geqslant(m+1)\cdot\sqrt[m+1]{\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}\cdot\underbrace{\cos^2\beta\cdots\cos^2\beta}_{m\text{个}}}$$
$$=(m+1)\sin^2\alpha;$$
$$\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}+\underbrace{\sin^2\beta+\sin^2\beta+\cdots+\sin^2\beta}_{m\text{个}}$$
$$\geqslant(m+1)\cdot\sqrt[m+1]{\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}\cdot\underbrace{\sin^2\beta\cdot\sin^2\beta\cdots\sin^2\beta}_{m\text{个}}}$$
$$=(m+1)\cos^2\alpha,$$

两式相加得：$\dfrac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}+\dfrac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}\geqslant 1$.

当且仅当 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时取"＝".

(ii) 当 $k=2m-1$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，

$$\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}+\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}+\underbrace{\cos^2\beta+\cdots+\cos^2\beta}_{2m-1}$$

$$\geqslant(2m+1)\cdot\sqrt[2m+1]{\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}\cdot\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}\cdot\underbrace{\cos^2\beta\cdots\cos^2\beta}_{2m-1}}=(2m+1)\cdot\sin^2\alpha;$$

$$\frac{\cos^{2m+1}\alpha}{\sin^{2m-1}\beta}+\frac{\cos^{2m+1}\alpha}{\sin^{2m-1}\beta}+\underbrace{\sin^2\beta+\cdots+\sin^2\beta}_{2m-1}\geqslant(2m+1)\cdot\cos^2\alpha,$$

两式相加得：$\dfrac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}+\dfrac{\cos^{2m+1}\alpha}{\sin^{2m-1}\beta}\geqslant 1$.

当且仅当 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时取"＝".

证法二 $\dfrac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\underbrace{\cos\beta\sin\alpha+\cdots+\cos\beta\sin\alpha}_{k个}\geqslant(k+1)\sin^2\alpha(A_{k+1}\geqslant G_{k+1})$；

$$\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}+\underbrace{\cos\alpha\sin\beta+\cdots+\cos\alpha\sin\beta}_{k个}\geqslant(k+1)\cos^2\alpha(A_{k+1}\geqslant G_{k+1}),$$

两式相加得：

$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}\geqslant(k+1)-k\sin(\alpha+\beta)\geqslant 1.$$

当且仅当 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时取"＝".

推广 3 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 的充要条件为 $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}=1$.

证明 必要性显然.

下证充分性：

证法一 令 $\sin^2\alpha=a$，$\cos^2\beta=b$，a，$b\in(0,1)$，则

$$1=\frac{a^2}{b}+\frac{(1-b)^2}{1-a}\Leftrightarrow b(1-a)=a^2-a^3+b^3-2b^2+b$$

$$\Leftrightarrow(b^3-a^3)-(b^2-a^2)-(b^2-ab)=0$$

$$\Leftrightarrow(b-a)(a^2+ab+b^2-2b-a)=0,$$

因为 $a, b\in(0,1)$，所以 $a>a^2$，$b>b^2$，$b>ab$。

因为
$$a^2+ab+b^2-2b-a<0,$$
故 $b=a$，即 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

证法二
$$0=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}-1=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$$
$$=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\beta}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^2\beta(\sin^2\beta-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}, \quad ①$$

因为 $\alpha, \beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

若 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则

$\cos\alpha>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta>0$，所以 $\cos^2\alpha>\sin^2\beta$；

$\cos\beta>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta>0$，所以 $\cos^4\beta>\sin^4\alpha$.

①式右边 <0 矛盾.

同理，若 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，则①式右边 >0，矛盾.

如证法二，直接可将结论拓展到：
$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\sin^{k+2}\beta}{\cos^k\alpha}=1,\ k>0.$$

证法二也可证明例 8 的充分性：

事实上：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1\Leftrightarrow\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$
$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin^2\beta}=0. \quad (*)$$

因为 $\alpha, \beta\in(0,\pi)$，若 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.

若 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha>\sin\beta>0$，$\cos\beta>\sin\alpha>0$，所以
$$\cos^2\alpha>\sin^2\beta>0,\ \sin^2\alpha<\cos^2\beta.$$

即
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}<1,\ \frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta}>1.$$

所以 $$\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}>\sin^2\alpha-\cos^2\beta,$$

$$\frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin^2\beta}>\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

所以 $\dfrac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}+\dfrac{\cos^2(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin^2\beta}>\sin^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha-\sin^2\beta=0.$

这与(*)矛盾.

同理，若$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，(*)式左边大于0，矛盾.

评注 本题曾多次作为竞赛题在各省的初赛中出现.

例9 计算下列各式的值：

(1) 已知α、β为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，求$\cos\beta$；

(2) 若$\tan\alpha$、$\tan\beta$是方程$x^2+bx+c=0$ $(b\neq 0)$的两根，求$\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$的值.

分析 充分挖掘隐含条件，正确估算角的范围，计算第(1)题. 恰当应用公式，分类讨论求第(2)题.

解 (1) 因为α、β均为锐角，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}<\alpha+\beta<\pi$，而$\cos\alpha=\frac{1}{7}<\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，从而$\alpha+\beta$为钝角，

$$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=-\frac{11}{14},\ \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

故 $$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos(\alpha+\beta-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\\&=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 由已知条件，得$\tan\alpha+\tan\beta=-b$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=c$. 所以当$c\neq 1$时，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{b}{c-1}.$$

$$\begin{aligned}&\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)\\&=\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c}{\tan^2(\alpha+\beta)+1}=\frac{\left(\frac{b}{c-1}\right)^2+\frac{b^2}{c-1}+c}{1+\left(\frac{b}{c-1}\right)^2}=c.\end{aligned}$$

当 $c=1$ 时，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$，此时，$\alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，$\cos(\alpha+\beta)=0$，$\sin(\alpha+\beta)=\pm1$，原式 $=1$.

评注 本题第(1)题如不能正确估计，会出现 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\dfrac{11}{14}$，从而 $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{71}{98}$，其原因是未能就 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ 深入挖掘 $\alpha+\beta$ 的取值范围；第(2)题容易忽略 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan(\alpha+\beta)}$ 中 $\tan\alpha\cdot\tan\beta\neq1$ 这一隐含的约束条件，即 $\tan(\alpha+\beta)$ 不存在的情形.

例 10 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，试求 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

分析 注意所求式子中角与已知条件中角的关系，将已知条件平方相加可出现结论中的角 $\alpha-\beta$，将已知条件和差化积可出现结论中的角 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，再用万能公式求 $\sin(\alpha+\beta)$.

解 由

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}, \quad ①$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5}, \quad ②$$

$①^2+②^2$ 得

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

即

$$2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta=1,$$

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}.$$

由①和差化积得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}. \quad ③$$

由②和差化积得

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{5}. \quad ④$$

于是由$\frac{③}{④}$得 $\tan\frac{(\alpha+\beta)}{2}=\frac{3}{4}$. 故

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{25}.$$

评注 形如 $\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b$ 的三角函数求值题，主要是采用题中两种方法. 当然，还可作如下变换：由 ①^2 + ②^2 得 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$，由 ②^2 − ①^2 得 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$.

即 $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$，从而 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$.

由①×②得 $\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\beta=\frac{12}{25}$，从而 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{25}$，可得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$.

例 11 已知 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，且 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$. (1)求 $\beta-\alpha$ 的值；(2)求证：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ 为定值.

分析 通过消元法将 γ 消去，得关于 α、β 的关系式，从而求得 $\beta-\alpha$ 的某一三角函数值，进而求出 $\beta-\alpha$ 的值；根据轮换对称式的性质，求得 α、β、γ 三者关系，最后计算 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ 之值.

解 (1) 由条件得 $\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$，$\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$，两式平方相加得 $2+2\cos(\alpha-\beta)=1$，于是 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$. 因为 $0<\alpha<\beta<2\pi$，所以 $\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$.

但是，当 $\beta-\alpha=\frac{4\pi}{3}$ 时，根据题中等式，同理可得 $\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$. 从而 $\gamma\geqslant\beta+\frac{2\pi}{3}=\alpha+\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\alpha+2\pi>2\pi$，这与题设矛盾，所以 $\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由(1)可以推知：$\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$，所以

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\\&=\cos^2\alpha+\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha\right)^2+\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{4\pi}{3}\sin\alpha\right)^2\\&=\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2\end{aligned}$$

$$= \cos^2\alpha + \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha$$

$$+ \frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha = \frac{3}{2}.$$

评注 本题容易出现的错误是认为 $\beta-\alpha$ 可为$\frac{4\pi}{3}$. 其实通过估算，可发现矛盾.

当我们学习了平面向量以后，还可通过构造法证明本题. 即在平面直角坐标系中，设三点 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$C(\cos\gamma,\ \sin\gamma)$，则 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在以 O 为圆心的单位圆上，又根据三角形重心坐标公式得 $x_G=\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=0$，$y_G=\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$，即重心 G 与外心 O 重合，于是 $\triangle ABC$ 为单位圆的内接正三角形，从而 $\gamma-\beta=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

例 12 证明对所有 $n\geqslant 2$ 的自然数 n，有等式

$$\prod_{i=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{i=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]$$

这里 $\prod\limits_{k=1}^{n}k=1\times2\times\cdots\times n$.

证明 令 $A_i=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]$，$B_i=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]$，因为 $\tan 3\theta=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$，取 $\theta=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)$，得

$$\tan\pi\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)=\tan\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\tan\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]\tan\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right],$$

化简得 $\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]\cdot\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^i}{3^n-1}\right)\right]=1$，于是 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_iB_i=1$，变形即得证.

例 13 证明下列三角恒等式：

(1) $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$；

(2) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$

分析 利用数列知识证明三角恒等式.

证明 (1) 记 $a_n=\cot x-\cot 2^n x$，则

$$a_1=\cot x-\cot 2x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x},$$

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_k&=(\cot x-\cot 2^{k+1}x)-(\cot x-\cot 2^k x)\\&=\cot 2^k x-\cot 2^{k+1}x=\frac{\cos 2^k x}{\sin 2^k x}-\frac{\cos 2^{k+1}x}{\sin 2^{k+1}x}\\&=\frac{2(\cos 2^k x)^2-\cos 2^{k+1}x}{2\sin 2^k x\cdot\cos 2^k x}=\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}.\end{aligned}$$

于是 $\begin{aligned}\text{左边}&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=a_n=\cot x-\cot 2^n x.\end{aligned}$

(2) 记 $a_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x$，则

$$a_1=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2},$$

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_k&=\left(\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x\right)-\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x\right)\\&=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\cot\frac{x}{2^{k+1}}-2\cot\frac{x}{2^k}\right)\\&=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{x}{2^{k+1}}}-2\times\frac{1-\tan^2\frac{x}{2^{k+1}}}{2\cdot\tan\frac{x}{2^{k+1}}}\right]=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\tan\frac{x}{2^{k+1}},\end{aligned}$$

所以 $\begin{aligned}\text{左边}&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=a_n=\text{右边}.\end{aligned}$

故原等式成立.

评注 本题的左边都是同名三角函数，前面的系数以及角的度数是有一定规律的，并且与自然数有关，因此证明的思路是：记 $a_n=$ 右边，然后求出 a_1、$a_{k+1}-a_k$ 或$\frac{a_{k+1}}{a_k}$，即可找到等式左边的每一项与 a_n 的关系，最后把它们代入等式的左边，再进行计算，就得到 a_n.

例 14 (1) 设 n 是一个大于 3 的素数，求 $\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdots\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$ 的值；

(2) 设 n 是一个大于 3 的自然数，求 $\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(1+2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ 的值.

分析 由题中 $\cos\frac{2k\pi}{n}$, $\cos\frac{k\pi}{n}$，可联系到 n 次单位根和 $2n$ 次单位根.

解 (1) 记 $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $w^n=1$, $w^{-\frac{n}{2}}=e^{-\pi i}=-1$, $2\cos\frac{2k\pi}{n}=w^k+w^{-k}$.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)&=\prod_{k=1}^{n}(1+w^k+w^{-k})\\&=\prod_{k=1}^{n}w^{-k}(w^k+w^{2k}+1)\\&=w^{-\frac{n(n+1)}{2}}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}\\&=(-1)^{n+1}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}.\end{aligned}$$

因为 n 为大于 3 的素数，所以 $(-1)^{n+1}=1$，且当 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 时，$3k$ 取遍模 n 的剩余类，从而

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^{3k})=\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^k),$$

于是

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=3.$$

(2) $Z^{2n}=1$ 的 $2n$ 个根是 ±1 和 $Z_k=e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}(k=1, 2, \cdots, n-1)$，所以

$$\begin{aligned}Z^{2n}-1&=(Z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(Z-e^{\frac{k\pi i}{n}})(Z-e^{-\frac{k\pi i}{n}})\\&=(Z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(Z^2+1-2Z\cos\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

取 $Z=e^{\frac{2\pi i}{3}}$，则 $Z^2+1=-Z$，于是有

$$Z^{2n}-1=(Z^2-1)(-Z)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\=&\frac{Z^{2n}-1}{(Z^2-1)(-Z)^{n-1}}\\=&\begin{cases}0,\ n=3k,\\ \dfrac{Z^2-1}{(Z^2-1)(-Z)^{3k}}=(-1)^{3k}=(-1)^{n-1},\ n=3k+1,\\ \dfrac{Z-1}{(Z^2-1)(-Z)^{3k+1}}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{(Z+1)Z}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{-1}=(-1)^n,\ n=3k+2,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 k 为自然数.

例 15 求值：$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$.

解 设

$$x=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13},$$

$$y=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13},$$

则

$$\begin{aligned}x+y&=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[2\sin\frac{\pi}{13}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos\frac{11\pi}{13}\right)\right]\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[\sin\frac{2\pi}{13}+\left(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{10\pi}{13}\right)\right]\\&=\frac{\sin\frac{12\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\cdot y&=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)\\&=-\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}-\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}-\cos\frac{6\pi}{13}\right)\end{aligned}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}.$$

故 x、y 是方程 $t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}=0$ 的两根，$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$.

又由于 $x>0$，故 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$.

即

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}.$$

评注　此例中配对的式子与上例不同，当然也可采用自配对方式.

$$\begin{aligned}x^2&=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\right)^2\\&=\cos^2\frac{\pi}{13}+\cos^2\frac{3\pi}{13}+\cos^2\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}\\&\quad+2\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{6\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{18\pi}{13}\right)\\&\quad+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}\right)\\&\quad-\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\right),\end{aligned}$$

又因为

$$\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1}{2}-\left(\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right),$$

从而　$$x^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)-\frac{1}{2},\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}.$$

又因为 $x>0$，所以 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$.

例 16　求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$；

(2) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$.

分析　反复利用积化和差与和差化积公式计算原式，当项数较多时，其方法有两种：配对或裂项，本题采用裂项方法.

解　(1)

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\\
=&\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left(2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}\right.\\
&\left.+2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}\right)\\
=&\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[\sin\frac{2\pi}{13}+\left(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}\right)+\left(\sin\frac{6\pi}{13}-\sin\frac{4\pi}{13}\right)\right.\\
&+\left(\sin\frac{8\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right)+\left(\sin\frac{10\pi}{13}-\sin\frac{8\pi}{13}\right)\\
&\left.+\left(\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{10\pi}{13}\right)\right]\\
=&\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\cdot\sin\frac{12\pi}{13}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(2) 令 $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=x$，则

$$\begin{aligned}
x^2=&\cos^2\frac{\pi}{13}+\cos^2\frac{3\pi}{13}+\cos^2\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}\\
&+2\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}\\
=&\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{6\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{18\pi}{13}\right)\\
&+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}\\
=&\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}\right)\\
&-\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\right),
\end{aligned}$$

由(1)得

$$\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1}{2}-\left(\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right),$$

从而

$$x^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)-\frac{1}{2},$$

解之得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$（负值舍去），所以

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

评注 由本题第(1)题的结论，再结合算式 $\cos\dfrac{\pi}{3}$，$\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}$，$\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}$，$\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{3\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}$ 的值，我们可以归纳猜想：

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2}.$$

证明 令 $S=\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\dfrac{2n-1}{2n+1}\pi$，

则
$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot S&=\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\left(\sin\frac{4\pi}{2n+1}-\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)\\&\quad+\left(\sin\frac{6\pi}{2n+1}-\sin\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\sin\frac{2n}{2n+1}\pi-\sin\frac{2n-2}{2n+1}\pi\right)\\&=\sin\frac{2n}{2n+1}\pi.\end{aligned}$$

于是
$$S=\frac{1}{2}.$$

习 题 2

一、选择题

1 已知 $\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$，则 $\cos\theta$ 的值等于（　　）.

(A) $\dfrac{3}{5}$　　(B) $-\dfrac{3}{5}$　　(C) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

2 化简：$2\sqrt{1+\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}$ 的结果（　　）.

(A) $2\sin 4$　　(B) $2\sin 4+4\cos 4$

(C) $-2\sin 4-4\cos 4$　　(D) $2\sin 4-4\cos 4$

3 计算 $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$ 的值是（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{8}$　　(D) $\frac{1}{16}$

4 化简 $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 等于（　　）.

(A) 1　　(B) -1　　(C) $\cos\alpha$　　(D) $-\sin\alpha$

5 设 $a=\sin 14^\circ+\cos 14^\circ$，$b=\sin 16^\circ+\cos 16^\circ$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 a、b、c 的大小关系是（　　）.

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$

(C) $b<c<a$　　(D) $b<a<c$

6 化简 $\tan 10^\circ\cdot\tan 20^\circ+\tan 20^\circ\cdot\tan 60^\circ+\tan 60^\circ\cdot\tan 10^\circ$ 的值（　　）.

(A) 1　　(B) 2

(C) $\tan 10^\circ$　　(D) $\sqrt{3}\tan 20^\circ$

7 已知 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha\sin\beta$ 的取值范围（　　）.

(A) $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$　　(B) $[-1,1]$

(C) $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　　(D) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

8 已知 α、β 是锐角，$\sin\alpha=x$，$\cos\beta=y$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，则 y 与 x 之间的函数关系为（　　）.

(A) $y=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}x\ \left(\frac{3}{5}<x<1\right)$

(B) $y=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}x\ (0<x<1)$

(C) $y=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{4}{5}x\ \left(0<x<\frac{3}{5}\right)$

(D) $y=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{4}{5}x\ (0<x<1)$

9 设 α、β 为钝角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则 $\alpha+\beta$ 的值为（　　）.

(A) $\frac{3}{4}\pi$　(B) $\frac{5}{4}\pi$　(C) $\frac{7}{4}\pi$　(D) $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$

10 若α适合条件$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})$，则$\frac{\alpha}{2}$的取值范围是(　　).

(A) $\left[2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

(B) $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

(D) $\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

二、填空题

11 已知$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=m$，则$\sin 2x=$________.

12 若$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$，则$\sin(\alpha+\beta)=$________.

13 若$f(\tan x)=\sin 2x$，则$f(-1)$的值为________.

14 已知$x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{\pi}{24}$，则$x^8+\frac{1}{x^8}$的值为________.

15 设$\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$且$2\cot^2\alpha+7\cot\alpha+3=0$，则$\cos 2\alpha=$________.

16 已知$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{x-1}{2x}}$，并且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，则$\tan\theta=$________，$\sin 2\theta=$________，$\cos 2\theta=$________.

17 计算$\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ=$________.

18 计算$\tan 5^\circ+\cot 5^\circ-\frac{2}{\cos 80^\circ}=$________.

19 已知$\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，则$\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}=$________.

20 已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{2}{3}$，则$\cos(\alpha-\beta)=$________.

三、解答题

21 求下列各式的值：

(1) $\cos^2 24^\circ+\sin^2 6^\circ+\cos^2 18^\circ$；

(2) $4\cos^2 36^\circ-\sin 84^\circ(\sqrt{3}-\tan 6^\circ)$.

22 设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，求 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

23 证明下列恒等式：

(1) $\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$；

(2) $\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$.

24 已知 a、b 均为正整数，且 $a>b$，$\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$. 求证：对于一切正整数 n，A_n 均为整数.

25 求证：$\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k\sin^3(3^k\alpha)=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4\cdot 3^n}\sin 3^{n+1}\alpha$.

26 (1) 求值：$\cos^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{5\pi}{16}+\cdots+\cos^4\frac{15\pi}{16}$；

(2) 求 $\cos^5\frac{\pi}{9}+\cos^5\frac{5\pi}{9}+\cos^5\frac{7\pi}{9}$ 的值.

27 已知 $\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}$，求证：$\tan^2\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

28 已知 $\cos\alpha=\tan\beta$，$\cos\beta=\tan\gamma$，$\cos\gamma=\tan\alpha$，则

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\cos^4\alpha=\cos^4\beta=\cos^4\gamma=4\sin^2 18°.$$

3 三角形中的三角函数

在三角形中，角与边之间存在着下列关系：三角形的角与角之间有“内角和是 180°(即 π 弧度)”；边与边之间有“任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”；边与角之间有正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 等关系. 特别地，当三角形中有一角为直角时，斜边的平方等于两直角边的平方和.

三角形面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$，还有 $S=\frac{abc}{4R}$，$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$S=pr$，海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 R、r 分别为三角形外接圆和内切圆半径，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

利用正弦定理解三角形时，必须注意三角形的多解性，如已知角 A、边 a、b 时，列表如下：

	$A\geqslant 90°$	$A<90°$
$a>b$	一　解	一　解
$a=b$	无　解	一　解
$a<b$	无　解	$a>b\sin A$　两解 $a=b\sin A$　一解 $a<b\sin A$　无解

例 1　如图 3-1，走廊宽为 3 m，夹角为 120°，地面是水平的，走廊两端足够长，问：保持水平位置通过走廊的木棒(不计粗细)的最大长度是多少？

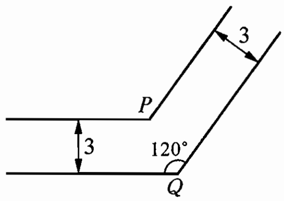


图 3-1

分析　本题的关键是把棒的长度表示为某一个变量的函数，然后求最值.

解　如图 3-2，过走廊转角内顶点 P 任作水平直线与走廊外侧交于点 A、B. 则在水平位置通过走廊的木棒长度小于或等于 AB.

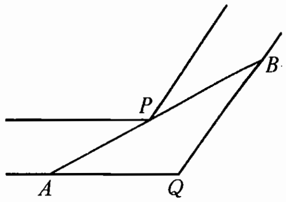


图 3-2

设 $\angle BAQ=\alpha$，则 $\angle ABQ=60^\circ-\alpha$，

$$AB=AP+PB=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{3}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

当 α 变化时，上式的最小值即是在水平位置通过走廊的木棒的最大长度.

由平均不等式及积化和差得：

$$AB\geqslant 6\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}}=6\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}[\cos(60^\circ-2\alpha)-\cos 60^\circ]}}$$

$$\geqslant 6\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{2}}}=12.$$

当且仅当 $\alpha=30^\circ$ 时，$AB=12$.

故在水平位置能通过走廊的木棒的最大长度为 12 m.

评注　本题是求最小值中的最大值.

例 2　已知$\triangle ABC$ 中，$\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$. 求证：$\triangle ABC$ 三边长为等比数列.

分析　边角关系互化，用三角函数处理也是较好的方法之一，本书多次用三角法解决平面几何问题.

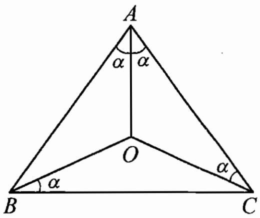


图 3-3

证明　如图 3-3，设 $\angle BAO=\angle CBO=\angle ACO=\alpha$.

在 $\triangle OAB$ 中，由正弦定理：$\dfrac{AB}{\sin\angle AOB}=\dfrac{OB}{\sin\angle BAO}$，而 $\sin\angle AOB=\sin(\angle BAO+\angle ABO)=\sin(\angle CBO+\angle ABO)=\sin B$.

所以
$$\frac{AB}{\sin B}=\frac{OB}{\sin\alpha},\qquad ①$$

同理在$\triangle OBC$ 中，有
$$\frac{BC}{\sin C}=\frac{OB}{\sin(C-\alpha)}.\qquad ②$$

①÷②，有
$$\frac{AB\sin C}{BC\sin B}=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

即 $\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}$，而 $\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin C\cos\alpha-\cos C\sin\alpha}{\sin\alpha}=\sin C\cot\alpha-\cos C$.

所以 $\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\sin C\cdot\cot\alpha-\cos C$，则 $\cot\alpha=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}+\cot C=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}+\cot C=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}+\cot C=\cot A+\cot B+\cot C$.

因为 $\alpha=\dfrac{A}{2}$，所以 $\cot\dfrac{A}{2}=\cot A+\cot B+\cot C$，

而 $\cot\dfrac{A}{2}-\cot A=\dfrac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}-\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}$，又

$$\cot B+\cot C=\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C},$$

所以 $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，即 $\sin^2 A=\sin B\sin C$，即 $a^2=bc$，得证.

评注 如果 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的布洛卡点. 布洛卡点的一个基本性质是：$\cot A+\cot B+\cot C=\cot\alpha$. 本题 $\alpha=\dfrac{A}{2}$. 另证：$\dfrac{OA}{\sin\left(B-\dfrac{A}{2}\right)}=\dfrac{OB}{\sin\dfrac{A}{2}}$，$\dfrac{OC}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{OB}{\sin\left(C-\dfrac{A}{2}\right)}$，又因为 $OA=OC$，所以上两式相比得 $\sin^2\dfrac{A}{2}=\sin\left(B-\dfrac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\dfrac{A}{2}\right)\Rightarrow 1-\cos A=\cos(B-C)-\cos(B+C-A)$，因为 $B+C-A=\pi-2A$，所以 $1-\cos 2A=\cos(B-C)+\cos A$，所以 $2\sin^2 A=2\sin B\sin C$，即 $a^2=bc$，得证.

例 3 在四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$AD=d$，$AC=e$，$BD=f$，则 $a^2c^2+b^2d^2=e^2f^2+2abcd\cos(A+C)$.

分析 由于要证等式的左边是 $a^2c^2+b^2d^2$，联想到 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. 将右边的项 e^2f^2 分解成：$e^2f^2=(ef\sin\alpha)^2+(ef\cos\alpha)^2$，(其中令 $\alpha=\angle AOB$)，而 $ef\sin\alpha=2S$ (S 为四边形 $ABCD$ 的面积)，$e=OA+OC$，$f=OB+OD$. 于是应用余弦定理可将 $(ef)^2$ 用 S、a、b、c、d 表示，进而变形得解.

证明 如图 3-4，设 AC 与 BD 交于 O，$\angle AOB=\alpha$，四边形 $ABCD$ 的面积为 S. 则 $e^2f^2=(ef\sin\alpha)^2+(ef\cos\alpha)^2$.

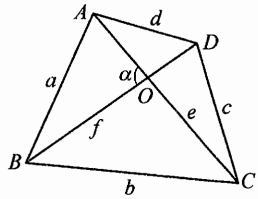


图 3-4

而 $\qquad ef\sin\alpha=2S$，

$$\begin{aligned}
ef\cos\alpha &= (OA+OC)(OB+OD)\cos\alpha \\
&= OA\cdot OB\cos\alpha + OB\cdot OC\cos\alpha + OC\cdot OD\cos\alpha \\
&\quad + OA\cdot OD\cos\alpha \\
&= \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2} - \frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2} \\
&\quad + \frac{OC^2+OD^2-CD^2}{2} - \frac{OA^2+OD^2-AD^2}{2} \\
&= \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2},
\end{aligned}$$

故
$$(ef)^2 = 4S^2 + \frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)^2, \tag{①}$$

但
$$f^2 = a^2+d^2-2ad\cos A = b^2+c^2-2bc\cos C,$$

所以
$$ad\cos A - bc\cos C = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}, \tag{②}$$

而
$$ad\sin A + bc\sin C = 2S. \tag{③}$$

由②^2+③^2，得

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C) = 4S^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4}. \tag{④}$$

由①、④，得
$$\begin{aligned}
e^2f^2 &= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C) - \frac{1}{4}(a^2+b^2-d^2- \\
&\quad c^2)^2 + \frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)^2 \\
&= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C)+(d^2-c^2)(b^2-a^2) \\
&= a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C),
\end{aligned}$$

故
$$a^2c^2+b^2d^2 = e^2f^2+2abcd\cos(A+C).$$

评注　本例可视为余弦定理对四边形的一个推广，另外当四边形为圆内接四边形时本例成为托勒密定理.

例4　在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，四边形 $ABCD$ 面积为 S，圆半径为 R，且令 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

求证：(1) $\cos B = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$；

(2) $R = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$.

分析　(1)的右边类似于两个余弦定理的合成;(2)的证明要综合运用正、余弦定理.

证明　如图3-5,设$AC=m$.

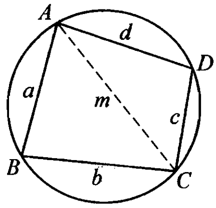


图 3-5

(1) 在$\triangle ABC$中,$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-m^2}{2ab}$,在$\triangle ADC$中,$\cos D=\dfrac{d^2+c^2-m^2}{2dc}$.

因为四边形$ABCD$内接于圆,所以$\cos B=-\cos D$.

故$\dfrac{a^2+b^2-m^2}{2ab}=\dfrac{m^2-d^2-c^2}{2dc}=\dfrac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2ab+2dc}$(合比定理),所以

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2(ab+cd)}.$$

(2) 由于B是$\triangle ABC$的内角,所以

$$\begin{aligned}\sin B&=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right]^2}\\&=\frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(ab+cd)}\\&=\frac{[(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)]^{\frac{1}{2}}}{2(ab+cd)}\\&=\frac{\{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]\}^{\frac{1}{2}}}{2(ab+cd)}\\&=\frac{[(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)]^{\frac{1}{2}}}{2(ab+cd)}\\&=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}.\end{aligned}$$

在$\triangle ABC$中,

$$\begin{aligned}AC^2&=a^2+b^2-2ab\cos B\\&=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\\&=\frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}\\&=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},\end{aligned}$$

所以

$$AC=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{ab+cd}.$$

由正弦定理得，$2R=\dfrac{AC}{\sin B}$，$R=\dfrac{AC}{2\sin B}$，故

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

评注　本例(1)可以看作圆内接四边形的余弦定理，另外由

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D\\&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B\\&=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\end{aligned}$$

可以看成圆内接四边形面积的海伦公式.

例5　设α、β、γ、φ为某四边形的四个内角，n为正偶数，若α、β、γ、φ满足$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma+\sin n\varphi=0$.

求证：α、β、γ、φ之中必有两个角之和在集合$\left\{\dfrac{2\pi}{n},\dfrac{4\pi}{n},\dfrac{6\pi}{n},\cdots,\pi\right\}$中.

分析　由$\alpha+\beta+\gamma+\varphi=2\pi$，故两角和之间可以互换.

证明　因为$\alpha+\beta+\gamma+\varphi=2\pi$，所以$\dfrac{n\alpha+n\beta}{2}+\dfrac{n\gamma+n\varphi}{2}=n\pi$.

又n为正偶数，所以　$\sin\dfrac{n\alpha+n\beta}{2}=-\sin\dfrac{n\gamma+n\varphi}{2}$，

$$\begin{aligned}&\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma+\sin n\varphi=0\\\Leftrightarrow&2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+2\sin\frac{n\gamma+n\varphi}{2}\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=0\\\Leftrightarrow&2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\left(\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}-\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}\right)=0\\\Leftrightarrow&\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}=0\text{ 或 }\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}=\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}.\end{aligned}$$

(1) 若$\sin\dfrac{n\alpha+n\beta}{2}=0$，则$\dfrac{n\alpha+n\beta}{2}=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，即$\alpha+\beta=\dfrac{2k\pi}{n}\ (k\in\mathbf{Z})$，又$0<\alpha+\beta<2\pi$，则$0<\dfrac{2k\pi}{n}<2\pi\Rightarrow 0<k<n$，从而$k=1,2,3,\cdots,n-1$.

即　$$\alpha+\beta=\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\frac{6\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)}{n}\pi.$$

(2) 若$\cos\dfrac{n\alpha-n\beta}{2}=\cos\dfrac{n\gamma-n\varphi}{2}$，则$\dfrac{n\alpha-n\beta}{2}=\dfrac{n\gamma-n\varphi}{2}+2k\pi$或$\dfrac{n\alpha-n\beta}{2}=$

$-\dfrac{n\gamma-n\varphi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

由于 $$\alpha+\beta+\gamma+\varphi=2\pi,$$

则得 $\alpha+\varphi=\pi+\dfrac{2k\pi}{n}$ 或 $\alpha+\gamma=\pi+\dfrac{2k\pi}{n}\ (k\in\mathbf{Z})$.

当 $\alpha+\varphi=\pi+\dfrac{2k\pi}{n}\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，因为 $0<\alpha+\varphi<2\pi$，故有

$$\alpha+\varphi=\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n}\pi,$$

同理可得 $$\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n}\pi.$$

注意到 n 为正偶数，π 在上面的集合中，又因为 $\dfrac{2i\pi}{n}+\dfrac{2(n-i)\pi}{n}=2\pi$. 结合四边形的内角之和为 2π.

因此，α、β、γ、φ 至少存在两个角之和在集合 $\left\{\dfrac{2\pi}{n},\ \dfrac{4\pi}{n},\ \dfrac{6\pi}{n},\ \cdots,\ \pi\right\}$ 中.

评注 本例中如 n 取 2，则有如果 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\varphi=0$，则 α、β、γ、φ 中必有两角和为 π.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle CAB$、$\angle ABC$ 的内角平分线分别与边 BC、CA 交于点 D、E，设 K 是 $\triangle ADC$ 的内心，若 $\angle BEK=45^\circ$，求 $\angle CAB$ 所有可能的值.

分析 用三角法求解平面几何问题，可以先建立三角方程，再求解.

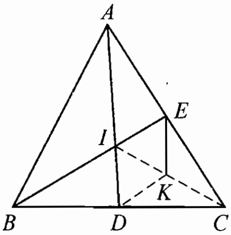


图 3-6

解 如图 3-6，设 AD 与 BE 交于点 I，$\triangle ABC$ 内切圆 $\odot I$ 的半径为 r.

$\angle ABC=2\alpha\ (0<\alpha<45^\circ)$，由 $AB=AC$，知 $AD\perp BC$，$\angle ACB=2\alpha$，故 $ID=r$.

$$IE=\frac{r}{\sin\angle BEC}=\frac{r}{\sin 3\alpha}, \qquad ①.$$

连结 DK，由 K 是 $\triangle ACD$ 的内心，知 I、K、C 三点共线，且 $\angle ICD=\angle ICE=\alpha$，

$$\angle CDK=\angle IDK=45^\circ=\angle BEK,$$

从而 $\triangle IDK$、$\triangle IEK$ 的外接圆半径相等，即

$$\frac{ID}{\sin\angle IKD}=\frac{IE}{\sin\angle IKE}. \qquad ②$$

又 $$\angle IKD=\angle ICD+\angle CDK=\alpha+45^\circ,$$

$$\angle IKE=\angle BIC-\angle BEK=2(90^\circ-\alpha)-45^\circ=135^\circ-2\alpha.$$

由①、②得，$\sin(\alpha+45^\circ)=\sin 3\alpha\cdot\sin(135^\circ-2\alpha)$

$$\Leftrightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\sin 3\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha+2\cos\alpha=\cos\alpha-\cos 5\alpha+\sin\alpha+\sin 5\alpha$$
$$\Leftrightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\sin 5\alpha-\cos 5\alpha$$
$$\Leftrightarrow\sin(\alpha+45^\circ)=\sin(5\alpha-45^\circ)$$
$$\Leftrightarrow 2\sin(2\alpha-45^\circ)\cos 3\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha=90^\circ\text{ 或 }2\alpha=45^\circ$$
$$\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ\text{ 或 }90^\circ.$$

评注 本题用三角法求解的关键是:选择变量,建立方程.

例 7 已知(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)是圆 $x^2+y^2=1$ 上的三点，且满足 $x_1+x_2+x_3=0$，$y_1+y_2+y_3=0$.

求证:$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

分析 由条件 $x_1+x_2+x_3=0$，$y_1+y_2+y_3=0$ 再结合重心坐标公式，可知该三角形的外心也是重心,故三点构成正三角形.

证明 令 $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2)$，$\overrightarrow{OC}=(x_3, y_3)$，则

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1,\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

所以,O 为$\triangle ABC$ 的外心也是$\triangle ABC$ 的重心.

从而,$\triangle ABC$ 是正三角形.

不妨设 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos(\alpha+120^\circ), \sin(\alpha+120^\circ))$，$\overrightarrow{OC}=(\cos(\alpha-120^\circ), \sin(\alpha-120^\circ))$，故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}x_i^2&=\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120^\circ)+\cos^2(\alpha-120^\circ)\\&=\frac{3}{2}+\frac{\cos 2\alpha+\cos(2\alpha+240^\circ)+\cos(2\alpha-240^\circ)}{2}\\&=\frac{3}{2}+\frac{\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cdot\cos 240^\circ}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{3}y_i^2=\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+120^\circ)+\sin^2(\alpha-120^\circ)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos 2\alpha+\cos(2\alpha+240^\circ)+\cos(2\alpha-240^\circ)}{2}=\frac{3}{2}.$$

评注　本题解法先将点形象化，三点构成正三角形，再将坐标三角化，用三角函数表示坐标，使最后的求解带来方便.

例 8　在$\triangle ABC$中，已知$A:B=1:2$，求证：$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

分析　由关于角的已知条件去证明边的等量关系，其“桥梁”是正弦定理，题中结论使人联想到等比性质.

证法一　设$A=\alpha$，$B=2\alpha$，则$C=\pi-3\alpha$，由正弦定理得：

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a+b+c}&=\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin(\pi-3\alpha)}\\&=\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha}\\&=\frac{1}{2\cos\alpha},\end{aligned}$$

故
$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

证法二　同证法一得
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha},$$

而
$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

代入得
$$b^2=a^2+ac,$$

故
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a+c}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

评注　三角形中有关边角关系恒等式或条件等式的证明问题，通常利用正、余弦定理进行边角的转换，根据三角形内角和及三角变换公式来证明.

本题利用平面几何中相似三角形等有关知识亦可证明.

例 9　在$\triangle ABC$中，若角A、B、C成等差数列，外接圆直径为 1，若三个角所对的边分别为a、b、c，求a^2+c^2的取值范围.

解法一　由条件得$2B=A+C$，故有$B=60^\circ$，$A+C=120^\circ$.

由正弦定理得
$$\begin{aligned}a^2+c^2&=(2R\sin A)^2+(2R\sin C)^2\\&=\sin^2A+\sin^2C=\frac{1-\cos 2A+1-\cos 2C}{2}\end{aligned}$$

$$= 1-\cos(A+C)\cos(A-C)$$
$$= 1+\frac{1}{2}\cos(A-C),$$

因为 $$-120° < A-C < 120°,$$

所以 $-\frac{1}{2} < \cos(A-C) \leqslant 1$. 从而 $a^2+c^2 \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

解法二 同解法一得 $B=60°$，于是由正弦定理得 $b=2R\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理得 $b^2=\frac{3}{4}=a^2+c^2-2ac\cos 60°$.

因为 $a^2+c^2 \geqslant 2ac$，所以 $a^2+c^2=\frac{3}{4}+2ac\cos 60° \leqslant \frac{3}{4}+\frac{1}{2}(a^2+c^2)$. 从而 $a^2+c^2 \leqslant \frac{3}{2}$.

显然 $a^2+c^2=\frac{3}{4}+2ac\cos 60° > \frac{3}{4}$，故 $a^2+c^2 \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

评注 在三角形中，三角成等差数列，则 $B=60°$，$A+C=120°$，由此结合其他条件可求三角形中的有关问题.

例 10 在△ABC 中，若角 A、B、C 的对边成等差数列.

(1) 求证：$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$；

(2) 求 $5\cos A-4\cos A\cos C+5\cos C$ 之值；

(3) 若 $A-C=\frac{\pi}{2}$，求三边之比.

分析 已知三边之间的关系，利用正弦定理转化成三内角之间的关系，再和差化积后，进行整体代换.

解 (1) 由 $a+c=2b$，得 $\sin A+\sin C=2\sin B$，

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}.$$

因为 $0<\frac{A+C}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\sin\frac{A+C}{2}\neq 0$，所以 $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$，$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$，$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$.

又 $$\cos\frac{A}{2}\neq 0,\ \cos\frac{C}{2}\neq 0,$$

两边同除以 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$，得

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

(2) 由(1)知 $$2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2},$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=5(\cos A+\cos C)-2[\cos(A+C)+\cos(A-C)]\\&=10\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}-2\left[2\cos^2\frac{A+C}{2}-1+2\cos^2\frac{A-C}{2}-1\right]\\&=20\cos^2\frac{A+C}{2}-4\cos^2\frac{A+C}{2}-4\times4\cos^2\frac{A+C}{2}+4=4.\end{aligned}$$

(3) 由 $A-C=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}$，得 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

$$\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

又 $$\sin A-\sin C=2\cos\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2},$$

所以 $$\sin A=\frac{\sqrt{7}+1}{4},\ \sin C=\frac{\sqrt{7}-1}{4},$$

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1).$$

评注 整体代换是解决本题的关键技巧. 从题中条件可推知：$\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$(*)，这是十分常见的等式. 利用(*)等式还可

(1) 求值：$3\tan\dfrac{A}{2}+3\tan\dfrac{C}{2}-2\cot\dfrac{B}{2}$； (答：0)

(2) 求证：$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\geqslant\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$； (由(*)结合基本不等式即证)

(3) 求证：三角形三边成等差数列的充分必要条件是：$\cos A+2\cos B+\cos C=2$(提示：$2\sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{A-C}{2}\Leftrightarrow4\sin^2\dfrac{B}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$，再降

次即得).

例 11 根据条件,分别判定满足下列条件的$\triangle ABC$是怎样的三角形:

(1) $a\cos B=b\cos A$; (2) $a\cos A=b\cos B$.

解法一 (1) 由正弦定理,得 $2R\sin A\cos B=2R\sin B\cos A$,即 $\sin(A-B)=0$.

又 $-\pi<A-B<\pi$,所以 $A-B=0$,即 $A=B$,$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2) 由正弦定理,得 $2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B$,即 $\sin 2A=\sin 2B$.

又 $0<2A<2\pi$, $0<2B<2\pi$,所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$, $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

$\triangle ABC$ 是等腰三角形或是直角三角形.

解法二 (1) 由余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,化简得 $a=b$,$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2) 由余弦定理得 $a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2),$$
$$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4,$$
$$c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

所以 $a=b$ 或 $c^2=a^2+b^2$,$\triangle ABC$ 是等腰三角形或是直角三角形.

例 12 已知$\triangle ABC$中, $\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$,试判断其形状.

分析 利用正、余弦定理,将等式化成边之间的关系后判断;或从题设条件可联想到和差化积与积化和差,将等式化简后判断.

解法一 原等式变形为 $\cos A+\cos B=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$,

由正、余弦定理代入条件等式得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a+b}{c}$,

去分母、化简得 $a^2+b^2=c^2$,所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

解法二 由条件等式和差化积得

$$\sin(A+B)=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}},$$

即 $\sin\frac{A+B}{2}\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)=0$,显然 $\sin\frac{A+B}{2}\neq 0$, $\cos\frac{A+B}{2}\neq 0$,所

以 $\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $A+B=\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

解法三 原等式变形为 $\sin C\cdot\cos A+\sin C\cdot\cos B=\sin A+\sin B$，

$$\frac{1}{2}[\sin(C+A)+\sin(C-A)]+\frac{1}{2}[\sin(C+B)+\sin(C-B)]$$
$$=\sin A+\sin B.$$

又 $A+B+C=\pi$，故 $\sin(C-A)+\sin(C-B)-\sin A-\sin B=0$，

$$2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C-2A}{2}+2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C-2B}{2}=0,$$

得 $\quad\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C-A-B}{2}\cos\frac{B-A}{2}=0$，而 $\cos\frac{C}{2}\neq 0$，$\cos\frac{B-A}{2}\neq 0$，

得 $\sin\frac{C-A-B}{2}=0$，$C-A-B=0$，从而 $A+B=\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

评注 判断三角形形状，主要有两种方法：其一是化成三内角之间的关系，利用三角函数的恒等变形来判断；其二是化成三边之间的关系，利用“两边相等的三角形是等腰三角形、最大边的平方等于其他两边平方和的三角形是直角三角形”来判断.

例 13 在$\triangle ABC$中，A、B、C 分别表示它的三个内角，且满足 $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{1}{8}$，试判断该三角形的形状.

解 不妨设 $0<A$，$B<\frac{\pi}{2}$，因为 $A+B+C=\pi$，所以

$$\begin{aligned}\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C&=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos[\pi-(A+B)]\\&=-\cos A\cdot\cos B\cdot\cos(A+B)=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

即 $$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos(A+B)=-\frac{1}{8}.$$

从而 $$\begin{aligned}&\cos A\cdot\cos B\cdot\cos(A+B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos(A+B)=-\frac{1}{8},\end{aligned}$$

配方得 $$\begin{aligned}&\cos^2(A+B)+\cos(A-B)\cos(A+B)\\&+\frac{1}{4}[\cos^2(A-B)]+\frac{1}{4}[\sin^2(A-B)]=0.\end{aligned}$$

故 $$\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)=0.$$

即
$$\begin{cases}\cos(A+B)+\dfrac{1}{2}\cos(A-B)=0, & ①\\ \sin(A-B)=0. & ②\end{cases}$$

由①、②得 $A=B$，$\cos(A+B)=-\dfrac{1}{2}$. 所以 $A=B=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$. 即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

评注 从上面的推导过程知 $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leqslant\dfrac{1}{8}$，当 $A=B=C$ 时，取最大值. 其中 A、B、C 为三角形内角.

例 14 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $b\cos C+c\cos B=a$；

(2) $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

分析 利用正、余弦定理来证.

证法一 (1) $b\cos C+c\cos B=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B$
$$=2R\sin(B+C)=2R\sin A=a.$$

(2) 因为
$$\begin{aligned}&\sin^2A-\sin^2B\\&=\sin^2A-\sin^2A\sin^2B-\sin^2B+\sin^2A\sin^2B\\&=\sin^2A(1-\sin^2B)-\sin^2B(1-\sin^2A)\\&=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B\\&=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\\&=\sin(A+B)\sin(A-B).\end{aligned}$$

或者
$$\begin{aligned}\sin^2A-\sin^2B&=\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}\\&=-\frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2B)\\&=\sin(A+B)\sin(A-B),\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2}{c^2}&=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2C}=\frac{\sin C\cdot\sin(A-B)}{\sin^2C}\\&=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}.\end{aligned}$$

证法二 (1) $b\cos C+c\cos B=b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$$=\frac{(a^2+b^2-c^2)+(c^2+a^2-b^2)}{2a}$$

$$=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

(2) $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin C}$

$$=\frac{a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{c}$$

$$=\frac{(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)}{2c^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

评注　$\triangle ABC$ 中，$b\cos C+c\cos B=a$ 的几何意义如图 3 - 7 所示，即射影定理.

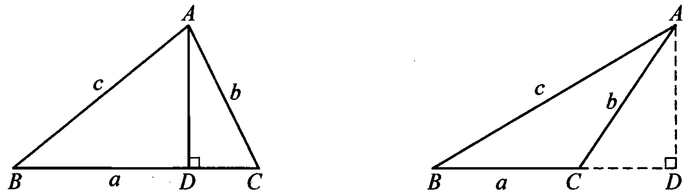


图 3 - 7

例 15　在锐角$\triangle ABC$中，

(1) 求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$；

(2) 求证：$\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

分析　三角恒等式的证明或从左到右、或从右到左、或由繁到简. 本题隐含条件 $A+B+C=\pi$，可采用两角和的正切公式来证. 第(2)题利用基本不等式 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R}^+)$.

证明　(1) 由 $A+B=\pi-C$ 得

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C),$$

即

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C,$$

去分母即得原等式成立.

(2) 因为 $\tan A,\ \tan B,\ \tan C>0$，所以

$$\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C},$$

即 $$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}.$$

两边立方后再开方得 $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geqslant 3\sqrt{3}$，即

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqslant 3\sqrt{3}.$$

评注 若将题设条件改成 $A+B+C=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,且 $A+B+C\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,结论仍成立.

例 16 在$\triangle ABC$中,若角 A、B、C 的三角关系式是 $y=2+\cos C\cdot\cos(A-B)-\cos^2 C$.

(1) 若任意交换 A、B、C 的位置,y 的值是否会发生变化? 试证明你的结论;

(2) 求 y 的最大值.

分析 如此问题,应猜想 y 是轮换对称式,其值才不变,故将原关系式进行恒等变形,分析其特征,从而判断之.至于最值求法则通过放缩而得.

解 (1)
$$\begin{aligned} y &= 2+\cos C\cdot\cos(A-B)-\cos^2 C \\ &= 2-\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)-\cos^2 C \\ &= 2-\cos^2 A\cdot\cos^2 B+\sin^2 A\cdot\sin^2 B-\cos^2 C \\ &= \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C, \end{aligned}$$
由此可知任意交换 A、B、C 的位置,y 的值不会发生变化.

(2) 不妨设 C 为锐角,则 $\cos C>0$, $\cos(A-B)\leqslant 1$,从而

$$y\leqslant 2+\cos C-\cos^2 C=-\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4},$$

当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时,$y_{\max}=\frac{9}{4}$.

评注 “大胆猜想,小心求证”是数学发现的至理名言.题中问题具有探索性,须经猜想,方可确定目标.对于题(2),也许有的学生以为既然“y 的值不会发生变化”,那为什么又要求最大值呢? 这是混淆了“无论 A、B、C 取何值,y 的值不会发生变化”与“任意交换 A、B、C 的位置,y 的值不会发生变化”的意义.

例 17 $\triangle ABC$ 是一个已知的锐角三角形,正$\triangle DEF$ 外接于$\triangle ABC$.求$\triangle DEF$ 面积的极大值.

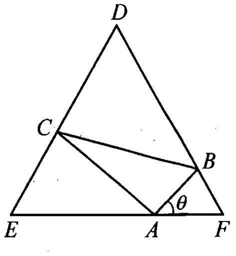


图 3-8

解 如图 3-8,设$\angle CAB$ 为$\triangle ABC$ 的最大角.由 $S_{\triangle DEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}EF^2$,知 EF 最大时,$S_{\triangle DEF}$ 也最大.而 EF 由$\angle BAF$ 所唯一确定,故可选取 $\angle BAF=\theta$ 为自变量,则$\angle ABF=120^\circ-\theta$, $\angle ACE=(\theta+\angle CAB)-60^\circ$.由正弦定理,得

$$
\begin{aligned}
EF &= AF + AE \\
&= \frac{c\sin(120^\circ-\theta)}{\sin 60^\circ} + \frac{b\sin(\theta+\angle CAB-60^\circ)}{\sin 60^\circ} \\
&= \frac{2\sqrt{3}k}{3}\cdot\sin(\theta+\varphi).
\end{aligned}
$$

其中
$$
\begin{aligned}
k &= \{[c\cos 60^\circ + b\cos(\angle CAB-60^\circ)]^2 \\
&\quad + [c\sin 60^\circ + b\sin(\angle CAB-60^\circ)]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{c^2+b^2+2bc\cos(120^\circ-\angle CAB)},
\end{aligned}
$$

$\varphi = \arccos\dfrac{c\cos 60^\circ + b\cos(\angle CAB-60^\circ)}{k}$ 为锐角.

当 $\theta = 90^\circ - \varphi$ 时，EF 有最大值 $\dfrac{2\sqrt{3}k}{3}$，此时 θ 也是锐角，故 $60^\circ < \angle CAB + \theta < 180^\circ$，相应的 $\triangle DEF$ 确是 $\triangle ABC$ 的外接正三角形.

则 $S_{\triangle DEF}$ 的最大值是 $\dfrac{\sqrt{3}k^2}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}[b^2+c^2+2bc\cos(120^\circ-\angle CAB)]$.

例 18 已知$\triangle ABC$的三边 a、b、c 和面积 S 有如下关系：$S = a^2-(b-c)^2$，且 $b+c=8$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

分析 最值问题通常用函数性质来求. 本题从条件出发，利用余弦定理和三角形面积公式去求角 A 的正弦函数值，再将面积 S 转化为关于 b 或 c 的二次函数来求解.

解法一 由条件可得

$$S = a^2-(b-c)^2 = \frac{1}{2}bc\sin A,$$

而
$$a^2-(b-c)^2 = 2bc-2bc\cos A,$$

所以
$$2bc-2bc\cos A = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

则
$$\cos A = 1-\frac{1}{4}\sin A,$$

故
$$\frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{1}{4},$$

即
$$\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{4},$$

所以 $$\sin A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{8}{17}.$$

故

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{4}{17}bc=\frac{4}{17}b(8-b)=\frac{4}{17}[-(b-4)^2+16],$$

当且仅当 $b=c=4$ 时，$S_{\max}=\frac{64}{17}$.

解法二 利用海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 和已知条件得

$$a^2-(b-c)^2=\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)},$$

两边平方得 $$a^2-(b-c)^2=\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a),$$

即 $$a^2=b^2+c^2-\frac{30}{17}bc.$$

由此可得 $\cos A=\frac{15}{17}$，故 $\sin A=\frac{8}{17}$.

所以

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{4}{17}bc=\frac{4}{17}b(8-b)=\frac{4}{17}[-(b-4)^2+16],$$

当且仅当 $b=c=4$ 时，$S_{\max}=\frac{64}{17}$.

例 19 如图 3-9，平面上有四个点 A、B、P、Q，其中 A、B 为定点，且 $AB=\sqrt{3}$，P、Q为动点，满足 $AP=PQ=QB=1$，又 $\triangle APB$ 和 $\triangle PQB$ 的面积分别为 S 和 T，求 S^2+T^2 的最大值.

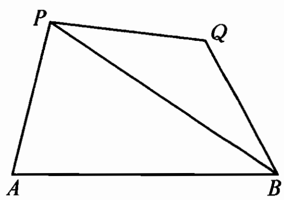


图 3-9

解 $$S=\frac{1}{2}PA\cdot AB\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A,$$

$$T=\frac{1}{2}PQ\cdot QB\cdot\sin Q=\frac{1}{2}\sin Q,$$

所以 $$S^2+T^2=\frac{3}{4}\sin^2A+\frac{1}{4}\sin^2Q.$$

由余弦定理，在$\triangle PAB$ 中，

$$PB^2=PA^2+AB^2-2\cdot PA\cdot AB\cdot\cos A=4-2\sqrt{3}\cos A,$$

在$\triangle PQB$中，

$$PB^2=PQ^2+QB^2-2PQ\cdot QB\cos Q=2-2\cos Q,$$

所以

$$4-2\sqrt{3}\cos A=2-2\cos Q,$$

即 $\cos Q=\sqrt{3}\cos A-1$.

所以
$$\begin{aligned}S^2+T^2&=\frac{3}{4}(1-\cos^2 A)+\frac{1}{4}(1-\cos^2 Q)\\&=-\frac{3}{2}\cos^2 A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{3}{4}\\&=-\frac{3}{2}\left(\cos A-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{7}{8},\end{aligned}$$

当 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，S^2+T^2 有最大值$\frac{7}{8}$.

例 20 已知$\triangle ABC$的三个内角A、B、C满足$A+C=2B$，设$x=\cos\frac{A-C}{2}$，$f(x)=\cos B\cdot\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}\right)$.

(1) 试求函数$f(x)$的解析式及其定义域；

(2) 判断其单调性，并加以证明；

(3) 求这个函数的值域.

解 (1) 因为$A+C=2B$，所以$B=60^\circ$，$A+C=120^\circ$，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos A+\cos C}{\cos A\cdot\cos C}\\&=\frac{2\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}}{\cos(A+C)+\cos(A-C)}\\&=\frac{x}{-\frac{1}{2}+2x^2-1}=\frac{2x}{4x^2-3}.\end{aligned}$$

由 $0^\circ\leqslant\left|\frac{A-C}{2}\right|<60^\circ$，得 $x=\cos\frac{A-C}{2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

又因为 $4x^2-3\neq 0$，所以 $x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $f(x)$ 的定义域为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

(2) 设 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2x_2}{4x_2^2-3}-\frac{2x_1}{4x_1^2-3}=\frac{2(x_1-x_2)(4x_1x_2+3)}{(4x_1^2-3)(4x_2^2-3)}.$$

若 $x_1, x_2 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，易得 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$；

若 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$，同样易得 $f(x_2)<f(x_1)$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 都是减函数.

(3) 由(2)得 $f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ 或 $f(x)\geqslant f(1)=2$，所以 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup[2, +\infty)$.

习 题 3

一、选择题

1 在△ABC 中，a、b、c 三边成等差数列，则（　　）.

(A) $0<B<60°$　　(B) $0<B\leqslant 60°$

(C) $30°<B\leqslant 60°$　　(D) $45°<B\leqslant 60°$

2 在 △ABC 中，下列表达式：①$\sin(A+B)+\sin C$；②$\cos(A+B)+\cos C$；③$\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}$；④$\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}$ 中，表示常数的是（　　）.

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②③　　(D) ①④

3 在△ABC 中，$A=60°$，$a=\sqrt{6}$，$b=4$，则满足条件的三角形有（　　）.

(A) 一解　　(B) 两解

(C) 无解　　(D) 不能确定

4 在△ABC 中，若 $\sin A-2\sin B\cos C=0$，则其形状为（　　）.

(A) 直角三角形　　(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形　　(D) 等边三角形

5 在直角三角形中，$\angle C=90°$，则 $\sin A\cos^2\left(45°-\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$（　　）.

(A) 有最大值$\frac{1}{4}$和最小值 0　　(B) 有最大值$\frac{1}{4}$但无最小值

(C) 既无最大值又无最小值　　(D) 有最大值$\frac{1}{2}$但无最小值

6 已知锐角$\triangle ABC$的边长分别为 2、3、x，则第三边 x 适合的条件是(　　).

(A) $1<x<5$　　(B) $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$

(C) $\sqrt{13}<x<5$　　(D) $1<x<\sqrt{5}$

7 R 是$\triangle ABC$的外接圆半径，若 $ab<4R^2\cos A\cos B$，则$\triangle ABC$的外心位于(　　).

(A) 三角形的外部　　(B) 三角形的边上

(C) 三角形的内部　　(D) 无法判断

8 已知$\triangle ABC$的三边 a，b，c 成等比数列. a、b、c 所对的角依次为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，则 $\sin B+\cos B$ 的取值范围是(　　).

(A) $\left(1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　(B) $\left[\frac{1}{2},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(C) $(1,\ \sqrt{2}]$　　(D) $\left[\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right]$

9 已知向量$\overrightarrow{OP}=\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\ -1\right)$，$\overrightarrow{OQ}=\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ \cos 2x\right)$，$f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$. 若 a、b、c 分别是锐角$\triangle ABC$中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，且满足 $f(A)=1$，$b+c=5+3\sqrt{2}$，$a=\sqrt{13}$，则$\triangle ABC$的面积 $S=$ (　　).

(A) $15\sqrt{2}$　　(B) 15　　(C) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{15}{2}$

10 设 θ 是三角形中的最小内角，且 $a\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}-a\sin^2\frac{\theta}{2}=a+1$，则 a 适合的条件是(　　).

(A) $a<-1$　　(B) $a<-3$

(C) $a\leqslant-3$　　(D) $-3\leqslant a<-1$

二、填空题

11 在$\triangle ABC$中，已知 $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$，则 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=$ ________.

12 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，则其最小内角= ________.

13 一个三角形三内角 A、B、C 成等差数列，则 $\cos^2 A+\cos^2 C$ 的最小值是 ________.

14 在$\triangle ABC$中，$3\sin A+4\cos B=6$，$4\sin B+3\cos A=1$，则角 $C=$

________.

15 在$\triangle ABC$中，已知$2\lg(a^2+b^2-c^2)=\lg 2+2\lg a+2\lg b$，则角$C=$________.

16 在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=6$，$S_\triangle=6\sqrt{2}$，则角$C=$________.

17 在$\triangle ABC$中，若$\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，且最长的边的长为1，则最短的边的长等于________.

18 $\triangle ABC$的外接圆半径为$2\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$________.

19 三角形的两边分别为3 cm、5 cm，它们的夹角的余弦为方程$5x^2-7x-6=0$的根，则这个三角形的面积为________.

20 在$\triangle ABC$中，$B=60°$，面积为$10\sqrt{3}$，外接圆半径为$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，则各边长为________.

三、解答题

21 锐角$\triangle ABC$中，若$\cos^2A$、$\cos^2B$、$\cos^2C$的和等于$\sin^2A$、$\sin^2B$、$\sin^2C$中的某个值. 证明：$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$必可按某顺序组成一个等差数列.

22 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)\geqslant 8\cos A\cos B\cos C$.

23 $\triangle ABC$的三条边长为a、b、c，证明：

$$\frac{|a^2-b^2|}{c}+\frac{|b^2-c^2|}{a}\geqslant\frac{|c^2-a^2|}{b}.$$

24 已知$\triangle ABC$的外接圆、内切圆半径分别为R和r，求证：

$$\frac{\cos A}{\sin^2A}+\frac{\cos B}{\sin^2B}+\frac{\cos C}{\sin^2C}\geqslant\frac{R}{r}.$$

25 在$\triangle ABC$中，实数x满足$\sec^2x=\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C$，求证：$\cos[x+(-1)^nA]\cdot\cos[x+(-1)^nB]\cdot\cos[x+(-1)^nC]+\cos^3x=0$ $(n\in\mathbf{N})$.

26 设α、β、γ、φ为某四边形的四个内角，设n $(n\geqslant 3)$为奇数，若α、β、γ、φ满足$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\varphi=0$. 求证：它们之中必有两个角之和在集合$\left\{\dfrac{2\pi}{n},\dfrac{4\pi}{n},\cdots,\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right\}$中.

27 在$\triangle ABC$中，若$\sin A\cos^2\dfrac{C}{2}+\sin C\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}\sin B$，求证：(1)$a$、$b$、$c$成等差数列；(2)$0<\sin\dfrac{B}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

28 在锐角三角形 ABC 中，已知 $A<B<C$，$B=60°$，又 $\sqrt{(1+\cos 2A)(1+\cos 2C)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，试比较 $a+\sqrt{2}b$ 与 $2c$ 的大小，并证明你的结论.

29 设三角形的三边 a、b、c 满足 $a>b>c$，在此三角形的两边上分别取点 P、Q，使线段 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，求使 PQ 长度为最短的点 P、Q 的位置.

30 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{\cos A}{\sin B}+\frac{\cos B}{\sin A}=2$，且该三角形的周长为 12，求这个三角形面积的最大值.

4 反三角函数与简单的三角方程

当三角函数的自变量定义域规定在某个单调区间，符合一一对应关系时，就存在了反函数，即反三角函数.根据互为反函数的定义域与值域之间的关系可知，反正弦函数、反余弦函数的定义域是$[-1,\ 1]$，反正切函数、反余切函数的定义域为$\mathbf{R}$，反正弦函数的值域(主值区间)为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，反余弦函数的值域为$[0,\ \pi]$，反正切函数的值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，反余切函数的值域为$(0,\ \pi)$，且反正弦函数和反正切函数是单调递增的奇函数，反余弦函数和反余切函数是单调递减的非奇非偶函数.

形如$\sin x=a$，$\cos x=a$，$\tan x=a$，$\cot x=a$的方程是最基本、最简单的三角方程，它们的解分别是：$x=n\pi+(-1)^n\arcsin a$，$(|a|\leqslant 1)$；$x=2n\pi\pm\arccos a$，$(|a|\leqslant 1)$；$x=n\pi+\arctan a$；$x=n\pi+\operatorname{arccot} a$；$(n\in\mathbf{Z})$

在反三角函数中，有下列重要恒等式：(1) $\sin(\arcsin x)=x$，$x\in[-1,\ 1]$；$\cos(\arccos x)=x$，$x\in[-1,\ 1]$；$\tan(\arctan x)=x$，$x\in\mathbf{R}$；

(2) $\arcsin(\sin x)=x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$；$\arccos(\cos x)=x$，$x\in[0,\ \pi]$；$\arctan(\tan x)=x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

例1 设$f(x)=x^2-\pi x$，$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$，$\beta=\arctan\frac{5}{4}$，$\gamma=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$，$\varphi=\operatorname{arccot}\left(-\frac{5}{4}\right)$，则(　　).

(A) $f(\alpha)>f(\beta)>f(\varphi)>f(\gamma)$　　(B) $f(\alpha)>f(\varphi)>f(\beta)>f(\gamma)$

(C) $f(\varphi)>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$　　(D) $f(\varphi)>f(\alpha)>f(\gamma)>f(\beta)$

解 选B.由题意，$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，且在$\left(-\infty,\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调递减，在$\left(\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$内单调递增，所以，当$\left|x_1-\frac{\pi}{2}\right|>\left|x_2-\frac{\pi}{2}\right|$时，有

$f(x_1)>f(x_2)$.

又知 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}<\varphi<\frac{5\pi}{6}$，所以 $0<\left|\gamma-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{6}<\left|\beta-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{4}<\left|\varphi-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{3}<\left|\alpha-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$，故有 $f(\alpha)>f(\varphi)>f(\beta)>f(\gamma)$.

评注　正确估算角的范围是求解本题的关键.

例 2　证明 $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\arctan\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

分析　要证两角相等，常常证明这两角的某个三角函数相等，此时一定要保证这两角在这个三角函数的同一个一一对应区间内.

证明　因为

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\tan\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tan\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

$$\tan\left[\arctan\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

因为 $$0<\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\pi}{4},\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4},$$

所以 $$0<\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\pi}{2},$$

又 $$0<\arctan\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}<\frac{\pi}{2},$$

而在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内正切相等的角唯一，故

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\arctan\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

例 3　解方程 $\cos^n x-\sin^n x=1$，$(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析　直接求解有困难，可以通过对 n 奇偶讨论.

解　当 n 为偶数时，$\cos^n x=1+\sin^n x\geqslant 1$，而 $\cos^n x\leqslant 1$，则必须有

$\cos^n x=1 \Rightarrow \cos x=\pm 1$，所以 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 n 为奇数时，由 $\cos^n x=1+\sin^n x\geqslant 0$ 及 $\sin^n x=\cos^n x-1\leqslant 0$，知原方程同解于 $|\cos x|^n+|\sin x|^n=1$，比较公式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 可知.

若 $x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$，则 $0<|\cos x|<1$，$0<|\sin x|<1$，于是当 $n>2$ 时，$|\cos x|^n+|\sin x|^n<\cos^2 x+\sin^2 x=1$，故当 $x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$ 时，方程无解.

当 $n=1$ 时，$|\cos x|^n+|\sin x|^n=|\cos x|+|\sin x|=\sqrt{(|\cos x|+|\sin x|)^2}>\sqrt{|\cos x|^2+|\sin x|^2}=1$，此时也无解.

对 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，通过验证可知，$x=2k\pi$，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 是原方程的解.

综上可知，当 n 为偶数时，原方程的解为 $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$；当 n 为奇数时，$x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

评注　由 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$，联想 $|\cos^n x|+|\sin^n x|$ 与 1 的大小关系，同时结合 $|\cos x|\leqslant 1$，$|\sin x|\leqslant 1$，对解的情形进行估算.

例 4　解不等式

$$2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

解　设 $\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|=2y$，则原不等式变形为 $\cos x\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，且有 $2y=||\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x||$.

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$y=|\sin x|$，原不等式变为 $\cos x\leqslant|\sin x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，验证得 $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

(2) 当 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$ 时，$y=|\cos x|$，原不等式变为 $\cos x\leqslant|\cos x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，都成立.

综上，解集为 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$.

评注　本例的关键是根据范围去绝对值，化简.

例 5　求所有的常数 C，使得函数 $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}+C$，在区间

$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$上为奇函数.

分析 因为 0 在定义域内，所以可根据 $f(0)=0$ 得 C 的必要条件，再验证是否为奇函数.

解 如果 $f(x)$ 为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 上的奇函数，则 $f(0)=0$，于是 $C=-\arctan 2$.

下面证明 $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}-\arctan 2$ 是奇函数.

当 $x\in\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 时，函数 $u(x)=\frac{2-2x}{1+4x}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{1+4x}-1\right)$，故 $u(x)\in\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$，所以 $f(x)=\arctan u(x)-\arctan 2\in\left(\arctan\frac{3}{4}-\arctan 2, \frac{\pi}{2}-\arctan 2\right)\subsetneqq\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

显然 $-f(-x)\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上一一对应，故要证 $f(-x)=-f(x)$，只要证明 $\tan[-f(-x)]=\tan f(x)$，

$$\begin{aligned}\tan f(x)&=\tan[\arctan u(x)-\arctan 2]\\&=\frac{u(x)-2}{1+2u(x)}=\frac{(2-2x)-2(1+4x)}{1+4x+2(2-2x)}=-2x,\end{aligned}$$

又 $\tan[-f(-x)]=\tan[\arctan 2-\arctan u(-x)]$

$$=\frac{2-u(-x)}{1+2u(-x)}=\frac{2(1-4x)-(2+2x)}{1-4x+2(2+2x)}=-2x,$$

所以，当且仅当 $C=-\arctan 2$ 时，函数 $f(x)$ 为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 上的奇函数.

评注 本例也可直接用反三角函数进行运算，这里根据奇函数的反函数也是奇函数进行证明.

例 6 求方程 $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$ 的实数解.

解 由题意知 $x, y>1$，可设 $x=\sec^2\alpha, y=\csc^2\beta$，其中 $0<\alpha、\beta<\frac{\pi}{2}$，代入原方程得，

$$\sec^2\alpha\sqrt{\csc^2\beta-1}+\csc^2\beta\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\sec^2\alpha\csc^2\beta,$$

即
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin^2\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow \qquad \sin\beta\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha=1$$

$$\Rightarrow \qquad \sin 2\alpha+\sin 2\beta=2，又\ \sin 2\alpha\leqslant 1,\ \sin^2\beta\leqslant 1,$$

故 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta=1$，从而 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $x=y=2$，经检验知，$x=y=2$ 是原方程的解.

评注 恰当的三角换元，能够使复杂的代数问题转化为简单的三角问题，使问题得到解决.

例 7 若$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，则方程 $[\cot x]=2\cos^2 x$ 的解集是________.

解 因为 $[\cot x]=2\cos^2 x$，故 $2\cos^2 x$ 取整数.

又 $2\cos^2 x\in[0,2]$，所以 $\cos^2 x=0$，$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$，$\cos^2 x=1$.

当 $\cos x=0$ 时，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\cot x=\pm 1$，只有 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $\cos x=\pm 1$ 时，$\sin x=0$，无意义，舍去.

故应填 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

例 8 求证：$\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{7}+\arctan\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

分析 本题化归为求四角和的三角函数值，将证明题改编为计算题.

证明 设
$$\alpha=\arctan\frac{1}{3},\ \beta=\arctan\frac{1}{5},$$
$$\gamma=\arctan\frac{1}{7},\ \delta=\arctan\frac{1}{8},$$

则
$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\ \tan\beta=\frac{1}{5},$$
$$\tan\gamma=\frac{1}{7},\ \tan\delta=\frac{1}{8},$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right).$$

于是
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{4}{7},\ \tan(\gamma+\delta)=\frac{3}{11},$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\in(0,\ \pi).$$

所以
$$\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1.$$

从而 $$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}.$$

评注 有关反三角恒等式的证明须掌握两点：其一证明等式两边的角的同一个三角函数值相等；其二证明等式两边都在所取三角函数的同一个一一对应的区间内.

例9 求证：$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{13}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}=\arctan\frac{n}{n+2}$.

分析 形如数列求和的三角函数式，通常采用"裂项"或"配对"之法，如何将 $\arctan\frac{1}{1+n+n^2}$ 一分为二呢，通过构造等式来解之.

证明 设 $$f(n)=\frac{n}{n+2},$$

则 $$\frac{f(n)-f(n-1)}{1+f(n)f(n-1)}=\frac{\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}}{1+\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}}=\frac{n^2+n-(n^2+n-2)}{2n^2+2n+2}=\frac{1}{n^2+n+1}.$$

即 $$\tan\left(\arctan\frac{1}{1+n+n^2}\right)=\frac{\tan[\arctan f(n)]-\tan[\arctan f(n-1)]}{1+\tan[\arctan f(n)]\cdot\tan[\arctan f(n-1)]}=\tan[\arctan f(n)-\arctan f(n-1)],$$

从而 $$\arctan\frac{1}{1+n+n^2}=\arctan f(n)-\arctan f(n-1)=\arctan\frac{n}{n+2}-\arctan\frac{n-1}{n+1}.$$

所以 $$\begin{aligned}左式&=\arctan\frac{1}{3}+\left(\arctan\frac{2}{4}-\arctan\frac{1}{3}\right)\\&\quad+\left(\arctan\frac{3}{5}-\arctan\frac{2}{4}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\arctan\frac{n}{n+2}-\arctan\frac{n-1}{n+1}\right)\\&=\arctan\frac{n}{n+2}.\end{aligned}$$

评注　本题又可改编为 $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}+\arctan\frac{1}{n+1}=\frac{\pi}{4}$.

例 10　求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

分析　证明反三角恒等式的基本步骤是：(1)证等式两边的角的同名三角函数值相等；(2)证角的唯一性.

证明　$\sin(\arcsin x+\arccos x)$

$=\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arccos x)+\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arccos x)$

$=x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=1=\sin\frac{\pi}{2}$.

又因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，所以

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x+\arccos x\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ 上，$\sin\alpha=1$ 的角 α 是唯一的，只有 $\frac{\pi}{2}$，即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

评注　同理可证：$\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$，

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}.$$

例 11　若 x_1、x_2 是方程 $x^2+6x+7=0$ 的两根，求 $\arctan x_1+\arctan x_2$ 值.

分析　由一元二次方程之根联想韦达定理，利用结果求 $\arctan x_1+\arctan x_2$ 的某个三角函数值，再反求其角度.

解　由　$x_1+x_2=-6$，$x_1\cdot x_2=7$，

得　$\tan(\arctan x_1+\arctan x_2)=1$，

且由　$x_1<0$，$x_2<0$，

可知　$\arctan x_1$，$\arctan x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

得　$\arctan x_1+\arctan x_2\in(-\pi,0)$，

从而
$$\arctan x_1+\arctan x_2=-\frac{3}{4}\pi.$$

评注 当所求角的正切值为1时，学生误认为所求角一定为$\frac{\pi}{4}$. 其实不然，由 $x_1<0$，$x_2<0$，可知 $\arctan x_1$，$\arctan x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 是本题之关键，即估算所求角大致在什么范围，是引起学生警惕的重要步骤.

推广：当 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+mx+(m+1)=0$ 的两根，且 $m>0$，则 $\arctan x_1+\arctan x_2=-\frac{3}{4}\pi$.

例 12 若 x_1、x_2 是方程 $x^2-x\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 的两个根，且 $0<\alpha<\pi$，求 $\arctan x_1+\arctan x_2$ 的值.

解 由韦达定理，$x_1+x_2=\sin\alpha$，$x_1\cdot x_2=\cos\alpha$，所以
$$\tan(\arctan x_1+\arctan x_2)=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$=\cot\frac{\alpha}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

因为 $-\pi<\arctan x_1+\arctan x_2<\pi$，以及 $0<\alpha<\pi$，故
$$0<\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以
$$\arctan x_1+\arctan x_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

或
$$\arctan x_1+\arctan x_2=-\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

例 13 求函数 $f(x)=2\arccos\left(\frac{x^2-x}{2}\right)$ 的定义域、值域及单调区间.

分析 从定义出发，根据反三角函数的图象与性质回答问题.

解 由 $-1\leqslant\frac{x^2-x}{2}\leqslant1$，得定义域是 $x\in[-1,2]$；

由
$$\frac{x^2-x}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\in\left[-\frac{1}{8},1\right],$$

故值域是 $$y \in \left[0,\ 2\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)\right];$$

由上述两步可知 $x \in \left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 是单调递增的，$x \in \left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 时，$f(x)$ 是单调递减的.

评注　在求函数单调性时，必须考虑函数定义域. 有关复合函数的单调区间求法可根据“增增得增，增减得减，减减得增”的记忆法则求之，本题中设 $t = \frac{1}{2}(x^2 - x)$，则 $y = 2\arccos t$ 是复合函数.

例 14　满足 $\arccos(1-x) \geqslant \arccos x$ 的 x 的取值范围是(　　).

(A) $\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right]$　　(B) $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$

(C) $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$　　(D) $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$

分析　反余弦函数 $y = \arccos x$ 在定义域 $[-1,\ 1]$ 内是单调递减函数，所以有 $\begin{cases} |1-x| \leqslant 1, \\ |x| \leqslant 1, \\ 1-x \leqslant x, \end{cases}$ 解得 $x \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$.

所以，选 D.

评注　函数定义域是必须考虑的条件，本题如仅考虑 $1-x \leqslant x$，在选项中最佳答案仍是 D，但这仅仅是“偶尔恰恰”而已，不能作一般方法.

例 15　方程 $\sin 2x = \sin x$ 在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内解的个数是(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

分析　对于选择题来说，可利用直接求解法或通项求解法.

解法一　将原方程化为 $\sin x(2\cos x - 1) = 0$，在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内 $\sin x = 0$ 有一解 $x = \pi$；$2\cos x - 1 = 0$ 有两解 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$；故共有三解.

解法二　对于简单的三角方程 $\sin x = \sin \alpha$，其解是 $x = n\pi + (-1)^n \alpha$，$(n \in \mathbf{Z})$，因此本题解法二，由原方程得 $2x = n\pi + (-1)^n x$，即 $x = 2k\pi$ 或 $x = \frac{2k+1}{3}\pi$，在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内，取 $k = 0$、1、2 得三解.

解法三　遇到形如 $\sin\alpha \pm \sin\beta$ 等形式的三角函数式也可联想到和差化积，即原方程化为 $\sin 2x - \sin x = 0$，得 $2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$，从而在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内得三解.

所以，选 C.

评注　在本题中若将方程两边约去 $\sin x$，则失根. 如仅考虑当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时，

$\cos x=\frac{1}{2}$，则也漏解. 试问方程 $\tan x(\sin x-1)=\sin x-1$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内解的个数是多少?

例 16　解方程 $\sin^2 x-3\sin x\cos x+1=0$.

分析　通过"1"的代换可将原方程化成齐次型，转化为关于 $\tan x$ 的二次方程再解之；亦可通过"降次"，转化为 $a\sin 2x+b\cos 2x=c$ 的方程解之.

解法一　由原方程得

$$2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0,$$

显然 $\cos x\neq 0$，则有　$2\tan^2 x-3\tan x+1=0$,

得

$$\tan x=\frac{1}{2}\text{ 或 }\tan x=1.$$

从而 $x=k\pi+\arctan\frac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

解法二　由原方程得

$$\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{3}{2}\sin 2x+1=0,$$

即

$$3\sin 2x+\cos 2x=3.$$

于是

$$\sin(2x+\varphi)=\frac{3}{\sqrt{10}},$$

其中

$$\varphi=\arctan\frac{1}{3},$$

所以

$$2x+\varphi=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

故 $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

评注　三角方程的解的表示法并不唯一，在本题中角 $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$ 与角 $\arctan\frac{1}{3}$ 互余，两种答案是等价的；形如 $a\sin x+b\cos x=c$ 的三角方程通常在方程两边除以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 后化成 $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$，其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，再求之；而形如 $a\sin x+b\cos x=0$ 和

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ 等齐次型，可转化为关于 $\tan x$ 的二次方程再求解.

例 17　关于 x 的方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x+a=0$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 内有两个相异的实数解 α、β，求实数 a 的取值范围及 $\alpha+\beta$ 之值.

分析　将原方程化为 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+a=0$，再由值域求 a 的取值范围. 也可将方程之解看成两个函数图象的交点横坐标，从图象观察出 a 的取值范围，由此解法同时可求 $\alpha+\beta$ 之值.

解法一　由原方程得 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+a=0$，结合题设条件得

$$\begin{cases}|-a|<2,\\-a\neq\sqrt{3}.\end{cases}$$

即 $-2<a<2$ 且 $a\neq-\sqrt{3}$.

解法二　设 $y_1=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$y_2=-a$，在同一直角坐标系中分别作出它们的图象，如图 4－1，由此观察，即得 $\begin{cases}|-a|<2,\\-a\neq\sqrt{3},\end{cases}$ 即 $-2<a<2$ 且 $a\neq-\sqrt{3}$；再从图象可知，实数解 α、β 关于对称轴 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 对称，从而 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{7\pi}{3}$.

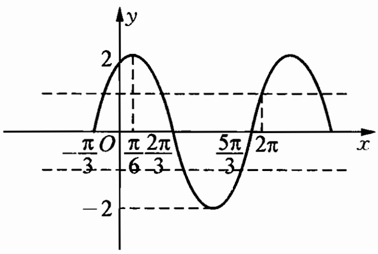


图 4－1

本题有关 $\alpha+\beta$ 之值的求法，另有：

因 α、β 是方程的实数解，故

$$2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+a=2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+a=0,$$

由和差化积公式得 $\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$，$\alpha\neq\beta$，得 $\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，从而 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，在 $(0,\ 2\pi)$ 中，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{7\pi}{3}$.

评注　关于方程解的个数问题，是“数形结合”的典型例题，利用图象法判断，既迅速又准确.

例 18　就实数 a 的取值范围，讨论关于 x 的方程

$$\cos 2x+2\sin x+2a-3=0$$

在$[0, 2\pi]$内解的情况.

分析　利用倍角公式将原方程化为关于$\sin x$的方程后，再用"图象法"判断解的分布情况.

解　原方程化为
$$\sin^2 x-\sin x=a-1,$$
配方得
$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2=a-\frac{3}{4}.$$
设
$$y_1=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2,\ y_2=a-\frac{3}{4},$$
分别作出它们的图象如图 4－2，由此观察，得

(1) 当$a-\frac{3}{4}<0$或$a-\frac{3}{4}>\frac{9}{4}$，即$a<\frac{3}{4}$或$a>3$时，方程无解；

(2) 当$a-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$，即$a=3$时，方程有一解$x=\frac{3}{2}\pi$；

(3) 当$\frac{1}{4}<a-\frac{3}{4}<\frac{9}{4}$或$a-\frac{3}{4}=0$，即$1<a<3$或$a=\frac{3}{4}$时，方程有两解；

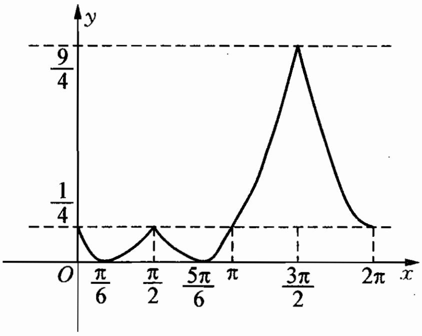


图 4－2

(4) 当$a-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，即$a=1$时，方程有四解$x=0, \frac{1}{2}\pi, \pi, 2\pi$；

(5) $0<a-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$，即$\frac{3}{4}<a<1$时，方程有四解.

评注　在$[0, 2\pi]$内，以$t=\sin x$为横轴，则函数$y=a\sin^2 x+b\sin x+c$ $(a\neq 0)$可化为$y=at^2+bt+c$的图象是在$[-1, 1]$上的一段曲线，再在区间$[-1, 1]$上加以讨论.

例 19　已知α、β是方程$a\cos x+b\sin x=c$的两个相异的根，且$\alpha\pm\beta\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$ab\neq 0$，求证：(1) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$；(2) $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

证明　(1) 由条件得
$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c, \quad ①$$
$$a\cos\beta+b\sin\beta=c, \quad ②$$

由①－②得

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0,$$

和差化积得

$$-2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

因为 $\alpha\pm\beta\neq k\pi$，所以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$，$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq0$. 故 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$，

从而

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

（2）由(1)可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\times\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

由①×②得

$$a^2\cos\alpha\cos\beta+ab(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+b^2\sin\alpha\sin\beta=c^2,$$

即

$$\frac{1}{2}a^2[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]+ab\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}b^2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=c^2.$$

所以

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2\right)\cos(\alpha-\beta)=c^2-\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2\right)\times\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-ab\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

即

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{2c^2}{a^2+b^2}-1,$$

从而

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

例 20　解方程 $\sin 30^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin x=\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin(x+40^\circ)$.

解　原方程可化为 $\dfrac{\sin(x+40^\circ)}{\sin x}=\dfrac{\sin 30^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ}$

$$=\frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cos 20^\circ.$$

即
$$\cos 40^\circ+\sin 40^\circ \cdot \cot x=2\cos 20^\circ.$$

所以
$$\begin{aligned}\cot x&=\frac{2\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\\&=\frac{\cos 20^\circ+\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\\&=\frac{\cos 20^\circ+2\sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}\\&=\frac{\sin 70^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}\\&=\frac{2\sin 40^\circ \cos 30^\circ}{\sin 40^\circ}=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

故所求解集为 $\{x \mid x=k \cdot 180^\circ+30^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

习　题　4

一、选择题

1 下列命题恒成立的是(　　).

(A) $\arctan x=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$

(B) $\arcsin x=\arccos \sqrt{1-x^2}\ (x \in[-1,1])$

(C) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\pi$

(D) $\operatorname{arccot} x+\operatorname{arccot}(-x)=\pi$

2 若 $(a+1)(b+1)=2$,则 $\arctan a+\arctan b=$(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{5\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{5\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$或$-\dfrac{3\pi}{4}$

3 若 $\arcsin x+\arctan \dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$,则 x 等于(　　).

(A) $\dfrac{6}{7}$　　(B) $\dfrac{3}{5}$　　(C) $\dfrac{5}{6}$　　(D) $\dfrac{3}{7}$

4 记 $a=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$，$b=\arccos\frac{1}{4}$，$c=\arctan 1$，则它们的关系是(　　).

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $b<c<a$　(D) $c<b<a$

5 已知 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，则 $\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$ 的值为(　　).

(A) $x+\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\pi}{2}-x$　(C) $x-\frac{3\pi}{4}$　(D) $\frac{3\pi}{4}-x$

6 设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1,x>0\}$，$N=\{(x,y)\mid \arctan x+\operatorname{arccot} y=\pi\}$，那么(　　).

(A) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1\}$

(B) $M\cup N=M$

(C) $M\cup N=N\cup\{(0,0)\}$

(D) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1$，且 x、y 不同时为负数$\}$

7 已知方程 $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin x$，则(　　).

(A) $x=\frac{24}{25}$　(B) $x=-\frac{24}{25}$　(C) $x=0$　(D) 无解

8 方程 $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$ 的解集是(　　).

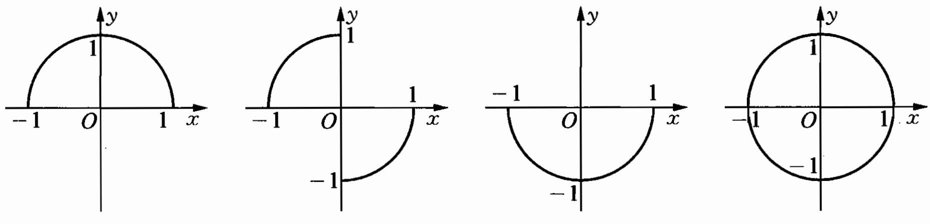
(A) $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　(B) $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　(D) $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

9 方程 $\lg x=\cos 2x$ 的解有(　　).

(A) 2个　(B) 5个　(C) 7个　(D) 无数个

10 方程 $\arcsin x+\arccos y=n\pi$　$(n\in\mathbf{Z})$所表示的图解是(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

二、填空题

11 函数 $y=\arccos(-2x^2+x)$ 的值域是________.

12 函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$的反函数是________.

13 不等式 $\arccos x>\arcsin x$ 的解集是________.

14 函数 $f(x)=\arcsin(2x+1)$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$，则 $f^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

15 已知函数 $f(x)=4\pi\arcsin x-[\arccos(-x)]^2$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M-m=$________.

16 方程 $\sin x=\cos\frac{2}{5}\pi$ 的解集为________.

17 设 $[\tan x]$ 表示不超过实数 $\tan x$ 的最大整数，则方程 $[\tan x]=2\cos^2 x$ 的解为________.

18 方程 $2\cos^2 x-\sin x\cos x=\frac{1}{2}$ 的解集为________.

19 若方程 $\sin x=a$ 在 $\left[\frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}\right]$ 中恰有两个不同的解，则 a 的取值范围是________.

20 若 $-6<\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x<-2$，则方程 $\cos\pi x=1$ 的解集为________.

三、解答题

21 计算：(1) $\tan\left(2\arcsin\frac{5}{13}\right)+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}\right)$；

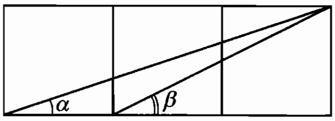
(2) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$.

22 计算：(1) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)+\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$；

(2) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$.

23 (1) 求证：$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$；

(2) 如图，三个相同的正方形相接，求证：$\alpha+\beta=45°$.



(第 23 题)

24 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\frac{2\pi}{3}-\arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$；

(2) $y=\arctan\frac{1}{x^2-1}$.

25 求函数 $f(x)=\arcsin(x-x^2)$ 的定义域和值域与单调递增区间.

26 若 x_1、x_2 是方程 $x^2-6x+7=0$ 的两根，求 $\arctan x_1+\arctan x_2$ 的值.

27 已知函数 $y=\cos(2\arccos x)+4\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)$，求它的最大值与最小值.

28 解方程：

(1) $\cos^2\left(x+\dfrac{5}{8}\pi\right)-\sin 4x=2$；

(2) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$；

(3) $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin x+1=0$；

(4) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

29 求下列方程的实数解.

$$\arccos\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\arcsin\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|+\arccos\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|=\pi.$$

30 解方程：$\arccos x+\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$.

5 三角不等式

我们知道，用不等号连接起来的式子叫做不等式. 含有未知数的三角函数的不等式叫做三角不等式.

三角不等式的解集，通常借助于三角函数或三角函数的图象，即利用“数形结合”的数学思想求解. 如解三角不等式 $\sin x > a(|a|<1)$，可作出如图 5－1 所示的单位圆，在纵轴上取点 $A(0, a)$，过 A 作 $MN \parallel Ox$ 轴交单位圆于 M 和 N，根据三角函数的定义可知阴影部分的角度满足 $\sin x > a$，即其解集为 $\{x \mid 2k\pi + \arcsin a < x < 2k\pi + \pi - \arcsin a,\ k \in \mathbf{Z}\}$. 也可作出一个周期的正弦曲线，如图 5－2 所示，在 y 轴上取点 $A(0, a)$，过 A 作 x 轴的平行线，在这条平行线上方的图象，其三角函数值满足不等式 $\sin x > a$，从而其解集为 $\{x \mid 2k\pi + \arcsin a < x < 2k\pi + \pi - \arcsin a,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

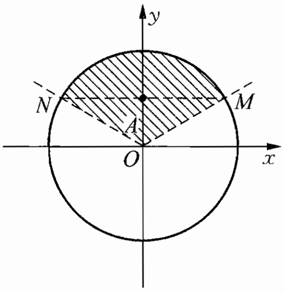


图 5－1

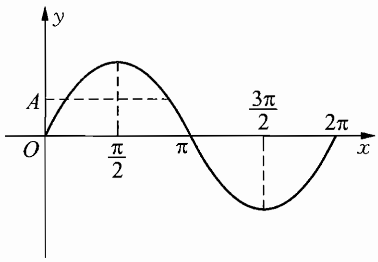


图 5－2

关于三角不等式的证明，如同证明代数不等式一样，通常有比较法（作差比较法和求商比较法）、综合法以及分析法等方法，但三角函数又有它的一些特殊性质，如正弦曲线和余弦曲线的有界性、三角函数的单调性和周期性. 因此，证明三角函数不等式还有一些不同于代数不等式的方法.

为了便于读者理解，我们把常用的基本不等式列举如下：(1) $(a-b)^2 \geqslant 0$；(2) 若 $a, b \in \mathbf{R}$，则 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）；(3) 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则有 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）；$a+b+c \geqslant$

$3\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取等号）；$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时取等号）.

另外，在三角函数中，有一个重要不等式：若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin x<x<\tan x$，这可从图 5-3 来证明. 在单位圆上作 $\angle AOM=x$，$AT\perp Ox$ 轴，$NM\perp Ox$ 轴，则 $\sin x=NM$，$\tan x=AT$，由 $S_{\triangle AOM}<S_{扇形AOM}<S_{\triangle AOT}$ 得

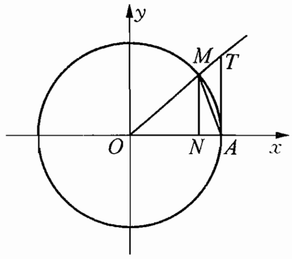


图 5-3

$$\frac{1}{2}MN<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}AT,$$

即 $\sin x<x<\tan x$.

例 1 已知 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$\dfrac{\cot\beta}{\cot\alpha}<\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}<\dfrac{\beta}{\alpha}$.

分析 可以构造函数，用单调性来证明.

证明 设 $y=\cos x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 在其图象上取两点 $A(\alpha,\cos\alpha)$，$B(\beta,\cos\beta)$，由 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，点 A 在点 B 的上方，所以

$$k_{OA}>k_{OB}\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\alpha}>\frac{\cos\beta}{\beta},$$

所以
$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}.$$

再设 $y=\cot x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，在其图象上取点 $C(\alpha,\cot\alpha)$，$D(\beta,\cot\beta)$，同理 $k_{OC}>k_{OD}$，所以 $\dfrac{\cot\alpha}{\alpha}>\dfrac{\cot\beta}{\beta}$，所以

$$\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}.$$

又因为
$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\left(1-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right),\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},$$

所以
$$0<\sin\alpha<\sin\beta,\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1,$$

所以
$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}>\frac{\cot\beta}{\cot\alpha},$$

即

$$\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}<\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}.$$

评注　本例进一步可得如下结论，若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}<\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}<\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}.$$

例 2　在$\triangle ABC$中，$\angle C\geqslant 60^\circ$，求证：

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

分析　由 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$，所证不等式可化为求证 $(a+b)\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$，但取例以后发现此路不通，原因是放缩过头了.

证明　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\begin{aligned}
&=(\sin A+\sin B)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\\
&=2+\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\\
&=4+\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\sin A\cdot\sin B}+\frac{\sin B+\sin A}{\sin C}\\
&=4+\frac{8\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}+\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
&=4+\frac{8\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}+\frac{1-2\sin^2\frac{A-B}{4}}{\sin\frac{C}{2}}\\
&=4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+2\sin^2\frac{A-B}{4}\cdot\left[\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right],\quad①
\end{aligned}$$

因为

$$0<\left|\frac{A-B}{2}\right|<\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以 $$\cos^2\frac{A-B}{2}>\cos^2\frac{A+B}{2}=\sin^2\frac{C}{2}.\quad ②$$

又因为 $\angle C\geqslant 60°$，所以 $8\sin^3\dfrac{C}{2}\geqslant 1$，所以

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{4}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2},$$

再由 ② 得

$$\frac{8\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant 0,$$

代入①，得 $$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

例 3 已知 $\theta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\cos\theta_i|\leqslant\dfrac{2}{n+1}$，$(n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，求证：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}i\cos\theta_i\right|\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]+1.$$

分析 通过适当的放缩去掉绝对值，利用已知证明.

证明 (1) 当 $n=2k$ 时，

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n^2}{4}\right]+1-\left|\sum_{i=1}^{n}i\cos\theta_i\right|=k^2+1-\left|\sum_{i=1}^{n}i\cos\theta_i\right|\\
\geqslant&k^2+1-\sum_{i=1}^{n}|i\cos\theta_i|=n+(n-1)+\cdots+(k+1)\\
&-k-(k-1)-\cdots-1+1-(|\cos\theta_1|+|2\cos\theta_2|\\
&+|3\cos\theta_3|+\cdots+|n\cos\theta_n|)\\
=&n(1-|\cos\theta_n|)+(n-1)(1-|\cos\theta_{n-1}|)+\cdots+\\
&(k+1)(1-|\cos\theta_{k+1}|)-k(1+|\cos\theta_k|)-(k-1)(1+\\
&|\cos\theta_{k-1}|)-\cdots-1\cdot(1+|\cos\theta_1|)+1\\
\geqslant&k[(1-|\cos\theta_n|)+(1-|\cos\theta_{n-1}|)+\cdots+(1-|\cos\theta_{k+1}|)-\\
&(1+|\cos\theta_k|)-(1+|\cos\theta_{k-1}|)-\cdots-(1+|\cos\theta_1|)]+1\\
=&-k\sum_{i=1}^{n}|\cos\theta_i|+1\geqslant-\frac{2}{n+1}\cdot k+1=\frac{1}{n+1}>0.\end{aligned}$$

（2）当 $n=2k+1$ 时同样有

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1-\left|\sum_{i=1}^{n} i\cos\theta_i\right|$$

$$=n+(n-1)+\cdots+(k+2)+0-k-(k-1)-\cdots-1-\left|\sum_{i=1}^{n} i\cos\theta_i\right|+1$$

$$\geqslant(k+1)(k-|\cos\theta_n|-|\cos\theta_{n-1}|-\cdots-|\cos\theta_{k+2}|$$
$$-|\cos\theta_{k+1}|-k-|\cos\theta_k|-|\cos\theta_{k-1}|-\cdots-|\cos\theta_1|)+1$$
$$=-(k+1)\sum_{i=1}^{n}|\cos\theta_i|+1\geqslant-(k+1)\cdot\frac{2}{n+1}+1=0.$$

综上，(1)、(2)，得证.

评注　本题只不过用三角函数做个样子，本身并没有用到多少三角函数性质.

例 4　求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}$，对一切实数 x 成立.

分析　当 $\theta\in(0,+\infty)$ 时，有 $\sin\theta<\theta$. 当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta$，再结合函数的奇偶性，周期性，可得证明.

证明　首先考查 $x\in(0,\pi)$，取 m 为某个自然数，使 $m\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{x}<m+1$ 成立. 则 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$，这里当 $m=0$ 时，右边第一项为 0；当 $m\geqslant n$ 时，右边第二项为 0，由于 $\sin kx<kx$，故

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{kx}{k}=mx\leqslant\sqrt{\pi},\qquad ①$$

利用阿贝尔不等式，有　$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{m+1}$，

又当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$，故 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$，又 $m+1>\frac{\sqrt{\pi}}{x}$，故

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{x}}=\sqrt{\pi},\qquad ②$$

由①、②，知当 $x\in(0,\pi)$ 时，原式得证.

当 $x\in(-\pi,0)$ 时，由于 $f(x)=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$ 为偶函数. 所以原式也成

立，当 $x=\pm\pi$，0 时，显然成立.

又由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，故原式对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，得证.

例 5 三个数 a、b、c 属于开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且满足下列等式 $a=\cos a$，$b=\sin(\cos b)$，$c=\cos(\sin c)$，试按从小到大的顺序排列这三个数.

分析 从题目条件来看，直接计算 a、b、c 的值是极为困难的，所以考虑用图象法解之.

解法一 $\cos a=a$ 表示曲线 $y=\cos x$ 与 $y=x$ 的交点的横坐标即为 a. 同理，曲线 $y=\sin(\cos x)$ 与 $y=x$ 的交点的横坐标即为 b. 而曲线 $y=\cos(\sin x)$ 与 $y=x$ 的交点的横坐标即为 c.

在同一坐标系中作出曲线 $y=\cos x$，$y=\cos(\sin x)$，$y=\sin(\cos x)$ 及直线 $y=x$.（如图 5－4 所示）

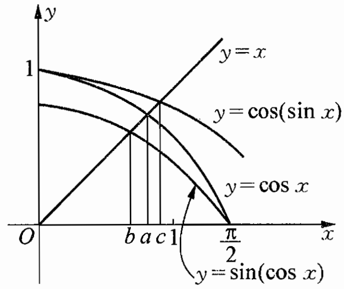


图 5－4

由于当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin x<x$. 所以 $\cos(\sin x)>\cos x$. 即当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=\cos(\sin x)$ 的图象在 $y=\cos x$ 的上方.

由于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x\in(0,1)$. 在 $\sin x<x$ 中用 $\cos x$ 代 x，就得 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin(\cos x)<\cos x$. 即当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=\sin(\cos x)$ 的图象在 $y=\cos x$ 的下方.

由此可知 $b<a<c$.

解法二 如图 5－5 所示. 由 $\cos a=a$，知 a 是 $y=\cos x$ 与 $y=x$ 交点的横坐标.

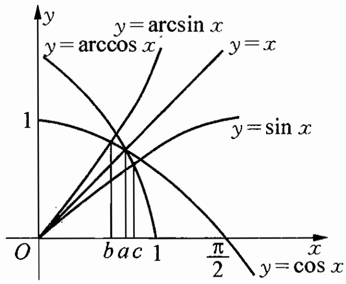


图 5－5

而 $\sin(\cos b)=b$，可看成 $\cos b=\arcsin b$. 即为 $y=\cos x$ 与 $y=\arcsin x$ 的交点的横坐标. 注意到 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0<\sin x<x$，即 $y=\sin x$ 的图象在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时在直线 $y=x$ 的下方. 于是其反函数 $y=\arcsin x$ 的图象在 $x\in(0,1)$ 时应在直线 $y=$

x 的上方.

又 $\cos(\sin c)=c$，可看成 $\arccos c=\sin c$，但 $y=\sin x,\ x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象在 $y=x$ 的下方.

由此可作图，从图中也可看出 $b<a<c$.

解法三　利用反证法. 假设 $a\geqslant c$，则由 $a,\ c\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 得 $\cos a\leqslant\cos c$，即 $a\leqslant\cos c$，而 $0<\sin c<c$，所以 $\cos(\sin c)>\cos c$，从而 $a<\cos(\sin c)$，即 $a<c$，两者矛盾，所以假设错误，得 $a<c$；

假设 $a\leqslant b$，则由 $a,\ b\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 得 $\cos a\geqslant\cos b$，即 $a\geqslant\cos b$，又因 $0<\sin(\cos b)<\cos b$，所以 $a>\sin(\cos b)=b$，两者也矛盾. 所以 $a>b$，综上所述 $b<a<c$.

评注　本题应用了三角函数的重要性质：当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$0<\sin x<x$.

例 6　在锐角△ABC 中，求证：$\cos A\cos B+\cos A\cos C+\cos B\cos C\leqslant 6\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqslant\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

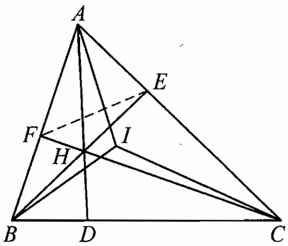


图 5-6

证明　如图，设 AD、BE、CF 为三角形 ABC 的高，H 为垂心，I 为内心，△ABC 的外接圆，内切圆半径分别为 R 与 r.

由 A、F、H、E 四点共圆，AH 为此圆直径. $\angle AEF=\angle AHF=\angle CHD=\angle B\Rightarrow AF=AH\sin\angle BAD=AH\cos B=2R\cos A\cos B$.

同理可得

$$HD+HE+HF=2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos A\cos C),$$

则

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=\frac{HD+HE+HF}{2R},\qquad ①$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Rightarrow 6\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{3r}{2R},\qquad ②$$

$$\frac{BI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{2R\sin A}{\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{B}{2}\right)}=\frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}}\Rightarrow BI=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

同理可得

$$AI+BI+CI=4R\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{AI+BI+CI}{4R}. \qquad ③$$

比较①、②、③，本例等价于证明

$$HD+HE+HF\leqslant 3r\leqslant\frac{1}{2}(AI+BI+CI).$$

(1) 先证前一半.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C$，于是

$$\cos A\cos B\leqslant\cos A\cos C\leqslant\cos B\cos C\Rightarrow HF\leqslant HE\leqslant HD,$$

而

$$\begin{aligned}2S_{\triangle ABC}&=HD\cdot a+HE\cdot b+HF\cdot c\\&\geqslant\frac{1}{3}(HD+HE+HF)(a+b+c),\end{aligned}$$

（契比雪夫不等式）

$$\begin{aligned}2S_{\triangle ABC}=2pr=(a+b+c)r&\Rightarrow\frac{1}{3}(HD+HE+HF)(a+b+c)\\&\leqslant(a+b+c)r\Rightarrow HD+HE+HF\leqslant 3r.\end{aligned}$$

(2) 再证后一半，($\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{7}{8}$)，由于 $r=AI\sin\frac{A}{2}$，故得

$$\begin{aligned}&AI+BI+CI\\&=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\\&=r\left[\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right]\\&\geqslant 3r\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\geqslant 6r.\end{aligned}$$

综上，本例得证.

评注　本例后半部分用函数的凹凸性也可证明.

令 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，因为 $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$，

$$f''(x)=\frac{\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x}=\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}>0,$$

故 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ 是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的下凸函数.

所以 $$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant 3\frac{1}{\sin\frac{A+B+C}{6}}=6.$$

例 7 设 $\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$i=1$、2、3、4，证明：存在 $\theta\in\mathbf{R}$，使得如下两个不等式：

$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2-(\sin\theta_1\sin\theta_2-x)^2\geqslant 0, \qquad ①$$

$$\cos^2\theta_3\cos^2\theta_4-(\sin\theta_3\sin\theta_4-x)^2\geqslant 0, \qquad ②$$

同时成立的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i\leqslant 2\left(1+\prod_{i=1}^{4}\sin\theta_i+\prod_{i=1}^{4}\cos\theta_i\right). \qquad ③$$

证明 式①、②分别等价于

$$\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2\leqslant x\leqslant\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2, \qquad ④$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4-\cos\theta_3\cos\theta_4\leqslant x\leqslant\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4, \qquad ⑤$$

易知存在 $x\in\mathbf{R}$，使得④、⑤同时成立的充要条件是

$$\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4\geqslant 0, \qquad ⑥$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\geqslant 0, \qquad ⑦$$

另一方面，利用 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，可将③式化为

$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4+\cos^2\theta_3\cos^2\theta_4-\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4-\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(\cos\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_3\cos\theta_4)^2-(\sin\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_3\sin\theta_4)^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_1\cos\theta_4)(\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2)\geqslant 0.$ ⑧

当存在 $x\in\mathbf{R}$，使①②成立时⇒④⑤成立⇒⑥⑦成立⇒⑧式成立⇒③式成立.

另一方面，当③式也即⑧式成立，但⑥⑦式不成立. 则

$$\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4<0,$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2<0,$$

两式相加$\Rightarrow 2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_3\cos\theta_4)<0$，这与$\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$i=1,2,3,4$矛盾.

故必有③⇒⑧⇒⑥⑦成立⇒存在$x\in\mathbf{R}$，④⑤成立⇒存在$x\in\mathbf{R}$，①②成立.

综上，得证.

例 8 若$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha-\sin\beta<\alpha-\beta<\tan\alpha-\tan\beta$.

分析 构造单位圆，借助于三角函数线与三角函数式的关系，把数的比较转化为几何图形面积的比较.

证明 如图 5－7，作单位圆，记$\overset{\frown}{AP_1}=\beta$，$\overset{\frown}{AP_2}=\alpha$. 则$\overset{\frown}{P_1P_2}=\alpha-\beta$，$M_1P_1=\sin\beta$，$M_2P_2=\sin\alpha$，$AT_1=\tan\beta$，$AT_2=\tan\alpha$，$S_{\triangle AP_2O}=\frac{1}{2}\sin\alpha$，$S_{\triangle AP_1O}=\frac{1}{2}\sin\beta$，$S_{\triangle AT_2O}=\frac{1}{2}\tan\alpha$，$S_{\triangle AT_1O}=\frac{1}{2}\tan\beta$，$S_{扇形OAP_2}=\frac{1}{2}\alpha$，$S_{扇形OAP_1}=\frac{1}{2}\beta$，$S_{扇形OP_1P_2}=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，$S_{\triangle OT_1T_2}=\frac{1}{2}(\tan\alpha-\tan\beta)$，设$\triangle OP_2C$的面积为$S_1$，则$S_1<S_{扇形OP_1P_2}<S_{\triangle OT_1T_2}$，因为

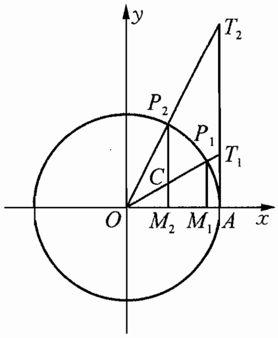


图 5－7

$$S_{\triangle OAP_2}-S_{\triangle OAP_1}<S_{\triangle OAP_2}-S_{\triangle OAC}=S_1,$$

所以
$$\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\beta<S_1,$$

从而
$$\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\beta<\frac{1}{2}(\alpha-\beta)<\frac{1}{2}\tan\alpha-\frac{1}{2}\tan\beta,$$

即
$$\sin\alpha-\sin\beta<\alpha-\beta<\tan\alpha-\tan\beta.$$

评注 本题的证明方法与三角函数基本不等式$\sin x<x<\tan x\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$的证明方法相同.

例 9 已知$\alpha,\beta,\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求证：

$$(\tan\alpha-\tan\beta)^2\geqslant(\tan\gamma-2\tan\alpha)(2\tan\beta-\tan\gamma).$$

分析 观察所证不等式的特征，发现其与一元二次方程的根的判别式类似，所以利用构造一元二次方程的方法解决问题.

证明 当 $\tan\gamma-2\tan\alpha=0$ 时，原不等式显然成立.

当 $\tan\gamma-2\tan\alpha\neq0$ 时，作一元二次方程

$$(\tan\gamma-2\tan\alpha)x^2+2(\tan\alpha-\tan\beta)x+(2\tan\beta-\tan\gamma)=0,$$

因为 $$(\tan\gamma-2\tan\alpha)+2(\tan\alpha-\tan\beta)+(2\tan\beta-\tan\gamma)=0,$$

所以所作方程必有一根 $x=1$，从而

$$\Delta=4(\tan\alpha-\tan\beta)^2-4(\tan\gamma-2\tan\alpha)(2\tan\beta-\tan\gamma)\geqslant0,$$

即 $$(\tan\alpha-\tan\beta)^2\geqslant(\tan\gamma-2\tan\alpha)(2\tan\beta-\tan\gamma).$$

评注 观察和分析欲证不等式的结构特点，构造相应的代数方程，是一种行之有效的解题方法.

例 10 求证：$\sin(\cos\theta)<\cos(\sin\theta)$.

分析 转化为同名三角函数，利用三角函数的单调性来证明.

证明 因为 $$\cos(\sin\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\sin\theta\right),$$

而 $$\cos\theta\in[-1,1]\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\sin\theta\in[-1,1],\ \frac{\pi}{2}-\sin\theta\in\left[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}+1\right],$$

$$\frac{\pi}{2}+\sin\theta\in\left[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}+1\right],$$

而 $\frac{\pi}{2}+1>\frac{\pi}{2}$，所以对 $\sin\theta$ 值进行分类讨论.

当 $\sin\theta\in[0,1]$ 时，$\frac{\pi}{2}-\sin\theta\in\left[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}\right]\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

$\sin(\cos\theta)<\cos(\sin\theta)$，即 $\sin(\cos\theta)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin\theta\right)$.

因 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调递增函数，而

$$\cos\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\sin\theta\right)=\cos\theta+\sin\theta-\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}<0,$$

所以 $\cos\theta<\frac{\pi}{2}-\sin\theta$，从而 $\sin(\cos\theta)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin\theta\right)$成立；

当 $\sin\theta\in[-1,0)$ 时，$\frac{\pi}{2}+\sin\theta\in\left[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}\right]\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin(\cos\theta)<\cos(\sin\theta)$，即 $\sin(\cos\theta)<\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sin\theta\right)$，而

$$\cos\theta-\left(\frac{\pi}{2}+\sin\theta\right)=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}<0,$$

所以 $\cos\theta<\frac{\pi}{2}+\sin\theta$，得 $\sin(\cos\theta)<\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sin\theta\right)$，成立.

综上所述，原不等式成立.

评注 利用函数的单调性证明不等式是一种很好的方法.

例 11 在 $\triangle ABC$ 中，求证：(1) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$.

分析 利用函数凹凸性的有关性质证明.

证法一 先确定 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内的凹凸性. 设 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，且 $x_1\neq x_2$，则 $\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}<\sin\frac{x_1+x_2}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上是凸函数.

在 $\triangle ABC$ 中，$A,B,C\in(0,\pi)$，得

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，(等号当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时成立)

同理 $$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant3\sin\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}=\frac{3}{2}.$$

证法二 本题不利用凸函数性质也可证明：

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$\leqslant2\sin\frac{\pi-C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{1-\sin^2\frac{C}{2}}\cdot\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)=2\sqrt{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^3}$$

$$=2\sqrt{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)}$$

$$=2\sqrt{27\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin\frac{C}{2}}{3}\cdot\frac{1+\sin\frac{C}{2}}{3}\cdot\frac{1+\sin\frac{C}{2}}{3}}$$

$$\leqslant 2\sqrt{27\cdot\left(\frac{1+1}{4}\right)^4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

等号当且仅当 $\begin{cases}1-\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1+\sin\frac{C}{2}}{3},\\ \cos\dfrac{A-B}{2}=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2},\\ \cos\dfrac{A-B}{2}=\cos 0.\end{cases}$ 即 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时成立.

评注　本题提及的凹、凸函数定义如下：设 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，若对 (a,b) 内任意 x_1、$x_2(x_1\neq x_2)$，恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是凸函数；若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是凹函数. 它们的性质是：

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则对于该区间内任意 n 个自变量 x_1，x_2，…，x_n，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$；同理，若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数则取“$\leqslant$”号，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

证法二引用了不等式：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，其中 a_1，a_2，…，a_n 为正数.

利用上述不等式以及本题结论，想一想 $\sin A\sin B\sin C\leqslant\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$，如何证？

例 12　设 α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9$，并讨论 α、β 为何值时，等号成立.

分析　当不等式中出现两个变量时，先通过局部调整，消元化为一个变量再证明.

证明　因为

$$\sin^2\beta\cos^2\beta=\frac{1}{4}\sin^2 2\beta\leqslant\frac{1}{4},$$

所以 左边$\geqslant \dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\alpha}=1+\tan^2\alpha+4+4\cot^2\alpha$

$$=5+\tan^2\alpha+\frac{4}{\tan^2\alpha}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9.$$

当且仅当 $\sin^2 2\beta=1$，$\tan^2\alpha=\dfrac{4}{\tan^2\alpha}$，即 $\alpha=\arctan\sqrt{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，等号成立.

评注 本题还可加强为 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9+\left(\dfrac{2\cot\alpha}{\sin 2\beta}-\tan\alpha\right)^2$.

可这样证明：因为 $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\right)-\left(1+\dfrac{1}{\sin\beta\cos\beta}\right)^2=\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$，

所以 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}=\left(1+\dfrac{2}{\sin 2\beta}\right)^2+\left(\dfrac{2\cot\alpha}{\sin 2\beta}-\tan\alpha\right)^2\geqslant 9+\left(\dfrac{2\cot\alpha}{\sin 2\beta}-\tan\alpha\right)^2$，当且仅当 $\sin 2\beta=1$，即 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，原不等式中等号成立.

例 13 （1）求证：$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$；

（2）若 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 1$.

分析 利用基本不等式或拉格朗日恒等式证明.

证明 （1）根据 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，得

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta\geqslant 2\tan\alpha\tan\beta,$$
$$\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 2\tan\beta\tan\gamma,$$
$$\tan^2\gamma+\tan^2\alpha\geqslant 2\tan\gamma\tan\alpha,$$

三式相加，即得

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha.$$

也可利用拉格朗日公式 $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$ 证明.

因为

$$\begin{aligned}&(\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma)(\tan^2\beta+\tan^2\gamma+\tan^2\alpha)\\&-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)^2\\=&(\tan\alpha\tan\gamma-\tan^2\beta)^2\\&+(\tan^2\alpha-\tan\beta\tan\gamma)^2+(\tan\alpha\tan\beta-\tan^2\gamma)^2\\\geqslant&0,\end{aligned}$$

所以

$$(\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma)^2\geqslant(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)^2.$$

即 $\quad\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha.$

(2) 因 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right),$$

即

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1,$$

由(1)得 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 1.$

例 14 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，试求 θ 的取值范围.

分析 将原不等式看作关于 x 的一元二次不等式，结合二次函数的图象，列出关于 θ 的三角不等式，求出 θ 的取值范围.

解 令

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta\\&=(\cos\theta+\sin\theta+1)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta.\end{aligned}$$

对称轴 $x=\dfrac{1+2\sin\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta+1)}=\dfrac{2\sin\theta+1}{2\sin\theta+2\cos\theta+2}$.

由条件知 $\begin{cases}f(0)=\sin\theta>0,\\f(1)=\cos\theta>0,\end{cases}$ 从而 $\dfrac{2\sin\theta+1}{2\sin\theta+2\cos\theta+2}\in(0,1)$，要使 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 时 $f(x)>0$ 恒成立，必须有

$$\Delta=(1+2\sin\theta)^2-4\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta+1)<0,$$

解得 $\sin 2\theta>\frac{1}{2}$，又 $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$，所以

$$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

评注 本题中对称轴的范围是关键.

例 15 求实数 a 的取值范围，使不等式 $\sin 2\theta-(2\sqrt{2}+\sqrt{2}a)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}>-3-2a$，在 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时恒成立.

分析　题中出现 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin\theta+\cos\theta)\frac{\sqrt{2}}{2}$，宜利用换元法，化归为有理不等式来求解.

解　设 $\sin\theta+\cos\theta=x$，则由 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 得 $x\in[1,\sqrt{2}]$，$\sin 2\theta=x^2-1$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，原不等式化为

$$x^2-1-(2+a)x-\frac{4}{x}+3+2a>0,$$

因式分解得

$$(x-2)\left(x+\frac{2}{x}-a\right)>0,$$

因为 $x\in[1,\sqrt{2}]$，所以 $x+\frac{2}{x}-a<0$，即 $a>x+\frac{2}{x}$.

记 $f(x)=x+\frac{2}{x}$，可证 $f(x)$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递减，所以

$$f(x)_{\max}=f(1)=1+\frac{2}{1}=3.$$

故 $a>3$.

例 16　函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论.

分析　通过赋值猜想 M 的最小值，再证明.

解　$F(x)=|\cos 2x+\sin 2x+Ax+B|=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$，

若 $A=B=0$，则

$$F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

当 $x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8}$ 时，$F(x)$ 取得最大值 $M=\sqrt{2}$.

下面证明对于任意实数 A、B，均有 $M\geqslant\sqrt{2}$.

利用反证法. 假设对于某一组实数 A、B，有 $M\leqslant\sqrt{2}$，则 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)$、

$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)$均不大于$\sqrt{2}$，从而

$$\begin{cases}\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}, & ①\\ -\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant-\sqrt{2}, & ②\\ \sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}, & ③\end{cases}$$

①+③-②×2 得 $0\leqslant0$，从而①②③等号成立，有 $A=B=0$，因此 $M\geqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $A=B=0$ 时，M 取得最小值$\sqrt{2}$.

例 17 (1) 设函数 $f(x)$，$g(x)$对所有 x 满足 $-\frac{\pi}{2}<f(x)\pm g(x)<\frac{\pi}{2}$，证明：对所有 x，有 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$；

(2) 利用或不利用(1)，证明：对所有 x，有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

证明 (1) 不妨设 $g(x)>0$，所以 $-\frac{\pi}{2}+g(x)<f(x)<\frac{\pi}{2}-g(x)$.

若 $f(x)\geqslant0$，因为 $\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内是减函数，所以 $\cos(f(x))>\cos\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$，即 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$；

若 $f(x)<0$，因为 $\cos x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$内是增函数，所以 $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+g(x)\right)<\cos(f(x))$，即 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$；

同理可证 $g(x)\leqslant0$ 时，仍有 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$.

综上所述，对所有 x，都有 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$.

(2) 因为

$$|\cos x-\sin x|=\left|\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

$$|\cos x+\sin x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以令 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$，则符合第(1)题条件，于是对于所有 x，都有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

评注 第(1)题的证明过程运用了分类讨论的数学思想以及三角函数的单调性；第(2)题利用了重要不等式及三角函数的有界性.

例 18 已知 a、b、A、B 都是实数，若对于一切实数 x，都有

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x\geqslant 0.$$

求证：$a^2+b^2\leqslant 2$，$A^2+B^2\leqslant 1$.

分析　题中所给函数有较多的参数 a、b、A、B，结合结论，应引入辅助参数：

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),$$
$$A\cos 2x+B\sin 2x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi),$$

这样就使待证的参数较为集中，再利用 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，选取适当的 x 值以证明结论.

证明　若 $a^2+b^2=0$，$A^2+B^2=0$，则结论显然成立；

若 $a^2+b^2\neq 0$，$A^2+B^2\neq 0$，令

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

于是

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0,\quad ①$$
$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\theta)+\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0,\quad ②$$

①+②得

$$2-\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin(x+\theta)+\cos(x+\theta)\right]\geqslant 0,$$

即

$$2-\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot\sin\left(x+\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0,$$

所以 $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$ 对一切 x 均成立.

取 $x+\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{4}-\theta$，有 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\sqrt{2}$，即 $a^2+b^2\leqslant 2$.

又

$$f(x+\pi)=1+\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0,\quad ③$$

①+③得

$$2-2\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0,$$

即 $\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\leqslant 1$，取 $2x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}$ 时，有 $\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1$，即 $A^2+B^2\leqslant 1$.

评注　对于恒等式或恒成立的不等式，通常利用赋值法.

例 19　求证：$\dfrac{1}{3}<\sin 20^\circ<\dfrac{7}{20}$.

分析　因 $60^\circ=3\times 20^\circ$，所以利用倍角公式将 $\sin 20^\circ$ 转化到 $\sin 60^\circ$ 后构造方程来证明.

证明　设 $\sin 20^\circ=x$，则 $\sin 60^\circ=\sin 3\times 20^\circ=3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ$，从而 $4x^3-3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，令 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则

$$f(-1)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}>0,$$

$$f\left(\frac{7}{20}\right)=4\times\frac{343}{8000}-\frac{21}{20}+\frac{\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$f(1)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$、$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{20}\right)$、$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内各有一根，但 $0<\sin 20^\circ<\sin 30^\circ$，所以 $\sin 20^\circ\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{20}\right)$.

即　$\dfrac{1}{3}<\sin 20^\circ<\dfrac{7}{20}$.

评注　方程的根与函数的图象有密切联系，即函数图象与 x 轴的交点横坐标就是方程的根. 它可通过作出函数图象来观察根的分布情况. 如函数 $y=f(x)$ 中，$f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 必有一根在(a,b)中.

例 20　平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ，求证：$\lambda\geqslant 2\sin 54^\circ$，并讨论等号成立的充要条件.

分析　为什么出现 $54°$，恰与正五边形有关，因此，应考虑这五个点与正五边形的关系.

证明　(1) 若五点中有三点共线，不妨设 A、B、C 三点共线，且 B 在线段 AC 上，若 $AB\leqslant BC$，则$\frac{AC}{AB}\geqslant 2>2\sin 54°$. 但这五点中最大的距离 $\geqslant AC$，最小的距离 $\leqslant AB$，从而 $\lambda\geqslant 2>2\sin 54°$.

(2) 若五点组成凸五边形，则这个五边形必有一内角 $\geqslant 108°$，不妨设为 A，与 A 相邻的顶点为 B 和 C，在 $\triangle ABC$ 中，$A\geqslant 108°$，若 $B\leqslant C$，则 $B\leqslant 36°$，于是

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B}\geqslant\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\geqslant 2\cos 36°=2\sin 54°,$$

从而 $\lambda\geqslant\frac{BC}{AC}>2\sin 54°$，等号当且仅当这个五边形为正五边形时成立.

(3) 若五点组成一个四边形 $ABCD$，第五个点 E 在四边形 $ABCD$ 内，如图 5－8，连 AC，则 E 必在$\triangle ABC$ 或$\triangle ACD$ 内，不妨设 E 在$\triangle ABC$ 内，则$\angle AEB$、$\angle AEC$、$\angle BEC$ 中至少有一个角 $\geqslant 120°>108°$，可以化归为(2)，可证 $\lambda>2\sin 54°$.

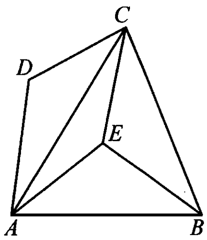


图 5－8

(4) 当这五点组成$\triangle ABC$，而第四、五两点在$\triangle ABC$ 内，任取其中一点 E，则可化归为情形(3)，仍可证 $\lambda>2\sin 54°$.

综上所述，$\lambda\geqslant 2\sin 54°$，当且仅当这五点是正五边形的顶点时等号成立.

评注　分类讨论是本题的主要思想方法.

习 题 5

一、选择题

1 设 $a=\sin(-1)$，$b=\cos(-1)$，$c=\tan(-1)$，则有（　　）.

(A) $a<b<c$　　(B) $b<a<c$

(C) $c<a<b$　　(D) $a<c<b$

2 设 $a=\sin 15°+\cos 15°$，$b=\sin 16°+\cos 16°$，则下列各式中正确的是（　　）.

(A) $a<\frac{a^2+b^2}{2}<b$　　(B) $a<b<\frac{a^2+b^2}{2}$

(C) $b<a<\dfrac{a^2+b^2}{2}$　　(D) $b<\dfrac{a^2+b^2}{2}<a$

3 若 $a=(\tan x)^{\cot x}$，$b=(\cot x)^{\tan x}$，$c=(\tan x)^{\cos x}$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，下列不等式成立的是(　　).

(A) $b<a<c$　　(B) $a<b<c$

(C) $a<c<b$　　(D) $b<c<a$

4 设 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，下列关系中正确的是(　　).

(A) $\sin(\sin x)<\sin x<\sin(\tan x)$

(B) $\sin(\sin x)<\sin(\tan x)<\sin x$

(C) $\sin(\tan x)<\sin x<\sin(\sin x)$

(D) $\sin x<\sin(\tan x)<\sin(\sin x)$

5 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{5\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，那么 $\cos\alpha$ 与 $\sin\beta$ 的大小关系是(　　).

(A) $\cos\alpha=\sin\beta$　　(B) $\cos\alpha<\sin\beta$

(C) $\cos\alpha>\sin\beta$　　(D) 不能确定

6 设 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}=a$，$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}=b$，$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}=c$ 的大小顺序是(　　).

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$

(C) $b<a<c$　　(D) $c<a<b$

7 已知 $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 x 的取值范围是(　　).

(A) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

(B) $\left[k\pi-\dfrac{4\pi}{3},k\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(C) $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(D) $\left[2k\pi-\dfrac{4}{3}\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

8 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan\dfrac{A}{2}$、$\tan\dfrac{B}{2}$、$\tan\dfrac{C}{2}$ 成等比数列，则角 B 的取值范围是(　　).

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　　(B) $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

(C) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$　　(D) $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$

9 $\cos 2x > \cos 2y$ 成立的一个充分非必要条件是(　　).

(A) $|\cos x| > |\cos y|$　　(B) $|\cos x| > \cos y$

(C) $\cos x > |\cos y|$　　(D) $\cos x + \cos y > 0$

10 记 $a = \log_{\sin 1}\cos 1$，$b = \log_{\sin 1}\tan 1$，$c = \log_{\cos 1}\sin 1$，$d = \log_{\cos 1}\tan 1$，则四个数的大小关系是(　　).

(A) $a < c < b < d$　　(B) $c < d < a < b$

(C) $b < d < c < a$　　(D) $d < b < a < c$

二、填空题

11 当 $0 < x < 2\pi$ 时，不等式 $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$ 的解集是________.

12 已知 $\sin x < \sin\frac{5\pi}{4}$，且 x 为第三象限角，则 x 的取值范围为________.

13 若 $0 < x < 2\pi$，$|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$，则 x 的取值范围为________.

14 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos(\sin x)$ 与 $\sin(\cos x)$ 的大小关系是________.

15 函数 $y = \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\tan x - 3\tan^2 x}$ 的定义域为________.

16 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，则 $1 + \cot\theta$ 和 $\cot\frac{\theta}{2}$ 的大小关系________.

17 在$\triangle ABC$ 中，$A > B$，下列三个不等式①$\sin A > \sin B$；②$\cos A < \cos B$；③$\tan A > \tan B$，其中正确的有________.

18 若函数 $f(1 + \cos x) = \cos^2 x$，则 $f(1 + \cos x)$ 与 $f(1 - \cos x)$ 的大小关系是________.

19 当 $y = 2\cos x - 3\sin x$ 取得最大值时，$\tan x =$ ________.

20 已知$\triangle ABC$ 是锐角三角形，$m = \log_{\cos A}\frac{1}{\sin B}$，$n = \log_{\cos A}\frac{1}{\cos C}$，则 m 与 n 的大小关系为________.

三、解答题

21 A、B、C 为$\triangle ABC$ 三内角，求证：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

22 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$a$、$b > 0$，求证：

$$\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\geqslant\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

23 A、B、C 为$\triangle ABC$三内角，证明：

$$\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

24 在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$$\sec A+\sec B+\sec C\geqslant\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}.$$

25 设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，面积为S，角A、B、C所对的边为a、b、c. 求证：

$$\frac{36S}{(a+b+c)^2}\leqslant\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{9R^2}{4S}.$$

26 求证：$1\leqslant\sqrt{|\sin\alpha|}+\sqrt{|\cos\alpha|}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}$.

27 求证：$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}$.

28 试证明：对于任何实数x，$|\sin x|$与$|\sin(x+1)|$中至少有一个大于$\frac{1}{3}$.

29 求实数a的取值范围，使得对任意实数x和任意$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，恒有$(x+3+2\sin\theta\cdot\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.

30 设x、y、z为实数，$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

6 三角函数的综合应用

三角主要研究三角函数和三角形的解法，与代数、几何的研究方法有所不同. 但三角函数的特殊性质和众多的变形公式，又是代数、几何所不及的，在一定的条件下，它们又可以相互转化、相互渗透.

由于三角源于三角形测量，它在沟通形与数的联系方面有独特的优势，能将某些几何问题转化为三角形的边或角的三角函数之间的关系加以研究，将几何中的推理论证转化为三角函数的恒等变换，从而降低几何问题的思维难度，这种方法就是三角法证(算)平面几何题.

对于某些代数问题，转化为易于处理的三角式，这种方法称为三角变换. 如将无理式转化为有理式，将条件和结论比较隐晦或复杂的通过三角代换使之明朗化等.

例 1　α 是 $(0,\ 1)$ 内一个实数，考虑数列 $\{x_n\}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，其中 $x_0=\alpha$，$x_n=\frac{4}{\pi^2}\left(\arccos x_{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \arcsin x_{n-1}$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

求证：当 n 趋于无限时，数列 $\{x_n\}$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 有一个极限，并求这个极限.

证明　设 $\arccos x_{n-1}=\theta$，$\arcsin x_{n-1}=\varphi$，其中 $\theta\in[0,\ \pi]$，$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，因此有 $\cos\theta=x_{n-1}=\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$.

因为 $\frac{\pi}{2}-\varphi\in[0,\ \pi]$，$\theta\in[0,\ \pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

即
$$\arccos x_{n-1}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x_{n-1},$$

故
$$x_n=\frac{4}{\pi^2}\left(\arccos x_{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x_{n-1}\right),$$

即
$$x_n=1-\frac{4}{\pi^2}\arccos^2 x_{n-1}, \tag{①}$$

已知 $x_0\in(0,\ 1)$，设 $x_{n-1}\in(0,\ 1)$，则 $0<|\arccos x_{n-1}|<\frac{\pi}{2}$，从而由 ① 可

知 $x_n\in(0,1)$，因此，对于任意非负整数 n，都有 $x_n\in(0,1)$.

下面证明 x_n 递增，即证 $1-\dfrac{4}{\pi^2}\arccos^2x_{n-1}>x_{n-1}\Leftrightarrow\dfrac{\pi^2}{4}(1-x_{n-1})>\arccos^2x_{n-1}(n\in\mathbf{N})$，因为 $\arccos x_{n-1}=\theta$，上式等价于 $\dfrac{\pi^2}{4}(1-\cos\theta)>\theta^2\Leftrightarrow\dfrac{\pi^2}{2}\sin\dfrac{2\theta}{2}>\theta^2$，从而只需证明

$$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}\theta,\ \theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).\qquad ②$$

作函数 $y=\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$的图象(如图)，连结这段正弦曲线的两个端点的直线段方程是 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，由正弦函数的凸性可知，这一段正弦曲线在这一个直线段的上方. 因此，当 $\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin\dfrac{\theta}{2}>\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\theta$，从而 ② 式成立. 即 $x_n>x_{n-1}$，也就是说给定数列严格单调递增.

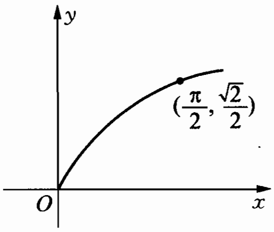


图 6-1

再由 $x_n<1$，$n\in\mathbf{N}$. 即知，当正整数 n 趋于无限时，x_n 的极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$，$0<\beta\leqslant1$.

在①式两端同时取极限，有 $\beta=1-\dfrac{4}{\pi^2}\arccos^2\beta$.

令 $t=\arccos\beta$，$0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}$，代入前一式，得 $\cos t=1-\dfrac{4}{\pi^2}t^2$，即 $\sin^2\dfrac{t}{2}=\dfrac{2}{\pi^2}t^2\Rightarrow\sin\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}t$，由 ② 式知，上式只有一解 $t=0$，从而 $\beta=\cos t=1$，故所求极限为 1.

评注　利用三角函数有界及单调性来证明极限的存在.

例 2　是否存在两个实数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$(n\in\mathbf{N})$，使得对于每一个 $n\in\mathbf{N}$ 和 $x\in(0,1)$，都有 $\dfrac{3}{2}\pi\leqslant a_n\leqslant b_n$，$\cos a_nx+\cos b_nx\geqslant-\dfrac{1}{n}$？

解　如果存在满足所给条件的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，由于 $0<\dfrac{\pi}{a_n}\leqslant\dfrac{2}{3}<1$，可得 $\cos\dfrac{b_n}{a_n}\pi\geqslant1-\dfrac{1}{n}$，取 $x=\dfrac{\pi}{a_n}$，再由 $\dfrac{b_n}{a_n}\pi\geqslant\pi$，可知存在 $k_n\in\mathbf{N}$ 和 φ_n 使得

$|\varphi_n|\leqslant\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$，且 $\pi\leqslant\frac{b_n}{a_n}\pi=\varphi_n+2k_n\pi$. ①

由①可得 $0<(2k_n-1)\pi<\frac{b_n}{a_n}\pi\Rightarrow 0<\frac{(2k_n-1)\pi}{b_n}<\frac{\pi}{a_n}\leqslant\frac{2}{3}<1$.

于是，对任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $\cos\frac{a_n}{b_n}(2k_n-1)\pi\geqslant 1-\frac{1}{n}$， ②

由①和②得，$\cos\theta_n\geqslant 1-\frac{1}{n}$，对于任意 $n\in\mathbf{N}$，成立. 其中 $\theta_n=\frac{(2k_n-1)\pi^2}{\varphi_n+2k_n\pi}$.

显然对于每一个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $0<\frac{(2k_n-1)\pi}{(2k_n+1)}<\theta_n<\pi$，所以

$$\cos\frac{2k_n-1}{2k_n+1}\pi=\cos\left(1-\frac{2}{2k_n+1}\right)\pi\geqslant 1-\frac{1}{n}.$$

由于 $k_n\in\mathbf{N}$，从而 $\frac{\pi}{3}\leqslant\left(1-\frac{2}{2k_n+1}\right)\pi$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 于是对于任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\geqslant 1-\frac{1}{n}$，矛盾.

以上证明了满足要求条件的数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 不存在.

评注 这类问题，假设存在，推出矛盾. 从而否定存在，或举出满足条件的数列.

例3 设 a、b、c 是正实数且 $abc+a+c=b$，求 $P=\frac{2}{a^2+1}+\frac{3}{c^2+1}-\frac{2}{b^2+1}$ 的最大值.

解 由 $abc+a+c=b\Rightarrow b=\frac{a+c}{1-ac}$ $(ac\neq 1)$，令 $a=\tan\alpha$，$b=\tan\beta$，$c=\tan\gamma$ $\left(\alpha, \beta, \gamma\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$，则 $\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=\tan(\alpha+\gamma)$，故 $\beta=\alpha+\gamma$，从而

$$\begin{aligned}P&=\frac{2}{1+\tan^2\alpha}-\frac{2}{1+\tan^2\beta}+\frac{3}{1+\tan^2\gamma}\\&=2\cos^2\alpha-2\cos^2(\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma\\&=1+\cos 2\alpha-[1+\cos 2(\alpha+\gamma)]+3\cos^2\gamma\\&=2\sin\gamma\sin(2\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma\leqslant 2\sin\gamma+3-3\sin^2\gamma\\&=-3\left(\sin\gamma-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\leqslant\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

当且仅当 $2\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$ 且 $\sin\gamma=\frac{1}{3}$ 时，等号成立. 即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$P_{\max}=\frac{10}{3}$.

评注 形如 $\frac{2x}{1\pm x}$，$\frac{1-x^2}{1+x^2}$，$\frac{x-y}{1+xy}$，$\frac{x+y}{1-xy}$，$\sqrt{a^2+x^2}$ 等代数式中的 x，y，可用正(余)切代换，而 $\sqrt{1-x^2}$ 之类的 x 常可用正(余)弦代换，$\sqrt{x^2-a^2}$ 之类用正(余)割代换.

例 4 由沿河城市 A 运货到城市 B，B 离河岸最近点 C 为 30 km，C 和 A 的距离为 40 km，如果每公里运费水路比公路便宜一半，如图 6-2 所示，计划沿 BD 修一条公路，则 A、D 之间距离为多少时，运费最低？

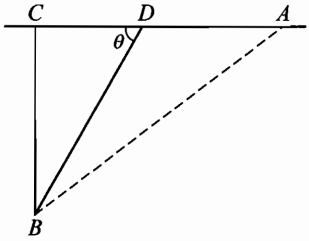


图 6-2

分析 利用函数求最值问题时，关键是参数的假定，究竟以哪个量作为自变量呢？本题设 $\angle CDB=\theta$ 最佳.

解 设 $\angle BDC=\theta$，则 $BD=\frac{30}{\sin\theta}$，$AD=40-\frac{30}{\tan\theta}$，且 $\arctan\frac{3}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

设每公里运费水路和公路分别为 a 和 $2a$，不妨设由 A 到 B 的单程运费为 y，则

$$y=a\left(40-\frac{30}{\tan\theta}\right)+2a\cdot\frac{30}{\sin\theta}=10a\cdot\left(4+3\cdot\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

令 $k=\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$，则 $\cos\theta+k\sin\theta=2$，$\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\varphi)=2$.

其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\cos\varphi=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，于是 $\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，

解得 $k\geqslant\sqrt{3}$，即 $y\geqslant 10(4+3\sqrt{3})a$.

所以，当 $k=\sqrt{3}$，即 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$，$\theta=60^\circ$ 时，y 有最小值 $10(4+3\sqrt{3})a$，此时 $AD=40-10\sqrt{3}$(km).

答：当 A、D 之间距离为 $40-10\sqrt{3}$ km 时，运费最低.

评注 本题如直接设 $AD=x$ km，则 $CD=40-x$，$BD=\sqrt{30^2+(40-x)^2}$，从而 $y=ax+2a\sqrt{900+(40-x)^2}$，这个函数的最值问题，仍宜采用三角换元法来解.

例 5 求证：对任意 $n\in\mathbf{N}$，$\alpha\in\mathbf{R}$，并且 $n\neq 1$，$\sin\alpha\neq 0$，多项式 $P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$ 被多项式 $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$ 整除.

证明　因为 $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1=[x-(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)][x-(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)]$，由 $P(\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha)=(\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha)^n\sin\alpha-(\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha)\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=(\cos n\alpha\pm\mathrm{i}\sin n\alpha)\sin\alpha-(\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha)\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=\cos n\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=\sin(\alpha-n\alpha)-\sin(n-1)\alpha=0$.

所以 $P(x)$ 被 $x-(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ 与 $x-(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)$ 整除，从而被 $[x-(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)][x-(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)]=x^2-2x\cos\alpha+1=Q(x)$ 整除.

评注　如果 $P(x)$ 是一个多次式函数，且 $P(x)=0$ 有异根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\mid P(x)$.

例 6　要想在一块圆心角为 $\alpha(0<\alpha<\pi)$、半径为 R 的扇形铁板中截出一块面积最大的矩形，应该怎样截取？求出这个矩形的面积.

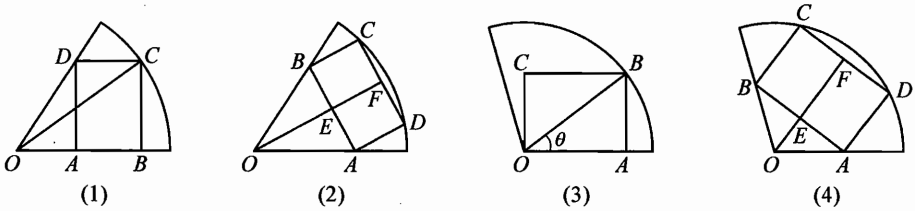


图 6-3

解　(1) 当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，有两种截取的情形：

情形 1：如图(1)，矩形的一条边落在半径上，设 $AB=x$，$AD=y$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OD=\frac{y}{\sin\alpha}$，在 $\triangle ODC$ 中，$\angle ODC=\pi-\alpha$，由余弦定理得

$$R^2=x^2+\frac{y^2}{\sin^2\alpha}-2\cdot x\cdot\frac{y}{\sin\alpha}\cos(\pi-\alpha)\geqslant\frac{2xy}{\sin\alpha}+\frac{2xy\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

所以 $xy\leqslant\frac{R^2\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{2}R^2\tan\frac{\alpha}{2}$. 当且仅当 $x=\frac{y}{\sin\alpha}$ 时等号成立.

结合 $xy=\frac{1}{2}R^2\tan\frac{\alpha}{2}$，易求 $y=R\sin\frac{\alpha}{2}$，$OD=\frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

情形 2：如图(2)，矩形的两个顶点分别在两条半径上，另两个点在圆弧上，如图所示，E、F 分别是 AB、CD 的中点，则可化为情形 1，先求矩形 $EFCB$ 面积最大值，最大面积为 $\frac{R^2}{2}\tan\frac{\alpha}{4}$. 根据对称性，矩形 $ABCD$ 的最大面积为 $2\cdot\frac{R^2}{2}\tan\frac{\alpha}{4}=R^2\tan\frac{\alpha}{4}$. 此时 $OA=OB=\frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{4}}$.

因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{4}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{4}}$，$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{8}$，$0<1-\tan^2\frac{\alpha}{4}<1$. 从而 $\tan\frac{\alpha}{2}>2\tan\frac{\alpha}{4}$，即$\frac{R^2}{2}\tan\frac{\alpha}{2}>R^2\tan\frac{\alpha}{4}$. 即 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

(2) 当 $\frac{\alpha}{2}<\alpha<\pi$ 时，也有两种截取的情形：

情形 3：如图(3)，矩形的一条边在半径上，设 $\angle AOB=\theta$，则 $OA=R\cos\theta$，$AB=R\sin\theta$，矩形 $OABC$ 的面积

$$S=OA\cdot AB=R^2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta.$$

故 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{2}R^2$.

情形 4：如图(4)，矩形的两个顶点分别在两条半径上，另两个顶点在圆弧上，同情形 2，可求

$S_{\max}=R^2\tan\frac{\alpha}{4}$. 当$\frac{1}{2}R^2\geqslant R^2\tan\frac{\alpha}{4}$，即$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant 4\arctan\frac{1}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{R^2}{2}$；当 $\frac{1}{2}R^2<R^2\tan\frac{\alpha}{4}$，即 $4\arctan\frac{1}{2}<\alpha<\pi$ 时，$S_{\max}=R^2\tan\frac{\alpha}{4}$.

综上讨论得，当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，按图示(1)，截取 $OD=\dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$；

当 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant 4\arctan\frac{1}{2}$ 时，按图(3)，截取 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$；

当 $4\arctan\frac{1}{2}<\alpha<\pi$ 时，按图(4)，截取 $OA=\dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{4}}$. 且

$$S_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{2}R^2\tan\frac{\alpha}{2},\ 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{R^2}{2},\ \frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant 4\arctan\frac{1}{2},\\ R^2\tan\frac{\alpha}{4},\ 4\arctan\frac{1}{2}<\alpha<\pi.\end{cases}$$

例 7　已知实数 x, y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

分析　从 x^2+y^2 这一特征联想到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以利用三角换元法.

解　设 $x^2+y^2=p$，则 $x=\sqrt{p}\cos\varphi$，$y=\sqrt{p}\sin\varphi$，其中 $\varphi\in[0,2\pi)$，代入已知等式得 $4p-5p\sin\varphi\cos\varphi=5$，得 $p=\dfrac{5}{4-5\sin\varphi\cos\varphi}=\dfrac{10}{8-5\sin 2\varphi}$.

所以当 $\sin 2\varphi=1$ 时，p 有最大值 $\dfrac{10}{3}$；

当 $\sin 2\varphi=-1$ 时，p 有最小值 $\dfrac{10}{13}$.

评注　当题中出现 $x^2+y^2=a^2$ 时，可令 $x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$；若 $x^2-y^2=a^2$，则可令 $x=a\sec\varphi$，$y=a\tan\varphi$；若 $x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$ 时，则可令 $x=k\cos\varphi$，$y=k\sin\varphi$，其中 $|k|\leqslant a$.

例8　已知 x、y 都是正整数，且 $x-y=1$，

$$A=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{1}{x},$$

求证：$0<A<1$.

分析　从 $x-y=1$ 这一特征联想到 $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$，所以采用三角换元法.

证明　设 $x=\sec^2\alpha$，$y=\tan^2\alpha$，其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\begin{aligned}A&=\left(\sec\alpha-\frac{1}{\sec\alpha}\right)\left(\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\sec^2\alpha}\\&=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\sin\alpha.\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\sin\alpha<1$，即 $0<A<1$.

评注　当题中出现 $x-y=a(x,y,a>0)$ 时，可设 $x=a\sec^2\alpha$，$y=a\tan^2\alpha$，其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$；在形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 中，可设 $x=a\cos\alpha$，其中 $\alpha\in[0,\pi]$，或设 $x=a\sin\alpha$，其中 $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；在形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 中，可设 $x=a\sec\alpha$，其中 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

例9　证明：$\dfrac{1}{\sqrt{2006}}<\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{2005个}\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{2}{\sqrt{2006}}$.

分析　把问题一般化，转证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，都有

$$\sqrt{n+1}<\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2}{\sqrt{n+1}}.\qquad①$$

证明　先证明下述引理.

引理　设 $m\in\mathbf{N}^*$，$m\geqslant 2$，则

$$\frac{1}{\sqrt{m+1}}<\sin\frac{1}{\sqrt{m}}, \qquad ②$$

并且

$$\sin\frac{2}{\sqrt{m}}<\frac{2}{\sqrt{m+1}}. \qquad ③$$

引理证明　对②式，令 $m=\cot^2\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 ②$\Leftrightarrow\sin\alpha<\sin\tan\alpha\Leftrightarrow\alpha<\tan\alpha$，由三角函数解可知当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$，故 ② 成立.

对于③式，仍然令 $m=\cot^2\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 ③$\Leftrightarrow\sin(2\tan\alpha)<2\sin\alpha\Leftrightarrow\sin(\tan\alpha)\cos(\tan\alpha)<\sin\alpha\Leftrightarrow\tan\alpha\cos(\tan\alpha)<\sin\alpha\Leftrightarrow\cos(\tan\alpha)<\cos\alpha\Leftrightarrow\tan\alpha>\alpha$，所以 ③ 式成立.

注意，上述证明中都需要用到 $\tan\alpha<\frac{\pi}{2}$. 这可由 $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2}$，得到.

现在回证①式，由引理中的②可知，

$$\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{\sqrt{2}}{2}=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{1}{\sqrt{2}}>\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n-1个}\frac{1}{\sqrt{3}}>\cdots>\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

由引理中的③可知，

$$\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{\sqrt{2}}{2}=\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{2}{\sqrt{8}}<\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n-1个}\frac{2}{\sqrt{9}}<\cdots<\sin\frac{2}{\sqrt{n+8}}<\frac{2}{\sqrt{n+9}}.$$

又 $\frac{2}{\sqrt{n+9}}<\frac{2}{\sqrt{n+1}}$ 知 ① 式成立. 取 $n=2005$ 命题得证.

评注　此题本质上涉及函数迭代. 事实上，记 $f(x)=\sin x$，用 $f^{(n)}(x)$ 表示 $\underbrace{f(f\cdots(f}_{n个}(x)))$，且对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，都有 $0<h(x)<f(x)<g(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 这里 $h(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$，$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$，结合在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$h(x)$、$f(x)$、$g(x)$ 都是单调递增函数，可知 $0<h^{(n)}(x)<f^{(n)}(x)<g^{(n)}(x)<\frac{\pi}{2}$，而 $h^{(n)}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx}}$，$g^{(n)}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{4}}}$，其中每一个结论的证明都不难，只要对照引理的证明即可，当然，此结论更具有一般性.

例 10　解方程 $2\sqrt{2}x^2+x-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}=0$.

分析　由于 $|x|\leqslant 1$,可设 $x=\sin\theta,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

解　设 $x=\sin\theta,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$,代入原方程,得 $2\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta-\cos\theta-\sqrt{2}=0$,

$$\sqrt{2}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+\sin\theta-\cos\theta=0,$$

$$(\sin\theta-\cos\theta)[\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)+1]=0,$$

$$(\sin\theta-\cos\theta)\left[2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right]=0.$$

由 $\sin\theta-\cos\theta=0$ 及 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$得 $\theta=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ 及 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$得 $\theta=-\frac{5\pi}{12},\ x=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

所以原方程的解是 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

例 11　解方程组

$$\begin{cases}3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right), & ①\\ xy+yz+zx=1. & ②\end{cases}$$

解　由①知 x、y、z 同号,不妨先考虑它们都是正数的情形.

令 $x=\tan\frac{\alpha}{2},\ y=\tan\frac{\beta}{2},\ z=\tan\frac{\gamma}{2},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in(0,\ \pi)$.

由于 $\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2}{\sin\theta}$,

所以①式就是 $$\frac{3}{\sin\alpha}=\frac{4}{\sin\beta}=\frac{5}{\sin\gamma}.$$

②式就是 $$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1.$$

变形为 $$\tan\frac{\gamma}{2}\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)=1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=\cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

因为 $\frac{\gamma}{2}\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

α、β、γ 是某个三角形的三个内角，且它的三边之比为 $3:4:5$，由此可知 $\sin\gamma=1$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$. 从而 $x=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，$y=\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$，$z=\tan\frac{\gamma}{2}=1$.

若 x、y、z 都是负数时，用同样的方法可求得 $x=-\frac{1}{3}$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=-1$.

即原方程组的解是

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{2},\\ z=1.\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\ y=-\frac{1}{2},\\ z=-1.\end{cases}$$

评注 形如 $x+\frac{1}{x}$ 的代数式，通过三角代换，转化为 $x+\frac{1}{x}=\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\sin\theta}$，是本题的重要技巧.

例 12 设 $xy+yz+zx=1$，求证：

$$x(1-y)(1-z^2)+y(1-z)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

证明 设 $x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，$z=\tan\gamma$，α，β，$\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，由 $xy+yz+zx=1$，得 $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$，

$$\alpha+\beta+\gamma=\pm\frac{\pi}{2},\ 2\alpha+2\beta=\pm\pi-2\gamma,\ \frac{\tan 2\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan 2\alpha\tan 2\beta}=-\tan 2\gamma,$$

$$\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\cdot\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma,$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\cdot\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma},$$

即
$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

两边同乘以 $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$，得

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

例 13　求 $y=\dfrac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$ 的最大、最小值.

分析　函数的解析式可变形为 $y=\dfrac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解　设 $x=\tan\theta$, $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $y=\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta=\dfrac{1}{4}\sin 4\theta$, $\sin 4\theta=1$ 时，$y_{\max}=\dfrac{1}{4}$；$\sin 4\theta=-1$ 时，$y_{\min}=-\dfrac{1}{4}$.

评注　利用正切函数的和角公式是上述两题的重要方法.

例 14　三元数组 (x_n, y_n, z_n), $n=1, 2, \cdots$，由下列关系式确定：$x_1=2$, $y_1=4$, $z_1=\dfrac{6}{7}$, $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n^2-1}$, $y_{n+1}=\dfrac{2y_n}{y_n^2-1}$, $z_{n+1}=\dfrac{2z_n}{z_n^2-1}$.

(1) 证明：上述作三元数组的过程可以无限继续下去；

(2) 能否证明进一步得到的三元数组 (x_n, y_n, z_n) 满足等式 $x_n+y_n+z_n=0$?

分析　(1) 即证对于任何正整数 n, $x_n\neq 1$, $y_n\neq 1$, $z_n\neq 1$.

(2) 题中三数递推公式与正切的倍角公式类似，故利用三角换元法.

证明　(1) 若 $x_n=1$，则由 $x_{n-1}^2-1=2x_{n-1}$，得 x_{n-1} 为无理数，但由于 x_1 为有理数，从而由递推公式 $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n^2-1}$，知 $\{x_n\}$ 的各项均为有理数，从而 $x_n=1$ 不成立，即 $\{x_n\}$ 可无限继续，同理可证 $\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 也可无限继续.

(2) 由 x_1、y_1、$z_1\neq 0$ 知 x_n、y_n、$z_n\neq 0$.

而 $x_1+y_1+z_1=x_1y_1z_1=\dfrac{48}{7}$，可设 $x_k+y_k+z_k=x_ky_kz_k$（k 为正整数）.

令 $x_k=\tan\alpha$, $y_k=\tan\beta$, $z_k=\tan\gamma$，其中 $\alpha, \beta, \gamma\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma,$$

所以 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\cdot\tan\gamma-\tan\gamma\cdot\tan\alpha}=0$.

故 $$\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

于是 $$\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\cdot\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma.$$

但 $$\tan 2\alpha=\frac{2x_k}{1-x_k^2}=-x_{k+1},$$

$$\tan 2\beta=\frac{2y_k}{1-y_k^2}=-y_{k+1},$$

$$\tan 2\gamma=\frac{2z_k}{1-z_k^2}=-z_{k+1},$$

所以
$$x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}=x_{k+1}y_{k+1}z_{k+1}.$$

从而对一切正整数 n，有 $x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n$ 成立，因 $x_ny_nz_n\neq 0$，故不存在 n 使 $x_n+y_n+z_n=0$.

评注 利用三角换元，通过三角公式将欲证等式简单化.

例 15 试证明：存在唯一这样的三角形，它的三边长是三个连续的自然数，且有一个角是另一个角的 2 倍.

解 设边长为 $a=n-1$, $b=n$, $c=n+1$ $(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)$ 的三角形满足条件，它的三个角分别为 α、2α、$\pi-3\alpha$. 显然 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$.

由于 $\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha=4\cos^2\alpha-1=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1$,

(1) 若 $A=\alpha$, $B=2\alpha$，则 $C=\pi-3\alpha$. 由正弦定理得

$$\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin 2\alpha}=\frac{n+1}{\sin 3\alpha},$$

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1,$$

解得 $n=2$. 因此 $a=1$, $b=2$, $c=3$. 但此时不能构成三角形.

(2) 若 $A=\alpha$, $C=2\alpha$，则 $B=\pi-3\alpha$，由正弦定理得 $\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin 3\alpha}=\frac{n+1}{\sin 2\alpha}$, $\frac{n}{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1$，解得 $n=5$.

因此 $a=4$, $b=5$, $c=6$ 能构成三角形，此时，由余弦定理得 $\cos A=\frac{3}{4}$, $\cos C=\frac{1}{8}$，满足 $\cos C=\cos 2A$，从而满足 $C=2A$.

(3) 若 $B=\alpha$, $C=2\alpha$，则 $A=\pi-3\alpha$，由正弦定理得

$$\frac{n-1}{\sin 3\alpha}=\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{n+1}{\sin 2\alpha},\ \frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+2}{n}\right)^2-1.$$

$n^2-3n-1=0$，这个方程没有整数解.

综上所述，满足条件的三角形是唯一的，它的三边的长分别为 4、5、6.

例 16 (Menelaus 定理)直线 l 与 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 或它们的延长线依次相交于 D、E、F，求证：$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

分析　结论的六条线段 AD 和 FA、BE 和 DB、CF 和 EC 分别是 $\triangle ADF$、$\triangle BDE$、$\triangle CFE$ 的两条边，可运用正弦定理，将比值 $\frac{AD}{FA}$、$\frac{BE}{DB}$、$\frac{CF}{EC}$ 表示成角的正弦的比值.

证明　如图 6-4，设 $\angle ADF=\alpha$，$\angle CFE=\beta$，$\angle CEF=\gamma$，由正弦定理，在 $\triangle ADF$ 中，$\frac{AD}{FA}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. 在 $\triangle BDE$ 中，$\frac{BE}{DB}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$，在 $\triangle CFE$ 中，$\frac{CF}{EC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. 所以左边 $=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=1$.

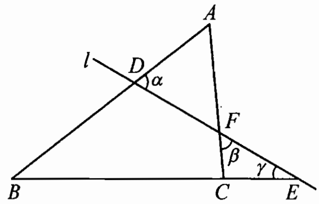


图 6-4

评注　可以证明，Menelaus 定理的逆命题也是正确的. 在平面几何的竞赛中，常用它们来证明有关三点共线的问题.

例 17　（Ceva 定理）P 是 $\triangle ABC$ 外的一点，直线 PA、PB、PC 依次与 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或者它们的延长线相交于 D、E、F，求证：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

分析　A、B、F 在一条直线上，且 AF、FB 分别是 $\triangle PAF$、$\triangle PFB$ 的边，可以用这两个三角形面积之比表示 $\frac{AF}{FB}$.

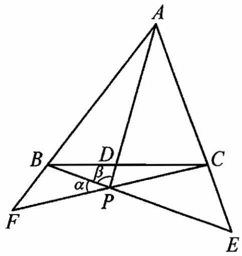


图 6-5

证明　如图 6-5，设 $\angle BPF=\alpha$，$\angle APB=\beta$，

$$\frac{AF^2}{FB^2}=\frac{\frac{1}{2}PA\cdot PF\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}PB\cdot PF\cdot\sin\alpha}=\frac{PA\sin(\alpha+\beta)}{PB\cdot\sin\alpha},$$

$$\frac{BD^2}{DC^2}=\frac{\frac{1}{2}PB\cdot PD\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}PC\cdot PD\cdot\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}=\frac{PB\sin\beta}{PC\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{CE^2}{EA^2}=\frac{\frac{1}{2}PC\cdot PE\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}PA\cdot PE\cdot\sin(180^\circ-\beta)}=\frac{PC\sin\alpha}{PA\sin\beta},$$

所以
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

评注 可以证明 Ceva 定理的逆命题也是正确的. 在平面几何的竞赛题中，常用它们来论证有关三线共点的问题.

例 18 如图 6－6，设 O、H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，则在 BC、CA、AB 上分别存在点 D、E、F，使得 $OD+DH=OE+EH=OF+FH$，且直线 AD、BE、CF 共点.

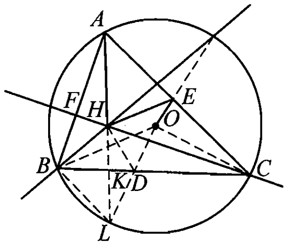


图 6－6

证明 设 AH 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 L，交 BC 于 K，连 OL 交 BC 于 D，连 HD. 由于 $HK=KL$，得 $HD=LD$，于是 $OD+DH=OD+DL=OL=R$，其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.

类似地，可以在 CA 和 AB 上得到点 E 和 F，使
$$OE+EH=OF+FH=R.$$

连 OB、OC 和 BL，则 $\angle OBC=90°-\angle A$，$\angle CBL=\angle CAL=90°-\angle C$，所以
$$\angle OBL=90°-\angle A+90°-\angle C=\angle B,$$
由于 $OB=OL$，则 $\angle OLB=\angle B$，于是 $\angle BOL=180°-2\angle B$，
$$\angle COD=\angle BOC-\angle BOD=2\angle A+(180°-2\angle B)=180°-2\angle C.$$

由正弦定理得
$$\frac{BD}{\sin\angle BOD}=\frac{OD}{\sin\angle OBD},$$
$$\frac{CD}{\sin\angle COD}=\frac{OD}{\sin\angle OCD},$$
于是有
$$\frac{BD}{CD}=\frac{\sin(180°-2\angle B)}{\sin(180°-2\angle C)}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}.$$

同理 $\frac{CE}{EA}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}$，所以
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$
由 Ceva 定理的逆定理得 AD、BE、CF 三线共点.

例 19　如图 6－7，P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点(包括在边界上)，过 P 作 BC、CA、AB 的垂线，垂足为 D、E、F. 则

(1) $\triangle ABC$ 为正三角形 $\Leftrightarrow$ 对任意的 P 都有

$$S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}+S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC};$$

(2) $\triangle ABC$ 为正三角形 $\Leftrightarrow$ 对任意的 P 都有 $BD+CE+AF=\frac{1}{2}(BC+CA+AB)$.

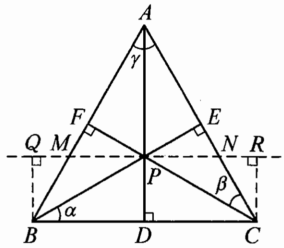


图 6－7

证明　(1) 必要性. 过 P 作 $MN /\!/ BC$ 交 AB、AC 于 M、N，过 B 作 $BQ\perp MN$ 于 Q，过 C 作 $CR\perp MN$ 于 R，记正 $\triangle AMN$ 的边长为 1，并设 $PM=x$，则 $PN=1-x$. 于是，

$$\begin{aligned}S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PNE}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(1-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\cdot\frac{1-x}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{2}S_{\triangle AMN}.\end{aligned}$$

又 $\triangle BMQ\cong\triangle CNR$，所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle BPD}+S_{\triangle PCN}&=\frac{1}{2}(S_{\text{矩形}BDPQ}+S_{\text{矩形}PDCR})-S_{\triangle CRN}\\&=S_{\triangle PCD}+S_{\triangle BMP}.\end{aligned}$$

从而
$$S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}+S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

充分性. 当 P 为 $\angle A$ 的平分线与 BC 的交点时，因为 $\triangle APE\cong\triangle APF$，$S_{\triangle APE}=S_{\triangle APF}$，所以 $S_{\triangle PCE}=S_{\triangle PBF}$.

故
$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}.$$

从而 P 为 BC 中点. 故 $AB=AC$.

同理
$$AB=BC.$$

所以 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(2) 必要性. 由正弦定理有

$$PB\sin\alpha=PC\sin(60^\circ-\beta),$$

$$PC\sin\beta=PA\sin(60^\circ-\gamma),$$

$$PA\sin\gamma=PB\sin(60^\circ-\alpha).$$

将以上三式相加并移项得

$$\begin{aligned}&PB[\sin\alpha-\sin(60^\circ-\alpha)]+PC[\sin\beta-\sin(60^\circ-\beta)]\\&\quad+PA[\sin\gamma-\sin(60^\circ-\gamma)]\\&=2\cos 30^\circ\cdot[PB\sin(\alpha-30^\circ)+PC\sin(\beta-30^\circ)+PA\sin(\gamma-30^\circ)]\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $\quad PB\sin(\alpha-30^\circ)+PC\sin(\beta-30^\circ)+PA\sin(\gamma-30^\circ)=0.$

又

$$\begin{aligned}&BD+CE+AF-DC-EA-FB\\&=PB\cos\alpha+PC\cos\beta+PA\cos\gamma-PB\cos(60^\circ-\alpha)\\&\quad-PC\cos(60^\circ-\beta)-PA\cos(60^\circ-\gamma)\\&=-2\sin30^\circ[PB\sin(\alpha-30^\circ)+PC\sin(\beta-30^\circ)+PA\sin(\gamma-30^\circ)]\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$BD+CE+AF=DC+EA+FB=\frac{1}{2}(BC+CA+AB).$$

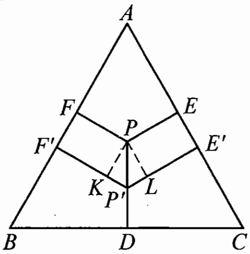


图 6-8

充分性. 如图 6-8，当 P、P' 为 BC 的中垂线上两个不同点时，有 $EE'=FF'$. 作 $PK\perp P'F'$ 于 K，$PL\perp P'E'$ 于 L，则 $PK=PL$，

$$\triangle PKP'\cong\triangle PLP',\ \angle KPP'=\angle LPP',$$

即直线 PP' 与 AB、AC 所成角相等，有

$$\angle B=\angle C,\ AB=AC.$$

同理 $AB=BC$.

故$\triangle ABC$为正三角形.

例 20 如图 6-9，在锐角$\triangle ABC$的 BC 边上有两点 E、F，满足$\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$，$FN\perp AC$（M、N 是垂足），延长 AE 交$\triangle ABC$的外接圆于点 D.

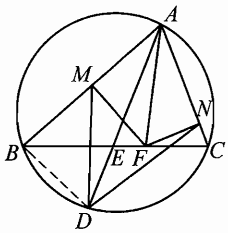


图 6-9

证明：四边形 $AMDN$ 与$\triangle ABC$的面积相等.

（注：此题当 AD 与 AF 重合时，即为第 28 届 IMO 第二题.）

证法一 如图 6-9，连 BD，则$\triangle ABD\backsim\triangle AFC$，所以 $AF\cdot AD=AB\cdot AC$.

设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle EAF=\beta$，则

$$
\begin{aligned}
S_{\text{四边形}AMDN} &= \frac{1}{2}AM \cdot AD\sin\alpha + \frac{1}{2}AD \cdot AN\sin(\alpha+\beta) \\
&= \frac{1}{2}AD[AF\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha + AF\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)] \\
&= \frac{1}{2}AD \cdot AF\sin(2\alpha+\beta) \\
&= \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle BAC \\
&= S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}
$$

证法二　如图 6－10，作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 AG. 易知，$BG \parallel MF$，$CG \parallel NF$，$DG \parallel MN$. 从而，$S_{\triangle BFM} = S_{\triangle GFM}$，$S_{\triangle CFN} = S_{\triangle GFN}$，$S_{\triangle MND} = S_{\triangle MNG}$. 所以有

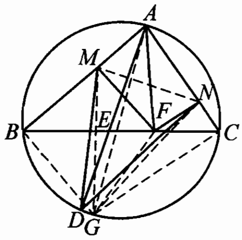


图 6－10

$$
\begin{aligned}
S_{\text{四边形}AMDN} &= S_{\text{四边形}AMGN} \\
&= S_{\text{四边形}AMFN} + S_{\triangle GFM} + S_{\triangle GFN} \\
&= S_{\text{四边形}AMFN} + S_{\triangle BFM} + S_{\triangle CFN} \\
&= S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}
$$

证法三　如图 6－11，作 $AH \perp BC$，H 为垂足，则 A、M、H、F、N 共圆. 从而有 $\angle MHB = \angle BAF = \angle CAD = \angle CBD$，所以 $MH \parallel BD$.

同理 $NH \parallel CD$. 于是，有

$$S_{\triangle BMH} = S_{\triangle DMH},\ S_{\triangle CNH} = S_{\triangle DNH}.$$

故
$$S_{\text{四边形}AMDN} = S_{\triangle ABC}.$$

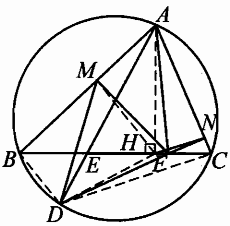


图 6－11

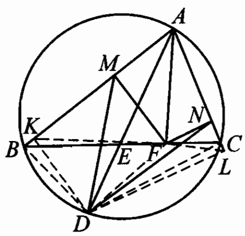


图 6－12

证法四　如图 6－12，只要证明

$$S_{\triangle BMD} + S_{\triangle CND} = S_{\triangle BCD}.$$

设 $\angle BAE = \angle CAF = \alpha$，则

$$AF=\frac{AB\sin B}{\sin(C+\alpha)}=\frac{2R\sin C\cdot\sin B}{\sin(C+\alpha)},$$
$$AM=AF\cos(A-\alpha).$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.

所以

$$BM=AB-AM=2R\sin C\cdot\frac{\cos B\cdot\sin(A-\alpha)}{\sin(C+\alpha)}.$$

故

$$S_{\triangle BMD}=\frac{1}{2}BM\cdot BD\sin\angle ABD=2R^2\sin\alpha\cdot\sin(A-\alpha)\cos B\cdot\sin C.$$

同理

$$S_{\triangle CND}=2R^2\sin\alpha\cdot\sin(A-\alpha)\cdot\cos C\cdot\sin B.$$

从而

$$\begin{aligned}&S_{\triangle BMD}+S_{\triangle CND}\\=&2R^2\sin\alpha\cdot\sin(A-\alpha)\cdot\sin(B+C)\\=&\frac{1}{2}\cdot2R\sin\alpha\cdot2R\sin(A-\alpha)\cdot\sin A\\=&\frac{1}{2}BD\cdot DC\sin\angle BDC=S_{\triangle BCD}.\end{aligned}$$

证法五　如图 6－12，作 $DK\perp AB$，$DL\perp AC$，垂足分别为 K、L，则只要证明 $S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FDM}+S_{\triangle FDN}$.

利用 $S_{\triangle FDM}=S_{\triangle FKN}$，$S_{\triangle FDN}=S_{\triangle FLN}$，只需证明

$$S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FKM}+S_{\triangle FLN},$$

即

$$FM\cdot BM+FN\cdot CN=FM\cdot MK+FN\cdot NL.$$

因此，只需证明 $FM\cdot BK=FN\cdot CL$.

由于 $\triangle BKD\backsim\triangle CLD$，所以

$$\frac{BK}{CL}=\frac{DK}{DL}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}=\frac{FN}{FM}.$$

故结论成立. 其中 $\alpha=\angle BAE=\angle CAF$.

证法六　如图 6－13，作 $DG\parallel MN$，交 AC 的延长线于 G，只要证明

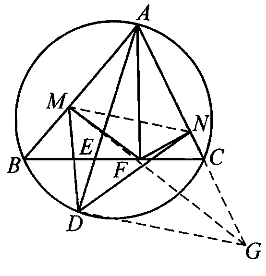


图 6－13

$$S_{\triangle AMG}=S_{\triangle ABC}.$$

由于$\angle AGD=\angle ANM=\angle AFM$，所以$\triangle AGD\backsim\triangle AFM$. 从而$AD\cdot AF=AM\cdot AG$. 又由于$\triangle ABD\backsim\triangle AFC$，有$AD\cdot AF=AB\cdot AC$.

故$AM\cdot AG=AB\cdot AC$，即

$$S_{\triangle AMG}=S_{\triangle ABC}.$$

证法七　设$\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle EAF=\beta$，则由证法一知

$$S_{\text{四边形}AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin(2\alpha+\beta)=\frac{AF}{4R}\cdot AD\cdot BC.$$

又

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}AB\cdot AF\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}AC\cdot AF\sin\alpha\\&=\frac{AF}{4R}(AB\cdot CD+AC\cdot BD).\end{aligned}$$

由托勒密定理知

$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC,$$

故结论成立.

习　题　6

1 解方程组$(1-x_k^2)x_{k+1}=2x_k$，且$x_{n+1}=x_1$，其中$k=1, 2, 3, \cdots, n$.

2 解不等式$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}>0$.

3 已知$x, y, z\in\mathbf{R}$，求证：

$$\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}.$$

4 已知x、y、z是非负实数，且$x+y+z=1$，求证：

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

5 数列$a_0, a_1, a_2, \cdots$与$b_0, b_1, b_2, \cdots$定义如下：$a_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$b_0=1$，$b_{n+1}=\dfrac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}$，$n=0$，$1, 2, \cdots$.

求证：不等式 $2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n$ 对 $n=0, 1, 2, \cdots$ 成立.

6 已知 $a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$，$a_1a_2+b_1b_2=0$，求证：$a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2=1$，$a_1b_1+a_2b_2=0$.

7 解方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

8 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=1,\\ \sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=1.\end{cases}$

9 求满足下列等式的实数 x、y、z：$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=4xy(1-z^2)$.

10 已知实数 x、y 满足 $x^2+y^2-8x+6y+21\leqslant 0$，求证：

$$2\sqrt{3}\leqslant\sqrt{x^2+y^2+3}\leqslant 2\sqrt{13}.$$

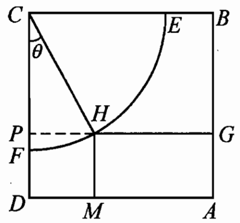
11 求证：$-\sqrt{3}<\dfrac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{x^2+1}}\leqslant 2$.

12 求函数 $y=x+4+\sqrt{5-x^2}$ 的最小值和最大值.

13 已知函数 $f(x)=ax+b$，$x\in[-1, 1]$，且 $2a^2+6b^2=3$，求证：$|f(x)|\leqslant\sqrt{2}$.

14 任给 13 个不同的实数，求证：至少存在两个，不妨设 x 和 y，满足 $0<\dfrac{x-y}{1+xy}\leqslant 2-\sqrt{3}$.

15 某体育馆拟用运动场的边角地建一个矩形的健身室，如图所示，$ABCD$ 是一块边长为 50 米的正方形地皮，扇形 CEF 是运动场的一部分，其半径为 40 米，矩形 $AGHM$ 就是拟建的健身室，其中 G、M 分别在 AB 和 AD 上，H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上，设矩形 $AGHM$ 的面积为 S，$\angle HCF=\theta$，请将 S 表示为 θ 的函数，并找出点 H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 的何处时，该健身室的面积最大，并求出最大面积.



(第 15 题)

16 某城市有一条公路从正西方向 OA 通过市中心 O 后转向东北方向 OB，现要修建一条铁路 L，L 在 OA 上设一车站 A，在 OB 上设一车站 B，铁路在 AB 部分为直线段，现要求市中心 O 与 AB 之间距离为 10 千米，问把 AB

分别设在公路上距中心 O 多远处才能使 $|AB|$ 最短？并求出最短距离.

17 在体育比赛中，有一种“铁人”项目的比赛，运动员通过跑步、划船、骑自行车等项目的比赛，以累计成绩决定胜负. 在这类比赛中常遇到如下情况：运动员从 A 地出发跑步到河岸渡口 B 处，然后划船到河对岸 P 处. 上岸后沿河岸骑自行车到达河岸边的终点 C 处. 如果某两名运动员的跑步、划船、骑自行车的速度均相同，那么他们如何选择登岸地点 P 的位置，才能取得胜利呢？

18 某大型装载车的车轮直径为 3 米，车轮外沿有一污点 A，当装载车以 π 米/秒从最初的位置开始运行时，点 A 上升到最高点需要 1 秒钟. (1)求点 A 离地高度 h(单位：米)与运行时间 t(单位：秒)的函数关系式；(2)若此车运行距离为 50 米，试求污点距地面高度为 $\frac{3}{4}$ 米时的 t 之值.

19 已知 P 是等边 $\triangle ABC$ 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的任意一点，

(1) 求证：$PA = PB + PC$，$PA^2 = BC^2 + PB \cdot PC$；

(2) 求 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC}$ 的最大值.

20 等腰 $\triangle ABC$ 的底边长为 a，腰长为 b，顶角为 $20°$，求证：$a^3 + b^3 = 3ab^2$.

21 在 $\triangle ABC$ 中，$AC = b$，$AB = c$，$\angle BAC = \alpha$，试用 b、c、α 表示角 A 的平分线 AT 之长.

22 在等腰 $\triangle ABC$ 中，顶角 $A = 100°$，角 B 的平分线交 AC 于 D，求证：$AD + BD = BC$.

23 如果 $x, y, z > 1$，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$，证明：

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

24 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，其外接圆圆心为 O，半径为 R，AO 交 $\triangle BOC$ 的外接圆于 A'，BO 交 $\triangle COA$ 的外接圆于点 B'，CO 交 $\triangle AOB$ 的外接圆于点 C'. 证明：$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geqslant 8R^3$，并指出在什么条件下等号成立.

25 已知正数 $m_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, n)$，$p \geqslant 2$ 且 $p \in \mathbf{N}$ 并满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+m_i^p} = 1$，求证：$\prod_{i=1}^{n} m_i \geqslant (n-1)^{\frac{n}{p}}$.

习题解答

习题 1

1. B. 因 $y=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$，故选 B.

2. D. 若点 $(x,\ y)$ 在函数 $y=\sin x$ 的图象上，则它关于直线 $x=\frac{3}{4}\pi$ 对称的点 $\left(\frac{3}{2}\pi-x,\ y\right)$ 在函数 $y=-\cos x$ 的图象上.

3. D. 原函数可变形为 $y=-3\cos\left[-2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

4. C. 原函数变形为 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$.

5. D. 因函数 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $u=-\cos x$ 在 $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上也单调递增.

6. D. 由原函数得 $\cos(\sin x)\geqslant 0$，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $\cos(\sin x)\geqslant 0$ 恒成立.

7. A. 等式左边 $=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 因原等式成立，所以 $\left|\frac{4m-6}{4-m}\right|=\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\leqslant 2$，即 $4m^2-12m+9\leqslant m^2-8m+16$，整理得 $3m^2-4m-7\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$.

8. B. 当 $\tan\alpha=3$ 时，$20\sin\alpha\cos\alpha=10\sin 2\alpha=10\times\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=10\times\frac{2\times 3}{1+3^2}=6$，所以 $f(20\sin\alpha\cos\alpha)=f(6)$，由条件得 $f(6)=f(5+1)=f(1)=-f(-1)=-1$.

9. D. 因 $f(x)=\frac{1}{\sec^2 x}+\sin x=\cos^2 x+\sin x=-\sin^2 x+\sin x+1=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，当 $|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$，$f(x)_{\min}=$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

10. C. 正切函数在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数，但不是在整个定义域上；常数函数也是周期函数，但无最小正周期；若 x 为第一象限角，则在 $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上 $\sin x$ 是增函数，而 $\cos x$ 是减函数，所以 A、B、D 均错误. 又对 $f(x)=3\tan\sqrt{x^2}$ 来说，$f(-x)=3\tan\sqrt{(-x)^2}=f(x)$，这是偶函数，所以其图象关于 y 轴对称，故选 C.

11. $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$，$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

12. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi-\frac{\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，$\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. 由条件得 $\cos x-2\cos^2 x\geqslant 0$，即 $0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$，所以定义域为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi-\frac{\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，又 $y=\sqrt{-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$，故值域为 $\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

13. 2π. 由原函数变换得 $y=\sin x+\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}=\sin x+1-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，故 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$.

14. 3. 由题意得 $f(x)+f(-x)=8$，而 $\cos 100^\circ=-\sin 10^\circ$，所以 $f(\sin 10^\circ)+f(-\sin 10^\circ)=8$，于是 $f(\cos 100^\circ)=3$.

15. $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$. 由原函数得 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1\geqslant 0$，即 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant 1$，$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$，所以定义域为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

16. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$. 由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得对称轴 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$.

17. $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},\ 0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$. 由 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，得对称中心 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},\ 0\right)$.

18. ①③⇒②④ 及 ②③⇒①④. 若 ③ 成立，则 $\omega=2$，得 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，又 ① 成立，则 $x=\frac{\pi}{12}$ 时 $f(x)$ 有最大值或最小值，即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm 1$，从而

$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，它关于 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称，且在 $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ 上单调递增. 若③成立，则 $\omega=2$，得 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，又②成立，则当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)=0$，即 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$. 从而 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，得①④成立.

19. ①③④. 因 $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，周期为 π；$y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}-\frac{1+\cos x}{\sin x}=-\frac{2\cos x}{\sin x}=-2\cot x$. 其定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，周期为 π；可以验证①③④符合题意.

20. 63. 由 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{x}{100}$ 都是奇函数知，它的正负根个数相同，在 $x>0$ 时，由 $\frac{100}{\pi}=31.8$，知在 $(0, 100]$ 上两函数的图象有 31 个交点，同理在 $[-100, 0)$ 上两函数的图象有 31 个交点，又 $x=0$ 是方程的根，所以共有 63 个实数根.

21. 由 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$ 知 $T=\pi$，列表由五点描图法作出其图象，该图象可看作将函数 $y=\sin x$ 的图象横坐标压缩为原来的一半得 $y=\sin 2x$，再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，再将纵坐标扩大为原来的 2 倍，得 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，最后，将整个图象向下平移 1 个单位，即得函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$ 的图象.（图略）

22. (1) $f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)=2\cos\left(2x+\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 要使 $f(x)$ 为偶函数，只要满足 $\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

(3) 由 $f(x)=2\cos 2x=1$，得 $2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，因为 $x\in[-\pi, \pi]$，所以解集为 $\left\{x \middle| x=\pm\frac{5\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{6}\right\}$.

23. 若对一切 $x\in[0, 1]$，恒有 $f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$，则 $\cos\theta=f(1)>0$，$\sin\theta=f(0)>0$…①. 取 $x_0=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}\in(0,$

1)，则 $\sqrt{\cos\theta}x_0-\sqrt{\sin\theta}(1-x_0)=0$. 由于 $f(x)=[\sqrt{\cos\theta}x-\sqrt{\sin\theta}(1-x)]^2+2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x(1-x)$. 所以，$0<f(x_0)=2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x_0(1-x_0)$. 故 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$…②. 反之，当①，②成立时，$f(0)=\sin\theta>0$，$f(1)=\cos\theta>0$，且 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\geqslant 2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x(1-x)>0$. 先在 $[0,2\pi]$ 中解①与②，由 $\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$，可得 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 又因为 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$，$\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>\frac{1}{2}$，$\sin 2\theta>\frac{1}{2}$，注意到 $0<2\theta<\pi$，故有 $\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5\pi}{6}$. 所以，$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}$. 因此，原题中 θ 的取值范围是 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

24. 由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x)=f(x)$，即 $\sin(-\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)$，所以 $-\cos\varphi\sin\omega x=\cos\varphi\sin\omega x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，且 $\omega>0$，所以 $\cos\varphi=0$. 依题设 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以解得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 由 $f(x)$ 的图象关于点 M 对称，得 $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$，取 $x=0$，得 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\omega\pi}{4}$，所以 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\omega\pi}{4}$. 所以 $\cos\frac{3\omega\pi}{4}=0$，又 $\omega=0$，得 $\frac{3\omega\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=1,2,3,\cdots$. 所以 $\omega=\frac{2}{3}(2k+1)$，$k=0,1,2,\cdots$. 当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，$f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数；当 $k=1$ 时，$\omega=2$，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数；当 $k\geqslant 2$ 时，$\omega\geqslant\frac{10}{3}$，$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不是单调函数；所以，综上得 $\omega=\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2$.

25. 在 $x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$ 的条件下，$\sin x<\sin y$ 的充要条件是 $x<y$. 证明：若 $0<x<y<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin x<\sin y$；若 $\frac{\pi}{2}<y<\pi-x$，则 $\sin y>\sin(\pi-x)=\sin x$. 这样即得到当 $x<y$ 时均有 $\sin x<\sin y$. 反过来，若 $\sin x<\sin y$，则 $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}<0$，而 $0<\frac{x+y}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{y-x}{2}>0$，而 $0<\frac{y-x}{2}<\pi$ 得到 $y>x$. 利用上述结论由 $0<\alpha<\beta$，$\alpha+$

$\beta<\pi$ 可知 $\sin\alpha<\sin\beta$，所以 $\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1$，即 $\sin a<\sin b$，再用一次上述结论可得 $a<b$.

26. （1）$f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^4\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right]^3}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，当且仅当 $\theta=2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号. 所以，$f(\theta)$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

（2）由于 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $g(\theta)>0$，$g^2(\theta)=\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\theta=\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\cos^2\theta=\frac{2(1-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta}{4}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2(1-\cos\theta)+\cos\theta+\cos\theta}{3}\right]^3=\frac{2}{27}$，当且仅当 $\theta=\arccos\frac{2}{3}$ 时取等号. 所以，$g(\theta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$. 当然也可以如下这样，$g(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left[\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{3}\right]^3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. 当且仅当 $\theta=2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取等号. 故 $g(\theta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

27. 设学生 P 距墙壁 x 米，黑板上、下边缘与学生 P 的水平视线 PH 夹角分别为 $\angle APH=\alpha$，$\angle BPH=\beta$，其中 $\alpha>\beta$，有 $\tan\alpha=\frac{a}{x}$，$\tan\beta=\frac{b}{x}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$ 即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan(\alpha-\beta)$ 取最大值 $\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，由于 $\alpha-\beta$ 为锐角，故此时 $\alpha-\beta$ 也最大，即学生距墙壁 $\sqrt{ab}$ 米时看黑板的视角最大，最大视角为 $\arctan\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

28. 要证明 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}[\tan x_1+\tan x_2]>\tan\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow\tan\frac{x_1+x_2}{2}-\tan x_1<\tan x_2-\tan\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow\tan\frac{x_2-x_1}{2}\cdot$

$\left(1+\tan\dfrac{x_1+x_2}{2}\cdot\tan x_1\right)<\tan\dfrac{x_2-x_1}{2}\cdot\left(1+\tan\dfrac{x_1+x_2}{2}\cdot\tan x_2\right)$，不妨设 $x_1<x_2$，则上式等价于 $\tan x_1<\tan x_2$. 显然成立.

29. 若 $f(x)$ 的值不依赖于 x，即 $f(x)$ 为常数. 由 $f(0)=0$，得 $f(x)=0$，取 $x=\dfrac{\pi}{k}$，得 $f\left(\dfrac{\pi}{k}\right)=-\cos^k\dfrac{\pi}{k}-\cos^k\dfrac{2\pi}{k}=0$，若 k 为正偶数，则 $\cos^k\dfrac{\pi}{k}\geqslant 0$，$\cos^k\dfrac{2\pi}{k}\geqslant 0$，从而 $\cos\dfrac{\pi}{k}=\cos\dfrac{2\pi}{k}=0$，此时无解；若 k 为正奇数，则由 $\cos^k\dfrac{\pi}{k}=-\cos^k\dfrac{2\pi}{k}$，得 $\cos\dfrac{\pi}{k}=-\cos\dfrac{2\pi}{k}$，所以 $\dfrac{2\pi}{k}=2n\pi\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{k}\right)$，即 $\dfrac{3}{k}=2n\neq 1$ 或 $\dfrac{1}{k}=2n-1$，故 $k=\dfrac{3}{2n+1}$ 或 $\dfrac{1}{2n-1}$，从而 $k=1$ 或 3，但 $k=1$ 时，$f(x)$ 不为常数，$k=3$ 时，$f(x)$ 为常数，所以 $k=3$.

习 题 2

1. B. 因 $\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$，由合分比性质得 $\dfrac{2\cos\theta}{2+2\sin\theta}=\dfrac{-1}{3}$，故

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-2^2}{1+2^2}=-\frac{3}{5}.$$

2. C. $2\sqrt{1+\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}=2\sqrt{\sin^2 4+\cos^2 4+2\sin 4\cos 4}+\sqrt{2+2(2\cos^2 4-1)}=2\mid\sin 4+\cos 4\mid+\mid 2\cos 4\mid=-2\sin 4-2\cos 4-2\cos 4=-2\sin 4-4\cos 4$.

3. D. 参照例 4 可得原式 $=\dfrac{1}{16}$.

4. A. 原式 $=\dfrac{\cos 2\alpha}{2\cdot\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\cdot(1+\sin 2\alpha)}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}=1$.

5. B. 因 $a=\sqrt{2}\sin 59^\circ$，$b=\sqrt{2}\sin 61^\circ$，$c=\sqrt{2}\sin 60^\circ$，而 $59^\circ<60^\circ<61^\circ$，所以 $a<c<b$.

6. A. 由 $\tan 30^\circ=\dfrac{\tan 20^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 20^\circ\cdot\tan 10^\circ}$，得 $1-\tan 20^\circ\cdot\tan 10^\circ=\sqrt{3}(\tan 20^\circ+\tan 10^\circ)$，即 $\tan 10^\circ\cdot\tan 20^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ=1$.

7. D. 设 $\cos\alpha\sin\beta=t$，则由 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，得 $\sin(\alpha+\beta)=t+\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}-t$，于是 $\left|t+\frac{1}{2}\right|\leqslant 1$ 且 $\left|\frac{1}{2}-t\right|\leqslant 1$，解之得 $-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$.

8. A. 因 α、β 为锐角，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$，于是 $y=\cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}x$. 因 $y>0$，所以 $-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}x>0$. 即 $4x>3\sqrt{1-x^2}$，平方得 $25x^2>9$，所以 $x>\frac{3}{5}$. 又 $x<1$，故 $\frac{3}{5}<x<1$.

9. C. 参照例 10 可知 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

10. C. 因 $\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})=\frac{1}{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|\right)$，所以要使原等式成立，则 $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$，且 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$. 故选 C.

11. $1-2m^2$. 由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=m$，得 $\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2m^2-1$，即 $\sin 2x=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1-2m^2$.

12. $\frac{56}{65}$. 由条件得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}$，$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{12}{13}$，所以 $\cos\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$. 即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta+\alpha\right)=-\frac{56}{65}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{56}{65}$.

13. -1. 由 $f(\tan x)=\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$，得 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，所以 $f(-1)=\frac{2\times(-1)}{1+(-1)^2}=-1$.

14. 1. 由 $x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{\pi}{24}$，得 $x^2+\frac{1}{x^2}=4\cos^2\frac{\pi}{24}-2=2\cos\frac{\pi}{12}$，所以 $x^4+\frac{1}{x^4}=4\cos^2\frac{\pi}{12}-2=2\cos\frac{\pi}{6}$，$x^8+\frac{1}{x^8}=4\cos^2\frac{\pi}{6}-2=2\cos\frac{\pi}{3}=1$.

15. $-\frac{3}{5}$. 由条件等式得 $(2\cot\alpha+1)(\cot\alpha+3)=0$，所以 $\cot\alpha=-\frac{1}{2}$ 或

$\cot\alpha=-3$. 而$\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$,故$\cot\alpha>-1$,从而$\cot\alpha=-\frac{1}{2}$,所以$\tan\alpha=-2$, $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

16. $\sqrt{x^2-1}$, $\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}$, $\frac{2-x^2}{x^2}$.

17. $\frac{1}{16}$. 参照例 4 可得原式 $=\frac{1}{16}$.

18. 0. 原式 $=\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}+\frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ}-\frac{2}{\cos 80^\circ}=\frac{\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ}{\sin 5^\circ\cos 5^\circ}-\frac{2}{\cos 80^\circ}=\frac{2}{\sin 10^\circ}-\frac{2}{\sin 10^\circ}=0$.

19. $-2\sin\frac{\theta}{2}$. 原式 $=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right|=-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=-2\sin\frac{\theta}{2}$.

20. $-\frac{47}{72}$. 两式平方和得 $2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{25}{36}$,所以原式 $=-\frac{47}{72}$.

21. (1) $\cos^2 24^\circ+\sin^2 6^\circ+\cos^2 18^\circ=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 48^\circ-\cos 12^\circ+\cos 36^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-2\sin 30^\circ\sin 18^\circ+\cos 36^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=\frac{3}{2}+\cos 36^\circ\sin 18^\circ=\frac{3}{2}+\frac{\cos 36^\circ\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{4}\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{7}{4}$.

(2) 参照例 3 的解法,可得 $4\cos^2 36^\circ-\sin 84^\circ(\sqrt{3}-\tan 6^\circ)=1$.

22. 由$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得$\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$, $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$,故由 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$, 得 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{9}$, 由 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$ 得 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]=\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$. 从而 $\cos(\alpha+\beta)=1-2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1-2\times\left(\frac{22}{27}\right)^2=-\frac{239}{729}$.

23. (1) 左边 $=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}}=$

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\text{右边}.$$

(2) 左边 $=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A)-\frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\frac{1}{2}\sin 2A-\frac{1}{2}\sin 2B}=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}$

$=\dfrac{-2\sin(A+B)\sin(B-A)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)}=\tan(A+B)=$ 右边.

24. 设 $B_n=(a^2+b^2)^n\cos n\theta$. 由 $\sin\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，得 $\cos\theta=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $(a>b>0)$，所以 $(a^2+b^2)\sin\theta=2ab$，$(a^2+b^2)\cos\theta=a^2-b^2$ 均为整数，即 A_1、B_1 均为整数. 设 A_k、B_k 均为整数，则 $A_{k+1}=(a^2+b^2)^{k+1}\sin(k+1)\theta=(a^2+b^2)^{k+1}\sin k\theta\cos\theta+(a^2+b^2)^{k+1}\cos k\theta\sin\theta=A_k\cdot(a^2-b^2)+B_k\cdot 2ab$，$B_{k+1}=(a^2+b^2)^{k+1}\cos(k+1)\theta=(a^2+b^2)^{k+1}\cos k\theta\cos\theta-(a^2+b^2)^{k+1}\sin k\theta\cos\theta=B_k\cdot(a^2-b^2)-A_k\cdot 2ab$. 由 A_k、B_k、a、b 均为整数，得 A_{k+1}、B_{k+1} 均为整数. 由归纳原理可知，对于一切正整数 n，A_n 为整数.

25. 令 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\sin^3(3^k\alpha)+\dfrac{1}{4\cdot 3^n}\sin 3^{n+1}\alpha-\dfrac{3}{4}\sin\alpha$，容易验证 $a_{n+1}-a_n=0$，所以成立.

26. (1) 设 $x=\cos^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{5\pi}{16}+\cos^4\frac{7\pi}{16}$，$y=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$，则 $x-y=\left(\cos^2\frac{\pi}{16}-\sin^2\frac{\pi}{16}\right)+\left(\cos^2\frac{3\pi}{16}-\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)+\left(\cos^2\frac{5\pi}{16}-\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)+\left(\cos^2\frac{7\pi}{16}-\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$；$x+y=4-2\left(\cos^2\frac{\pi}{16}\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{5\pi}{16}\sin^2\frac{5\pi}{16}+\cos^2\frac{7\pi}{16}\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)=4-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}\right)=4-\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=4-\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right]=3$. 故 $x=y=\frac{3}{2}$. (2) 设 $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$，$x_2=\cos\frac{5\pi}{9}$，$x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$，则 $x_1+x_2+x_3=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}=\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}=0$；$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}$

$\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}+\cos\frac{4\pi}{9}+\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\right]=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+2\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\right)=-\frac{3}{4}$；$x_1\cdot x_2\cdot x_3=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}=\dfrac{8\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\dfrac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$，故 x_1、x_2、x_3 是方程 $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ 的根. 所以 $x^5=\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}x^2=\frac{1}{8}x^2+\frac{9}{16}x+\frac{3}{32}$，从而 $\cos^5\frac{\pi}{9}+\cos^5\frac{5\pi}{9}+\cos^5\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{9}{16}(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{32}\times 3=\frac{1}{8}[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]+\frac{9}{16}(x_1+x_2+x_3)+\frac{9}{32}=\frac{1}{8}\times(-2)\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{9}{32}=\frac{15}{32}$.

27. $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha\cdot\left[1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}\right]=\sin^2\alpha\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$，所以 $\tan^2\gamma=\dfrac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}=\dfrac{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

28. 令 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$，$z=\cos\gamma$，则 $x^2y^2=\tan^2\beta\cdot\cos^2\beta=\sin^2\beta=1-y^2$…①. $y^2z^2=\tan^2\gamma\cdot\cos^2\gamma=\sin^2\gamma=1-z^2$…②. $z^2x^2=\tan^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=1-x^2$…③. 解之得，$x^2=y^2=z^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cdot\sin 18^\circ$. 所以 $\cos^4\alpha=\cos^4\beta=\cos^4\gamma=4\sin^2 18^\circ$，又 $\tan\alpha=\cos\gamma$，所以 $\tan^2\alpha=\cos^2\gamma=\cos^2\alpha$，则 $\sin^2\alpha=\cos^4\alpha$，同理，可得 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\cos^4\alpha=\cos^4\beta=\cos^4\gamma=4\sin^2 18^\circ$.

习 题 3

1. B. 由条件得 $2b=a+c$，从而 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$

$\dfrac{a^2+c^2-\left[\dfrac{1}{2}(a+c)\right]^2}{2ac}=\dfrac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac}=\dfrac{3(a-c)^2+4ac}{8ac}\geqslant\dfrac{1}{2}$，故 $0<B\leqslant 60^\circ$.

2. C. 在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，故 $\cos(A+B)+\cos C=0$，$\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\tan\dfrac{\pi-C}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{C}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$，选 C.

3. C. 由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，于是 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{4\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}>1$，故无解.

4. B. 由 $\sin A=2\sin B\cos C$，得 $a=2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ba}$，从而 $b=c$，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. B. 原式 $=\sin A\cdot\dfrac{1+\cos(90^\circ-B)}{2}-\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{1}{2}\sin A\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\sin A\cos A=\dfrac{1}{4}\sin 2A\leqslant\dfrac{1}{4}$.

6. B. 由条件得 $2^2+3^2>x^2$，且 $2^2+x^2>3^2$，且 $1<x<5$，解之得 $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$.

7. A. 由 $ab<4R^2\cos A\cos B$ 得 $\sin A\sin B<\cos A\cos B$，即 $\cos(A+B)>0$，所以 $A+B<\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 为钝角三角形，其外心在三角形外部.

8. C. 由 $ac=b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\geqslant 2ac-2ac\cos B\Rightarrow\cos B\geqslant\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$. 故 $\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$.

9. D. 由条件知 $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\cos 2x=2\sin x\cos x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\angle A$ 为锐角 $\Rightarrow-\dfrac{\pi}{4}<2\angle A-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow 2\angle A-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\angle A=\dfrac{\pi}{4}$. 由 $b+c=5+3\sqrt{2}$，$a=\sqrt{13}\Rightarrow 13=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A\Rightarrow 13=43+30\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})bc\Rightarrow bc=15\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 15\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$.

10. C. 由原等式可知 $a\cos\theta-\cos\theta=a+1$，所以 $\cos\theta=\frac{a+1}{a-1}$，因 θ 为 $\triangle ABC$ 的最小内角，故 $0<\theta\leqslant 60°$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta<1$，即 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a+1}{a-1}<1$，从而 $a\leqslant -3$.

11. $\frac{1}{2}$. 因 $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$，故 $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$，即 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$，得 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

12. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 由条件得 $\sin^2 A=\sin B$，且 $A+B=\frac{\pi}{2}$. 从而 $1-\cos^2 A=\cos A$，解之得 $\cos A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 而 $B<A<90°$，故最小内角为 $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

13. $\frac{1}{2}$. 由条件得 $B=\frac{\pi}{3}$，$A+C=\frac{2\pi}{3}$，于是 $\cos^2 A+\cos^2 C=\cos^2 A+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\cos^2 A+\frac{1}{4}\cos^2 A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\frac{3}{4}\sin^2 A=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos^2 A-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(\cos 2A+1)-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A=1-\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)$，因 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，所以当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时有最小值 $\frac{1}{2}$.

14. $30°$. 两等式平方相加得 $9+24(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+16=37$，所以 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$，$A+B=30°$ 或 $150°$，但当 $A+B=30°$ 时，$\sin A<\frac{1}{2}$，$\cos B<1$，于是 $3\sin A+4\cos B<6$，所以舍去. 从而 $A+B=150°$，得 $C=30°$.

15. $45°$. 由条件得 $(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$，所以 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $C=45°$.

16. $45°$ 或 $135°$. 由 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C$，得 $\frac{1}{2}\times 4\times 6\sin C=6\sqrt{2}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $C=45°$ 或 $135°$.

17. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 易知 AC 最短. 设 CD 为 AB 边上的高，长为 x，由 $\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，可得 $AD=2x$，$BD=3x$，$AB=5x=1$，$x=\frac{1}{5}$，$AC=\sqrt{5}x=$

$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18. $4\sqrt{3}$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=4\sqrt{3}$.

19. 6 cm^2. 方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根为 $x_1=\frac{-3}{5}$，$x_2=2$，从而 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$S_\triangle=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{4}{5}=6(\text{cm}^2)$.

20. 5、7、8. 由条件得 $\begin{cases}a^2+c^2-2ac\cos60^\circ=b^2,\\ \frac{1}{2}ac\sin60^\circ=10\sqrt{3},\\ b=2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}\sin60^\circ.\end{cases}$ 解得 $b=7$，$a=5$，$c=8$.

21. 设 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\sin^2B\cdots$①. 据余弦定理：$\sin^2B=\sin^2A+\sin^2C-2\sin A\sin C\cos B\cdots$②. $\sin A\sin C=\cos A\cos C-\cos(A+C)=\cos A\cos C+\cos B\cdots$③. 由②、③得，$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C\cdots$④. 由①、④得，$2\cos A\cos B\cos C=1-\sin^2B=\cos^2B$，$B$ 为锐角. 则 $2\cos A\cos C=\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C$，

所以 $\tan A\tan C=3$，所以 $\tan B=-\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{\tan A\tan C-1}=\frac{\tan A+\tan C}{2}$，因此 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 成等差数列.

22. 因为 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$，故

$$\begin{aligned}\frac{\cos(B-C)}{\cos A}&=\frac{\cos(B-C)}{-\cos(B+C)}=\frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C}{\sin B\sin C-\cos B\cos C}=\frac{\tan B\tan C+1}{\tan B\tan C-1}\\&=\frac{\tan A\tan B\tan C+\tan A}{\tan A\tan B\tan C-\tan A}=\frac{2\tan A+\tan B+\tan C}{\tan B+\tan C}\\&\geqslant\frac{2\sqrt{(\tan A+\tan B)(\tan C+\tan A)}}{\tan B+\tan C},\end{aligned}$$

同理 $\frac{\cos(C-A)}{\cos B}\geqslant\frac{2\sqrt{(\tan B+\tan C)(\tan A+\tan B)}}{\tan C+\tan A}$，

$\frac{\cos(A-B)}{\cos C}\geqslant\frac{2\sqrt{(\tan C+\tan A)(\tan B+\tan C)}}{\tan A+\tan B}$，以上三式相乘，即得 $\frac{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}{\cos A\cos B\cos C}\geqslant8$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立，原题得证.

23. 由于 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，只要证 $\frac{|\sin^2A-\sin^2B|}{\sin C}+\frac{|\sin^2B-\sin^2C|}{\sin A}\geqslant\frac{|\sin^2C-\sin^2A|}{\sin B}$…①. 因为 $\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin C\sin(A-B)$，故由①，只要证 $|\sin(A-B)|+|\sin(B-C)|\geqslant|\sin(C-A)|$…②. $|\sin(C-A)|=|\sin[(A-B)+(B-C)]|=|\sin(A-B)\cos(B-C)+\cos(A-B)\sin(B-C)|\leqslant|\sin(A-B)\cos(B-C)|+|\cos(A-B)\sin(B-C)|\leqslant|\sin(A-B)|+|\sin(B-C)|$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号，此时 $\triangle ABC$ 为正三角形，即 $a=b=c$.

24. 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\frac{b^2+c^2}{a}+2a\geqslant\frac{(b+c)^2}{2a}+2a\geqslant 2(b+c)$，故 $\frac{b^2+c^2}{a}\geqslant 2(b+c-a)$，同理可得 $\frac{c^2+a^2}{b}\geqslant 2(a+c-b)$，$\frac{a^2+b^2}{c}\geqslant 2(a+b-c)$，以上三式相加得 $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geqslant 2(a+b+c)$. 根据正、余弦定理及 $abc=2Rr(a+b+c)$，并利用上式可得 $\frac{\cos A}{\sin^2A}+\frac{\cos B}{\sin^2B}+\frac{\cos C}{\sin^2C}=\frac{2R^2}{abc}\left(\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}-a-b-c\right)\geqslant\frac{2R^2(a+b+c)}{abc}=\frac{R}{r}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

25. 因为 $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cdot\cot A=1$，因为 $\sec^2x=\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C$，所以 $\tan^2x=\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C+2=\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=(\cot A+\cot B+\cot C)^2$，所以 $\tan x=\pm(\cot A+\cot B+\cot C)$. 当 $\tan x=\cot A+\cot B+\cot C$ 时，$(\tan x-\cot A)(\tan x-\cot B)(\tan x-\cot C)=(\cot B+\cot C)(\cot A+\cot C)(\cot B+\cot A)=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}$，两边乘以 $\cos^3x\sin A\sin B\sin C$ 得，$(\sin x\sin A-\cos A\cos x)(\sin x\sin B-\cos B\cos x)(\sin x\sin C-\cos x\cos C)=\cos^3x\Rightarrow\cos(x+A)\cos(x+B)\cos(x+C)+\cos^3x=0$，当 $\tan x=-(\cot A+\cot B+\cot C)$ 时，$(\tan x+\cot A)(\tan x+\cot B)(\tan x+\cot C)=-(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)=-\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{\sin(C+A)}{\sin C\sin A}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=-\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}$，两边乘以 $\cos^3x\sin A\sin B\sin C$ 得 $(\sin x\sin A+\cos A\cos x)$

$(\sin x\sin B+\cos x\cos B)(\sin x\sin C+\cos x\cos C)=-\cos^3 x\Rightarrow\cos(x-A)\cos(x-B)\cos(x-C)+\cos^3 x=0$，综上得证.

26. 因为 $\alpha+\beta+\gamma+\varphi=2\pi$，从而有 $\frac{n\alpha+n\beta}{2}+\frac{n\gamma+n\varphi}{2}=n\pi$，又 n 为奇数，所以 $\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}=\sin\frac{n\gamma+n\varphi}{2}$，$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma+\sin n\varphi=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+2\sin\frac{n\gamma+n\varphi}{2}\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}=0$ 或 $\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=0$. (1) 若 $\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}=0$，用例 5(1) 即 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)}{n}\pi$. (2) 若 $\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\cos\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=0$，则 $\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\frac{n\gamma-n\varphi}{2}=2k\pi+\pi$ 或 $\frac{n\alpha-n\beta}{2}=\frac{n\gamma-n\varphi}{2}+\pi+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，由于 $\alpha+\beta+\gamma+\varphi=2\pi$，故 $\alpha+\gamma=\pi+\frac{(2k+1)}{n}\pi$ 或 $\alpha+\varphi=\pi+\frac{(2k+1)}{n}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，当 $\alpha+\gamma=\pi+\frac{(2k+1)}{n}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，由 $0<\alpha+\gamma<2\pi$，则有 $\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)}{n}\pi$. 类似地，$\alpha+\varphi=\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)}{n}\pi$，综合(1)、(2)，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\varphi$ 至少存在两个角之和在集合 $\left\{\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}$ 中. 注意到 n 为奇数，π 不在上面的集合中，又因为 $\frac{2i\pi}{n}+\frac{2(n-i)\pi}{n}=2\pi$，结合四边形的内角之和为 2π. 因此 α、β、γ、φ 至少存在两个角之和在集合 $\left\{\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}$ 中，得证. 特别地，当 $n=3$ 时，必有两角之和为 $\frac{2\pi}{3}$.

27. (1) $\sin A\cdot(\cos C+1)+\sin C\cdot(\cos A+1)=3\sin B$. 即 $\sin(A+C)+\sin A+\sin C=3\sin B$. 所以 $\sin A+\sin C=2\sin B$，即 $a+c=2b$，从而 a、b、c 成等差数列. (2) 由 $\sin A+\sin C=2\sin B$ 得 $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，显然 $\sin\frac{B}{2}>0$. 故 $0<\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{1}{2}$.

28. 因 $\sqrt{(1+\cos 2A)(1+\cos 2C)}=\sqrt{2\cos^2 A\cdot 2\cos^2 C}=2\cos A\cos C=$

$\cos(A+C)+\cos(A-C)=-\frac{1}{2}+\cos(A-C)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，所以 $\cos(C-A)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $C-A=30°$. 又 $C+A=120°$，解得 $A=45°$，$B=60°$，$C=75°$，故 $\frac{a+\sqrt{2}b}{2c}=\frac{\sin A+\sqrt{2}\sin B}{2\sin C}=\frac{\sin 45°+\sqrt{2}\sin 60°}{2\sin 75°}=1$，即 $a+\sqrt{2}b=2c$.

29. 若 P、Q 分别取在 BC、AC 上，设 $CP=x$，$CQ=y$，则 $\frac{1}{2}xy\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C$，$xy=\frac{1}{2}ab$. 由余弦定理，在 $\triangle CPQ$ 中，$PQ^2=x^2+y^2-2xy\cos C=(x-y)^2+2xy(1-\cos C)=(x-y)^2+ab(1-\cos C)$. 所以，当 $x=y$ 时，PQ 有最小值，这时 $PQ=\sqrt{ab-ab\cos C}=\sqrt{ab-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}(c+a-b)(c-a+b)}=\sqrt{2(p-a)(p-b)}$. 其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 若 P、Q 分别取在 AC、AB 边上，则当 $AP=AQ$ 时，PQ 有最小值 $\sqrt{2(p-b)(p-c)}$；若 P、Q 分别取在边 AB、BC 上，则当 $BP=BQ$ 时，PQ 有最小值 $\sqrt{2(p-c)(p-a)}$. 但 $a>b>c$，因此 $\sqrt{2(p-a)(p-b)}$ 最小，即 P、Q 分别取在边 BC、AC 上，且 $CP=CQ$ 时，PQ 长度最短. 因为此时 $PQ=\sqrt{ab(1-\cos C)}=\sqrt{2ab}\sin\frac{C}{2}$，$\triangle CPQ$ 是等腰三角形，所以 $CP=CQ=\frac{\frac{1}{2}PQ}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2ab}$.

30. 由 $\frac{\cos A}{\sin B}+\frac{\cos B}{\sin A}=2$ 得 $\sin A\cos A+\sin B\cos B=2\sin A\sin B$，即 $\sin A(\cos A-\sin B)+\sin B(\cos B-\sin A)=0$…①. 也可以变形为 $\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)=2\sin A\sin B$，$\sin(A+B)\cos(A-B)=\cos(A-B)-\cos(A+B)$，$\cos(A+B)=\cos(A-B)[1-\sin(A+B)]$…②. 若 $A+B<\frac{\pi}{2}$，则 A、$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$A<\frac{\pi}{2}-B$，$\cos A>\sin B$，$\sin A<\cos B$. 所以①不成立；若 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $\cos(A+B)<0$，由②得 $\cos(A-B)<0$，且 $\cos(A+B)>\cos(A-B)$，从而 $A+B<|A-B|$. 这不可能，所以②不成立. 综上所述，可

知 $A+B=\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 是直角三角形. 由 $a+b+c=12$ 得 $c(1+\sin A+\cos A)=12$，$c=\frac{12}{1+\sin A+\cos A}$. $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2\sin A\cos A=\frac{72\sin A\cos A}{(1+\sin A+\cos A)^2}$. 设 $\sin A+\cos A=t$，则 $S=\frac{36(t^2-1)}{(1+t)^2}=\frac{36(t-1)}{t+1}=36\left(1+\frac{-2}{t+1}\right)$，且由 $t=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$ 及 $0<A<\frac{\pi}{2}$ 得 $1<t\leqslant\sqrt{2}$. 当 $t=\sqrt{2}$ 时，即 $A=B=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\max}=36\left(1+\frac{-2}{\sqrt{2}+1}\right)=36(3-2\sqrt{2})$.

习题 4

1. D. 当 $x<0$ 时，$\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 故 A 错误，同理 B 错误，而 C 显然错误.

2. D. 因 $\tan(\arctan a+\arctan b)=\frac{a+b}{1-ab}=1$，又 $\arctan a+\arctan b\in(-\pi,\pi)$，所以选 D.

3. B. 由已知等式得 $x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{7}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{3}{5}$，故选 B.

4. D. 显然 a 最大，而 $c=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，$b=\arccos\frac{1}{4}=\arctan\frac{4}{\sqrt{15}}>\frac{\pi}{4}$，故选 D.

5. D. $\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$，因 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，所以 $\frac{\pi}{4}+x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，故原式 $=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3\pi}{4}-x$.

6. B. 在集合 M 中，由 $|xy|=1$ 得 $xy=1$ 或 $xy=-1$ 但 $x>0$，故表示反比例函数在 Ⅰ、Ⅳ 象限的两支，在集合 N 中，由 $\arctan x+\operatorname{arccot} y=\pi\Rightarrow\arctan x=\pi-\operatorname{arccot} y$，所以 $x=\tan(\arctan x)=\tan(\pi-\operatorname{arccot} y)=-\frac{1}{\cot(\operatorname{arccot} y)}=-\frac{1}{y}$，即 $xy=-1$，但当 $x<0$ 时，$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<0$，此时 $y>0$，$0<\operatorname{arccot} y<\frac{\pi}{2}$，故 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x+\operatorname{arccot} y<\frac{\pi}{2}$，这与

$\arctan x+\operatorname{arccot} y=\pi$，矛盾. 所以 $N=\{(x, y) \mid xy=-1, x>0\} \subsetneqq \{(x, y) \mid xy=1$ 或 $xy=-1, x>0\}=M$，故 $M\cup N=M$.

7. D. 因为 $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\pi-\arccos\frac{4}{5}$，原方程化为 $2\arccos\frac{4}{5}-\arcsin x=\pi$，因为 $\arccos\frac{4}{5}<\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，又 $-\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $2\arccos\frac{4}{5}-\arcsin x<\pi$，故无解.

8. C. 由原方程得 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 且 $2x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4}$，故选 C.

9. B. 分别作出 $y=\lg x$ 与 $y=\cos 2x$ 的图象而观察.

10. B. 由于 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$\arccos y\in[0, \pi]$，知 $\arcsin x+\arccos y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\Rightarrow n=0$ 或 1. 当 $n=0$ 时，$\arcsin x+\arccos y=0$，此时只有 $x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时成立，$\sin(\arcsin x)=\sin(-\arccos y)\Rightarrow x^2+y^2=1$，$(x\leqslant 0, y\geqslant 0)$. 当 $n=1$ 时，$\arcsin x=\pi-\arccos y$，此时只有 $x\geqslant 0$，$y\leqslant 0$ 时才成立 $\Rightarrow x^2+y^2=1$ $(x\geqslant 0, y\leqslant 0)$，综上，选 B.

11. $\left[\arccos\frac{1}{8}, \pi\right]$. 因 $-2x^2+x=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}$，所以其值域为 $\left[\arccos\frac{1}{8}, \pi\right]$.

12. $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$.

13. $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 显然 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，原不等式恒成立；当 $x>0$ 时，由 $\arccos x>\arcsin x$，得 $\sqrt{1-x^2}>x$，即 $x^2<\frac{1}{2}$，所以 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，综上所述，$x\in\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14. $-\frac{1}{4}$. 由 $\frac{\pi}{6}=\arcsin(2x+1)$，得 $\frac{1}{2}=2x+1$，$x=-\frac{1}{4}$.

15. $3\pi^2$. 因为 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$，所以 $f(x)=4\pi\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)-(\pi-\arccos x)^2=-(\arccos x)^2-2\pi\arccos x+\pi^2=-(\arccos x+\pi)^2+2\pi^2$，又因为 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，所以 $M=\pi^2$，

$m=-2\pi^2 \Rightarrow M-m=3\pi^2$.

16. $\left\{x \mid x=k\pi+(-1)^k \cdot \dfrac{1}{10}\pi,\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.

17. $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $2\cos^2 x\in[0,2]$，又 $[\tan x]$ 表示整数，故 $[\tan x]=0$ 时，$\cos x=0$（舍）. $[\tan x]=2$ 时，$\cos^2 x=1$（舍）. $[\tan x]=1$ 时，$\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 验证知 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

18. $\left\{x \mid x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

19. $a\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$.

20. $\{4,6\}$.

21. (1) 原式 $=\dfrac{2\times\dfrac{5}{12}}{1-\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}+\dfrac{1-\dfrac{4}{5}}{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{120}{119}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{479}{357}$. (2) 原式 $=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$.

22. (1) 原式 $=\pi-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}=\pi$. (2) 原式 $=\dfrac{\pi}{4}$.

23. (1) 参照例 8 可证之. (2) 由条件得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，于是 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{5}{5}=1$，所以 $\alpha+\beta=45^\circ$.

24. (1) 由不等式 $\dfrac{2\pi}{3}\geqslant\arccos\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$，得 $1\geqslant\dfrac{1}{2}x-1\geqslant-\dfrac{1}{2}$，即 $1\leqslant x\leqslant 4$，定义域为 $[1,4]$. (2) 由 $x^2\neq 1$ 得 $x\neq\pm 1$，定义域为 $\{x \mid x\neq\pm 1\}$.

25. 定义域为 $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \arcsin\dfrac{1}{4}\right]$，单调增区间为 $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$.

26. 参照例 11，得原式 $=\dfrac{3\pi}{4}$.

27. $y=2x^2-1+2x=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$，因 $x\in[-1,1]$，所以 $y_{\max}=$

3，$y_{\min}=-\dfrac{3}{2}$.

28. (1) 因 $\cos^2\left(x+\dfrac{5}{8}\pi\right)-\sin 4x\leqslant 2$，所以只有当 $\cos^2\left(x+\dfrac{5}{8}\pi\right)=1$ 且 $\sin 4x=-1$ 时原方程成立. 但这是不可能的，所以原方程无解. (2) 原方程可化为 $\left|\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right|-\left|\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right|=2\cos x$，由此可解得 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$. (3) 原方程化为 $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=0$，从而 $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-1+2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0$. 所以 $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$，故 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 或 $\cos x=-1$. 从而解集为 $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\{x\mid x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$. (4) 原方程化为 $2\sin^2x=1-2\sin^2x$ 且 $\sin 2x\neq 0$，所以解集为 $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\text{，且 }k\neq\dfrac{3p-1}{2},\ p\in\mathbf{Z}\right\}$.

29. 令 $x=\tan\alpha$，$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则原方程变为 $\arccos|\cos 2\alpha|+\arcsin|\sin 2\alpha|+\operatorname{arccot}|\cot 2\alpha|=\pi$. 当 $|\tan\alpha|\geqslant 1$ 时，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqslant-\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. 若 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqslant-\dfrac{\pi}{4}$，则原方程化为 $\pi+2\alpha+\pi+2\alpha+\pi+2\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$，$x=-\sqrt{3}$. 类似地，$\dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$x=\sqrt{3}$. 当 $|\tan\alpha|<1$ 时，$-\dfrac{\pi}{4}<\alpha<0$ 或 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$. 同样可得 $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$，$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 综上，原方程的解为 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

30. 因 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{7}{5\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{4}{5}$，所以原方程的解为 $x=\dfrac{4}{5}$.

习 题 5

1. C. 因 $-\frac{\pi}{2}<-1<0$，故 $b>0$，$a<0$，$c<0$，又 $\tan(-1)=\frac{\sin(-1)}{\cos(-1)}<\sin(-1)$，所以 $c<a<b$，选 C.

2. B. 因 $a=\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$b=\sin 16^\circ+\cos 16^\circ=\sqrt{2}\sin 61^\circ$，所以 $a<b$. 又 $\frac{a^2+b^2}{2}-b=\frac{1}{2}(b^2-2b+a^2)=\frac{1}{2}\left(b^2-2b+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[(b-1)^2+\frac{1}{2}\right]>0$，所以 $\frac{a^2+b^2}{2}>b$. 选 B.

3. C. 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\tan x<1$，$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}>\cos x$，所以 $(\tan x)^{\cot x}<(\tan x)^{\cos x}$，即 $a<c$. 又 $(\cot x)^{\tan x}=(\tan x)^{-\tan x}>(\tan x)^{\cos x}$，得 $b>c$，故 $a<c<b$. 选 C.

4. A. 利用不等式 $\sin x<x<\tan x$ 得，当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\sin x<x<\tan x<1$，且 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $\sin(\sin x)<\sin x<\sin(\tan x)$，故选 A.

5. B. $\cos\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$，故 $\cos\alpha<\sin\beta$.

6. D. 用特殊值法，令 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，可比较知 $c<a<b$.

7. C. 因 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以满足条件的 x 值为 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

8. B. 参照例 13(2)可知 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$，由题设条件得 $\tan^2\frac{B}{2}=\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$，所以 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}}=2\tan\frac{B}{2}$，故 $\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\geqslant 3\tan^2\frac{B}{2}$，从而 $\tan^2\frac{B}{2}\leqslant\frac{1}{3}$，$\tan\frac{B}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$0<\frac{B}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}$，所以 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$.

9. C. $\cos 2x > \cos 2y \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 > 2\cos^2 y - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x > \cos^2 y \Leftrightarrow |\cos x| > |\cos y|$. 故选 C.

10. C. 因 $\sin 1 > \cos 1$，$\tan 1 > 1$，所以 $\log_{\tan 1}\cos 1 < \log_{\tan 1}\sin 1 < 0$，故 $\log_{\cos 1}\tan 1 > \log_{\sin 1}\tan 1$，即 $d > b$. 因为 $0 < \cos 1 < 1$，$\sin 1 < \tan 1$，所以 $\log_{\cos 1}\sin 1 > \log_{\cos 1}\tan 1$，即 $c > d$；同理 $a = \log_{\sin 1}\cos 1 > \log_{\sin 1}\sin 1 = \log_{\cos 1}\cos 1 > \log_{\cos 1}\sin 1$，即 $a > c$，综上所述 $a > c > d > b$.

11. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right)$. 由原不等式得 $\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\cos 2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x - \cos x}{\cos 2x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x > 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x < 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

12. $\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$，$(k \in \mathbf{Z})$. 利用函数的单调性可得.

13. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$.

14. $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$. 参照例 10 即可得结论.

15. $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$，$k \in \mathbf{Z}$. 由不等式组 $\begin{cases} \cos 2x \geqslant 0, \\ 3 - 2\sqrt{3}\tan x - 3\tan^2 x \geqslant 0 \end{cases}$ 解得.

16. $1 + \cot\theta < \cot\frac{\theta}{2}$.

17. ①②. 在 $\triangle ABC$ 中，$A > B$ 则 $a > b$，所以 $2R\sin A > 2R\sin B$，即 ① 正确；又若 A 为钝角或直角，则 $\cos A \leqslant 0 < \cos B$；若 A 为锐角，则 $\cos A < \cos B$，所以 ② 正确；若 A 为钝角，$\tan A < 0$，所以 ③ 错误. 综上所述，正确的有 ①②.

18. $f(1 + \cos x) = f(1 - \cos x)$. 设 $1 + \cos x = t$，则 $\cos x = t - 1$，$f(t) = (t-1)^2$，所以 $f(1 - \cos x) = (1 - \cos x - 1)^2 = \cos^2 x$. 故 $f(1 + \cos x) = f(1 - \cos x)$.

19. $\frac{3}{2}$. $y = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos x - \frac{3}{\sqrt{13}}\sin x\right) = \sqrt{13}\sin(\varphi - x)$，其中 $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$，所以当 $\sin(\varphi - x) = 1$ 时，y 有最大值 $\sqrt{13}$，此时，$\varphi - x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$x = \varphi - \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$，$\tan x = \tan\left[\varphi - \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$-\cot\varphi=-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{3}{2}$.

20. $m>n$. $\triangle ABC$ 为锐角三角形，得 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<B+C<\pi$，所以 $B>\dfrac{\pi}{2}-C$，又 B、$\dfrac{\pi}{2}-C$ 均为锐角，故 $\sin B>\cos C>0$，从而 $\dfrac{1}{\sin B}<\dfrac{1}{\cos C}$，又 $0<\cos A<1$. 所以 $m>n$.

21. 因为 $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$（$b=c$ 时，取等号），所以 $\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}\geqslant\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\geqslant\sin\dfrac{A}{2}$（$B=C$ 时取等号）. 同理可得 $\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}\geqslant\sin\dfrac{B}{2}$，$\dfrac{C}{2\sqrt{ab}}\geqslant\sin\dfrac{C}{2}$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\dfrac{c}{2\sqrt{ba}}=\dfrac{1}{8}$.

22. $\dfrac{a}{\sin\theta}+\dfrac{b}{\cos\theta}\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{\sin\theta}+\dfrac{b}{\cos\theta}\right)^2\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{\sin^2\theta}+\dfrac{2ab}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{b^2}{\cos^2\theta}\geqslant a^2+b^2+3\sqrt[3]{a^4b^2}+3\sqrt[3]{a^2b^4}\Leftrightarrow a^2\cot^2\theta+b^2\tan^2\theta+2ab\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^2}+3\sqrt[3]{a^2b^4}\Leftrightarrow a^2\cot^2\theta+b^2\tan^2\theta+2ab\tan\theta+2ab\cot\theta\geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^2}+3\sqrt[3]{\sqrt{a^2b^4}}$，（$*$）　因为 $a^2\cot^2\theta+2ab\tan\theta=a^2\cot^2\theta+ab\tan\theta+ab\tan\theta\geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^2}$，同理 $b^2\tan^2\theta+2ab\cot\theta\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^4}$，所以（$*$）成立，原不等式得证.

23. 由 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$，得 $\left(\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5\right)+\left(\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5\right)+\left(\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+5\right)=16$，所以 $\left(\sqrt{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5}+\sqrt{\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5}+\sqrt{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5}\right)^2=16+2\sqrt{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5}\times\sqrt{\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5}+2\sqrt{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5}\sqrt{\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+5}+2\sqrt{\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5}\sqrt{\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+5}\leqslant 16+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+5+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+5+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+5+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+5=16+30+2=48$，

所以$\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+5}\leqslant\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

24. 当a、$b\in\mathbf{R}^+$时，有$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$，又$A$、$B$、$C$为锐角$\triangle ABC$的内角，所以$\sec A+\sec B=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\geqslant\frac{4}{\cos A+\cos B}=\frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\geqslant\frac{2}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2}{\sin\frac{C}{2}}=2\csc\frac{C}{2}$，同理$\sec B+\sec C\geqslant 2\csc\frac{A}{2}$，$\sec C+\sec A\geqslant 2\csc\frac{B}{2}$，三式相加，得证.

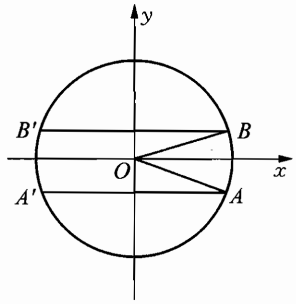
25. (1) 因为$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geqslant 9$，又$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{(a+b+c)^2}{4S}$，所以$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{4S}}=\frac{36S}{(a+b+c)^2}$. (2) 设$\triangle ABC$内切圆半径为$r$，易知$\tan\frac{A}{2}=\frac{2r}{b+c-a}$，故$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{2r}{b+c-a}+\frac{2r}{c+a-b}+\frac{2r}{a+b-c}=\frac{4S}{(a+b+c)(b+c-a)}+\frac{4S}{(a+b+c)(c+a-b)}+\frac{4S}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{S}{p(p-a)}+\frac{S}{p(p-b)}+\frac{S}{p(p-c)}\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$，又$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，所以$4S\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a)+4(p-a)(p-b)\leqslant(p-b+p-c)^2+(p-c+p-a)^2+(p-a+p-b)^2=a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$，因为$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leqslant\frac{9}{4}$，所以$4S\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\leqslant 9R^2$，即$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{9R^2}{4S}$.

26. 原不等式等价于$1\leqslant|\sin\alpha|+|\cos\alpha|+2\sqrt{|\sin\alpha\cos\alpha|}\leqslant 2\sqrt{2}$，因为$(|\sin\alpha|+|\cos\alpha|)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2|\sin\alpha\cos\alpha|=1+|\sin 2\alpha|\leqslant 2$，所以$1\leqslant|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\leqslant\sqrt{2}$，又$2\sqrt{|\sin\alpha\cos\alpha|}=\sqrt{2|\sin 2\alpha|}\leqslant\sqrt{2}$，故原不等式显然成立.

27. 先证$|\sin x|\leqslant|x|$，$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}=1-2\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2\geqslant 1-$

$2\left|\frac{x}{2}\right|^2=1-\frac{x^2}{2}$.

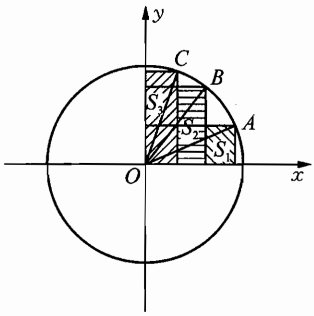
28. 用反证法. 设 $|\sin x|\leqslant\frac{1}{3}$，$|\sin(x+1)|\leqslant\frac{1}{3}$，如图，作两条平行直线 $y=\pm\frac{1}{3}$，则角 x，$x+1$ 的终边与单位圆的交点都落在 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{B'A'}$ 上，由于 $\sin\angle AOB=\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}<\sin 1$，所以 $\angle AOB<1(\mathrm{rad})$，导致矛盾.



（第 28 题）

29. 设 $u=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，则 $2\sin\theta\cos\theta=u^2-1$，原不等式可化为 $(x+u^2+2)^2+(x+au)^2\geqslant\frac{1}{8}$，即 $2x^2+2(u^2+au+2)x+(u^2+2)^2+a^2u^2-\frac{1}{8}\geqslant 0$，所以 $\Delta=4(u^2+au+2)^2-8(u^2+2)^2-8a^2u^2+1\leqslant 0$. 从而 $(u^2-au+2)^2\geqslant\frac{1}{4}$，即 $u^2-au+\frac{3}{2}\geqslant 0$ 或 $u^2-au+\frac{5}{2}\leqslant 0$，故 $a\geqslant u+\frac{5}{2u}$ 或 $a\leqslant u+\frac{3}{2u}$. 当 $u\in[1,\sqrt{2}]$ 时，$f(u)=u+\frac{5}{2u}$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上为减函数，故 $a\geqslant 1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$，而 $g(u)=u+\frac{3}{2u}\geqslant\sqrt{6}$，当且仅当 $u=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 时等号成立，故 $a\leqslant\sqrt{6}$，综上所述，a 的取值范围为 $a\geqslant\frac{7}{2}$ 或 $a\leqslant\sqrt{6}$.

30. 原不等式等价于 $\frac{\pi}{2}>2\sin x(\cos x-\cos y)+2\sin y(\cos y-\cos z)+\sin 2z$，即 $\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$，如图在单位圆中，设半径 OA、OB、OC 与 Ox 的夹角分别为 x、y、z，则 $S_1=\sin x(\cos x-\cos y)$，$S_2=\sin y(\cos y-\cos z)$，$S_3=\sin z\cdot\cos z$，显然 $S_1+S_2+S_3<\frac{\pi}{4}$，故得证.



（第 30 题）

习 题 6

1. 令 $x_1=\tan\theta$，其中 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x_2=\frac{2x_1}{1-x_1^2}=\tan 2\theta$，所以 $x_k=\tan 2^{k-1}\theta\ (k=1,2,\cdots,n)$，又 $x_{n+1}=x_1$，得 $\tan 2^n\theta=\tan\theta$，故 $2^n\theta=\theta+m\pi\left[m\in\mathbf{Z}，且\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right]$，即 $\theta=\frac{m\pi}{2^n-1}$. 从而原方程组的解为 $x_k=\tan\frac{2^{k-1}m\pi}{2^n-1}\ (m\in\mathbf{Z},\ k=1,2,3,\cdots,n+1)$.

2. 设 $x=\tan\theta$，其中 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\theta$，$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos 2\theta$，原不等式可化为 $\sin\theta+\cos 2\theta>0$，即 $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$. 所以 $\sin\theta>-\frac{1}{2}$，得 $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$. 即 $\tan\theta>\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

3. 设 $x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，$z=\tan\gamma$，则 $\frac{x-y}{1+xy}=\tan(\alpha-\beta)$，$\frac{y-z}{1+yz}=\tan(\beta-\gamma)$，$\frac{z-x}{1+zx}=\tan(\gamma-\alpha)$，因 $(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$，故原式成立.

4. 不妨设 $z<\frac{1}{2}$，作三角代换：$x=\sin^2\alpha\cos^2\beta$，$y=\cos^2\alpha\cos^2\beta$，$z=\sin^2\beta$，则 $xy+yz+zx-2xyz=xy(1-z)+z(x+y-xy)=\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^6\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\beta)\geqslant 0$. 同理 $xy+yz+zx-2xyz=xy(1-2z)+z(x+y)=\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^4\beta\cos 2\beta+\frac{1}{4}\sin^2 2\beta=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{1}{4}(1+2\cos 2\beta)^2\cos 2\beta+\frac{1}{4}(1-\cos^2 2\beta)\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\cos 2\beta(1+\cos 2\beta)^2-\frac{1}{4}\cos^2 2\beta=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}[2\cos 2\beta(1-\cos 2\beta)^2]\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{32}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$.

5. $a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{2^2}$，$a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^3}}=\sin\frac{\pi}{2^3}$. 若设 $a_k=\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}$，则 $a_{k+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\sin\frac{\pi}{2^{k+3}}$，从而 $a_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$. 同理 $b_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x<\tan x$，所

以 $2^{n+2}a_n=2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}<2^{n+2}\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}<2^{n+2}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$，即 $2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n$.

6. 设 $a_1=\sin\alpha$，$b_1=\cos\alpha$，$a_2=\sin\beta$，$b_2=\cos\beta$，则 $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0$，即 $\cos(\alpha-\beta)=0$. 不妨设 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$，从而 $a_1^2+a_2^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1$，同理 $b_1^2+b_2^2=1$，$a_1b_1+a_2b_2=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=0$.

7. 因 $|x|>1$，且 $x>0$，所以设 $x=\frac{1}{\cos\alpha}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，代入原方程得 $\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{35}{12}$，解得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$，所以 $x=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{5}{4}$.

8. 从原方程组得 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，故设 $x=\cos^2\alpha$，$y=\cos^2\beta$，其中 α，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，代入原方程组得 $\begin{cases}\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha=1,\\ \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=1,\\ \cos(\alpha-\beta)=1.\end{cases}$ 所以 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$，得 $x=y=\frac{1}{2}$.

9. 原等式变形为 $\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}=1$，设 $x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，$z=\tan\gamma$，其中 α，β，$\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\gamma=1$. 但 $|\sin 2\alpha|\leqslant 1$，$|\sin 2\beta|\leqslant 1$，$|\cos 2\gamma|\leqslant 1$，又 2α，2β，$2\gamma\in(-\pi,\pi)$，所以 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta=\cos 2\gamma=1$ 或 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta=-1$，$\cos 2\gamma=1$，即 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=0$ 或 $\alpha=\beta=-\frac{\pi}{4}$，$\gamma=0$. 从而 $x=y=1$ 及 $z=0$ 或 $x=y=-1$ 及 $z=0$.

10. 原条件不等式可化为 $(x-4)^2+(y+3)^2\leqslant 4$，设 $x=4+\gamma\cos\theta$，$y=-3+\gamma\sin\theta$，$\gamma\in[0,2]$，$\theta\in[0,2\pi]$，于是 $\sqrt{x^2+y^2+3}=\sqrt{25+8\gamma\cos\theta-6\gamma\sin\theta+\gamma^2+3}=\sqrt{\gamma^2+10\gamma\cos(\theta+\varphi)+28}$，其中 $\cos\varphi=\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$. 因为 $|\cos(\theta+\varphi)|\leqslant 1$，所以 $\sqrt{\gamma^2-10\gamma+28}\leqslant\sqrt{\gamma^2+10\gamma\cos(\theta+\varphi)+28}\leqslant\sqrt{\gamma^2+10\gamma+28}$. 当 $\gamma\in[0,2]$ 时，$(\sqrt{\gamma^2-10\gamma+28})_{\min}=2\sqrt{3}$，$(\sqrt{\gamma^2+10\gamma+28})_{\max}=2\sqrt{13}$. 故原不等式成立.

11. 设 $x=\tan\theta$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{x^2+1}}=(\sqrt{3}\tan\theta+1)\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $-\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$，故原不等式成立.

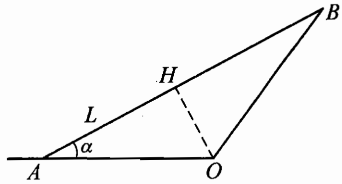
12. 设 $x=\sqrt{5}\cos\theta$，$\theta\in[0, \pi]$，则 $y=\sqrt{5}\cos\theta+4+\sqrt{5}\sin\theta=\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4$，由 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$，得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$，当 $\theta=\pi$ 时，$y_{\min}=4-\sqrt{5}$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=4+\sqrt{10}$.

13. 将 $2a^2+6b^2=3$ 变形为 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2+(\sqrt{2}b)^2=1$，设 $a=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta$，$b=\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\theta$，$\theta\in[0, 2\pi)$，则 $f(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x\sin\theta+\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3x^2+1}{2}}\sin(\theta+\varphi)$，所以 $|f(x)|\leqslant\sqrt{\frac{3x^2+1}{2}}\leqslant 2$.

14. 任给的 13 个实数分别记作 $\tan\theta_i$，$\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$i=1, 2, 3, \cdots, 13$，将 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 等分成 12 个区间，则 θ_i 中至少有两个角的终边落在同一区间内，不妨设这两个角为 α、β 且 $\alpha\geqslant\beta$，即 $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{12}$，令 $x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，则 $\frac{x-y}{1+xy}=\tan(\alpha-\beta)$，从而 $0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 2-\sqrt{3}$.

15. 延长 GH 交 CD 于 P，则 $HP\perp CD$，$HP=CH\sin\theta=40\sin\theta$，$CP=CH\cos\theta=40\cos\theta$，$HG=50-40\sin\theta$，$HM=50-40\cos\theta$，所以 $S=HG\cdot HM=(50-40\sin\theta)(50-40\cos\theta)=100[25-20(\sin\theta+\cos\theta)+16\sin\theta\cos\theta]$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，设 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$，$1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，故 $S=800\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+450$，当 $t=1$ 时，$S_{\max}=500$(米^2). 此时 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$，即 H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 的端点 E 或 F 处.

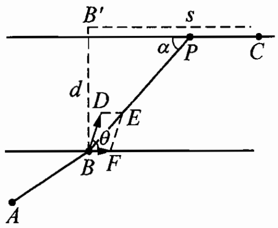
16. 如图，由已知条件得 $OH\perp AB$，$OH=10$，$\angle AOB=135°$，设 $\angle OAB=\alpha$，$\angle OBA=45°-\alpha$，则 $AH=10\cot\alpha$，$BH=10\cot(45°-\alpha)$，于是 $AB=10\cot\alpha+10\cot(45°-\alpha)=\frac{10}{\tan\alpha}+\frac{10(1+\tan\alpha)}{1-\tan\alpha}=\frac{10(1+\tan^2\alpha)}{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}=\frac{10}{\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}=$



（第 16 题）

$\dfrac{20}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-1}=\dfrac{20}{\sqrt{2}\sin(2\alpha+45^\circ)-1}$,所以当 $\alpha=22.5^\circ$ 时,$(AB)_{\min}=20(\sqrt{2}+1)$ 千米.此时 $OA=OB=\dfrac{10}{\sin 22.5^\circ}=10\sqrt{4+2\sqrt{2}}$(千米).

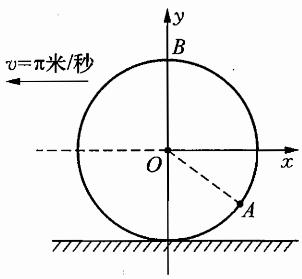
17. 设河水流速为 v_0,人在静水中划船的速度为 v_1,在岸上骑车的速度为 v_2 $(v_2>v_1+v_0)$,河宽为 $|BB'|=d$,$|B'C|=s$,船速方向 $\overrightarrow{BD}$ 与岸的夹角为 θ,船实际行驶方向 $\overrightarrow{BP}$(v_1 与 v_0 的合速度方向)与岸的夹角为 α,从 B 经 P 到 C 所用时间为 T,过 D 作 $DE\parallel B'C$ 交 BP 于 E,则 $\dfrac{v_1}{\sin\alpha}=\dfrac{v_0}{\sin(\theta-\alpha)}$…①.



(第 17 题)

$T=\dfrac{d}{v_1\sin\theta}+\dfrac{s-d\cot\alpha}{v_2}$…②.由①得 $\cot\alpha=\dfrac{v_1\cos\theta+v_0}{v_1\sin\theta}$ 代入②得 $T=\dfrac{d}{v_1\sin\theta}+\dfrac{sv_1\sin\theta-dv_1\cos\theta-dv_0}{v_1v_2\sin\theta}$,所以 $Tv_1v_2\sin\theta=dv_2+sv_1\sin\theta-dv_1\cos\theta-dv_0$.整理得 $(Tv_1v_2-sv_1)\sin\theta+dv_1\cos\theta=d(v_2-v_0)$.从而 $v_1\sqrt{(Tv_2-s)^2+d^2}\sin(\theta+\varphi)=d(v_1-v_0)$,于是 $\left|\dfrac{d(v_2-v_0)}{v_1\sqrt{(Tv_2-s)^2+d^2}}\right|\leqslant 1$.解得 $T\geqslant\dfrac{s}{v_2}+\dfrac{d\sqrt{(v_2-v_0)^2-v_1^2}}{v_1v_2}$.等号当且仅当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时成立.从而 $\cos\theta=\sin\varphi=\dfrac{d}{\sqrt{(Tv_2-s)^2+d^2}}=\dfrac{v_1}{v_2-v_1}$,$\sin\theta=\cos\varphi=\dfrac{Tv_2-s}{\sqrt{(Tv_2-s)^2+d^2}}=\dfrac{\sqrt{(v_2-v_1)^2-v_1^2}}{v_2-v_1}$,所以 $\cot\alpha=\dfrac{v_1\cos\theta+v_0}{v_1\sin\theta}=\dfrac{v_1^2+v_2v_0-v_0^2}{v_1\sqrt{(v_2-v_0)^2-v_1^2}}$.故登岸的最佳地点 P 随 B' 的距离为 $|B'P|=\dfrac{(v_1^2+v_2v_0-v_0^2)d}{v_1\sqrt{(v_2-v_0)^2-v_1^2}}$.

18. (1) 不难发现,点 A 运动的路程就是装载车运行的路程,点 A 运动一周,装载车行距离为 3π 米,由于装载车运行速度为 π 米/秒,故车轮运行一周需要 3 秒钟.点 A 上升到最高点需要 1 秒钟,表明车轮转动 $\dfrac{1}{3}$ 个圆周,即 A 运行一秒钟,转过圆心角 $\dfrac{2}{3}\pi$.不妨设点 A 沿逆时针方向转动,根据物理中相对运动原理,如图所示,我们可以把装载车的向左运动看作是车轮中心 O 静止,道路带着车轮向右运动,这样点 A 就

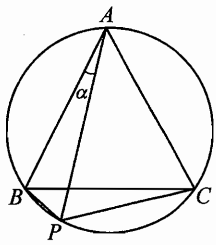


(第 18 题)

绕固定点 O 作圆周运动，设射线 OX 方向向右，根据三角函数中角的定义及三角函数的定义，可得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{h-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$，即 $h=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$.

(2) 由 $\frac{3}{4}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{7}{6}\pi$，得 $t=3k$ 或 $t=3k+2$，又因为 $0\leqslant t\leqslant\frac{50}{\pi}\approx15.9$，所以 $t=0$、2、3、5、6、8、9、11、12、14、15(秒).

19. (1) $\triangle PAB$ 中，设 $\angle BAP=\alpha$，则 $\angle PBA=120^\circ-\alpha$，$\angle PAC=60^\circ-\alpha$，从而 $PB+PC=2R[\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)]=2R\cos(30^\circ-\alpha)=2R\sin(120^\circ-\alpha)=PA$，$AB^2=BC^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos60^\circ=PA^2+PB^2-PA\cdot PB=PA^2-PB\cdot PC$. (2) 设 $\triangle ABC$ 边长为 a，则 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}a\cdot PA\sin\alpha+\frac{1}{2}a\cdot PC\sin\alpha=\frac{1}{2}a\sin\alpha(PA+PC)$，在 $\triangle PAC$ 中，$\frac{PA}{\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{PC}{\sin(60^\circ-\alpha)}=\frac{AC}{\sin60^\circ}$，从而 $PA+PC=\frac{2}{\sqrt{3}}a[\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ-\alpha)]=2a\cos\alpha$，所以 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}a^2\sin2\alpha\leqslant\frac{1}{2}a^2$. 即最大值为 $\frac{1}{2}a^2$.



(第 19 题)

20. 由条件得 $a=2b\sin10^\circ$，于是 $a^3=8b^3\sin^3 10^\circ=8b^3\cdot\frac{1-\cos20^\circ}{2}\cdot\sin10^\circ=4b^3(\sin10^\circ-\sin10^\circ\cos20^\circ)=4b^3\left[\sin10^\circ-\frac{1}{2}(\sin30^\circ-\sin10^\circ)\right]=4b^3\left[\frac{3}{2}\sin10^\circ-\frac{1}{4}\right]=6b^3\sin10^\circ-b^3=3ab^2-b^3$，得证.

21. 由 $S_{\triangle ABT}+S_{\triangle ATC}=S_{\triangle ABC}$，得 $\frac{1}{2}\cdot c\cdot AT\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AT\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$，故 $AT=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$.

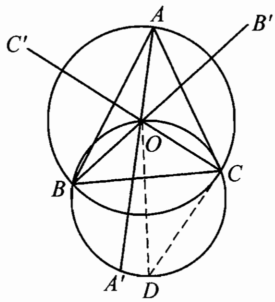
22. 在 $\triangle ABD$ 中，$\frac{AD}{\sin20^\circ}=\frac{BD}{\sin100^\circ}=\frac{AB}{\sin60^\circ}$，于是 $AD+BD=\frac{AB}{\sin60^\circ}(\sin20^\circ+\sin100^\circ)=\frac{AB}{\sin60^\circ}\cdot2\sin60^\circ\cos40^\circ=2AB\cos40^\circ=BC$.

23. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则有 $0<\cos^2\alpha,\cos^2\beta,\cos^2\gamma<1$，且 $\frac{1}{\cos^2\alpha}>$

1，$\frac{1}{\cos^2\beta}>1$，$\frac{1}{\cos^2\gamma}>1$，令 $x=\frac{1}{\cos^2\alpha}$，$y=\frac{1}{\cos^2\beta}$，$z=\frac{1}{\cos^2\gamma}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$. 即 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1\cdots$①. 待证的不等式变形为 $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta}-1}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\geqslant\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cdots$②. 注意到①式，对②式用柯西不等式有 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\leqslant\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\cdots$③. 当且仅当 $\sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta\cos\beta=\sin\gamma\cos\gamma$. 即 $\alpha=\beta=\gamma$ 时③等号成立，故②式成立，所以原不等式得证.

评注 此题解三角代换 $x=\frac{1}{\sin^2\alpha}$，$y=\frac{1}{\sin^2\beta}$，$z=\frac{1}{\sin^2\gamma}$ 证法一样.

24. 作△BOC 的外接圆直径 OD，连 $A'D$、CD，则 $\angle OA'D=\angle OCD=90°$，从而 $OA'=OD$. $\cos\angle A'OD=R\cdot\frac{\cos\angle A'OD}{\cos\angle COD}$；易知 $OD\perp BC$，于是 $\angle COD=\angle A$，$\angle A'OD=180°-\angle COD-\angle AOC=180°-\angle A-2\angle B=\angle C-\angle B$，即 $OA'=R\frac{\cos(B-C)}{\cos A}$，同理 $OB'=R\cdot\frac{\cos(A-C)}{\cos B}$，$OC'=R\frac{\cos(B-A)}{\cos C}$，于是 $OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3\Leftrightarrow$



(第 24 题)

$\frac{\cos(A-B)}{\cos C}\cdot\frac{\cos(A-C)}{\cos B}\cdot\frac{\cos(B-C)}{\cos A}\geqslant 8$，(*) 而 $\frac{\cos(A-B)}{\cos C}=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{-\cos A\cos B+\sin A\sin B}=\frac{1+\cot A\cdot\cot B}{1-\cot A\cdot\cot B}$，令 $x=\cot A\cot B$，$y=\cot B\cot C$，$z=\cot C\cot A$. 则有 $x+y+z=1$，又锐角三角形，所以 x，y，$z>0$，$\frac{1+x}{1-x}=\frac{x+y+z+x}{x+y+z-x}=\frac{(x+y)+(z+x)}{y+z}\geqslant\frac{2\sqrt{(x+y)(x+z)}}{y+z}$，同理 $\frac{1+y}{1-y}\geqslant 2\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{x+z}$，$\frac{1+z}{1-z}\geqslant 2\frac{\sqrt{(x+z)(y+z)}}{x+y}$，故(*)得证，所以原结论获证.

25. 令 $m_i^p = \tan^2\alpha_i$，$\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，由已知条件应有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i = 1$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\cos^2\alpha_i = \sin^2\alpha_n$，$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_{n-2} + \cos^2\alpha_n = \sin^2\alpha_{n-1}$，…，$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 + \cdots + \cos^2\alpha_n = \sin^2\alpha_1$，以上各式利用均值不等式，得 $(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_{n-1}} \leqslant \sin^2\alpha_n$，$(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_n} \leqslant \sin^2\alpha_{n-1}$，…，$(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3\cdots\cos^2\alpha_n} \leqslant \sin^2\alpha_1$，把上述几个不等式两边相乘得 $(n-1)^n[\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_n] \leqslant \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\cdots\sin^2\alpha_n$，即 $\tan^2\alpha_1\tan^2\alpha_2\cdots\tan^2\alpha_n \geqslant (n-1)^n$，由于 $m_i^p = \tan^2\alpha_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，故 $m_1 \cdot m_2\cdots m_n \geqslant (n-1)^{\frac{n}{p}}$，得证.

“奥数”联赛冲刺篇——《高中数学联赛考前辅导》

◆ 选题经典且贴近高中联赛

◆ 知识上查漏补缺，能力上全面提升

◆ 全新模拟题让你提前感受考场氛围

读者对象：参加联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

“奥数”IMO终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

◆ 从2009年起，每年出版一册

◆ 以国家集训队测试题和国家队训练题为主

◆ 收集了国内主要竞赛：全国联赛、联赛加试、冬令营、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克、东南地区数学奥林匹克

◆ 附有美国、俄罗斯、罗马尼亚和国际数学奥林匹克

读者对象：参加联赛、冬令营等赛事的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

“奥数”域外篇——《全俄中学生数学奥林匹克(1993－2006)》

俄罗斯是世界上开展数学活动最早、最广泛、也是影响最大的国家之一。俄罗斯是世界上竞赛试题的最大生产国，不仅产量高，而且质量好，其中最出色的当数组合题。

本书收录1993－2006年俄罗斯9—11年级数学奥林匹克第四轮（联邦区域竞赛）和第五轮（全俄决赛）竞赛的所有试题和解答。

读者对象：参加数学竞赛的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

更多图书信息及免费资料请登录：

http://www.hdsdjf.com/downloadfileinfor.aspx?classid=69

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 三角函数/曹瑞彬，周益忠编著. —2版. —上海：华东师范大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5617-9195-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①曹…②周…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第275003号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷
三角函数(第二版)

编　　著　曹瑞彬　周益忠
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　郜　田
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海华大印务有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　11
字　　数　193千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2012年7月第一次
印　　数　1—13000
书　　号　ISBN 978-7-5617-9195-0/G·5496
定　　价　21.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)