数学奥林匹克小丛书 第二版

高中卷 4

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

平均值不等式与柯西不等式

李胜宏 边红平 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第二版） 编委会

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 平均值不等式及其证明

平均值不等式是最基本的重要不等式之一，在不等式理论研究和证明中占有重要的位置. 平均值不等式的证明有许多种方法. 这里，我们选了部分具有代表意义的证明方法，其中用来证明平均值不等式的许多结论，其本身又具有重要的意义. 特别是，在许多竞赛的书籍中，都有专门的章节介绍和讨论，如数学归纳法、变量替换、恒等变形和分析综合方法等，这些也是证明不等式的常用方法和技巧. 希望大家能认真思考和好好掌握，熟悉不等式的证明.

1.1 平均值不等式

对任意非负实数 a、b，有

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

于是，得

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

一般地，假设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个非负实数，它们的算术平均值记为

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

几何平均值记为

$$G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

算术平均值与几何平均值之间有如下的关系

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即
$$A_n \geqslant G_n,$$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

上述不等式称为平均值不等式，或简称为均值不等式.

平均值不等式的表达形式简单，容易记住，但它的证明和应用非常灵活、广泛，有多种不同的方法. 为使大家理解和掌握，这里我们选择了其中的几种典型的证明方法. 当然，有些方法是几个知识点的结合，很难将它们归类，有些大体相同或相似，但选择的变量不同，或处理的方式不同，导致证明的难易不同，所以，我们将它们看作是不同的方法.

1.2　平均值不等式的证明

证法一（归纳法）

(1) 当 $n = 2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$（正整数 $k \geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$，有
$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么，当 $n = k + 1$ 时，由于
$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1},\ G_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}},$$
关于 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ 是对称的，任意对调 a_i 与 $a_j (i \neq j)$，即将 a_i 写成 a_j，a_j 写成 a_i，A_{k+1} 和 G_{k+1} 的值不改变，因此不妨设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$，$a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$，显然 $a_1 \leqslant A_{k+1} \leqslant a_{k+1}$，以及
$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) - a_1 a_{k+1} = (a_1 - A_{k+1})(A_{k+1} - a_{k+1}) \geqslant 0,$$
即
$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \geqslant a_1 a_{k+1}.$$

对 k 个正数 $a_2, a_3, \cdots, a_k, a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}$，由归纳假设，得
$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}.$$

而
$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} = \frac{(k+1)A_{k+1} - A_{k+1}}{k} = A_{k+1},$$

于是 $$A_{k+1}^{k} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}).$$

两边乘以 A_{k+1}，得

$$A_{k+1}^{k+1} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k A_{k+1} (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 a_{k+1}) = G_{k+1}^{k+1}.$$

从而，有 $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

直接验证可知，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明 这里，利用了证明与正整数有关的命题的常用方法，即数学归纳法. 数学归纳法证题技巧的应用，可以说是五彩缤纷，千姿百态. 应用数学归纳法，除了需要验证当 $n=1$ 或 $n=n_0$（这里 n_0 为某个固定的正整数）外，其关键是要在 $n=k$ 时成立的假设之下，导出当 $n=k+1$ 时命题也成立，要完成这一步，需要一定的技巧和处理问题的能力，只有通过多做练习来实现理解和掌握.

证法二（归纳法，与证法一的不同处理）

（1）当 $n=2$ 时，已知结论成立.

（2）假设对 $n=k$（正整数 $k \geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i > 0$，$i=1, 2, \cdots, k$，有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \tag{1}$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + (a_{k+1} + \overbrace{G_{k+1} + \cdots + G_{k+1}}^{(k-1)\text{个}G_{k+1}}) - (k-1)G_{k+1} \tag{2}$$

$$\geqslant k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + k\sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{3}$$

$$\geqslant 2k\sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\ \sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}}} - (k-1)G_{k+1} \tag{4}$$

$$= 2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{5}$$

$$= 2k\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{6}$$

$$= (k+1)G_{k+1}, \tag{7}$$

于是 $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明 在这个证明中，为了利用归纳假设，将(1)写成(2)的形式. 由归纳假设，从(2)得到(3)，由于当 $n=2$ 时，不等式成立，则由(3)得到了(4).

证法三（归纳法，另一种处理方式）

（1）当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$（正整数 $k\geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i>0$，$i=1$，2，…，k，有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]\\&=\frac{1}{2k}(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+\underbrace{A_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}_{\text{共}k-1\text{个}})\\&\geqslant\frac{1}{2k}(k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}})\geqslant\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}.\end{aligned}$$

所以 $A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}$，故得 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

说明 在上面的证明中，将 A_{k+1} 表示为 $A_{k+1}=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]$ 是一步较为关键和重要的变形技巧.

证法四（归纳法和变换）

在证明原命题之前，首先令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

其中 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $y_1y_2\cdots y_n=1(y_i>0)$，且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n.$$

即在条件 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$ 之下，证明 $y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$.

我们用归纳法证明上述不等式.

(1) 当 $n=1$ 时，$y_1=1\geqslant 1$，显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立，则对于 $n=k+1$，由于 $y_1y_2\cdots y_n=1$ $(y_i>0)$，那么 y_i 中必有大于或等于 1 者，也有小于或等于 1 者，不妨设 $y_k\geqslant 1$，$y_{k+1}\leqslant 1$，并令 $y=y_ky_{k+1}$，则 $y_1y_2\cdots y_{k-1}y=1$，从而由归纳假设，得

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y\geqslant k.$$

于是

$$\begin{aligned}&y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k+y_{k+1}\\\geqslant&\ k+y_k+y_{k+1}-y_ky_{k+1}\\=&\ k+1+(y_k-1)(1-y_{k+1})\\\geqslant&\ k+1.\end{aligned}$$

不难看出，当且仅当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$，从而 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

故当 $n = k + 1$ 时，命题也成立.

说明　通过变量替换，将原问题化为一个与正整数有关的形式简单的不等式，在证明中运用了我们比较熟悉的手段和技巧.

证法五(归纳法和二项展开式)

(1) 当 $n = 2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$ (正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立，即对于 $a_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$，有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么，当 $n = k+1$ 时，不妨假设 $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$，于是由归纳假设，得

$$a_{k+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = A_k \geqslant G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}.$$

从而，得

$$A_{k+1}^{k+1} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \left(A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right)^{k+1} \tag{8}$$

$$= A_k^{k+1} + (k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right)^{k+1} \tag{9}$$

$$\geqslant A_k^{k+1} + (k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right) = A_k^{k+1} + A_k^k(a_{k+1} - A_k) \tag{10}$$

$$= A_k^k a_{k+1} \geqslant G_k^k a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \tag{11}$$

$$= G_{k+1}^{k+1}. \tag{12}$$

所以　$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明　在证明过程中，考虑 A_{k+1}^{k+1}，并通过一定的处理和运算，导出所需要的结果. 有时候可能利用到其他的有用结论.

证法六(倒向归纳法)

倒向归纳法，也称“留空回填”法. 基本思想是先对自然数的一个子列 $\{n_m\}$ 证明命题成立，然后再回过来证明 $\{n\}\backslash\{n_m\}$ 相应的命题成立.

首先证明当 $n = 2^m$ (m 为正整数)时，平均值不等式成立. 为此，对 m 用数

学归纳法.

当 $m=1$ 时,显然有 $\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$.

假设 $m=k$ 时命题成立,则当 $m=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\\=&\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\ \sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}\\\leqslant&\frac{1}{2}(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}})\\\leqslant&\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\\=&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

所以对于具有 $n=2^m$ 形式的正整数 n,平均值不等式成立,即对无穷多个正整数 $2, 4, 8, \cdots, 2^m, \cdots$,平均值不等式成立.

现假设 $n=k+1$ 时,平均值不等式成立. 当 $n=k$ 时, $A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$,则由假设,得

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_kA_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+A_k}{k+1}=\frac{kA_k+A_k}{k+1}=A_k,$$

所以 $G_k\leqslant A_k$,也就是说当 $n=k$ 时命题也成立.

综上可知,对一切正整数 n,平均值不等式成立. 不难看出,当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立,故命题成立.

证法七(利用排序不等式)

为了利用与上面不同的方法证明平均值不等式,我们首先介绍和证明另一个重要的结论,即排序不等式.

引理 1(排序不等式) 设两个实数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n;\ b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

则

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n(\text{同序乘积之和})\\\geqslant&a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}(\text{乱序乘积之和})\\\geqslant&a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1(\text{反序乘积之和})\end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,并且等号同时成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 成立.

证明　令 $A=a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$. 如果 $j_n\neq n$，且假设此时 b_n 所在的项是 $a_{j_m}b_n$，则由 $(b_n-b_{j_n})(a_n-a_{j_m})\geqslant 0$，得

$$a_nb_n+a_{j_m}b_{j_n}\geqslant a_{j_m}b_n+a_nb_{j_n},$$

也就是说，$j_n\neq n$ 时，调换 A 中 b_n 与 b_{j_n} 的位置，其余都不动，则得到 a_nb_n 项，并使 A 变为 A_1，且 $A_1\geqslant A$. 用同样的方法，可以再得到 $a_{n-1}b_{n-1}$ 项，并使 A_1 变为 A_2，且 $A_2\geqslant A_1$.

继续这个过程，至多经过 $n-1$ 次调换，得 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，故

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant A.$$

同样可以证明 $A\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

显然当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，两个等号同时成立. 反之，如果 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 及 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 中的数都不全相同时，则必有 $a_1\neq a_n$，$b_1\neq b_n$. 于是 $a_1b_1+a_nb_n>a_1b_n+a_nb_1$，且 $a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}\geqslant a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2$，从而有 $a_1b_n+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$. 故这两个等式中至少有一个不成立.

现在，利用引理 1 证明平均值不等式.

令 $y_k=\dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{G_n^k}$，$k=1,2,\cdots,n$. 由排序不等式，得

$$\begin{aligned}&y_1\times\frac{1}{y_1}+y_2\times\frac{1}{y_2}+\cdots+y_n\times\frac{1}{y_n}\\ \leqslant\ &y_1\times\frac{1}{y_n}+y_2\times\frac{1}{y_1}+\cdots+y_n\times\frac{1}{y_{n-1}}\\ =\ &\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G_n},\end{aligned}$$

所以 $A_n\geqslant G_n$.

显然当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，$A_n=G_n$. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等，不妨设 $a_1\neq a_2$，令 $b=\dfrac{a_1+a_2}{2}$，则 $a_1a_2<b^2$，且 $b+b=a_1+a_2$，

$$G_n<\sqrt[n]{b\cdot b\cdot a_3\cdots a_n}\leqslant\frac{b+b+a_3+\cdots+a_n}{n}=A_n.$$

故当 $A_n=G_n$ 时必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 反之亦然.

注　(1) 我们可以类似于证法四，由 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

则 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$，且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n.$$

下面利用排序不等式证明这个不等式.

任取 $x_1>0$，再取 $x_2>0$，使得 $y_1=\frac{x_1}{x_2}$，再取 $x_3>0$，使得 $y_2=\frac{x_2}{x_3}$，…，最后取 $x_n>0$，使得 $y_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$. 所以

$$y_n=\frac{1}{y_1y_2\cdots y_{n-1}}=\frac{1}{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}}=\frac{x_n}{x_1}.$$

由引理 1，得

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立，从而当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时等号成立，所以当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(2) 排序不等式是一个重要的基本的不等式，可以利用排序不等式直接证明许多其他有关的不等式. 例如：

契比雪夫不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k\leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号成立.

证明 显然

$$\begin{aligned}&n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_jb_j-a_jb_k)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_kb_k+a_jb_j-a_kb_j-a_jb_k)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0,\end{aligned}$$

故命题成立.

证法八(调整法)

(1) 首先,如果 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,那么必有 $A_n=G_n$. 下设这些数不全等,不妨设 $a_1=\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $a_2=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,则 $a_1<A_n<a_2$, $a_1<G_n<a_2$. 令 $b_1=A_n$, $b_2=a_1+a_2-A_n$, $b_i=a_i$, $i\geqslant 3$. 并记 $A_n^1=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,则 $A_n^1=A_n$,且由于

$$\begin{aligned}b_1b_2-a_1a_2&=A_n(a_1+a_2-A_n)-a_1a_2\\&=(A_n-a_1)(a_2-A_n)>0,\end{aligned}$$

则 $G_n\leqslant G_n^1=\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$.

(2) 如果 $b_1=b_2=\cdots=b_n$,则命题成立.若不全等,则必有最大和最小者,而且它们都不等于 A_n,仿照上面作法,可以得到 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,这组数中,有两个数为 A_n,且 $A_n^2=\dfrac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=A_n^1=A_n$, $G_n^2=\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\geqslant G_n^1\geqslant G_n$. 如果 $c_1=c_2=\cdots=c_n$,那么 $A_n^2=G_n^2$,从而 $A_n=A_n^2\geqslant G_n$. 如果 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 仍然不全相等,再按上述方法,进行第三次变换,所得到的新的数组中必有 3 个数都为 A_n. 这样下去,一定存在某个数 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 使得

$$A_n=A_n^1=\cdots=A_n^m,\ G_n\leqslant G_n^1\leqslant G_n^2\leqslant\cdots\leqslant G_n^m,\ A_n^m=G_n^m,$$

从而得 $A_n\geqslant G_n$,且只要 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相等,必有 $A_n>G_n$. 故命题成立.

注 调整法是证明不等式或求最值的一种有效方法,特别是对那些当变量相等时取等号或取到最值的有关问题.

证法九(归纳法和辅助命题)

为了证明平均值不等式,需要证明一个引理.

引理 2 假设 x、y 为正实数,n 为正整数,则

$$x^{n+1}+ny^{n+1}\geqslant(n+1)y^nx.$$

证明 由于 x、y 与 x^k、y^k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 同序,所以

$$(x-y)(x^k-y^k)\geqslant 0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
& x^{n+1}+ny^{n+1}-(n+1)xy^n \\
={} & x(x^n-y^n)-ny^n(x-y) \\
={} & (x-y)[x(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})-ny^n] \\
={} & (x-y)[(x^n-y^n)+(x^{n-1}-y^{n-1})y+\cdots+(x-y)y^{n-1}] \\
\geqslant{} & 0,
\end{aligned}
$$

故引理 2 成立. 现在，我们利用引理 2 和数学归纳法证明平均值不等式.

(1) 当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$（正整数 $k\geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i>0$，$i=1$，2，$\cdots$，k，有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，为了利用引理 2，令 $a_1a_2\cdots a_k=y^{k(k+1)}$，$a_{k+1}=x^{k+1}$，$x$，$y\geqslant 0$，则由归纳假设和引理 2，得

$$
\begin{aligned}
& a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}-(k+1)G_{k+1} \\
={} & \frac{k(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k}+x^{k+1}-(k+1)y^kx \\
\geqslant{} & k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+x^{k+1}-(k+1)y^kx \\
={} & ky^{k+1}+x^{k+1}-(k+1)y^kx\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明 (1) 值得注意的是，像引理 2 这样的结论及其证明，为我们证明和解决一般的不等式问题提供了方法和技巧. 前面，我们利用数学归纳法与不同的处理方式，证明了平均值不等式，当然，还可以用其他的方法来证明.

(2) 我们也可以用排序不等式证明引理 1.

证法十(构造数列)

令 $f(n)=n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$，如果能证明 $f(n)$关于 n 是单调增加的，即

$$f(n)\leqslant f(n+1),\ n\geqslant 2.$$

那么，由 $f(2)\geqslant 0$，得到 $f(n)\geqslant f(2)\geqslant 0$，则平均值不等式成立.

现在，证明 $f(n)$的单调性.

同证法九，设 $a_1a_2\cdots a_n=y^{n(n+1)}$，$a_{n+1}=x^{n+1}$，$x$，$y\geqslant 0$，则由引理 2，得

$$
\begin{aligned}
& f(n+1)-f(n) \\
={} & (n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)\\
&=a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\\
&=x^{n+1}-(n+1)y^nx+ny^{n+1}\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这表明 $f(n+1)\geqslant f(n)$.

另外，由于 $f(2)\geqslant 0$，则对任意 $n\geqslant 2$，得

$$f(n)\geqslant f(n-1)\geqslant\cdots\geqslant f(2)\geqslant 0.$$

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故平均值不等式成立.

证法十一(利用辅助命题)

为了证明平均值不等式，首先证明另一个不等式，即

引理 3 如果 $x_k\geqslant 0$，且 $x_k\geqslant x_{k-1}(k=2,3,\cdots,n)$，则

$$x_n^n\geqslant x_1(2x_2-x_1)(3x_3-2x_2)\cdots[nx_n-(n-1)x_{n-1}],$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

证明 因为 $x_k\geqslant x_{k-1}$，则

$$x_k^{k-1}+x_k^{k-2}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{k-1}\geqslant kx_{k-1}^{k-1},$$

所以
$$
\begin{aligned}
x_k^k-x_{k-1}^k&=(x_k-x_{k-1})(x_k^{k-1}+x_k^{k-2}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{k-1})\\
&\geqslant kx_{k-1}^{k-1}(x_k-x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

即
$$x_k^k\geqslant x_{k-1}^{k-1}[kx_k-(k-1)x_{k-1}]\ (k=1,2,\cdots,n),$$

当且仅当 $x_k=x_{k-1}$ 时等号成立.

所以

$$x_n^n=x_1\frac{x_2^2}{x_1}\frac{x_3^3}{x_2^2}\cdots\frac{x_n^n}{x_{n-1}^{n-1}}\geqslant x_1(2x_2-x_1)(3x_3-2x_2)\cdots[nx_n-(n-1)x_{n-1}].$$

现在利用引理 3 证明平均值不等式.

不妨假设 $a_n\geqslant a_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_2\geqslant a_1>0$. 由 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$，则 $A_k\geqslant A_{k-1}>0\ (k=2,3,\cdots,n)$，且 $kA_k-(k-1)A_{k-1}=a_k$. 由引理 3，得

$$A_n^n\geqslant a_1a_2\cdots a_n,$$

即 $A_n\geqslant G_n$. 当且仅当 $A_1=A_2=\cdots=A_n$，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证法十二（函数方法）

引理 4 如果函数 $f(x):(a, b)\to\mathbf{R}$ 满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2}, x, y\in(a, b), x\neq y, \tag{13}$$

那么

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}, \tag{14}$$

其中 $x_i\in(a, b)$，且至少有一对 (i, j)，使 $x_i\neq x_j$.

证明 对 n 用归纳法.

当 $n=1, 2$ 时，结论显然成立.

设当 $n=k$ 时结论成立. 对于 $n=k+1$，有

$$A_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{2k}+\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k},$$

并记
$$B=\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k},$$

则
$$\begin{aligned}f(A_{k+1})&=f\left(\frac{A_k+B}{2}\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}[f(A_k)+f(B)]\\&\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_k)]\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{k}[f(a_{k+1})+(k-1)f(A_{k+1})]\right\}.\end{aligned}$$

所以

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)\geqslant\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}.$$

我们称满足(13)式的函数为凹函数(可以证明，如果函数 f 二阶可导，则当 $f''(x)<0$ 时，f 为凹函数). 特别的，不难验证函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹函数，于是，对 $a_i\in(0, +\infty)$，$i=1, 2, \cdots, n$，我们有

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n},$$

从而
$$\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

由对数函数的单调性，得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

故命题成立.

下面验证 $\ln x$ 为凹函数. 对任意 x，y，$x\neq y$，要使得：$f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2}$，即

$$\ln\frac{x+y}{2}>\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$

等价于

$$\ln\frac{x+y}{2}\geqslant\ln(xy)^{\frac{1}{2}}.$$

由函数的单调性，等价于

$$\frac{x+y}{2}\geqslant(xy)^{\frac{1}{2}},$$

这个可以由 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$ 直接导出.

另外，由凹函数方法，设 $p>0$，$q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由于函数 $f(x)=\ln x$，$x\in\mathbf{R}^+$ 为凹函数，则对 x，$y>0$，有

$$\frac{1}{p}\ln x+\frac{1}{q}\ln y\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right),$$

即

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y.$$

等号成立的充分必要条件是 $x=y$.

这个不等式称为 Young 不等式.

注　引理 4 中的不等式(14)，称为 Jensen 不等式，它的一般形式为

设 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$ 为凹函数，则对任意 $x_i\in(a,b)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，我们有

$$\frac{1}{p_1}f(x_1)+\frac{1}{p_2}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{p_n}f(x_n)\leqslant f\left(\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\cdots+\frac{x_n}{p_n}\right).$$

其中 $p_i > 0\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$.

在这部分，我们利用不同的方法证明了平均值不等式成立．在证明过程中，利用了各种技巧和方法．

习　题　1

1 已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$．求证：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b} \geqslant 9$.

2 设 a，b，$c>0$，求证：$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqslant 8$.

3 已知 $0<a$，b，$c<1$，并且 $ab+bc+ca=1$．证明：$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4 设 a，b，$c \in \mathbf{R}^{+}$，且 $abc \leqslant 1$．证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 1+\frac{6}{a+b+c}$.

5 正实数 x、y、z 满足 $xyz=1$．证明：$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geqslant 2$.

6 设 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n>0$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$．求证：

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right) \geqslant (n^2-1)^n.$$

7 设 a，b，c 为正数，且 $a+b+c=3$．求证：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ca.$$

8 已知 x，y，$z \in \mathbf{R}^{+}$，且 $x+y+z=1$．求证：$\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)\left(\frac{1}{z}-z\right) \geqslant \left(\frac{8}{3}\right)^3$.

9 设 x_1，x_2，$\cdots$，$x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$．求证：$\frac{1}{x_1(1+x_1)}+\frac{1}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\frac{1}{x_n(1+x_n)} \geqslant \frac{n}{2}$.

10 设 a，b，$c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leqslant 4$．求证：

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3.$$

11 已知 a，b，c 为正实数，且 $abc=8$，求证：

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geqslant\frac{4}{3}.$$

12 设 a，$b\in\mathbf{R}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. 求证：对一切正整数 n，有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

13 设 a，$b\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$ 成立的充要条件是对任意 $x>1$，有 $ax+\frac{x}{x-1}>b$.

14 设 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$. 求证：对任意 y_1，$y_2\in\mathbf{R}$，有 $(x_1y_1+x_2y_2-1)^2\geqslant(x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1)$.

15 设 a、b、c 为正实数，求证：

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

16 设 x_1，x_2，$x_3\in\mathbf{R}^+$，证明：

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\leqslant\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2+\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2.$$

17 设 a、b、c 为正实数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

18 设 x、y、z 为正实数，且 $x\geqslant y\geqslant z$. 求证：

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geqslant x^2+y^2+z^2.$$

19 设 a、b、c 为正实数，满足 $a^2+b^2+c^2=1$. 求证：

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant\sqrt{3}.$$

20 设 a、b、c、d 是非负实数，满足 $ab+bc+cd+da=1$. 求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+d+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

21 设 n 为给定的自然数，$n\geqslant 3$，对于 n 个给定的实数 a_1，a_2，…，a_n，记

$|a_i - a_j|$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 的最小值为 m，求在

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

时，m 的最大值.

2 平均值不等式的应用

2.1 平均值不等式在不等式证明中的应用

下面举例说明平均值不等式在证明各种竞赛问题中的应用.在证明过程中,应用灵活,具有较高的技巧性.

例 1 设 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})\ (a>0,\ a\neq 1)$，证明:对正整数 $n\geqslant 2$，有

$$f(n)>n.$$

证明 当 $n\geqslant 2$ 时,由平均值不等式,得

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{a}{a^2-1}(a^n-a^{-n})=\frac{a}{a^2-1}\left(a^n-\frac{1}{a^n}\right)\\&=\frac{a}{a^2-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\frac{1}{a}+a^{n-3}\frac{1}{a^2}+\cdots+a\frac{1}{a^{n-2}}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)\\&\geqslant\frac{a}{a^2-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)n\sqrt[n]{a^{n-1}a^{n-2}\cdots a^2a\frac{1}{a}\frac{1}{a^2}\cdots\frac{1}{a^{n-1}}}=n,\end{aligned}$$

当且仅当 $a=1$ 时等号成立,故命题成立.

例 2 设 $x>0$，证明：$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

证明 由该不等式的外形,很容易想到平均值不等式.由平均值不等式,得

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}}2^{\sqrt[4]{x}}}=2\cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}.$$

又
$$\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}\geqslant(x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}.$$

所以
$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

例 3 设 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 证明：

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n.$$

证明　由于对任意的 i，

$$2+a_i=1+1+a_i\geqslant 3\sqrt[3]{a_i}.$$

故
$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}=3^n.$$

注　此题也可以用归纳法证明.

当 $n=1$ 时，则 $a_1=1$，显然成立. 假定当 $n=k$ 时成立，那么，对于 $n=k+1$，由于 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$，如果有某个 $a_i=1$，则由归纳假设，命题成立. 如果 a_i 都不为 1，则必有大于 1 的，且必有小于 1 的，不妨设 $a_k>1$，$a_{k+1}<1$. 则由归纳假设，得

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_{k-1})(2+a_ka_{k+1})\geqslant 3^k.$$

于是，为了证明命题，只要证明

$$(2+a_k)(2+a_{k+1})\geqslant 3(2+a_ka_{k+1}) \tag{15}$$

便可.

因为
$$(2+a_k)(2+a_{k+1})\geqslant 3(2+a_ka_{k+1}),$$

等价于
$$4+2a_k+2a_{k+1}+a_ka_{k+1}\geqslant 6+3a_ka_{k+1},$$

等价于
$$a_k+a_{k+1}-a_ka_{k+1}-1\geqslant 0,$$

等价于
$$(a_k-1)(1-a_{k+1})\geqslant 0.$$

由假设最后不等式成立，故命题成立.

注　这里，选取 $a_k>1$，$a_{k+1}<1$，在平均值不等式的证明方法四中有过类似的考虑.

例 4　设 $a>b>0$，求证：$\sqrt{2}a^3+\dfrac{3}{ab-b^2}\geqslant 10$.

证明　因为 $ab-b^2=b(a-b)\leqslant\dfrac{[b+(a-b)]^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$，所以

$$\begin{aligned}\sqrt{2}a^3+\frac{3}{ab-b^2}&\geqslant\sqrt{2}a^3+\frac{12}{a^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}a^3+\frac{\sqrt{2}}{2}a^3+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^3\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}}=10,\end{aligned}$$

即命题成立.

注　为了消去 a，将 $\sqrt{2}a^3$ 写成两项，$\frac{12}{a^2}$ 写成三项. 这样，利用平均值不等式，它们的乘积为一个常数.

例 5　设 $a,b,c>0$，求证：

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}\geqslant 2.$$

证明　由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}&=\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}-1\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c}}-1\\&=3-1=2,\end{aligned}$$

即命题成立.

例 6　设 $x+y+z=0$，求证：

$$6(x^3+y^3+z^3)^2\leqslant(x^2+y^2+z^2)^3.$$

证明　由 $x+y+z=0$ 及其对称性，不妨假设 $x,y\geqslant 0$，$z\leqslant 0$，由于 $x+y=-z$，得 $z^2=(x+y)^2$，从而

$$(x^2+y^2+z^2)^3=8(x^2+xy+y^2)^3.$$

由 $A_3\geqslant G_3$，得

$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2&=\frac{x(x+y)}{2}+\frac{y(x+y)}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy(x+y)^2}{4}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{4}},\end{aligned}$$

所以 $$(x^2+y^2+z^2)^3\geqslant 54x^2y^2z^2=6(x^3+y^3+z^3)^2.$$

例 7　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+S+\frac{S^2}{2!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

证明　由于 $G_n\leqslant A_n$，得

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\ \leqslant&\left(\frac{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n\\ =&1+\mathrm{C}_n^1\left(\frac{S}{n}\right)+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{S}{n}\right)^2+\cdots+\mathrm{C}_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{S}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

因为　$n!=(n-m)!(n-m+1)\cdots n\leqslant(n-m)!n^m$，

所以　$$\mathrm{C}_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}S^m\leqslant\frac{S^m}{m!},$$

从而命题成立.

例 8　设 k，n 为正整数，且 $1\leqslant k\leqslant n$，$a_i\in\mathbf{R}^+$，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1a_2\cdots a_k$. 求证：

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_k^{n-1}\geqslant kn,$$

并确定等号成立的充要条件.

证明　令 $a=a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1a_2\cdots a_k$. 由平均值不等式，得

$$a\geqslant ka^{\frac{1}{k}}\text{，即 } a\geqslant k^{\frac{k}{k-1}}.$$

又因为

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_k^{n-1}\geqslant k(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{n-1}{k}}=ka^{\frac{n-1}{k}}\geqslant k\cdot k^{\frac{n-1}{k-1}},$$

于是只需证明

$$k^{\frac{n-1}{k-1}}\geqslant n.$$

再由平均值不等式，得

$$k=\frac{(k-1)n+(n-k)\times1}{n-1}\geqslant n^{\frac{k-1}{n-1}},$$

从而不等式成立.

不难看出，当 $k=n$ 且 $a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时等号成立.

例 9　设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^k.$$

证明　因为 $\dfrac{n(n-1)}{2}=\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)$，所以由平均值不等式，得

$$\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^k$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)+a_k^k\right]\\
&=\sum_{k=1}^{n}(1+1+\cdots+1+a_k^k)\\
&\geqslant\sum_{k=1}^{n}k\sqrt[k]{1^{k-1}\cdot a_k^k}=\sum_{k=1}^{n}ka_k,
\end{aligned}
$$

故命题成立.

注 应用平均值不等式时，通常要将乘幂看作连乘积，有时还要巧妙地添上数 1.

例 10 设 $a_i>0$，$b_i>0$ 且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1$，$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant n$. 求证：

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant(n+1)^n.$$

证明 由已知条件和平均值不等式，得

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\leqslant\frac{1}{n^n},$$

$$b_1b_2\cdots b_n\leqslant\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)^n\leqslant 1.$$

又
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_i}+\frac{1}{b_i}&=\frac{1}{na_i}+\cdots+\frac{1}{na_i}+\frac{1}{b_i}\\
&\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{na_i}\right)^n\left(\frac{1}{b_i}\right)},
\end{aligned}
$$

从而
$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)\\
\geqslant&(n+1)^n\sqrt[n+1]{\frac{1}{(n^n)^n}\,\frac{1}{(a_1a_2\cdots a_n)^n}\,\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}}\\
\geqslant&(n+1)^n.
\end{aligned}
$$

故命题成立.

注 此题证明的关键是将$\frac{1}{a_i}$写成$\frac{1}{na_i}+\cdots+\frac{1}{na_i}$.

例 11 假设 a、b、c 都是正数，证明：

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

证明 如果 $a+b-c$，$b+c-a$，$c+a-b$ 中有负数，不妨设 $a+b-c<0$，

则 $c>a+b$. 故 $b+c-a$ 与 $c+a-b$ 均为正数，则结论显然成立.

若 $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ 均非负，则由平均值不等式，得

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\leqslant\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b.$$

同理可得

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leqslant\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c,$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\leqslant\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a.$$

将三式相乘，即得到我们要证明的问题，故命题成立.

注　通过对部分变量应用平均值不等式，而且轮换使用，从而得到结论的证明.

例 12　假设正数 a、b、c 满足 $(1+a)(1+b)(1+c)=8$. 证明：$abc\leqslant 1$.

证明　由假设得

$$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8.$$

再由平均值不等式，得

$$a+b+c\geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}},\ ab+bc+ca\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立. 于是

$$8\geqslant 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=[1+(abc)^{\frac{1}{3}}]^3.$$

由此，得

$$(abc)^{\frac{1}{3}}\leqslant 2-1=1.$$

所以，$abc\leqslant 1$，当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立.

例 13　设 n 为正整数，证明：

$$n[(n+1)^{\frac{1}{n}}-1]\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant n-(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

证明　只证明不等式的左边，不等式的右边可同样处理.

令 $A=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+n}{n}$，则左边的不等式等价于

$$A\geqslant(n+1)^{\frac{1}{n}}.$$

由平均值不等式，得

$$A=\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$
$$=\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}$$
$$\geqslant\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}}=(n+1)^{\frac{1}{n}}.$$

从而得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant n[(n+1)^{\frac{1}{n}}-1].$$

不难看出，当 $n=1$ 时等号成立.

例 14　设 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，$m>0$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^m}=1$. 求证：

$$a_1a_2\cdots a_n\geqslant(n-1)^{\frac{n}{m}}.$$

证明一　令 $x_i=\frac{1}{1+a_i^m}$，则 $a_i^m=\frac{1-x_i}{x_i}$，且 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

于是
$$a_1^ma_2^m\cdots a_n^m=\frac{(x_2+\cdots+x_n)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$\geqslant\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_n}\cdots(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$=(n-1)^n.$$

故命题成立.

证明二　令 $a_i^m=\tan^2\alpha_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^m}=1$ 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1.$$

其结论等价于

$$\tan^2\alpha_1\tan^2\alpha_2\cdots\tan^2\alpha_n\geqslant(n-1)^n,$$

即
$$\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\cdots\sin^2\alpha_n\geqslant(n-1)^n\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_n.$$

由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha_1 &= 1-\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_n\\ &\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3\cdots\cos^2\alpha_n}.\end{aligned}$$

一般地，

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha_i &= 1-\cos^2\alpha_i = \cos^2\alpha_1+\cdots+\cos^2\alpha_{i-1}+\cos^2\alpha_{i+1}+\cdots+\cos^2\alpha_n\\ &\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_1\cdots\cos^2\alpha_{i-1}\cos^2\alpha_{i+1}\cdots\cos^2\alpha_n}.\end{aligned}$$

将它们相乘，得

$$\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\cdots\sin^2\alpha_n \geqslant (n-1)^n\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_n.$$

故命题成立.

例 15 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，且 $a^2+b^2+c^2=1$. 求证：

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

证明 原不等式

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

等价于
$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

由于 $a^2+b^2+c^2=1$，如果能证明 $x(1-x^2)\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}$，则上述不等式成立. 由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}x(1-x^2) &= \sqrt{\frac{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}{2}}\\ &\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3}\right]^3}\\ &=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

故不等式成立.

注 由于分子之和 $a^2+b^2+c^2=1$，所以当各分母被控制在某个常数之内时，便可以推出命题成立. 这个方法在分式不等式证明中常常使用.

例 16 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 求证：

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

证明 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，所以

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})\\ \geqslant&(1+1)(1+2)\cdots[1+(n-1)]\\ =&a_1a_2\cdots a_n.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\\ =&\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\\ =&\frac{1}{a_1}+\frac{1+a_1}{a_2}+\frac{1+a_2}{a_3}+\cdots+\frac{1+a_{n-1}}{a_n}\\ \geqslant&n\sqrt[n]{\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}{a_1a_2\cdots a_n}}\geqslant n.\end{aligned}$$

又因为 $n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)$，所以

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.$$

注 对于该不等式的证明，首先要充分理解 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，此外，两边同时相加 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $\left(即\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$ 也是很重要的一步.

例 17 设 a, b, c 为正实数，求证：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

证明 容易看出，如果我们能证明 $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$，那么，将它们相加便得到所要证明的不等式. 因为

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

等价于

$$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geqslant a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc).$$

再由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{4}{3}})^2&=(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})\\&\geqslant 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc.\end{aligned}$$

于是 $$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geqslant(a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc),$$

从而 $$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

同理可得

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}\geqslant\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},\ \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

于是 $$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

注　这是一个IMO试题，有多种不同的证明方法，后面将再次遇到. 这里的指数$\frac{4}{3}$是这样得到的. 取x为待定常数.

设

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^x}{a^x+b^x+c^x},$$

上式等价于

$$\begin{aligned}&a^2(a^x+b^x+c^x)^2\geqslant a^{2x}(a^2+8bc)\\\Leftrightarrow&(a^x+b^x+c^x)^2\geqslant a^{2x-2}(a^2+8bc)\\\Leftrightarrow&a^{2x}+2a^x(b^x+c^x)+(b^x+c^x)^2\geqslant a^{2x}+8a^{2x-2}bc\\\Leftrightarrow&2a^x(b^x+c^x)+(b^x+c^x)^2\geqslant 8a^{2x-2}bc.\end{aligned}$$

由于 $$b^x+c^x\geqslant 2b^{\frac{x}{2}}c^{\frac{x}{2}},$$

只需 $$2a^x\cdot 2b^{\frac{x}{2}}c^{\frac{x}{2}}+(2b^{\frac{x}{2}}c^{\frac{x}{2}})^2\geqslant 8a^{2x-2}bc,$$

即 $$a^xb^{\frac{x}{2}}c^{\frac{x}{2}}+b^xc^x\geqslant 2a^{2x-2}bc.$$

由于 $$a^xb^{\frac{x}{2}}c^{\frac{x}{2}}+b^xc^x\geqslant 2\sqrt{a^xb^{\frac{3}{2}x}c^{\frac{3}{2}x}}=2a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{3}{4}x}c^{\frac{3}{4}x},$$

所以只需

$$a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{3}{4}x}c^{\frac{3}{4}x}\geqslant a^{2x-2}bc,$$

显然取 $x=\frac{4}{3}$ 满足要求.

例 18 已知正整数 $n\geqslant 2$，实数 a_i，b_i，满足

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,\ b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$$

并且

$$a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j).$$

求证：$\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i$.

证明 当 $n=2$ 时，

$$(a_1+a_2)^2-(a_1-a_2)^2=4a_1a_2=4b_1b_2=(b_1+b_2)^2-(b_1-b_2)^2,$$

由假设得 $a_1-a_2\leqslant b_1-b_2$，所以 $a_1+a_2\leqslant b_1+b_2$.

当 $n\geqslant 3$ 时，不妨设 $b_1b_2\cdots b_n=1$（否则用 $a_i'=\frac{a_i}{a_1a_2\cdots a_n}$，$b_i'=\frac{b_i}{b_1b_2\cdots b_n}$ 代替 a_i，$b_i(1\leqslant i\leqslant n)$）.

如果 $a_1\leqslant n-1$，则由平均值不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant n(n-1)=(n-1)n\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

下设 $a_1>n-1$，因为

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)&\geqslant[(a_1-a_n)+(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_n)]\\&\quad+[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})]\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i+(a_1-a_{n-1})-na_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j)&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)b_i\\&=\sum_{i=1}^{n}[(n-1)b_i+(2-2i)b_i]\\&=(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i+\sum_{i=1}^{n}(2-2i)b_i\\&\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i-2b_2-2(n-1)b_n.\end{aligned}$$

所以，当 $a_1-a_{n-1}-na_n+2b_2+2(n-1)b_n\geqslant 0$ 时，结论成立.

当 $a_1-a_{n-1}-na_n+2b_2+2(n-1)b_n<0$ 时，得

$$na_n>2(n-1)b_n+2b_2+a_1-a_{n-1}\geqslant 2(n-1)b_n+2b_2\geqslant 2nb_n,$$

即 $a_n>2b_n$.

又由 $a_1a_2\cdots a_n=1$，得 $a_n\leqslant 1$，所以

$$a_1-(n-1)a_n>n-1-(n-1)=0,$$

于是 $$2b_2<a_{n-1}+na_n-a_1-2(n-1)b_n<a_{n-1}+a_n\leqslant 2a_{n-1},$$

即 $b_2<a_{n-1}$. 从而可得

$$b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n>2b_nb_2a_1a_2\cdots a_{n-2},$$

即 $$b_1b_3\cdots b_{n-1}>2a_1a_2\cdots a_{n-2}.$$

而 $$b_3\leqslant b_2<a_{n-1}\leqslant a_{n-2},$$

$$b_4\leqslant b_3<a_{n-2}\leqslant a_{n-3},$$

……

$$b_{n-1}\leqslant b_{n-2}<a_3\leqslant a_2,$$

所以

$$b_1>2a_1,\ (n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i>2(n-1)a_1>na_1\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 19 给定 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{Z}^+$，求所有 $m\in\mathbf{Z}^+$，使得对 $a_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n$，满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，则

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}.$$

解 取 $x=a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>0$，$a_n=\dfrac{1}{x^{n-1}}$，则

$$(n-1)x^m+\frac{1}{x^{(n-1)m}}\geqslant\frac{n-1}{x}+x^{n-1}.$$

由此得到 $m\geqslant n-1$. 现在，假设 $m\geqslant n-1$，则

$$\begin{aligned}&(n-1)(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)+n(m-n+1)\\&=(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_{n-1}^m+1+1+\cdots+1)(\text{共 }m-n+1\text{ 个 }1)\\&\quad+(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_{n-2}^m+a_n^m+1+1+\cdots+1)+\cdots\end{aligned}$$

$$+(a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m+1+1+\cdots+1)$$
$$\geqslant m\sqrt[m]{(a_1a_2\cdots a_{n-1})^m}+\cdots+m\sqrt[m]{(a_2\cdots a_n)^m}$$
$$=m(a_1a_2\cdots a_{n-1}+\cdots+a_2a_3\cdots a_n)=m\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

所以

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant\frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{n}{n-1}(m-n+1).$$

于是,只要证明

$$\frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{n}{n-1}(m-n+1)\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

即
$$(m-n+1)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n\right)\geqslant 0.$$

由假设以及平均值不等式,得

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n\right)\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}}-n=0,$$

所以原不等式成立.

故对所有满足 $m\geqslant n-1$ 的 $m\in\mathbf{Z}^+$ 均可.

例 20 设 $n\ (n\geqslant 2)$ 是整数, $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{R}^+$, 求证:

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1)\geqslant(a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1).$$

证明 先证对于正实数 x_i, $y_i\ (i=1, 2, 3)$, 有

$$\prod(x_i^3+y_i^3)\geqslant\left(\prod x_i+\prod y_i\right)^3.$$

实际上,由平均值不等式,得

$$\sqrt[3]{\frac{x_1^3x_2^3x_3^3}{\prod(x_i^3+y_i^3)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^3}{x_i^3+y_i^3}\right),$$

$$\sqrt[3]{\frac{y_1^3y_2^3y_3^3}{\prod(x_i^3+y_i^3)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{y_i^3}{x_i^3+y_i^3}\right),$$

所以
$$\sqrt[3]{\frac{x_1^3x_2^3x_3^3}{\prod(x_i^3+y_i^3)}}+\sqrt[3]{\frac{y_1^3y_2^3y_3^3}{\prod(x_i^3+y_i^3)}}\leqslant 1,$$

即
$$\prod(x_i^3+y_i^3)\geqslant(\prod x_i+\prod y_i)^3.$$

令 $x_1=x_2=a_k$，$x_3=a_{k+1}$，$a_{n+1}=a_1$，$y_1=y_2=y_3=1$，$k=1, 2, \cdots, n$，则

$$(a_k^3+1)^2(a_{k+1}^3+1)\geqslant(a_k^2a_{k+1}+1)^3,\ k=1, 2, \cdots, n.$$

将它们相乘，则

$$\prod(a_i^3+1)^3\geqslant\prod(a_i^2a_{i+1}+1)^3,$$

故

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1)\geqslant(a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1).$$

例 21　设 $a, b, c>0$，$a+b+c=1$. 证明：若正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 满足 $x_1x_2\cdots x_5=1$，则

$$\prod_{i=1}^{5}(ax_i^2+bx_i+c)\geqslant 1.$$

证明　将问题一般化.

考虑表达式 $\prod\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c)$.

则含 $a^ib^jc^k$ $(i+j+k=n)$ 的项为

$$a^ib^jc^k[(x_1x_2\cdots x_i)^2(x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{i+j})+\cdots].$$

因此，共有 $C_n^iC_{n-i}^j$ 项求和（取 ax_t^2 的 i 个因式，从剩余的 $n-i$ 个因式中，取 bx_s 中的 j 个因式）.

由对称性知，含 x_i^2 的项数为常数，即为含 x_i 的项数.

因此，当求和后的项是全部的乘积时，对某个 p 有 $(x_1x_2\cdots x_n)^p=1$.

注　对于本题，不必求出 p. 事实上，

$$p=2C_{n-1}^{i-1}C_{n-i}^j+C_{n-1}^{j-1}C_{n-j}^i=\frac{2i+j}{n}C_n^iC_{n-i}^j.$$

回到原题，由代数—几何均值不等式得

$$a^ib^jc^k[(x_1x_2\cdots x_i)^2(x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{i+j})+\cdots]\geqslant a^ib^jc^kC_n^iC_{n-i}^j.$$

故 $\prod\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c)\geqslant\sum\limits_{i+j+k=n}a^ib^jc^kC_n^iC_{n-i}^j=(a+b+c)^n=1.$

例 22　已知 $x, y, z\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$，且 $x+y+z=2$.

证明：$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\leqslant 1$，并求上式取等号时，$x$、$y$、$z$ 的值.

证明　注意到

$$
\begin{aligned}
&x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\\
=&\frac{1}{2}(2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+2xyz)\\
=&\frac{1}{2}(xy\cdot 2xy+yz\cdot 2yz+zx\cdot 2zx+2xyz)\\
\leqslant&\frac{1}{2}[xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)+2xyz] \qquad (16)\\
=&\frac{1}{2}[(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)-xyz^2-yzx^2-zxy^2+2xyz]\\
=&\frac{1}{2}[(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)-xyz(x+y+z-2)]\\
=&\frac{1}{2}(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2).
\end{aligned}
$$

由此得到

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\leqslant\frac{1}{2}[(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)]. \qquad (17)$$

由式(16)知，当 $x=y=z$ 或 $x=y$，$z=0$ 或 $y=z$，$x=0$ 或 $z=x$，$y=0$ 时，式(17)取等号.

又 $x+y+z=2$，因此，当

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\text{或}(1,\ 1,\ 0)\text{或}(1,\ 0,\ 1)\text{或}(0,\ 1,\ 1)$$

时，式(17)取等号.

运用常见不等式

$$\alpha\beta\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\ (\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}).$$

令 $\alpha=2xy+2yz+2zx$，$\beta=x^2+y^2+z^2$. 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)\\
=&\frac{1}{4}(2xy+2yz+2zx)(x^2+y^2+z^2)\\
\leqslant&\frac{1}{4}\left(\frac{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{16}(x+y+z)^4=1. \tag{18}$$

结合式(17)得

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\leqslant 1. \tag{19}$$

由式(18)取等号的条件知，当

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow 2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2$$

时，式(19)等号成立.

故 $(x, y, z)=(1, 1, 0)$ 或 $(1, 0, 1)$ 或 $(0, 1, 1)$.

例 23 已知 a、b、c 为正实数. 证明：

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geqslant 0.$$

证明

$$\text{原式}\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{a+b}+\frac{b^2c^2}{b+c}+\frac{c^2a^2}{c+a}\geqslant abc\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{c(a+b)}+\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ac}{b(c+a)}\geqslant\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow(ab+bc+ac)\left(\frac{1}{ac+bc}+\frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{bc+ab}\right)$$

$$\geqslant\frac{ac}{ac+bc}+\frac{ab}{ab+ac}+\frac{bc}{bc+ab}+3.$$

下面进行换元. 令

$$\begin{cases}x=ab+ac,\\ y=bc+ba,\\ z=ca+cb\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ac=\dfrac{x+z-y}{2},\\ ab=\dfrac{x+y-z}{2},\\ bc=\dfrac{y+z-x}{2}\end{cases}\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{x+y+z}{2}.$$

故

$$\text{原式}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{x+z-y}{2z}+\frac{x+y-z}{2x}+\frac{y+z-x}{2y}+3$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+9$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geqslant\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+9$$

$$\Leftrightarrow\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 6$$

$$\Leftrightarrow\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3.$$

由均值不等式即知结论成立.

例 24 设正实数 x_1，x_2，…，x_n 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i}\leqslant 1$.

证明 用反证法.

假设
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i}>1. \tag{20}$$

则对任意的 k ($k\in\{1,2,\cdots,n\}$)，由式(20)有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1+x_k}&>1-\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{1}{n-1+x_i}\\&=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1+x_i}\right)\\&=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{x_i}{(n-1)(n-1+x_i)}\\&\geqslant(n-1)\left[\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{x_i}{(n-1)(n-1+x_i)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\\&=\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{x_i}{n-1+x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}},\end{aligned}$$

即对 $1\leqslant k\leqslant n$，均有

$$\frac{1}{n-1+x_k}>\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{x_i}{n-1+x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

取积得

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_k}>\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{x_i}{n-1+x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n-1+x_k}.$$

则 $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k < 1$，这与 $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ 矛盾.

所以，假设不成立，必有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leqslant 1.$$

例 25 设 $x, y, z \in (0, 1)$，满足：

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz}}+\sqrt{\frac{1-y}{zx}}+\sqrt{\frac{1-z}{xy}}=2,$$

求 xyz 的最大值.

解 记 $u=\sqrt[6]{xyz}$，则由条件及均值不等式可知

$$\begin{aligned}2u^3 = 2\sqrt{xyz} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum \sqrt{x(3-3x)}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\sum \frac{x+(3-3x)}{2}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)\\ &\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}u^2.\end{aligned}$$

故

$$4u^3+2\sqrt{3}u^2-3\sqrt{3}\leqslant 0,$$

即

$$(2u-\sqrt{3})(2u^2+2\sqrt{3}u+3)\leqslant 0.$$

所以，$u\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 依此可知，$xyz\leqslant\frac{27}{64}$，等号在

$$x=y=z=\frac{3}{4}$$

时取得. 因此，所求最大值为 $\frac{27}{64}$.

例 26 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+}$，求证：

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}>2\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}.$$

证明　欲证的不等式等价于

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^3>8(x^3+y^3+z^3)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{xy}{z}\right)^3+\left(\frac{yz}{x}\right)^3+\left(\frac{zx}{y}\right)^3+6xyz+3x^3\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$$

$$+3y^3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+3z^3\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$

$$>8(x^3+y^3+z^3).$$

因为 $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geqslant 2$，$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 2$，$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$，所以只需证

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^3+\left(\frac{yz}{x}\right)^3+\left(\frac{zx}{y}\right)^3+6xyz>2(x^3+y^3+z^3).\tag{21}$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，记 $f(x,y,z)=\left(\frac{xy}{z}\right)^3+\left(\frac{yz}{x}\right)^3+\left(\frac{zx}{y}\right)^3+6xyz-2(x^3+y^3+z^3)$，下证 $f(x,y,z)-f(y,y,z)\geqslant 0$，$f(y,y,z)\geqslant 0$.

事实上，

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)-f(y,y,z)\\=&\left(\frac{xy}{z}\right)^3+\left(\frac{yz}{x}\right)^3+\left(\frac{zx}{y}\right)^3+6xyz-2(x^3+y^3+z^3)\\&-\left[\left(\frac{y^2}{z}\right)^3+z^3+z^3+6y^2z-2(y^3+y^3+z^3)\right]\\=&\left(\frac{xy}{z}\right)^3-\frac{y^6}{z^3}+\left(\frac{yz}{x}\right)^3+\left(\frac{zx}{y}\right)^3-2z^3+6yz(x-y)-2(x^3-y^3)\\=&(x^3-y^3)\left(\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}-2+\frac{6yz}{x^2+xy+y^2}-\frac{z^3}{x^3}\right),\end{aligned}$$

而 $x^3-y^3\geqslant 0$，$\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}\geqslant 2$，$\frac{6yz}{x^2+xy+y^2}-\frac{z^3}{x^3}\geqslant\frac{2yz}{x^2}-\frac{z^3}{x^3}=\frac{z(2xy-z^2)}{x^3}>0$，所以 $f(x,y,z)-f(y,y,z)\geqslant 0$.

又

$$f(y,y,z)=\left(\frac{y^2}{z}\right)^3+z^3+z^3+6y^2z-2(y^3+y^3+z^3)$$

$$= \frac{y^6}{z^3} + 2y^2z + 2y^2z + 2y^2z - 4y^3$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{2^3y^{12}} - 4y^3 = 4(\sqrt[4]{8}-1)y^3 > 0,$$

从而(21)式得证，原命题得证.

注　本题所用的方法叫调整法，在各级竞赛中偶尔出现时，因难度大而得分率极低. 此题的解答由第 50 届国际数学奥林匹克金牌获得者郑志伟给出.

例 27　设 x、y、z 为非负实数，且 $x+y+z=1$，求证：

$$xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

证明　不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$.

当 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 时，则 $yz-2xyz \leqslant 0$，所以

$$xy+yz+zx-2xyz \leqslant xy+zx = x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} < \frac{7}{27}.$$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时，则 $y \leqslant \frac{1}{2}$，$z \leqslant \frac{1}{2}$.

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1-2+4(xy+yz+zx)-8xyz.$$

又由平均值不等式，得

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leqslant \left[\frac{3-2(x+y+z)}{3}\right]^3 = \frac{1}{27},$$

从而
$$xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{27}+1\right) = \frac{7}{27}.$$

例 28　设 n 为正整数，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为两个正数数列. 假设正实数列 $(z_1, z_2, \cdots, z_{2n})$，满足

$$z_{i+j}^2 \geqslant x_i y_j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

令 $M = \max\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\}$，证明：

$$\left(\frac{M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}}{2n}\right)^2 \geqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right).$$

证明　令 $X = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y = \max\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，不妨假设 $X = Y = 1$（否则用 $a_i = \frac{x_i}{X}$，$b_i = \frac{y_i}{Y}$，$c_i = \frac{z_i}{\sqrt{XY}}$ 代替）.

我们将证明

$$M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n.$$

于是

$$\frac{M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}}{2n}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right).$$

由平均值不等式得到原不等式成立.

为了证明上述不等式，我们将证明：对任意 $r>0$，左边大于 r 的项数不小于右边相应的项数，那么，对每个 k，左边第 k 个最大的项大于或等于右边第 k 个最大的项，这样就证明了上述不等式成立. 证明如下：

如果 $r\geqslant 1$，则右边没有项大于 r，所以只考虑 $r<1$.

令 $A=\{x_i\mid x_i>r,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$，$a=|A|$，$B=\{y_i\mid y_i>r,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$，$b=|B|$. 由于 $X=Y=1$，所以 a，b 大于 0.

由于 $x_i>r$，$y_j>r$ 推出 $z_{i+j}\geqslant\sqrt{x_iy_j}>r$. 于是

$$A+B=\{\alpha+\beta\mid\alpha\in A,\ \beta\in B\}\subseteq C=\{z_i\mid z_i>r,\ 2\leqslant i\leqslant 2n\}.$$

但是，由于如果 $A=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_a\}$，$i_1<i_2<\cdots<i_a$，$B=\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_b\}$，$j_1<j_2<\cdots<j_b$，则 $a+b-1$ 个数 i_1+j_1，i_1+j_2，$\cdots$，i_1+j_b，i_2+j_b，$\cdots$，i_a+j_b 互不相同，且属于 $A+B$. 所以 $|A+B|\geqslant|A|+|B|-1$. 因此 $|C|\geqslant a+b-1$. 特别，$|C|\geqslant 1$，于是对某个 k，$z_k>r$，那么 $M>r$. 所以上式的左边至少有 $a+b$ 项大于 r，由于 $a+b$ 为右边大于 r 的项数，于是，上述不等式成立.

注 在证明的过程中，其实平均值不等式的作用是较小的. 本题的证明有一定的难度，是因为像这样证明不等式的方法和处理技巧并不多见. 此解答由第 51 届 IMO 金牌获得者李嘉伦给出.

2.2 平均值不等式在求极值中的应用

不等式在求极值中起着重要的作用，在利用平均值不等式求极值的过程中，要注意“缩”或“放”的结果是否为常数（通常是和与积），同时必须指出等号成立的条件.

例 1 设 a，b，c 为正实数，求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

的最小值.

解法一 令 $x=a+2b+c$，$y=a+b+2c$，$z=a+b+3c$，则有 $x-y=b-c$，$z-y=c$，由此可得 $a+3c=2y-x$，$b=z+x-2y$，$c=z-y$，从而

$$\begin{aligned}&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}\\&=\frac{2y-x}{x}+\frac{4(z+x-2y)}{y}-\frac{8(z-y)}{z}\\&=-17+2\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}+4\frac{z}{y}+8\frac{y}{z}\\&\geqslant-17+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=-17+12\sqrt{2}.\end{aligned}$$

取 $a=3-2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

故最小值为 $-17+12\sqrt{2}$.

解法二 不妨设 $a+b+c=1$，则

$$\begin{aligned}&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}\\&=\frac{1+2c-b}{1+b}+\frac{4b}{1+c}-\frac{8c}{1+2c}\\&=-1+\frac{2+2c}{1+b}+\frac{4b+4}{1+c}-\frac{4}{1+c}+\frac{4}{1+2c}-4\\&=-5+2\frac{1+c}{1+b}+4\frac{1+b}{1+c}-\frac{4c}{(1+c)(1+2c)}\\&\geqslant-5+2\sqrt{8}-\frac{4}{\frac{1}{c}+3+2c}\geqslant-5+4\sqrt{2}-\frac{4}{3+2\sqrt{2}}\\&=12\sqrt{2}-17.\end{aligned}$$

取 $a=3-2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

故最小值为 $-17+12\sqrt{2}$.

例 2 设非负实数 a 和 d，正数 b 和 c，满足条件 $b+c\geqslant a+d$，求 $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值.

解　不妨设 $a+b\geqslant c+d$. 因为 $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$，注意到 $c\leqslant c+d$ 及 $b+c\geqslant a+d\Leftrightarrow b+c\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. 因此，得

$$\begin{aligned}\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)}\,\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}\\&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$, $c=2$, $d=0$，所以 $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

例 3　设 $2x>3y>0$，求 $\sqrt{2}x^3+\frac{3}{2xy-3y^2}$ 的最小值.

解　因为 $2x>3y>0$，所以 $2x-3y>0$. 由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}2xy-3y^2=y(2x-3y)&=\frac{1}{3}\cdot3y(2x-3y)\\&\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3y+(2x-3y)}{2}\right]^2=\frac{1}{3}x^2.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x^3+\frac{3}{2xy-3y^2}&\geqslant\sqrt{2}x^3+\frac{9}{x^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2}\\&\geqslant5\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^3\right)^2\cdot\left(\frac{3}{x^2}\right)^3}=5\sqrt[5]{\frac{27}{2}}.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $3y=2x-3y$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x^3=\frac{3}{x^2}$，即 $x=18^{\frac{1}{10}}$, $y=\frac{1}{3}\cdot18^{\frac{1}{10}}$ 时取到.

因此，$\sqrt{2}x^3+\frac{3}{2xy-3y^2}$ 的最小值为 $5\sqrt[5]{\frac{27}{2}}$.

例 4　若 x、y、z 是正实数，求 $\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}$ 的最大值，并证明你的结论.

解　在取定 y 的情况下，

$$\begin{aligned}&\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}\\=&\frac{x}{20x^2+(15y+4)x+3y}\\=&\frac{1}{20x+\frac{3y}{x}+15y+4}\\\leqslant&\frac{1}{2\sqrt{20\times 3y}+15y+4}\\=&\frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2},\end{aligned}$$

当且仅当 $x=\sqrt{\frac{3y}{20}}$ 时，等号成立.

同理可得，

$$\frac{z}{(5y+6z)(z+18)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{6\times 90y}+5y+108}=\frac{1}{(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2},$$

当且仅当 $z=\sqrt{15y}$ 时，等号成立.

所以，

$$\begin{aligned}&\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}\\\leqslant&\frac{y}{(\sqrt{15y}+2)^2(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}\\=&\left[\frac{\sqrt{y}}{(\sqrt{15y}+2)(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})}\right]^2\\=&\left[\frac{1}{5\sqrt{3y}+\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{y}}+20\sqrt{5}}\right]^2\\\leqslant&\left[\frac{1}{2\sqrt{5\sqrt{3}\times 12\sqrt{3}}+20\sqrt{5}}\right]^2\\=&\left(\frac{1}{32\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5120},\end{aligned}$$

当且仅当 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{12}{5}$，$z=6$ 时，上式取得最大值 $\frac{1}{5120}$.

例 5 若对于任何正实数，$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4+3b^4+3c^4}}+\dfrac{k}{a^3}\cdot\left(\dfrac{c^4}{b}+\dfrac{b^4}{c}\right)\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 均成立，求实数 k 的最小值.

解

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{\sqrt{a^4+3b^4+3c^4}}&=\frac{\sqrt{2}a^4}{\sqrt{2a^4(a^4+3b^4+3c^4)}}\\&\geqslant\frac{\sqrt{2}a^4}{\frac{1}{2}[2a^4+(a^4+3b^4+3c^4)]}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^4}{a^4+b^4+c^4}.\end{aligned}$$

从形式上猜测，须证明 $\dfrac{k}{a^3}\cdot\left(\dfrac{c^4}{b}+\dfrac{b^4}{c}\right)\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}$，又从等号成立的条件 $2a^4=a^4+3b^4+3c^4$ 以及 b,c 的对称性，猜测 k 可能在 $a^4=6b^4=6c^4$ 时取到尽可能大的值，而该值即为使不等式对任意 a,b,c 成立的最小值.

令 $a=\sqrt[4]{6}$，$b=c=1$，知 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{k}{(\sqrt[4]{6})^3}\cdot 2\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow k\geqslant\dfrac{1}{\sqrt[4]{24}}$.

下面证明当 $k=\dfrac{1}{\sqrt[4]{24}}$ 时，$\dfrac{k}{a^3}\cdot\left(\dfrac{c^4}{b}+\dfrac{b^4}{c}\right)\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}$.

等价于证明 $(a^4+b^4+c^4)(b^5+c^5)\geqslant\dfrac{4\sqrt[3]{6}}{3}a^3bc(b^4+c^4)$.

因为 $(b^9+c^9)-(b^5c^4+b^4c^5)=(b^5-c^5)(b^4-c^4)\geqslant 0$，所以 $b^9+c^9\geqslant b^5c^4+b^4c^5$.

由加权平均值不等式，得：

$$\begin{aligned}a^4b^5+2b^5c^4&=6\cdot\frac{a^4b^5}{6}+2\cdot b^5c^4\\&\geqslant 8\sqrt[8]{\left(\frac{a^4b^5}{6}\right)^6\cdot(b^5c^4)^2}\\&=\frac{4\sqrt[3]{6}}{3}a^3b^5c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^4c^5+2c^5b^4&=6\cdot\frac{a^4c^5}{6}+2\cdot c^5b^4\\&\geqslant 8\sqrt[8]{\left(\frac{a^4c^5}{6}\right)^6\cdot(c^5b^4)^2}\\&=\frac{4\sqrt[3]{6}}{3}a^3bc^5.\end{aligned}$$

三式相加，整理后即得

$$(a^4+b^4+c^4)(b^5+c^5)\geqslant\frac{4\sqrt[3]{6}}{3}a^3bc(b^4+c^4),$$

故原左式 $\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^4}{a^4+b^4+c^4}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=$ 原右式，即所求 k 的最小值为 $\frac{1}{\sqrt[4]{24}}$.

例 6 已知两两不同的正整数 $a, b, c, d, e, f, g, h, n$ 满足

$$n=ab+cd=ef+gh.$$

求 n 的最小值.

解 若 a, b, c, d, e, f, g, h 中没有一个等于 1，则

$$\begin{aligned}2n&=ab+cd+ef+gh\\&\geqslant 4\sqrt[4]{abcdefgh}\\&\geqslant 4\sqrt[4]{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}\\&=4\sqrt[4]{2^7\times3^4\times5\times7}\\&=4\times4\times3\times\sqrt[4]{\frac{35}{2}}\\&>4\times4\times3\times2=96.\end{aligned}$$

所以 $n\geqslant 48$. 设 a, b, c, d, e, f, g, h 中有一个等于 1，不妨设 $h=1$，则 $2n=ab+cd+ef+g$，且存在最小值. 此时 g 一定是这些数中最大的一个. 于是有

$$\begin{aligned}2n&=ab+cd+ef+g\\&\geqslant g+3\sqrt[3]{abcdef}\\&\geqslant g+3\sqrt[3]{2\times3\times4\times5\times6\times7}\\&=g+3\sqrt[3]{5040}\\&>g+3\sqrt[3]{4913}=g+51.\end{aligned}$$

因为 $g\geqslant 8$，所以，$2n\geqslant 60$，$n\geqslant 30$.

如果 $g\geqslant 9$，则 $2n\geqslant 61$，$n\geqslant 31$.

假设 $n=30$，则 $g=8$. 于是，a, b, c, d, e, f, g, h 是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的一个排列，特别地，有一个数是 5，不妨设 $a=5$. 所以 $30=ab+cd$，即 cd 可以被 5 整除. 矛盾.

因此 $n\geqslant 31$. 又因为 $31=1\times 7+4\times 6=2\times 8+3\times 5$，因此 n 的最小值为 31.

例 7 (1) 如果 a, b, c, d 是实数,求证:

$$a^6+b^6+c^6+d^6-6abcd\geqslant -2,$$

并指出等号何时成立;

(2) 对于哪些正整数 k,不等式

$$a^k+b^k+c^k+d^k-kabcd\geqslant M_k$$

对所有实数 a, b, c, d 成立? 求 M_k 的最大可能值,并指出等号何时成立.

证明 (1) 给定不等式变形为

$$a^6+b^6+c^6+d^6+1+1\geqslant 6abcd.$$

根据算术—几何平均值不等式,得

$$\begin{aligned}&\frac{a^6+b^6+c^6+d^6+1^6+1^6}{6}\\ \geqslant\ &\sqrt[6]{|a|^6\cdot|b|^6\cdot|c|^6\cdot|d|^6\cdot 1^6\cdot 1^6}\\ =\ &|abcd|\geqslant abcd.\end{aligned}$$

因为算术—几何平均值不等式当

$$|a|=|b|=|c|=|d|=1$$

时等号成立. 而最后的不等式,当偶数个变量为负时等号成立. 因此,等号成立的情形是

$$\begin{aligned}(a, b, c, d)=\ &(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1),\\ &(-1, 1, 1, -1), (1, -1, -1, 1), (-1, 1, -1, 1),\\ &(-1, -1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)\end{aligned}$$

之一;

(2) 注意到,当 k 是奇数时,因为绝对值足够大的负值 a, b, c, d 的选取得出了绝对值足够大的负值 $a^k+b^k+c^k+d^k-kabcd$. 因此 M_k 这样的数不存在.

当 $k=2$ 时,取 $a=b=c=d=r$,得到 $a^2+b^2+c^2+d^2-2abcd=4r^2-2r^4$.

对足够大的正数 r 的选取也得出绝对值任意大的负值. 因此,M_k 这样的数不存在.

当 k 是偶数，且 $k\geqslant 4$ 时，取 $a=b=c=d=1$，得 $a^k+b^k+c^k+d^k-kabcd=4-k$.

同(1)得

$$a^k+b^k+c^k+d^k-kabcd\geqslant 4-k,$$

即 $\dfrac{a^k+b^k+c^k+d^k+(k-4)\cdot 1^k}{k}\geqslant abcd$.

等号成立的条件与(1)相同.

故此时 M_k 的最大值为 $4-k$.

例 8 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，满足 $a+b+c=abc$. 求 $a^7(bc-1)+b^7(ac-1)+c^7(ab-1)$的最小值.

解 因为 $a, b, c>0$，且 $a+b+c=abc$，所以 $c(ab-1)=a+b$. 同理可得 $b(ac-1)=a+c$，$a(bc-1)=b+c$.

由平均值不等式，得

$$abc=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

推出 $abc\geqslant 3\sqrt{3}$，等号成立当且仅当 $a=b=c=\sqrt{3}$，所以

$$\begin{aligned}&a^7(bc-1)+b^7(ac-1)+c^7(ab-1)\\=&a^6(b+c)+b^6(a+c)+c^6(a+b)\\\geqslant&6\sqrt[6]{a^6ba^6cb^6ab^6cc^6ac^6b}=6\sqrt[6]{a^{14}b^{14}c^{14}}=6(abc)^{\frac{7}{3}}\\\geqslant&6(\sqrt{3})^7=6\times 27\sqrt{3}=162\sqrt{3},\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 $a=b=c=\sqrt{3}$，故所求的最小值为 $162\sqrt{3}$.

例 9 对满足 $abc=1$ 的正实数 a、b、c，求

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$$

的最大值.

解 由于表达式关于 a、b、c 是对称的，当 $a=b=c=1$ 时，得

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=1.$$

下面我们证明最大值为 1，即证明对任意满足 $abc=1$ 的实数 a、b、c，有

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1.$$

首先，我们将非齐次的式子转换为齐次式，即对正实数 x、y、z，令 $a=\dfrac{x}{y}$，$b=\dfrac{y}{z}$，$c=\dfrac{z}{x}$（例如 $x=1$，$y=\dfrac{1}{a}$，$z=\dfrac{1}{ab}$），则上式等价于证明

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz.$$

令 $u=x-y+z$，$v=y-z+x$，$w=z-x+y$，由于 u，v，w 的任意两个之和为正，所以它们中最多有一个为负，所以不妨假设 $u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}\sqrt{uv}&=\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)}\\&\leqslant\frac{1}{2}(x-y+z)(y-z+x)=x.\end{aligned}$$

同理，$\sqrt{vw}\leqslant y$，$\sqrt{wu}\leqslant z$，故 $uvw\leqslant xyz$.

例 10　设 a、b、c 为正实数，满足

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc}\geqslant k(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}),$$

求 k 的最大值.

解　由于当 $a=b=c$ 时，由 $6\geqslant 3k$，得 $k\leqslant 2$. 下面证明

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc}\geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

令 $f(a,b,c)=a+b+c+3\sqrt[3]{abc}-2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$.

不妨假设 $a\leqslant b\leqslant c$，作如下调整，

$$a=a',\ b=b'=c'=\sqrt{bc}=A,$$

则
$$\begin{aligned}f(a',b',c')&=(a+2A+3\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot A^{\frac{2}{3}})-2[A+(2aA)^{\frac{1}{2}}]\\&=a+3\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot A^{\frac{2}{3}}-4(aA)^{\frac{1}{2}}\geqslant 0.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=0$ 或 $a=b=c$.

再证明 $f(a,b,c)\geqslant f(a',b',c')$. 因为

$$f(a,b,c)-f(a',b',c')=b+c-2a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}-2A^{\frac{1}{2}})-2A.$$

由于
$$a\leqslant A,\ b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\geqslant 2A^{\frac{1}{2}},$$

所以
$$\begin{aligned}&f(a,b,c)-f(a',b',c')\\&\geqslant b+c-2\sqrt{A}(\sqrt{b}+\sqrt{c}-2\sqrt{A})-2A\\&=b+c-2(\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{A}+2A\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{A})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{A})^2\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而 $$f(a, b, c) \geqslant 0,$$

故 k 的最大值为 2.

注 此解答由第 48 届 IMO 金牌选手付雷给出.

例 11 对 $a, b, c \in \mathbf{R}^{+}$，求

$$\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}(a+b+c)$$

的最小值.

解 由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a+b+4c)^2 &= (a+b)^2+[(a+2c)+(b+2c)]^2 \\ &\geqslant (2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2 \\ &= 4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\cdot(a+b+c) \\ \geqslant &\frac{4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}}{abc}\cdot(a+b+c) \\ = &\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{b}+\frac{8}{a}+\frac{16}{\sqrt{ab}}\right)(a+b+c) \\ = &8\left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c\right) \\ \geqslant &8\left(5\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}}\right)\left(5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}}\right)=100.\end{aligned}$$

当 $a=b=2c>0$ 时取等号. 故所求最小值为 100.

2.3 平均值不等式在几何不等式中的应用

对于几何中出现的不等式证明，常用的方法有：几何方法、代数方法和三角方法，当然，我们不能将它们截然地分开，常常是要综合地运用各种知识. 如果采用代数方法证明几何命题，那么，灵活运用平均值不等式和柯西不等式，对解决问题将有极大的帮助.

例 1 对于任意一个 $\triangle ABC$，记其面积为 S，周长为 l，P、Q、R 依次为 $\triangle ABC$ 内切圆在边 BC、CA、AB 上的切点. 证明：

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3+\left(\frac{BC}{QR}\right)^3+\left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{l^2}{S}.$$

证明　记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$QR=p$，$RP=q$，$PQ=r$. 设 $AR=x$，$BP=y$，$CQ=z$. 由 $x+y=c$，$y+z=a$，$z+x=b$，得

$$x=t-a,\ y=t-b,\ z=t-c\left(t=\frac{a+b+c}{2}\right).$$

在△ABC、△ARQ 中，由余弦定理分别得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2+2bc(1-\cos A),$$

$$p^2=2x^2(1-\cos A)=2(t-a)^2(1-\cos A).$$

两式消去 $1-\cos A$ 有

$$\begin{aligned}p^2&=(t-a)^2\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}\\&=\frac{4(t-a)(t-b)(t-c)}{abc}a(t-a).\end{aligned}\tag{22}$$

注意到

$$4(t-a)(t-b)=(b+c-a)(a-b+c)=c^2-(b-a)^2\leqslant c^2.$$

同理，$4(t-b)(t-c)\leqslant a^2$，$4(t-c)(t-a)\leqslant b^2$. 则

$$8(t-a)(t-b)(t-c)\leqslant abc.$$

代入式(22)得

$$p^2\leqslant\frac{a(t-a)}{2}\text{ 或 }\left(\frac{a}{p}\right)^3\geqslant2\sqrt{2}\left(\frac{a}{t-a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

同理，$\left(\frac{b}{q}\right)^3\geqslant2\sqrt{2}\left(\frac{b}{t-b}\right)^{\frac{3}{2}}$，$\left(\frac{c}{r}\right)^3\geqslant2\sqrt{2}\left(\frac{c}{t-c}\right)^{\frac{3}{2}}$.

记 M 为所证不等式左边. 则

$$\begin{aligned}M&\geqslant2\sqrt{2}\left[\left(\frac{a}{t-a}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{t-b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{c}{t-c}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\&\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{t-a}+\frac{b}{t-b}+\frac{c}{t-c}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{23}$$

又 $a\geqslant b\geqslant c\Leftrightarrow\frac{1}{t-a}\geqslant\frac{1}{t-b}\geqslant\frac{1}{t-c}$.

由切比雪夫不等式及均值不等式得

$$\frac{a}{t-a}+\frac{b}{t-b}+\frac{c}{t-c}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{t-a}+\frac{1}{t-b}+\frac{1}{t-c}\right)\\
&\geqslant \frac{a+b+c}{[(t-a)(t-b)(t-c)]^{\frac{1}{3}}}\\
&=\frac{(a+b+c)t^{\frac{1}{3}}}{[t(t-a)(t-b)(t-c)]^{\frac{1}{3}}}\\
&=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{l^2}{S}\right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

由式(23)、(24)得

$$M\geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{l^2}{S}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{l^2}{S}.$$

例 2　设 a、b、c 分别为一个三角形的三边长. 令

$$A=\sum\frac{a^2+bc}{b+c},$$

$$B=\sum\frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}},$$

其中，“$\sum$”表示轮换对称和.

证明：$AB\geqslant 9$.

证明　设 $a=y+z$，$b=x+z$，$c=x+y$ (x、y、z 为正数). 则

$$B=\sum\frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

$$A=\sum\frac{x^2+y^2+z^2+xy+zx+3yz}{2x+y+z},$$

$$
\begin{aligned}
AB&=\left(\sum\frac{1}{2\sqrt{yz}}\right)\sum\frac{x^2+y^2+z^2+xy+3yz+zx}{2x+y+z}\\
&\geqslant\left[\sum\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2+xy+3yz+zx}{2x+y+z}}\right]^2.
\end{aligned}
$$

下面证明上式中每个根号内的数都大于或等于 1. 只需证第一个根号内的数大于或等于 1，即

$$\frac{1}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2+xy+zx+3yz}{2x+y+z}\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2+xy+3yz+zx)^2 \geqslant 4yz(2x+y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2+2x^3y+2xy^3+2x^3z+2xz^3+2y^3z+2yz^3 \geqslant 8xy^2z+8x^2yz+8xyz^2. \tag{25}$$

由幂平均不等式得

$$x^4+y^4+z^4 \geqslant \frac{1}{27}(x+y+z)^4 \geqslant xyz(x+y+z)=xy^2z+x^2yz+xyz^2.$$

由均值不等式得

$$3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2 \geqslant 3(xy^2z+x^2yz+xyz^2),$$
$$\begin{aligned}&x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3-2xyz(x+y+z)\\ =&(x^3y+yz^3-xyz^2-x^2yz)+(y^3z+x^3z-x^2yz-xy^2z)\\ &+(z^3x+xy^3-xy^2z-xyz^2)\\ =&y(x+z)(x-z)^2+z(x+y)(x-y)^2+x(y+z)(y-z)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

相加即得式(25)成立.

例 3 $\triangle ABC$ 的三边长 a，b，c 满足 $a+b+c=1$. 求证：

$$5(a^2+b^2+c^2)+18abc \geqslant \frac{7}{3}.$$

证明 因为
$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=1-2(ab+bc+ca),\end{aligned}$$

所以，欲证的不等式等价于

$$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc \leqslant \frac{4}{27}.$$

构造函数

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c),$$

一方面，

$$f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc,$$

所以，

$$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc.$$

另一方面，因为 a, b, c 是三角形三边长，所以 $0<a, b, c<\frac{1}{2}$，且 $\frac{5}{9}-a, \frac{5}{9}-b, \frac{5}{9}-c$ 均为正数，利用平均值不等式，有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{5}{9}\right)&=\left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right)\\&\leqslant\frac{1}{27}\left[\left(\frac{5}{9}-a\right)+\left(\frac{5}{9}-b\right)+\left(\frac{5}{9}-c\right)\right]^3\\&=\frac{8}{729}.\end{aligned}$$

所以，

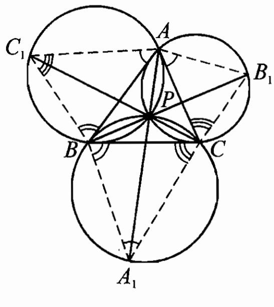
$$\begin{aligned}&\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\\\leqslant&\frac{8}{729}-\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{5}{9}\right)^2\\=&\frac{4}{27}.\end{aligned}$$

从而，欲证不等式成立.

例 4 设 P 是锐角 $\triangle ABC$ 内的任意一点，直线 AP、BP、CP 分别交 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的外接圆于另一点 A_1、B_1、C_1（不同于 P）. 求证：

$$\left(1+2\cdot\frac{PA}{PA_1}\right)\left(1+2\cdot\frac{PB}{PB_1}\right)\left(1+2\cdot\frac{PC}{PC_1}\right)\geqslant 8.$$

证明 如图，连结 A_1B、A_1C、B_1C、B_1A、C_1A、C_1B，并记 $\angle BA_1C=\angle CAB_1=\angle BAC_1=\alpha$，$\angle CB_1A=\angle ABC_1=\angle CBA_1=\beta$，$\angle AC_1B=\angle BCA_1=\angle ACB_1=\gamma$.



在四边形 PBA_1C 中，由 Ptolemy 定理得

$$PA_1\cdot BC=PB\cdot A_1C+PC\cdot A_1B,$$

$$PA_1=\frac{A_1C}{BC}\cdot PB+\frac{A_1B}{BC}\cdot PC,$$

再在 $\triangle A_1BC$ 中，由正弦定理得

$$PA_1=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot PB+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot PC, \tag{26}$$

同理可得

$$PB_1=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot PC+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot PA,\tag{27}$$

$$PC_1=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot PA+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot PB.\tag{28}$$

由(26)、(27)、(28)联立方程组解得

$$2\cdot PA=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot PB_1+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot PC_1-PA_1,$$

$$2\cdot PB=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot PC_1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot PA_1-PB_1,$$

$$2\cdot PC=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot PA_1+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot PB_1-PC_1.$$

于是

$$\begin{aligned}2\cdot PA+PA_1&=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot PB_1+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot PC_1\\&\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot PB_1\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot PC_1},\end{aligned}$$

同理

$$2\cdot PB+PB_1\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot PC_1\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot PA_1},$$

$$2\cdot PC+PC_1\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot PA_1\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot PB_1},$$

将以上三个不等式相乘，得

$$\begin{aligned}&(2\cdot PA+PA_1)(2\cdot PB+PB_1)(2\cdot PC+PC_1)\\&\geqslant 8\cdot PA_1\cdot PB_1\cdot PC_1,\end{aligned}$$

故

$$\left(1+2\cdot\frac{PA}{PA_1}\right)\left(1+2\cdot\frac{PB}{PB_1}\right)\left(1+2\cdot\frac{PC}{PC_1}\right)\geqslant 8.$$

例5 设 P 为$\triangle ABC$内一点，D，E，F 分别为 P 到 BC，CA，AB 各边的垂足. 试确定点 P，使 $PD\times PE\times PF$ 最大.

解 记$\triangle ABC$的三个内角为 A，B，C，其对边为 a，b，c. 记$\triangle ABC$的面积为 S(以下各题记号均同，不再注明).

设 $PD=x$，$PE=y$，$PF=z$. 连结 AP，BP，CP. 易知 S_1($\triangle PBC$面

积）$=\frac{1}{2}ax$，S_2（$\triangle PCA$ 面积）$=\frac{1}{2}by$，S_3（$\triangle PAB$ 面积）$=\frac{1}{2}cz$.

从而有 $ax+by+cz=2(S_1+S_2+S_3)=2S=$ 定值. 由平均值不等式，得

$$ax\cdot by\cdot cz\leqslant\left(\frac{ax+by+cz}{3}\right)^3=\left(\frac{2S}{3}\right)^3,$$

即
$$xyz\leqslant\frac{8S^3}{27abc}.$$

上式等号当且仅当 $ax=by=cz$ 时成立. 这就是说，$S_1=S_2=S_3=\frac{1}{3}S$ 使得 xyz 取最大. 这时 P 为$\triangle ABC$ 的重心.

例 6　设 a，b，c 为三角形的三条边的长度，δ 为面积. 求证：

$$\delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证明　由海伦公式，原不等式等价于

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2p}{3}\right)^2=\sqrt{3}\left(\frac{p}{3}\right)^2,$$

等价于
$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\frac{p^3}{27}.$$

由平均值不等式，得

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\frac{3p-a-b-c}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}.$$

此式当且仅当 $p-a=p-b=p-c$，即 $a=b=c$ 时等号成立.

例 7　设 T_a，T_b，T_c 为$\triangle ABC$ 的角平分线的延长线与外接圆相交所得的线段长. 求证：

$$abc\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}T_aT_bT_c.$$

证明　设 $|AE|=T_a$，D 为 AE 与 BC 的交点，则

$$BE^2=c^2+T_a^2-2cT_a\cos\frac{A}{2},\ CE^2=b^2+T_a^2-2bT_a\cos\frac{A}{2}.$$

因为 $BE=CE$，所以

$$T_a=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

再由平均值不等式，得 $T_a\geqslant\dfrac{\sqrt{bc}}{\cos\frac{A}{2}}$.

同理可得 $T_b\geqslant\dfrac{\sqrt{ac}}{\cos\frac{B}{2}}$，$T_c\geqslant\dfrac{\sqrt{ab}}{\cos\frac{C}{2}}$. 于是

$$T_aT_bT_c\geqslant\frac{abc}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

再由
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$$
得到命题成立.

例 8　设 P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上一点，点 P 到三边的距离分别为 PD、PE、PF. 求证：

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF).$$

证明　设 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，$PD=p$，$PE=q$，$PF=r$，其中 D、E、F 为点 P 在三边上的射影. 则 C、D、P、E 四点共圆，得

$$\begin{aligned}DE&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos C}\\&=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}\\&\geqslant p\sin B+q\sin A,\end{aligned}$$

从而 $z=\dfrac{DE}{\sin C}\geqslant\dfrac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}$.

同理可得

$$x\geqslant\frac{r\sin B+q\sin C}{\sin A},\ y\geqslant\frac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}.$$

于是

$$\begin{aligned}x+y+z&\geqslant\frac{r\sin B+q\sin C}{\sin A}+\frac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}+\frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}\\&\geqslant 2(p+q+r),\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 P 为 $\triangle ABC$ 的中心.

例 9 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB \parallel ED$，$BC \parallel FE$，$CD \parallel AF$. 又设 R_A、R_C、R_E 分别表示$\triangle FAB$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$ 的外接圆半径，p 表示六边形的周长，证明：

$$R_A + R_B + R_C \geqslant \frac{p}{2}.$$

证明 过点 A 作 BC 的垂线，记该垂线夹在平行线 EF、BC 之间线段的长度为 h，设 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的长度分别为 a、b、c、d、e、f. 则

$$BF \geqslant h = a\sin B + f\sin F.$$

由于 $$AB \parallel DE,\ BC \parallel EF,\ AF \parallel CD,$$

所以 $$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F.$$

$$2R_A = \frac{BF}{\sin A} \geqslant a\frac{\sin B}{\sin A} + f\frac{\sin F}{\sin A}.$$

同理可得 $$2R_C = \frac{BD}{\sin C} \geqslant b\frac{\sin B}{\sin C} + c\frac{\sin D}{\sin C},$$

$$2R_E = \frac{DF}{\sin E} \geqslant d\frac{\sin D}{\sin E} + e\frac{\sin F}{\sin E},$$

所以 $$\begin{aligned} &2(R_A + R_C + R_E) \\ \geqslant\ & a\frac{\sin B}{\sin A} + b\frac{\sin B}{\sin C} + c\frac{\sin D}{\sin C} + d\frac{\sin D}{\sin E} + e\frac{\sin F}{\sin E} + f\frac{\sin F}{\sin A}. \end{aligned}$$

分两种情况讨论：

(1) 当 $a = d$ 时，由题设

$$AB \parallel DE,\ BC \parallel EF,\ CD \parallel FA,$$

则 $$\begin{aligned} &2(R_A + R_C + R_E) \\ \geqslant\ & a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin D}{\sin E}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin F}{\sin E}\right) + c\left(\frac{\sin D}{\sin C} + \frac{\sin F}{\sin A}\right) \\ \geqslant\ & 2(a + b + c), \end{aligned}$$

所以 $$R_A + R_C + R_E \geqslant a + b + c = \frac{p}{2}.$$

(2) 当 $a \neq d$ 时，不妨设 $a > d$. 作

$$FA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AB,\ FE_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DE,$$

连 DE_1，连 BA_1 延长交 DE_1 于点 C_1，则

$$\angle E_1A_1C_1 = \pi - A,\ \angle A_1C_1E_1 = \pi - C,\ \angle C_1E_1A_1 = \pi - E = \pi - B.$$

且 $$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{C_1E_1}{A_1C_1},\ \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{A_1C_1}{A_1E_1},\ \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{A_1E_1}{C_1E_1}.$$

$$a = d + A_1E_1,\ e = b + E_1C_1,\ c = f + C_1A_1.$$

利用平均值不等式,得

$$2(R_A + R_B + R_C)$$
$$\geqslant 2(b + d + f) + \frac{A_1E_1 \cdot A_1C_1}{E_1C_1} + \frac{E_1C_1 \cdot A_1E_1}{A_1C_1} + \frac{A_1C_1 \cdot E_1C_1}{A_1E_1}.$$

再由排序不等式,得

$$\frac{A_1E_1 \cdot A_1C_1}{E_1C_1} + \frac{E_1C_1 \cdot A_1E_1}{A_1C_1} + \frac{A_1C_1 \cdot E_1C_1}{A_1E_1} \geqslant A_1E_1 + C_1A_1 + E_1C_1.$$

从而

$$2(R_A + R_B + R_C) \geqslant 2(b + d + f) + A_1E_1 + C_1A_1 + E_1C_1 = p.$$

综合(1)、(2)知命题成立.

2.4 平均值不等式的变形及应用

对于平均值不等式,有各种不同的变形和推广,由于这些问题可以包括在命题的证明和讨论中,这里就不展开讨论了.

对任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,由平均值不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_n}} = n^2.$$

从而 $$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

令 $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$,则称 H_n 为 n 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均值.

由于 $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$,令 $x_i = \dfrac{1}{a_i}$,则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

即 $H_n \leqslant G_n$，调和平均值不大于几何平均值.

对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2 \geqslant 0.$$

故得到

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

令 $Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，称 Q_n 为 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平方平均值.

所以，对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$A_n \leqslant Q_n$，即算术平均值不大于平方平均值.

于是，对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，得到四个平均值有如下的关系

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n,$$

且等式成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

例 1　设 a, b, c 是正实数，且满足 $a^2+b^2+c^2=3$. 证明：

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca} \geqslant 1.$$

证明　由算术平均值大于或等于几何平均值及算术平均值大于或等于调和平均值可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\\
\geqslant&\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}\\
\geqslant&3\cdot\frac{3}{(1+a^2+b^2)+(1+b^2+c^2)+(1+c^2+a^2)}\\
=&\frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)}=1.
\end{aligned}$$

例 2　已知正实数 a、b、c 满足

$$ab+bc+ca \leqslant 3abc.$$

证明：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3$$
$$\leqslant\sqrt{2}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}).$$

证明　由 $Q_2\geqslant A_2$ 得

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b}=2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(2+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)}$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}.$$

同理，
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{b+c}\geqslant\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}},$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{c+a}\geqslant\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}.$$

再由 $Q_3\geqslant H_3$ 得

$$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\right)^2}{3}}$$
$$\geqslant\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}},$$

所以
$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}$$
$$\geqslant 3\sqrt{\frac{3}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\right)^2}}$$
$$=3\sqrt{\frac{3abc}{ab+bc+ca}}\geqslant 3.$$

于是，原不等式成立.

例 3　设正实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$. 求证：

$$x^2yz+y^2xz+z^2xy\leqslant\frac{1}{3}.$$

证明　因为 $\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$xyz\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}},\ x+y+z\leqslant\sqrt{3},$$

故

$$x^2yz+y^2xz+z^2xy\leqslant\frac{1}{3}.$$

例 4　设 $a, b, c, d\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+adb}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

证明　首先两次应用 $G_2\leqslant A_2$，得

$$\begin{aligned}&\frac{abc+bcd+cda+adb}{4}\\=&\frac{1}{2}\left(ab\cdot\frac{c+d}{2}+cd\cdot\frac{a+b}{2}\right)\\\leqslant&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\cdot\frac{a+b}{2}\right]\\=&\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}\\\leqslant&\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^2\frac{a+b+c+d}{4}=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.\end{aligned}$$

即再由 $A_4\leqslant Q_4$，得

$$\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

故原不等式成立.

例 5　设 $x_i\geqslant 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\prod(x_i-1)}{\left(\sum(x_i-1)\right)^n}\leqslant\frac{\prod x_i}{\left(\sum x_i\right)^n}.$$

证明　原不等式等价于

$$\left(\frac{\prod(x_i-1)}{\prod x_i}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i},$$

这个不等式可以由下面的事实推出.

由平均值不等式,得

$$\left[\frac{\prod(x_i-1)}{\prod x_i}\right]^{\frac{1}{n}}=\left(\prod\frac{x_i-1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\frac{x_i-1}{x_i}=1-\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}.$$

以及

$$\frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i}=\frac{\sum x_i-n}{\sum x_i}=1-\frac{n}{\sum x_i},$$

$$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n}{\sum x_i}.$$

从而可知命题成立.

例 6 设 $x_i\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $i=1,2,\cdots,10$, 满足 $\sin^2x_1+\sin^2x_2+\cdots+\sin^2x_{10}=1$. 证明:

$$3(\sin x_1+\cdots+\sin x_{10})\leqslant\cos x_1+\cdots+\cos x_{10}.$$

证明 由于 $\sin^2x_1+\sin^2x_2+\cdots+\sin^2x_{10}=1$,

$$\cos x_i=\sqrt{\sum_{j\neq i}\sin^2x_j},$$

则对 $1\leqslant i\leqslant10$, 得

$$\cos x_i=\sqrt{\sum_{j\neq i}\sin^2x_j}\geqslant\frac{\sum\limits_{j\neq i}\sin x_j}{3}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{10}\cos x_i\geqslant\sum_{i=1}^{10}\sum_{j\neq i}\frac{\sin x_j}{3}=\sum_{i=1}^{10}9\cdot\frac{\sin x_i}{3}=3\sum_{i=1}^{10}\sin x_i.$$

故命题成立.

例 7 设 $a_i\in\mathbf{R}^+$, $i=1,2,\cdots,n$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, 求

$$M=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+\sum\limits_{j\neq i,\, j=1}^{n}a_j}$$

的最小值.

解　由 $M+n=\left(\frac{a_1}{2-a_1}+1\right)+\left(\frac{a_2}{2-a_2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{2-a_n}+1\right)$

$$=\frac{2}{2-a_1}+\frac{2}{2-a_2}+\cdots+\frac{2}{2-a_n}(\text{由 } H_n\leqslant A_n)$$

$$\geqslant\frac{n^2}{\frac{1}{2}(2-a_1)+\frac{1}{2}(2-a_2)+\cdots+\frac{1}{2}(2-a_n)}$$

$$=\frac{n^2}{\frac{1}{2}(2n-1)}=\frac{2n^2}{2n-1}.$$

所以 $M\geqslant\frac{n}{2n-1}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时，$M=\frac{n}{2n-1}$.

于是 M 的最小值为 $\frac{n}{2n-1}$.

例 8　已知 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，且满足 $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$，求证：

$$abc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

证明　令 $x=\frac{a^2}{1+a^2}$，$y=\frac{b^2}{1+b^2}$，$z=\frac{c^2}{1+c^2}$，则

$$0<x,\ y,\ z<1,\ x+y+z=1,$$

$$a^2=\frac{x}{1-x},\ b^2=\frac{y}{1-y},\ c^2=\frac{z}{1-z},\ a^2b^2c^2=\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

于是，原问题化为证明

$$\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\leqslant\frac{1}{8}.$$

由 $H_3\leqslant A_3$，并注意到 $x+y+z=1$，有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 9$，则

$$9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)\geqslant 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

由于 $G_3 \geqslant H_3$，得

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geqslant \frac{3}{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)},$$

所以 $$(xyz)^{-\frac{1}{3}} \leqslant \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right).$$

又由
$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1-z)-\frac{1}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}\\ =&\frac{1}{8}(xy+yz+zx-xyz)-\frac{1}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}\\ =&\frac{1}{8}xyz\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{8}{3}(xyz)^{-\frac{1}{3}}\right]\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $$(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant \frac{8}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

由 $A_3 \geqslant G_3$，得

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{1}{3}.$$

于是

$$\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} \leqslant \frac{xyz}{\frac{8}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{8}(xyz)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{8}.$$

进一步，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数，实数 $r>0$，则称

$$M_r=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 r 次幂平均值.

对于 M_r，我们有幂平均不等式，即：

对 $\alpha>\beta$，则 $M_\alpha \geqslant M_\beta$，即

$$\left(\frac{\sum a_i^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{\sum a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

等号成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

特别当 $\alpha>1, \beta=1$ 时，

$$\frac{\sum a_i^{\alpha}}{n} \geqslant \left[\frac{\sum a_i}{n}\right]^{\alpha}.$$

例 9　给定正整数 k，当 $x^k+y^k+z^k=1$ 时，求 $x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}$ 的最小值.

解　由假设和幂平均不等式，得

$$\left(\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{3}\right)^{\frac{1}{k+1}} \geqslant \left(\frac{x^k+y^k+z^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{k}},$$

所以
$$x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1} \geqslant 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k+1}{k}} = 3^{-\frac{1}{k}}.$$

当 $x=y=z=3^{-\frac{1}{k}}$ 时等号成立，所以最小值为 $3^{-\frac{1}{k}}$.

例 10　设三角形三边长分别为 a、b、c，面积为 S，则

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 2^n \cdot 3^{\frac{4-n}{4}} S^{\frac{n}{2}},\ n \in \mathbf{N}.$$

证明　当 $n=1$ 时，$a+b+c \geqslant 2\sqrt{3\sqrt{3}S}$ 是常见的几何不等式，即 $n=1$ 时成立.

假设当 $n=k$ 时命题成立，即有不等式

$$a^k+b^k+c^k \geqslant 2^k \cdot 3^{\frac{4-k}{4}} S^{\frac{k}{2}},$$

则当 $n=k+1$ 时，由幂平均不等式，

$$\left(\frac{a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+\cdots+a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{a_1^{\beta}+a_2^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

其中 $a_i \in \mathbf{R}^+$，$i=1, 2, \cdots, n$，$\alpha \geqslant \beta$.

得

$$\left(\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}}{3}\right)^{\frac{1}{k+1}} \geqslant \left(\frac{a^k+b^k+c^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\frac{2^k}{3} \cdot 3^{\frac{4-k}{4}} \cdot S^{\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

从而

$$a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1} \geqslant 3\left(\frac{2^k}{3} \cdot 3^{\frac{4-k}{4}} \cdot S^{\frac{k}{2}}\right)^{\frac{k+1}{k}} = 2^{k+1} \cdot 3^{\frac{4-(k+1)}{4}} S^{\frac{k+1}{2}}.$$

即当 $n=k+1$ 时，原不等式成立.

由于一般的幂平均不等式在竞赛中很少出现，这里就不展开讨论了.

等式或不等式的变形，是证明数学问题和运算中常使用的方法和技巧. 前面我们介绍了平均值不等式的证明和应用，但对于某些问题，通过变形处

理可能比运用基本定理来证明更简单，下面我们以一个例子来说明，希望读者能有所体会和了解.

例 11 设 a, b, c 是正实数，证明：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

证明一 通过变形直接证明. 不妨假设 $a+b+c=1$. 则原不等式等价于

$$\frac{(1+a)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(1+b)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(1+c)^2}{2c^2+(1-c)^2}\leqslant 8,$$

即
$$\frac{a^2+2a+1}{3a^2-2a+1}+\frac{b^2+2b+1}{3b^2-2b+1}+\frac{c^2+2c+1}{3c^2-2c+1}\leqslant 8.$$

两边同乘以 3，得

$$\frac{3a^2+6a+3}{3a^2-2a+1}+\frac{3b^2+6b+3}{3b^2-2b+1}+\frac{3c^2+6c+3}{3c^2-2c+1}\leqslant 24.$$

消除分子的二次项，得

$$\frac{8a+2}{3a^2-2a+1}+\frac{8b+2}{3b^2-2b+1}+\frac{8c+2}{3c^2-2c+1}\leqslant 21.$$

因为 $3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\geqslant\frac{2}{3}$，所以

$$\begin{aligned}&\frac{8a+2}{3a^2-2a+1}+\frac{8b+2}{3b^2-2b+1}+\frac{8c+2}{3c^2-2c+1}\\ \leqslant&\frac{8a+2}{\frac{2}{3}}+\frac{8b+2}{\frac{2}{3}}+\frac{8c+2}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}(8+6)\leqslant 21.\end{aligned}$$

故命题成立.

证明二 对一个 n 个变量的函数 f，定义它的对称和

$$\sum_{sym}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{\sigma}f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}).$$

这里 σ 是 1, 2, …, n 的所有的排列，sym 表示对称求和. 例如，将 x_1, x_2, x_3 记为 x, y, z，当 $n=3$ 时，有

$$\sum_{sym}x^3=2x^3+2y^3+2z^3,$$

$$\sum_{sym}x^2y=x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y$$

$$\sum_{sym} xyz = 6xyz.$$

则

$$8-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}=\frac{A}{B},$$

其中 $B>0$，

$$A=\sum_{sym}(4a^6+4a^5b+a^4b^2+5a^4bc+5a^3b^3-26a^3b^2c+7a^2b^2c^2).$$

下面证明 $A>0$.

由加权平均值不等式，得

$$4a^6+b^6+c^6\geqslant 6a^4bc,\ 3a^5b+3a^5c+b^5a+c^5a\geqslant 8a^4bc,$$

得
$$\sum_{sym}6a^6\geqslant\sum_{sym}6a^4bc,\ \sum_{sym}8a^5b\geqslant\sum_{sym}8a^4bc.$$

于是
$$\sum_{sym}(4a^6+4a^5b+5a^4bc)\geqslant\sum_{sym}13a^4bc.$$

再由平均值不等式，得

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\geqslant 3a^2b^2c^2,\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geqslant 3a^2b^2c^2,$$

从而
$$\sum_{sym}(a^4b^2+5a^3b^3)\geqslant\sum_{sym}6a^2b^2c^2,$$

或者
$$\sum_{sym}(a^4b^2+5a^3b^3+7a^2b^2c^2)\geqslant\sum_{sym}13a^2b^2c^2.$$

回顾 Schur 不等式，

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3+3abc-(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)\\&=a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geqslant 0\end{aligned}$$

或者
$$\sum_{sym}(a^3-2a^2b+abc)\geqslant 0,$$

于是
$$\begin{aligned}\sum_{sym}(13a^4bc-26a^3b^2c+13a^2b^2c^2)&\geqslant 13abc\sum_{sym}(a^3-2a^2b+abc)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

综上可得 $A>0$. 证毕.

注 此题还有多种不同的证明方法，感兴趣的读者不妨自己试试.

2.5 带参数的平均值不等式

引进适当的参数，是解决不等式问题的重要技巧.

一般地，当 $a_i>0$，$\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

例 1 设 a, b, c, d 是不全为 0 的实数，求

$$f=\frac{ab+2bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

的最大值.

解 如果假设 f 的最大值为 M，则

$$ab+2bc+cd\leqslant M(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

因此，要建立一个上面形式的不等式，并找一组 a, b, c, d 的值，使不等式等号成立.

设 α, β, $\gamma>0$，则

$$\frac{\alpha}{2}a^2+\frac{b^2}{2\alpha}\geqslant ab,\ \beta b^2+\frac{c^2}{\beta}\geqslant 2bc,\ \frac{\gamma}{2}c^2+\frac{d^2}{2\gamma}\geqslant cd.$$

将上面三式相加，得

$$\frac{\alpha}{2}a^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)b^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}\right)c^2+\frac{d^2}{2\gamma}$$
$$\geqslant ab+2bc+cd.$$

令 $\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\gamma}$，得 $\gamma=\frac{1}{\alpha}$，$\beta=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$，及 $\alpha^4-6\alpha^2+1=0$，解方程得 $\alpha=\sqrt{2}+1$（另外三个解不合要求），于是

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant ab+2bc+cd,$$

即

$$f\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

又当 $a=d=1$，$b=c=\sqrt{2}+1$ 时，不等式等号成立，故 f 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

例 2 求出最大的正数 λ，使得对于满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 的任何实数 x, y, z 成立不等式：

$$|\lambda xy+yz|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

解 由于

$$1=x^2+y^2+z^2=x^2+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}y^2+\frac{1}{1+\lambda^2}y^2+z^2$$
$$\geqslant\frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}}(\lambda|xy|+|yz|)\geqslant\frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}}(|\lambda xy+yz|),$$

且当 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{\sqrt{2}\lambda}{2\sqrt{\lambda^2+1}}$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda^2+1}}$ 时，上述两个等号可同时取到. 因此$\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2}$是$|\lambda xy+yz|$的最大值. 令 $\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $|\lambda|\leqslant 2$.

故 λ 的最大值为 2.

例 3 已知 $\alpha,\beta,\gamma>0$，且

$$\frac{1}{\alpha^2+1}+\frac{1}{\beta^2+1}+\frac{1}{\gamma^2+1}=1,$$

求函数 $u=\frac{\alpha xy+\beta yz+\gamma zx}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

解 对于任意正实数 a,b,c，有

$$x^2+y^2+z^2$$
$$=\frac{b}{b+c}x^2+\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+c}y^2+\frac{c}{a+c}y^2+\frac{a}{a+b}z^2+\frac{b}{a+b}z^2$$
$$=\left(\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{a+c}y^2\right)+\left(\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{b+a}z^2\right)+\left(\frac{a}{a+b}z^2+\frac{c}{c+b}x^2\right)$$
$$\geqslant 2\left(\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}xy+\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}yz+\sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}zx\right)$$
$$=2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right)$$

当且仅当
$$\begin{cases}\sqrt{\frac{b}{b+c}}x=\sqrt{\frac{a}{a+c}}y,\\ \sqrt{\frac{c}{c+a}}y=\sqrt{\frac{b}{b+a}}z,\\ \sqrt{\frac{a}{a+b}}z=\sqrt{\frac{c}{c+b}}x,\end{cases}$$

亦即 $\dfrac{x}{\sqrt{ab+ac}}=\dfrac{y}{\sqrt{ba+bc}}=\dfrac{z}{\sqrt{ca+cb}}$ 时，上式取等号.

令 $\alpha=\sqrt{\dfrac{a+b}{c}}$，$\beta=\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}$，$\gamma=\sqrt{\dfrac{c+a}{b}}$，则

$$\frac{1}{\alpha^2+1}+\frac{1}{\beta^2+1}+\frac{1}{\gamma^2+1}=1,$$

且

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\alpha\beta\gamma}(\alpha xy+\beta yz+\gamma zx),$$

从而

$$\frac{\alpha xy+\beta yz+\gamma zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\alpha\beta\gamma}{2},$$

所以，u 的最大值为$\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2}$.

注 (1) 如果 $\dfrac{1}{\alpha^2+k}+\dfrac{1}{\beta^2+k}+\dfrac{1}{\gamma^2+k}=\dfrac{1}{k}$ $(\alpha,\beta,\gamma,k>0)$，那么 $u=\dfrac{\alpha xy+\beta yz+\gamma zx}{x^2+y^2+z^2}$ 有最大值$\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2k}$.

这是因为

$$\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{k}}\right)^2+1}+\frac{1}{\left[\frac{\beta}{\sqrt{k}}\right]^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\sqrt{k}}\right)^2+1}=1,$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}xy+\frac{\beta}{\sqrt{k}}yz+\frac{\gamma}{\sqrt{k}}zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{k}}}{2},$$

化简整理后

$$\frac{\alpha xy+\beta yz+\gamma zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\alpha\beta\gamma}{2k}.$$

(2) 若 $\dfrac{k_1k_2}{\alpha^2+k_1k_2k}+\dfrac{k_2k_3}{\beta^2+k_2k_3k}+\dfrac{k_1k_3}{\gamma^2+k_1k_3k}=\dfrac{1}{k}$ $(\alpha,\beta,\gamma,k_1,k_2,k_3,k>0)$，则函数 $\dfrac{\alpha xy+\beta yz+\gamma zx}{x^2+y^2+z^2}$ 有最大值$\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2k_1k_2k_3k}$.

事实上，只须令 $x'=\sqrt{k_1}x$，$y'=\sqrt{k_2}y$，$z'=\sqrt{k_3}z$，$\alpha'=\dfrac{\alpha}{\sqrt{k_1k_2}}$，$\beta'=\dfrac{\beta}{\sqrt{k_2k_3}}$，$\gamma'=\dfrac{\gamma}{\sqrt{k_1k_3}}$ 即可化归为(1)的情形.

例 4　设 a 为实数，求函数 $f(x)=|\sin x(a+\cos x)|$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最大值.

解　设 α 为参数，使得

$$
\begin{aligned}
f^2(x)&=\frac{1}{\alpha^2}\sin^2 x(a\alpha+\alpha\cos x)^2\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\sin^2 x(\alpha^2+\cos^2 x)(a^2+\alpha^2)\\
&\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\sin^2 x+\alpha^2+\cos^2 x}{2}\right)^2(a^2+\alpha^2)=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2(a^2+\alpha^2),
\end{aligned}
$$

当且仅当 $\alpha^2=a\cos x$，$\sin^2 x=\alpha^2+\cos^2 x$ 时等号成立.

消除 x，得 $2\alpha^4+a^2\alpha^2-a^2=0$.

解方程，得 $\alpha^2=\frac{1}{4}(\sqrt{a^4+8a^2}-a^2)$，从而 $\cos x=\frac{1}{4}(\sqrt{a^2+8}-a)$.

所以当 $x=2k\pi\pm\arccos\left[\frac{1}{4}(\sqrt{a^2+8}-a)\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，

$$
f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.
$$

例 5　设 $x,\ y,\ z\in\mathbf{R}^+$，且 $x^4+y^4+z^4=1$，求

$$
f(x,\ y,\ z)=\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}
$$

的最小值.

解　将原式变形为

$$
f(x,\ y,\ z)=\frac{x^4}{x(1-x^8)}+\frac{y^4}{y(1-y^8)}+\frac{z^4}{z(1-z^8)}.
$$

对于 $w\in(0,\ 1)$，令 $\phi(w)=w(1-w^8)$，先求 $\phi(w)$ 的最大值.

选一参数 a，并利用 $G_9\leqslant A_9$，得

$$
\begin{aligned}
a(\phi(w))^8&=aw^8(1-w^8)^8\\
&\leqslant\left[\frac{1}{9}(aw^8+8(1-w^8))\right]^9\\
&=\left[\frac{1}{9}(8+(a-8)w^8)\right]^9.
\end{aligned}
$$

取 $a=8$，得

$$
8(\phi(w))^8\leqslant\left(\frac{8}{9}\right)^9.
$$

由于 $\phi(w)>0$，从而

$$\phi(w)\leqslant\frac{8}{\sqrt[4]{3^9}},$$

于是

$$f(x,\ y,\ z)\geqslant\frac{x^4+y^4+z^4}{8}\cdot\sqrt[4]{3^9}=\frac{9}{8}\sqrt[4]{3},$$

当 $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 时，等号成立.

故 $f(x,\ y,\ z)$的最小值为$\dfrac{9}{8}\sqrt[4]{3}$.

注　这里选择 $a=8$，是为了消除变量 w^8，使得右边为常数.

例 6　求最小的正整数 k，使得对满足 $0\leqslant a\leqslant 1$ 的所有 a 和所有正整数 n，都有不等式

$$a^k(1-a)^n\leqslant\frac{1}{(n+1)^3}.$$

解　先设法消除参数 a，然后求 k 的最小值.

由平均值不等式，得

$$\sqrt[n+k]{a^k\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]^n}\leqslant\frac{ka+n\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]}{k+n}=\frac{k}{k+n},$$

所以
$$a^k(1-a)^n\leqslant\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}},$$

当且仅当 $a=\dfrac{k(1-a)}{n}$，即 $a=\dfrac{k}{n+k}$ 时，等号成立.

于是我们要求出最小的正整数 k，使得对任何正整数 n 都有

$$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(1+n)^3}.$$

当 $k=1$ 时，取 $n=1$，上式为 $\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{1}{2^3}$，矛盾.

当 $k=2$ 时，取 $n=1$，则 $\dfrac{4}{27}<\dfrac{1}{8}$，亦矛盾.

当 $k=3$ 时，取 $n=3$，则 $\dfrac{1}{64}<\dfrac{1}{64}$，矛盾.

因此 $k\geqslant 4$. 下面证明 $k=4$ 时命题成立，即

$$4^4 n^n (n+1)^3 < (n+4)^{n+4}.$$

当 $n=1, 2, 3$ 时，容易证明成立.

当 $n \geqslant 4$ 时，再由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}\sqrt[n+4]{4^4 n^n (n+1)^3} &= \sqrt[n+4]{16(2n)(2n)(2n)(2n)n^{n-4}(n+1)^3} \\ &\leqslant \frac{16+8n+n(n-4)+3(n+1)}{n+4} \\ &= \frac{n^2+7n+19}{n+4} < \frac{n^2+8n+16}{n+4} = n+4,\end{aligned}$$

故 k 的最小值为 4.

注 在第一次利用平均值不等式时，引进参数 $\alpha = \frac{k}{n}$，消除 a，具有很强的技巧性.

习 题 2

1 已知 $0<a<1$，$0<b<1$，且 $ab=\frac{1}{36}$. 求 $u=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}$ 的最小值.

2 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=3$. 证明：

$$\sum \frac{1}{a\sqrt{2(a^2+bc)}} \geqslant \sum \frac{1}{a+bc},$$

其中，"$\sum$"表示轮换对称和.

3 设 $a_i \in \mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n, n \geqslant 2)$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} > \frac{n}{4}.$$

4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$ 是正实数，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$. 证明：

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n [1-(a_1+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

5 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$\left[\prod_{i=1}^n (a_i+b_i)\right]^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

其中 $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

6 设 x，$y\in\mathbf{R}^{+}$，$x\neq y$. 令

$$Q=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ A=\frac{x+y}{2},\ G=\sqrt{xy},\ H=\frac{2xy}{x+y}.$$

证明：$G-H<Q-A<A-G$.

7 设 a_1，a_2，…，a_{n+1} 为正等差数列(公差 $d\geqslant 0$). 求证：

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}-1\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{a_i}\leqslant\frac{d}{d_1}+(n-1)\left(1-\sqrt[n-1]{\frac{a_1}{a_n}}\right).$$

8 设 x_1，x_2，…，x_n 为正有理数，且各不相同. 求证：

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}>x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}.$$

9 已知 $5n$ 个实数 r_i，s_i，t_i，u_i，$v_i>1\ (1\leqslant i\leqslant n)$，记

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i,\ S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i,\ T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,\ U=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i,\ V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i.$$

求证：$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n$.

10 求证：$\left(1-\dfrac{1}{365}\right)\left(1-\dfrac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\dfrac{25}{365}\right)<\dfrac{1}{2}$.

11 设 a，$d\geqslant 0$，b，$c>0$ 且 $b+c\geqslant a+d$. 求 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值.

12 对任意正数 a_1，a_2，…，a_n，$n\geqslant 2$，求 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}$ 的最小值，其中 $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i$.

13 求乘积 $x^2y^2z^2u$ 在条件 x，y，z，$u\geqslant 0$ 与 $2x+xy+z+yzu=1$ 下的最大值.

14 设 a_1，a_2，$a_3\in\mathbf{R}^{+}$，求

$$\frac{a_1a_2}{(a_2+a_3)(a_3+a_1)}+\frac{a_2a_3}{(a_3+a_1)(a_1+a_2)}+\frac{a_3a_1}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)}$$

的最小值.

15 设正实数 a_1，a_2，…，$a_n(n\geqslant 2)$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}$$

的最小值.

16 设 $a>0$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, a]$ $(n \geqslant 2)$ 且满足

$$x_1x_2\cdots x_n=(a-x_1)^2(a-x_2)^2\cdots(a-x_n)^2.$$

求 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值.

17 设 $n \geqslant 2$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}=1$，对每个给定的正整数 k，$1 \leqslant k \leqslant n$，求 $|x_k|$ 的最大值.

18 证明：对任意边长为 a、b、c，且面积为 S 的三角形，有

$$\frac{ab+bc+ca}{4S} \geqslant \sqrt{3}.$$

19 证明：如果 AD、BE 与 CF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\triangle DEF$ 的面积不超过 $\triangle ABC$ 的面积的四分之一.

20 设 $\triangle ABC$ 的外接圆 K 的半径为 R，内角平分线分别交圆 K 于 A'，B'，C'，证明：$16Q^3 \geqslant 27R^4P$. 其中，Q、P 分别为 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积.

21 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，现将 AB、AC 分别延长 a 单位长度，将 BC、BA 分别延长 b 单位长度. CA，CB 分别延长 c 单位长度. 设这样得到六个端点所构成的凸多边形面积为 G，$\triangle ABC$ 的面积为 F. 证明：$\frac{G}{F} \geqslant 13$.

22 设等腰梯形的最大边长为 13，周长为 28.

(1) 设梯形的面积为 27，求它的边长；

(2) 这种梯形的面积能否等于 27.001?

23 在所有周长一定的三角形中，求内切圆半径最大的三角形.

24 在 $\triangle ABC$ 中，三条边长分别为 a、b、c，且 a、b、c 为有理数，求证：

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1.$$

25 设 $n \geqslant 2$，求乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 $x_i \geqslant \frac{1}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 与 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值和最小值.

26 求最小正数 λ，使得对于任一三角形的三边长 a、b、c，只要 $a \geqslant \frac{b+c}{3}$，就有 $ac+bc-c^2 \leqslant \lambda(a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc)$.

27 对每个正整数 n，求证：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{j^2}>n\left[(n+1)^{\frac{2}{n}}-1\right].$$

28 设 A、B、C 为三角形的三个内角，求证：

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

29 设 α、β、γ 为一个给定三角形的三个内角，求证：

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 12,$$

并求等号成立的条件.

30 设 $x, y, z\geqslant 0$，且满足 $yz+zx+xy=1$，求证：

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leqslant\frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

31 对 $a_i\in\mathbf{R}^+(i=1, 2, \cdots, n)$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant \mathrm{e}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，其中 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

32 设 $x_i\in\mathbf{R}$ $(i=1, 2, \cdots, n, n\geqslant 3)$. 令 $p=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$q=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$，求证：

(1) $\frac{n-1}{n}p^2-2q\geqslant 0$；

(2) $\left|x_i-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$，$i=1, 2, \cdots, n$.

33 求最大的实数 λ，使得当实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+c$ 的所有根都是非负实数时，只要 $x\geqslant 0$，就有 $f(x)\geqslant\lambda(x-a)^3$，并求等号成立的条件.

3 柯西不等式及其证明

前面我们介绍了平均值不等式及其在不等式证明中的一些应用，同时，也介绍了证明不等式的一些方法和技巧.但是，任何一个结论的使用，都有它的局限性，平均值不等式也是如此.在不等式的证明过程中，要求我们了解不等式的性质和证明不等式的常用方法，需要掌握一些基本的结论和重要的定理，并能灵活地应用有关知识.在这里，我们将再介绍另一个重要的基本不等式，即柯西不等式，与平均值不等式类似，它的表达形式简单，它的证明方法多样，在应用中具有较强的灵活性和技巧性.

3.1 柯西不等式及其证明

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意实数，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$（规定 $a_i=0$ 时，$b_i=0$）时等号成立.

柯西不等式的证明方法很多，这里我们选择其中一些简单和具有一定技巧的证明.

证法一

不妨假设 $A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$，$C_n=\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq 0$，令 $x_i=\frac{a_i}{\sqrt{A_n}}$，$y_i=\frac{b_i}{\sqrt{C_n}}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1.$$

则原不等式等价于

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leqslant 1,$$

即

$$2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

又等价于

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\geqslant 0.$$

这个不等式显然成立，且等号成立的充要条件为 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而原不等式成立，且等号成立的充要条件是

$$b_i=ka_i\left(k=\frac{\sqrt{C_n}}{\sqrt{A_n}}\right).$$

证法二（比值法）

按上述证明方法和记号，不妨假设 $A_n\neq 0$，$C_n\neq 0$，令 $x_i=\frac{|a_i|}{\sqrt{A_n}}$，$y_i=\frac{|b_i|}{\sqrt{C_n}}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1.$$

由于
$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right|}{\sqrt{A_n}\cdot\sqrt{C_n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)=1,$$

且等号成立当且仅当

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|,$$
$$\frac{a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}=\frac{b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

由第一个条件表明 $a_ib_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，即 a_i 与 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 同号. 第二个条件成立的充分必要条件是 $\frac{a_i^2}{b_i^2}=\frac{A_n}{C_n}$，即 $\frac{|a_i|}{|b_i|}$ 为常数.

由于 a_i 与 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 同号，从而命题成立.

证法三（比值法，类似证法二）

令 $A_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$B_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$C_n=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，则

$$\begin{aligned}\frac{A_nC_n}{B_n^2}+1&=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2C_n}{B_n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{C_n}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2C_n}{B_n^2}+\frac{b_i^2}{C_n}\right)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}2\cdot\frac{a_ib_i}{B_n}=2,\end{aligned}$$

所以
$$\frac{A_nC_n}{B_n^2}+1\geqslant 2,$$
即
$$B_n^2\leqslant A_nC_n.$$
等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{b_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为一个常数.

注 (1) 这两个证明方法比较简单，但是对于不等式的证明来讲，怎样入手是十分重要的. 比值法是证明不等式的一种常用、基本的方法.

(2) 上述两种方法也称为标准化方法，这个方法可以简化许多不等式的证明. 在前面我们也使用过. 如为了证明 $G_n\leqslant A_n$，令 $y_i=\frac{a_i}{G_n}$，则问题化为在条件 $y_1y_2\cdots y_n=1$ $(y_i>0)$ 下，证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\geqslant n$.

证法四(归纳法)

众所周知，归纳法是证明不等式的一种强有力和常用的方法，这里，利用归纳法证明一个更强的结论，即

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

(1) 当 $n=2$ 时，

$$\begin{aligned}(a_1b_1+a_2b_2)^2&=a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2\\&\leqslant a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2\\&=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2),\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立，那么对于 $n=k+1$，由归纳假设，

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2}\\=&\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2+b_{k+1}^2}\end{aligned}$$

$$\geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + | a_{k+1} b_{k+1} |$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{k} | a_i b_i | + | a_{k+1} b_{k+1} | = \sum_{i=1}^{k+1} | a_i b_i |.$$

所以对一切的 n 命题成立.

不难得到等号成立的充分必要条件.

证法五(归纳与综合法)

(1) 当 $n=2$ 时,有

$$\begin{aligned}(a_1b_1+a_2b_2)^2 &= a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2 \\ &\leqslant a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2 \\ &= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2),\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$,命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立.对于 $n=k+1$,令 $A_k=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$, $B_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$, $C_k=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2$,则由归纳假设

$$B_k^2 \leqslant A_kC_k.$$

由于我们要证明

$$\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1})^2 \\ \leqslant\, &(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2+b_{k+1}^2),\end{aligned}$$

等价于证明

$$\begin{aligned}&(B_k+a_{k+1}b_{k+1})^2 \leqslant (A_k+a_{k+1}^2)(C_k+b_{k+1}^2) \\ \Leftrightarrow\, &B_k^2+2B_ka_{k+1}b_{k+1} \leqslant A_kC_k+A_kb_{k+1}^2+C_ka_{k+1}^2 \\ \Leftrightarrow\, &A_kC_k-B_k^2+A_kb_{k+1}^2+C_ka_{k+1}^2-2B_ka_{k+1}b_{k+1} \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\, &A_kC_k-B_k^2+(\sqrt{A_k}b_{k+1}-\sqrt{C_k}a_{k+1})^2+2(\sqrt{A_k}\sqrt{C_k}-B_k)a_{k+1}b_{k+1} \geqslant 0.\end{aligned}$$

由归纳假设,上述不等式成立,且等式成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$,故对任意 $n\geqslant 1$,命题成立.

证法六(归纳法和平均值不等式)

(1) 当 $n=2$ 时,有

$$
\begin{aligned}
(a_1b_1+a_2b_2)^2 &= a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2\\
&\leqslant a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2\\
&=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2),
\end{aligned}
$$

即命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立. 对于 $n=k+1$，由于

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1})^2\\
&=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2\\
&\quad+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)a_{k+1}b_{k+1}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2.
\end{aligned}
$$

由平均值不等式，得

$$
\begin{aligned}
&2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)a_{k+1}b_{k+1}\\
&\leqslant a_{k+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)+b_{k+1}^2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2).
\end{aligned}
$$

由归纳假设，得

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1})^2\\
&=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)a_{k+1}b_{k+1}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2\\
&\leqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2+a_{k+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)\\
&\quad+b_{k+1}^2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2b_{k+1}^2\\
&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{k+1}^2).
\end{aligned}
$$

结合平均值不等式等号成立的条件，不难得到柯西不等式等号成立的充要条件，故命题成立.

注 (1) 在上述的证明中，我们反复利用了平均值不等式.

(2) 上述几种证明均用归纳法，由于证明过程中，对表达式的处理的不同，所以难易程度也就不同.

证法七(利用排序不等式) 由于

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2=a_1^2\sum_{i=1}^n b_i^2+a_2^2\sum_{i=1}^n b_i^2+\cdots+a_n^2\sum_{i=1}^n b_i^2,$$

则

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1,\cdots,a_1b_n,a_2b_1,\cdots,a_2b_n,\cdots,a_nb_1,\cdots,a_nb_n,\\
&a_1b_1,\cdots,a_1b_n,a_2b_1,\cdots,a_2b_n,\cdots,a_nb_1,\cdots,a_nb_n
\end{aligned}
$$

有两行相同，共 n^2 列，且是同序的.

另一方面，有乱序

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1,\cdots,a_1b_n,a_2b_1,\cdots,a_2b_n,\cdots,a_nb_1,\cdots,a_nb_n\\
&a_1b_1,\cdots,a_nb_1,a_1b_2,\cdots,a_nb_2,\cdots,a_1b_n,\cdots,a_nb_n
\end{aligned}
$$

两行，共 n^2 列，且两行为乱序，其乘积为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j)(a_jb_i)=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2.$$

由引理 1，得

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时等号成立.

证法八（利用参数平均值不等式）

由于对 $m\in\mathbf{R}^+$，得

$$a_ib_i\leqslant\frac{1}{2}\Big(m^2a_i^2+\frac{b_i^2}{m^2}\Big).$$

令 $m^2=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}$，则

$$|a_ib_i|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}a_i^2+\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}}b_i^2\right),$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|&\leqslant\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\Big)\\&=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注　利用含参数的基本不等式来证明不等式，具有较高的灵活性和技巧，为了让大家熟悉这种证明方法，后面，我们将专门介绍.

证法九(利用行列式性质)

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2\\
&=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\end{vmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_ib_i\\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_i^2\end{vmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_j^2 & a_ib_i\\ a_jb_j & b_i^2\end{vmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i\begin{vmatrix} a_j & a_i\\ b_j & b_i\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}
S&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\begin{vmatrix} a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i\\ b_j & b_i\end{vmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i\\ b_j & b_i\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
2S&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_jb_i-a_ib_j)\begin{vmatrix} a_j & a_i\\ b_j & b_i\end{vmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_jb_i-a_ib_j)^2\geqslant 0,
\end{aligned}$$

即 $S\geqslant 0$，故不等式成立.

证法十(利用拉格朗日恒等式)

对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，我们有如下的拉格朗日恒等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0.$$

不难看出命题成立.

注 实际上，证法十是证法九的一种特殊情况，但在证明不等式中，拉格朗日恒等式往往作为已知的结果使用，此外，拉格朗日恒等式也可以用其他方法来证明.

证法十一(内积法)

令 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，对任意实数 t，我们有

$$0 \leqslant (\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})t + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})t^2,$$

于是
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)t^2 \geqslant 0.$$

由 t 的任意性，得

$$4\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right] \leqslant 0,$$

故命题成立.

证法十二（向量法）

令 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则对向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，我们有

$$\cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|},$$

从而
$$\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|} = \cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle \leqslant 1,$$

由 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$，$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$，$|\boldsymbol{\beta}|^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，且等号成立当且仅当 $\cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = 1$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 平行. 故命题成立.

注 内积法和向量法有着密切的联系，内积亦称为点积，其定义为：对任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，它们的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

容易验证，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha} \neq \vec{0}$，

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$$

在证法十一中，就是利用了这个性质.

证法十三（构造单调数列）

构造数列 $\{S_n\}$，其中

$$S_n = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

则
$$S_1 = (a_1b_1)^2 - a_1^2b_1^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n = &[(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n+1}b_{n+1})^2 \\ &- (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n+1}^2)] \\ &- [(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\ &(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+1}^2b_{n+1}^2\\&\quad-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)b_{n+1}^2\\&\quad-a_{n+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-a_{n+1}^2b_{n+1}^2\\&=-[(a_1b_{n+1}-b_1a_{n+1})^2+(a_2b_{n+1}-b_2a_{n+1})^2\\&\quad+\cdots+(a_nb_{n+1}-b_na_{n+1})^2]\leqslant 0,\end{aligned}$$

即 $S_{n+1}\leqslant S_n$，所以数列$\{S_n\}$单调减少，从而对一切 $n\geqslant 1$，有 $S_n\leqslant S_1=0$，故命题成立.

证法十四(二次函数的判别式)

令 $A_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$B_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$C_n=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，作二次函数 $f(x)=A_nx^2+2B_nx+C_n=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2\geqslant 0$，且 $f(x)=0$ 的充要条件是 $\dfrac{a_i}{b_i}=\lambda$ 为常数.

由于 $A_n>0$，$f(x)\geqslant 0$，则它的判别式 $\Delta=4(B_n^2-A_nC_n)\leqslant 0$，即

$$B_n^2\leqslant A_nC_n.$$

等号成立当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 为常数.

用类似的方法，可以证明下列不等式：

设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}$，满足 $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0$ 或 $b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0$，求证：

$$(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2\geqslant(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2).$$

证明　按上述记号，不妨设 $A_n>0$，考虑函数 $g(x)=A_nx^2+2B_nx+C_n=(a_1x+b_1)^2-\sum_{i=2}^{n}(a_ix+b_i)^2$，则存在 $x_0=-\dfrac{b_1}{a_1}$，$a_1\neq 0$，使得 $g(x_0)\leqslant 0$，由于二次函数开口向上，从而存在 x_1 充分大，使得 $g(x_1)>0$. 则它的判别式 $\Delta=4(B_n^2-A_nC_n)\geqslant 0$，即

$$B_n^2\geqslant A_nC_n.$$

等号成立当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 为常数.

证法十五(凹函数方法)

令 $A_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$B_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$C_n=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，且不妨假设 $a_i>0$，$b_i>0$，由前面的引理 4，对凹函数 $f(x)=\ln x$，有

$$\frac{1}{2}\ln\frac{a_i^2}{A_n}+\frac{1}{2}\ln\frac{b_i^2}{C_n}\leqslant\ln\frac{\frac{a_i^2}{A_n}+\frac{b_i^2}{C_n}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a_i^2}{A_n}\frac{b_i^2}{C_n}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\ln\frac{\frac{a_i^2}{A_n}+\frac{b_i^2}{C_n}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_i^2}{A_n}\frac{b_i^2}{C_n}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\frac{a_i^2}{A_n}+\frac{b_i^2}{C_n}}{2}.$$

于是
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_n^{\frac{1}{2}}}\frac{b_i}{C_n^{\frac{1}{2}}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\frac{1}{C_n}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant A_n^{\frac{1}{2}}C_n^{\frac{1}{2}}.$$

不难得到，等式成立的充要条件是 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

另外，如果令 $x=\frac{a_i^2}{A_n}$, $y=\frac{b_i^2}{C_n}$, $p=q=2$，则由 Young 不等式，容易得到柯西不等式.

3.2 柯西不等式的变形和推广

变形 1 设 $a_i\in\mathbf{R}$, $b_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i},$$

等号成立的充分必要条件是 $a_i=\lambda b_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

变形 2 设 a_i, $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 同号且不为零，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i},$$

等号成立的充分必要条件是 $b_1=b_2=\cdots=b_n$.

柯西不等式的推广为赫尔德(Holder)不等式，即

赫尔德不等式 设 $a_i>0$, $b_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $p>0$, $q>0$，满

足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

等号成立的充分必要条件是 $a_i^p=\lambda b_i^q(i=1,2,\cdots,n,\lambda>0)$.

证明 由 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right]^{\frac{1}{q}}\\ \leqslant&\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right]=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

等号成立的充分必要条件是

$$\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}=\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q},$$

即 $a_i^p=\lambda b_i^q(i=1,2,\cdots,n,\lambda>0)$.

赫尔德不等式也可以变形为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{m}},$$

等号成立的充分必要条件是 $a_i=\lambda b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 其中 $a_i>0$, $b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $m>0$ 或 $m<-1$.

证明 当 $m>0$ 时，由赫尔德不等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right)\cdot b_i^{\frac{m}{m+1}}\\ &\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right)^{m+1}\right]^{\frac{1}{m+1}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]^{\frac{m}{m+1}}\\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\right)^{\frac{1}{m+1}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{m}{m+1}},\end{aligned}$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}.$$

当 $m<-1$ 时，$-(m+1)>0$，对于数组 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 和 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{-(m+1)+1}}{a_i^{-(m+1)}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-(m+1)+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-(m+1)}}.$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}.$$

等号成立当且仅当 $\left(\dfrac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right)^{m+1}=\mu\left(b_i^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}$，即 $a_i=\lambda b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

由赫尔德不等式可以推出另一个重要的不等式，即

闵可夫斯基不等式　对 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+$，$k>1$，则
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b^i)^k\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k}},$$
当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立.

证明　由赫尔德不等式，得
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k&=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{k-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{k-1}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{k-1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{k-1}{k}},\end{aligned}$$

所以
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

不难知，当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立.

关于柯西不等式的复数形式，就不在这里讨论了.

习 题 3

1 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

2 设 $a, b, c, d > 0$ 且 $a+b+c+d=1$，求证：

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d} \geqslant 2.$$

3 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$，$n \geqslant 2$，$n \in \mathbf{N}^+$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a+ib} < \frac{n}{\sqrt{a(a+nb)}}.$$

4 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

5 设正实数 a、b、c 满足 $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. 证明：

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1} \geqslant \frac{1}{a+b+c}.$$

6 已知 x、y、z 为正实数. 证明：

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \geqslant 1.$$

7 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，且 $xyz \geqslant 1$. 求证：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 0.$$

8 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=3$. 证明：

$$\sum \frac{a^4}{b^2+c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

其中，“$\sum$”表示轮换对称和.

9 设实数 $a, b, c > 0$，且满足 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2+3c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2+3a^2}{ca^2(4-ca)} \geqslant 4.$$

10 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^{+}$，且 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c} \geqslant 1.$$

11 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数，证明：

$$\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

12 已知 a、b、c 为正实数，证明：

$$\frac{9}{a+b+c} \leqslant 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

13 设 $a_i \in \mathbf{R}^{+}(i=1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

14 设 a_i, b_i, c_i, d_i 为正实数（$i=1, 2, \cdots, n$），求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^4 \sum_{i=1}^{n} b_i^4 \sum_{i=1}^{n} c_i^4 \sum_{i=1}^{n} d_i^4.$$

15 设 $n\ (n \geqslant 2)$ 为正整数，求证：

$$\frac{4}{7}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

16 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leqslant \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

17 设 a、b、c、d 为正数，证明：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

18 设 n 是大于 1 的自然数，求证：

$$\sqrt{\mathrm{C}_n^1}+2\cdot\sqrt{\mathrm{C}_n^2}+\cdots+n\cdot\sqrt{\mathrm{C}_n^n}<\sqrt{2^{n-1}\cdot n^3}.$$

4 柯西不等式的应用

4.1 柯西不等式在证明不等式中的应用

运用柯西不等式，证明其他不等式的关键是构造两组数，并按照柯西不等式形式进行探索，巧妙选取两组数.

例 1 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^{+}$，且 $a+b+c=1$，求证：

$$36 \leqslant \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c} &= \left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)\cdot(a+b+c) \\ &\geqslant \left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{2}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{3}{\sqrt{c}}\right)^{2}=36,\end{aligned}$$

所以 $$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c} \geqslant 36.$$

例 2 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^{+}$，满足 $a\cos^{2}\alpha+b\sin^{2}\alpha<c$，求证：

$$\sqrt{a}\cos^{2}\alpha+\sqrt{b}\sin^{2}\alpha<\sqrt{c}.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cos^{2}\alpha+\sqrt{b}\sin^{2}\alpha &= \sqrt{a}\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\sqrt{b}\sin\alpha\cdot\sin\alpha \\ &\leqslant\left[(\sqrt{a}\cos\alpha)^{2}+(\sqrt{b}\sin\alpha)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot(\cos^{2}\alpha+\sin^{2}\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ &=(a\cos^{2}\alpha+b\sin^{2}\alpha)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{c},\end{aligned}$$

故命题成立.

例 3 设 $a_i>0\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

证明 令 $a_{n+1}=a_1$，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2&=\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\sqrt{a_i+a_{i+1}}}\cdot\sqrt{a_i+a_{i+1}}\right)^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+a_{i+1}}\cdot\sum_{i=1}^n(a_i+a_{i+1})\\&=2\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+a_{i+1}}\cdot\sum_{i=1}^n a_i,\end{aligned}$$

于是
$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+a_{i+1}}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i=\frac{1}{2}.$$

注 在证明过程中，注意条件的利用和不等式的变形.

例 4 设 a、b、c 是正实数，且满足 $a+b+c=1$. 证明：

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

证明 注意到

$$1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2bc}{a+bc}=\frac{2bc}{1-b-c+bc}=\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}.$$

同理，$1-\dfrac{b-ca}{b+ca}=\dfrac{2ca}{(1-c)(1-a)}$，$1-\dfrac{c-ab}{c+ab}=\dfrac{2ab}{(1-a)(1-b)}$.

故原不等式等价于

$$\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{2ca}{(1-c)(1-a)}+\frac{2ab}{(1-a)(1-b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

化简后得

$$\begin{aligned}&4(bc+ca+ab-3abc)\\&\geqslant3(bc+ca+ab+1-a-b-c-abc),\end{aligned}$$

即
$$ab+bc+ca\geqslant9abc.$$

从而要证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant9$.

而 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant9$，因此，原不等式成立.

例 5 设正实数 a、b、c 满足 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

证明　用符号 $\sum$ 表示循环和，即证明：

$$\sum\frac{1}{2+a^2+b^2}\leqslant\frac{3}{4}. \tag{29}$$

由柯西不等式得

$$\left(\sum\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}\right)\sum(2+a^2+b^2)\geqslant\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2.$$

又 $$\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=2\sum a^2+2\sum\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

及 $$\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\geqslant a^2+bc,$$

则
$$\begin{aligned}&\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\\ \geqslant&\,2\sum a^2+2\sum a^2+2\sum ab\\ =&\,3\sum a^2+(a+b+c)^2=9+3\sum a^2\\ =&\,\frac{3}{2}\left(6+2\sum a^2\right)=\frac{3}{2}\sum(2+a^2+b^2).\end{aligned}$$

故 $$\left(\sum\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}\right)\sum(2+a^2+b^2)\geqslant\frac{3}{2}\sum(2+a^2+b^2).$$

所以，
$$\sum\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{30}$$

式(30)两边乘以-1，再加3，再除以2即得式(29).

例6　已知 $x,y,z>0$，且 $xyz=1$. 求证：

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geqslant4(x+y+z)-12+\frac{9}{x+y+z}.$$

证明　因为 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

所以 $$a^2=2ab-b^2+(a-b)^2,$$

在 $b>0$ 时有 $$\frac{a^2}{b}=2a-b+\frac{(a-b)^2}{b}.$$

利用上式及柯西不等式，可知

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\\
=&2(x+y-1)-z+\frac{(x+y-z-1)^2}{z}\\
&+2(y+z-1)-x+\frac{(y+z-x-1)^2}{x}\\
&+2(z+x-1)-y+\frac{(z+x-y-1)^2}{y}\\
=&3(x+y+z)-6+\frac{(x+y-z-1)^2}{z}+\frac{(y+z-x-1)^2}{x}+\frac{(z+x-y-1)^2}{y}\\
\geqslant&3(x+y+z)-6+\frac{(x+y+z-3)^2}{x+y+z}\\
=&3(x+y+z)-6+\frac{(x+y+z)^2-6(x+y+z)+9}{x+y+z}\\
=&4(x+y+z)-12+\frac{9}{x+y+z}.
\end{aligned}
$$

例 7 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 同时满足以下条件：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$.

求证：对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $\max\{a_k, b_k\}\leqslant\frac{10}{10+k^2}$.

证明 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$
\begin{aligned}
(ka_k)^2&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}ib_i\right)^2\\
&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}i^2b_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\qquad\text{（柯西不等式）}\\
&=\left(10-\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\right)\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\\
&\leqslant(10-k^2a_k)\cdot(1-a_k)=10-(10+k^2)a_k+k^2a_k^2,
\end{aligned}
$$

从而 $a_k\leqslant\frac{10}{10+k^2}$.

同理有 $b_k \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$，所以 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$.

例 8　设 $a_i \in \mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，如果对任意 $x_i \geqslant 0$，

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - a_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

求 $r_i (i=1, 2, \cdots, n)$.

解　令 $x_i = 0$，则 $$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

再令 $x_i = 2a_i$，则 $$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

于是 $$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

令 $x_i = r_i$，则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - a_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$，

推出 $$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2},$$

即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leqslant 1$. 由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

等号成立充要条件是 $r_i = \lambda a_i$.

从而 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geqslant 1$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 1,\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}},\ r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

经验证，$r_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 为所求.

上面的条件可以改为一般的形式：

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - a_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right)^{\frac{1}{m}} - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}},$$

其中 $m>1$ 为给定的常数.

利用赫尔得不等式，得

$$r_i=\left[\frac{a_i^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m}\right]^{\frac{m-1}{m}}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

例 9 设 $x_i,y_i,\cdots,z_i\in\mathbf{R}\ (i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2+\cdots+z_i^2}\geqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}.$$

证明 令 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$b=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，$\cdots$，$c=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i$. 不妨设 $a^2+b^2+\cdots+c^2\neq0$，则由柯西不等式，得

$$(a^2+b^2+\cdots+c^2)(x_i^2+y_i^2+\cdots+z_i^2)\geqslant(ax_i+by_i+\cdots+cz_i)^2,$$

即

$$ax_i+by_i+\cdots+cz_i\leqslant\sqrt{a^2+b^2+\cdots+c^2}\cdot\sqrt{x_i^2+y_i^2+\cdots+z_i^2}.$$

求和，得

$$a^2+b^2+\cdots+c^2\leqslant\sqrt{a^2+b^2+\cdots+c^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2+\cdots+z_i^2}.$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2+\cdots+z_i^2}\geqslant\sqrt{a^2+b^2+\cdots+c^2}.$$

本例如果用向量方法证明，会更简洁.

例 10 设 $a_i\in\mathbf{R}^+$，$1\leqslant i\leqslant n$. 证明：

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geqslant\frac{1}{n}.$$

证明 令 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=a$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{a_i}=n+a$. 由柯西不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{a_i}\geqslant n^2.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}\geqslant\frac{n^2}{n+a}$，以及

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{a_i}{a_i+1}\right)=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$$
$$\leqslant n-\frac{n^2}{n+a}=\frac{na}{n+a}.$$

于是

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$
$$\geqslant\frac{1}{\frac{na}{n+a}}-\frac{1}{a}=\frac{n+a}{na}-\frac{1}{a}=\frac{a}{na}=\frac{1}{n},$$

故命题成立.

注　此题的证明方法较多，不妨自己试一试.

例 11　设 n 为正整数，$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 为实数，证明：

(1) $\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$；

(2) 第(1)小题等号成立的充要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为等差数列.

证明　(1) 不失一般性，可设 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|=2\sum_{i<j}(x_j-x_i)=2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.$$

由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$
$$=4\times\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

另一方面，

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

从而

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2;$$

(2) 如果等号成立，则对某个 k，$x_i=k(2i-n-1)$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为

等差数列. 另一方面，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为等差数列，公差为 d，则

$$x_i=\frac{d}{2}(2i-n-1)+\frac{x_1+x_n}{2}.$$

将每个 x_i 减去 $\frac{x_1+x_n}{2}$，就有 $x_i=\frac{d}{2}(2i-n-1)$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，这时等号成立.

例 12　证明：满足条件

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2$；

(2) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3+1$

的整数只有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(n, n, \cdots, n)$.

证明　设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是满足条件的整数组，则由柯西不等式，得

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\geqslant n^3.$$

结合 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3+1$，可知只能 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3$ 或者 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3+1$.

当 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3$ 时，由柯西不等式取等号得 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，即 $a_i^2=n^2$，$1\leqslant i\leqslant n$. 再由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant n^2$，则只有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=n$.

当 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^3+1$ 时，则令 $b_i=a_i-n$，得

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2n\sum_{i=1}^{n}a_i+n^3\leqslant 2n^3+1-2n\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant 1.$$

于是 b_i^2 只能是 0 或者 1，且 $b_1^2, b_2^2, \cdots, b_n^2$ 中至多有一个为 1. 如果都为零，则 $a_i=n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3\neq n^3+1$，矛盾. 如果 $b_1^2, b_2^2, \cdots, b_n^2$ 中有一个为 1，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3\pm 2n+1\neq n^3+1$，也矛盾. 故只有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(n, n, \cdots, n)$ 为唯一一组整数解.

例 13　证明：关于两个三角形的匹窦不等式

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16SS_1,$$

这里 a、b、c、S；a_1、b_1、c_1、S_1 分别为两个三角形的边长和面积.

证明　由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&16SS_1+2a^2a_1^2+2b^2b_1^2+2c^2c_1^2\\ \leqslant&(16S_1^2+2a_1^4+2b_1^4+2c_1^4)^{\frac{1}{2}}(16S^2+2a^4+2b^4+2c^4)^{\frac{1}{2}}\\ =&(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a^2+b^2+c^2),\end{aligned}$$

所以

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16SS_1.$$

注　在证明过程中，常常进行一些恒等的变形.

例 14　设 a、b、c 是三角形的三边长，求证：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

证明　显然存在正数 x、y、z 使得 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$. 由于

$$\begin{aligned}a^2b(a-b)&=(y+z)^2(z+x)(y-x)\\ &=(y+z)(z+x)(y^2-z^2)+(y+z)^2(z^2-x^2),\end{aligned}$$

同样处理 $b^2c(b-c)$，$c^2a(c-a)$，所以

$$\begin{aligned}&a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\\ =&2x(y-z)y^2+2y(z-x)z^2+2z(x-y)x^2.\end{aligned}$$

原不等式等价于

$$xyz(x+y+z)\leqslant xy^3+yz^3+zx^3.$$

由柯西不等式，得

$$x+y+z\leqslant\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}(x+y+z)^{\frac{1}{2}},$$

则

$$x+y+z\leqslant\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}.$$

于是原不等式成立，且当 $a=b=c$ 时等号成立.

例 15　设 $x_i>0$，$x_iy_i-z_i^2>0$，$i=1, 2$，求证：

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

证明　注意到不等式的右边 $\geqslant\dfrac{2}{[(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)]^{\frac{1}{2}}}$，考虑证明一个更强的结论：

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 \geqslant 4\left[(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

令 $u_i=\sqrt{x_iy_i-z_i^2}$，$i=1, 2$，由于 $4u_1u_2 \leqslant (u_1+u_2)^2$，则只要证明

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 \geqslant (u_1+u_2)^2,$$

等价于

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2) \geqslant (u_1+u_2)^2+(z_1+z_2)^2.$$

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2) &\geqslant (\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2\\ &=(\sqrt{u_1^2+z_1^2}+\sqrt{u_2^2+z_2^2})^2\\ &=(u_1^2+z_1^2)+2\sqrt{u_1^2+z_1^2}\sqrt{u_2^2+z_2^2}+(u_2^2+z_2^2)\\ &\geqslant (u_1^2+z_1^2)+2(u_1u_2+z_1z_2)+(u_2^2+z_2^2)\\ &=(u_1+u_2)^2+(z_1+z_2)^2.\end{aligned}$$

从而原不等式成立，且等号成立的充分必要条件为 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$.

注　该例题也可以直接用柯西不等式证明，关于它的推广，可以参见引文或练习.

例 16　设 $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$\left(\sum a_ib_ic_id_i\right)^4 \leqslant \sum a_i^4 \cdot \sum b_i^4 \cdot \sum c_i^4 \cdot \sum d_i^4.$$

证明　两次利用柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\left[\sum (a_ib_i)(c_id_i)\right]^4\\ &\leqslant \left[\sum (a_ib_i)^2\right]^2 \cdot \left[\sum (c_id_i)^2\right]^2=\left[\sum a_i^2b_i^2\right]^2\left[\sum c_i^2d_i^2\right]^2\\ &\leqslant \sum a_i^4 \cdot \sum b_i^4 \cdot \sum c_i^4 \cdot \sum d_i^4.\end{aligned}$$

故命题成立.

例 17　设 t_a、t_b、t_c 分别是$\triangle ABC$的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分线的长，证明：

$$\sum \frac{bc}{t_a^2} \geqslant 4.$$

证明　不难求得 $t_a^2=\dfrac{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(b+c)^2}$，则 $\dfrac{bc}{t_a^2}=\dfrac{(b+c)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

同理可得

$$\frac{ac}{t_b^2}=\frac{(a+c)^2}{(a+c)^2-b^2},\ \frac{ab}{t_c^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-c^2}.$$

则

$$\sum\frac{bc}{t_a^2}=\sum\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-c^2}\geqslant\frac{4(a+b+c)^2}{\sum[(a+b)^2-c^2]}=\frac{4(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=4.$$

所以原不等式成立.

例 18　设 a、b、c、d 为正实数，满足 $ab+cd=1$，点 $P_i(x_i,\ y_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 是以原点为圆心的单位圆上的四点. 求证：

$$\begin{aligned}&(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\\&\leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right).\end{aligned}$$

证明　令 $\alpha=ay_1+by_2+cy_3+dy_4$，$\beta=ax_4+bx_3+cx_2+dx_1$，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\alpha^2&=(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2\\&\leqslant[(\sqrt{ad}\,y_1)^2+(\sqrt{bc}\,y_2)^2+(\sqrt{bc}\,y_3)^2+(\sqrt{ad}\,y_4)^2]\\&\quad\left[\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2\right]\\&=(ady_1^2+bcy_2^2+bcy_3^2+ady_4^2)\cdot\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right).\end{aligned}$$

同理可得

$$\beta^2\leqslant(adx_4^2+bcx_3^2+bcx_2^2+adx_1^2)\cdot\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right).$$

将它们相加，并利用 $x_i^2+y_i^2=1$ $(i=1,2,3,4)$，$ab+cd=1$，得

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&\leqslant(2ad+2bc)\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)\\&=2(ad+bc)\left(\frac{ab+cd}{bd}+\frac{ab+cd}{ac}\right)\\&=2(ad+bc)\left(\frac{1}{bd}+\frac{1}{ac}\right)\\&=2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right),\end{aligned}$$

故命题成立.

例 19　给定正整数 $n\geqslant 2$，设正整数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$. 求证:对任意实数 x,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

证明　当 $x^2\geqslant a_1(a_1-1)$ 时,由于 $\sum\frac{1}{a_i}\leqslant 1$,得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i|x|}\right)^2=\frac{1}{4x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2\\&\leqslant\frac{1}{4x^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.\end{aligned}$$

当 $x^2<a_1(a_1-1)$ 时,由柯西不等式,得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}.\end{aligned}$$

对于正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,有 $a_{i+1}\geqslant a_i+1$, $i=1,2,\cdots,n-1$,且

$$\begin{aligned}\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2}&\leqslant\frac{2a_i}{\left(a_i^2+x^2+\frac{1}{4}\right)^2-a_i^2}\\&=\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\\&\leqslant\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2},\ i=1,2,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{2a_n}{(a_n^2+x^2)^2}&\leqslant\frac{1}{\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\\&\leqslant\frac{1}{\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+x^2},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\right]$$

$$+\frac{1}{\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2},$$

故命题成立.

例 20　设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$n\in\mathbf{N}$，求证：

$$\left(\frac{1-\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x}\right)\left(\frac{1-\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x}\right)\geqslant(2^n-1)^2.$$

证明　因为

$$\begin{aligned}1-\sin^{2n}x&=(1-\sin^2x)(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2(n-1)}x)\\&=\cos^2x(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2(n-1)}x),\\1-\cos^{2n}x&=(1-\cos^2x)(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2(n-1)}x)\\&=\sin^2x(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2(n-1)}x),\end{aligned}$$

所以由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1-\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x}\right)\left(\frac{1-\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x}\right)\\=&\frac{1}{\sin^{2n-2}x}(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2n-2}x)\\&\cdot\frac{1}{\cos^{2n-2}x}(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2n-2}x)\\=&\left(1+\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\sin^4x}+\cdots+\frac{1}{\sin^{2n-2}x}\right)\\&\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos^4x}+\cdots+\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\right)\\\geqslant&\left[1+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}+\cdots+\frac{1}{(\sin x\cos x)^{n-1}}\right]^2\\=&\left[1+\frac{2}{\sin 2x}+\frac{4}{(\sin 2x)^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(\sin 2x)^{n-1}}\right]^2\\\geqslant&(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})^2=(2^n-1)^2.\end{aligned}$$

例 21 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一个有无穷项的实数列，对于所有正整数 i，存在一个实数 c，使得 $0 \leqslant a_i \leqslant c$，且 $|a_i - a_j| \geqslant \frac{1}{i+j}$ 对所有正整数 i, j $(i \neq j)$ 成立. 证明：$c \geqslant 1$.

证明 对于 $n \geqslant 2$，设 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，且满足

$$0 \leqslant a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < \cdots < a_{\sigma(n)} \leqslant c,$$

则

$$c \geqslant a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)},$$

$$\begin{aligned}&(a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)}) + (a_{\sigma(n-1)} - a_{\sigma(n-2)}) + \cdots + (a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(1)})\\ \geqslant &\frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \frac{1}{\sigma(n-1)+\sigma(n-2)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)}.\end{aligned}$$

由柯西不等式，得

$$\left[\frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \frac{1}{\sigma(n-1)+\sigma(n-2)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)}\right]\cdot$$
$$[(\sigma(n)+\sigma(n-1)) + (\sigma(n-1)+\sigma(n-2)) + \cdots + (\sigma(2)+\sigma(1))] \geqslant (n-1)^2.$$

对所有正整数 $n \geqslant 2$，我们有

$$\begin{aligned}c &\geqslant \frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \frac{1}{\sigma(n-1)+\sigma(n-2)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)}\\ &\geqslant \frac{(n-1)^2}{2[\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n)] - \sigma(1) - \sigma(n)}\\ &= \frac{(n-1)^2}{n(n+1) - \sigma(1) - \sigma(n)}\\ &\geqslant \frac{(n-1)^2}{n^2+n-3} \geqslant \frac{n-1}{n+3} = 1 - \frac{4}{n+3}.\end{aligned}$$

故 $c \geqslant 1$.

例 22 设 a、b、c 为正实数. 求证：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \leqslant 8.$$

证明 在第二章中，我们用了两种不同的方法证明了这个不等式，这里，用柯西不等式给出另一种新的证明.

由柯西不等式，得

$$\sqrt{\frac{2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} + \frac{(b+c)^2}{2}}{3}} \geqslant \frac{\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(a+b+c)}{3}.$$

于是 $2a^2+(b+c)^2\geqslant\frac{2(a+b+c)^2}{3}$. 同理可得

$$2b^2+(c+a)^2\geqslant\frac{2(a+b+c)^2}{3},\ 2c^2+(a+b)^2\geqslant\frac{2(a+b+c)^2}{3}.$$

如果 $4a\geqslant b+c$，$4b\geqslant c+a$，$4c\geqslant a+b$，则

$$\begin{aligned}\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}&=2+\frac{(4a-b-c)(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}\\&\leqslant 2+\frac{3(4ab+4ac-b^2-2bc-c^2)}{2(a+b+c)^2}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}\leqslant 2+\frac{3(4bc+4ba-a^2-2ac-c^2)}{2(a+b+c)^2}.$$

$$\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 2+\frac{3(4cb+4ca-a^2-2ba-b^2)}{2(a+b+c)^2}.$$

三式相加，得

$$\begin{aligned}&\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\\\leqslant\ &6+\frac{3(6ab+6bc+6ca-2a^2-2b^2-2c^2)}{2(a+b+c)^2}\\=\ &\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\\\leqslant\ &\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=8.\end{aligned}$$

当上述假设不成立时，不妨设 $4a<b+c$，则

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}<2.$$

由柯西不等式，得

$$[b+b+(c+a)]^2\leqslant(b^2+b^2+(c+a)^2)(1+1+1).$$

于是 $$\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}\leqslant 3.$$

同理可得 $$\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 3.$$

所以

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

综上可知原不等式成立. 当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

对于三种不同的证明方法，希望大家能好好理解.

例 23 设 $a_i>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=k$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant n\left(\frac{n^2+k^2}{nk}\right)^2.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&(1^2+1^2+\cdots+1^2)\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\\ \geqslant&\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2=\left(k+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2\\ \geqslant&\left(k+\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^2=\left(\frac{k^2+n^2}{k}\right)^2,\end{aligned}$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant n\left(\frac{n^2+k^2}{nk}\right)^2.$$

利用变形的赫尔得不等式可以证明下列不等式.

例 24 证明：对正实数 a、b、c，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

证明 由变形的柯西不等式，

$$\text{左边}=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\sum\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}\geqslant\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[\sum(a^3+8abc)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

所以要证明原不等式，只需要证明

$$\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[\sum\left(a^{3}+8abc\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \geqslant 1,$$

等价于

$$\left(\sum a\right)^{3} \geqslant \sum a^{3}+24abc,$$

等价于

$$\sum a^{3}+3\sum\left(a^{2}b+ab^{2}\right)+6abc \geqslant \sum a^{3}+24abc,$$

等价于

$$\sum\left(a^{2}b+ab^{2}\right) \geqslant 6abc.$$

易知该不等式成立，故原不等式成立.

注　前面，我们用平均值不等式证明了这个不等式，读者还可以用其他方法证明.

4.2　柯西不等式在解方程组和求极值中的应用

应用柯西不等式中等号成立的条件，通过不等式夹逼，求出方程组中各个未知数的值，从而进一步求出有关代数式的值.

极值问题往往是关于对称式的问题. 先根据条件，在各个未知元相等时的值得出极值，然后证明相应的不等式.

例1　求方程组

$$\begin{cases} a^{2}=\dfrac{\sqrt{bc}\ \sqrt[3]{bcd}}{(b+c)(b+c+d)} & (31)\\ b^{2}=\dfrac{\sqrt{cd}\ \sqrt[3]{cda}}{(c+d)(c+d+a)} & (32)\\ c^{2}=\dfrac{\sqrt{da}\ \sqrt[3]{dab}}{(d+a)(d+a+b)} & (33)\\ d^{2}=\dfrac{\sqrt{ab}\ \sqrt[3]{abc}}{(a+b)(a+b+c)} & (34) \end{cases}$$

的实数解.

解　首先，注意到没有一个变量等于零. 不失一般性，假设 $b=0$，由(31)

得 $a=0$，由(34)得 $d=0$，由(33)得 $c=0$，这就意味着所有值为零，但这是不可能的，因为分母会为零.

其次，注意到 bc，cd，da，ab 的平方根一定都存在，这就表明 a，b，c，d 一定都是负数或都是正数. 如果都是负数，这些方程的右边是负的，与它们是实数的平方相矛盾，由此可得 4 个值一定都是正的.

根据算术—几何平均值不等式，有

$$\sqrt{bc}\leqslant\frac{b+c}{2}，即\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\leqslant\frac{1}{2}\text{ 和 }\sqrt[3]{bcd}\leqslant\frac{b+c+d}{3}，$$

即
$$\frac{\sqrt[3]{bcd}}{b+c+d}\leqslant\frac{1}{3}.$$

因此
$$a^2=\frac{\sqrt{bc}\ \sqrt[3]{bcd}}{(b+c)(b+c+d)}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

从而 $a\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}$.

类似地，有 $b\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}$，$c\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}$，$d\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}$.

由此得 $(b+c)(b+c+d)\leqslant\frac{2}{\sqrt{6}}\times\frac{3}{\sqrt{6}}=1$.

同样地，有

$$(c+d)(c+d+a)\leqslant 1，$$
$$(d+a)(d+a+b)\leqslant 1，$$
$$(a+b)(a+b+c)\leqslant 1.$$

由(31)×(32)×(33)×(34)，可得

$$1=(b+c)(b+c+d)(c+d)(c+d+a)\cdot(d+a)(d+a+b)(a+b)(a+b+c).$$

因为 4 个小于或等于 1 的表达式的积等于 1，那么，这 4 个表达式一定都等于 1.

从而唯一的可能是每个变量取它的最大的可能值.

因此 $a=b=c=d=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 为给定方程组的唯一解.

例 2 已知实数 x、y、$z>3$，求方程

$$\frac{(x+2)^2}{y+z-2}+\frac{(y+4)^2}{z+x-4}+\frac{(z+6)^2}{x+y-6}=36$$

的所有实数解(x, y, z).

解 由x、y、$z>3$，知

$$y+z-2>0,\ z+x-4>0,\ x+y-6>0.$$

由柯西—施瓦兹不等式得

$$\left[\frac{(x+2)^2}{y+z-2}+\frac{(y+4)^2}{x+z-4}+\frac{(z+6)^2}{x+y-6}\right]\cdot$$
$$[(y+z-2)+(x+z-4)+(x+y-6)]$$
$$\geqslant(x+y+z+12)^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x+2)^2}{y+z-2}+\frac{(y+4)^2}{x+z-4}+\frac{(z+6)^2}{x+y-6}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}.$$

结合题设等式得

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}\leqslant 72. \tag{35}$$

当$\dfrac{x+2}{y+z-2}=\dfrac{y+4}{x+z-4}=\dfrac{z+6}{x+y-6}=\lambda$，即

$$\begin{cases}\lambda(y+z)-x=2(\lambda+1),\\ \lambda(x+z)-y=4(\lambda+1),\\ \lambda(x+y)-z=6(\lambda+1).\end{cases} \tag{36}$$

时，式(35)等号成立.

设$w=x+y+z+12$. 则

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}=\frac{w^2}{w-18}.$$

又
$$\frac{w^2}{w-18}\geqslant 4\times 18=72$$
$$\Leftrightarrow w^2-4\times 18w+4\times 18^2\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow(w-36)^2\geqslant 0,$$

则
$$\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}\geqslant 72. \tag{37}$$

当
$$w=x+y+z+12=36$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=24 \tag{38}$$

时，式(37)等号成立.

由式(35)，(37)得

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}=72.$$

由方程组(36)与式(38)得

$$\begin{cases}(2\lambda-1)(x+y+z)=12(\lambda+1),\\ x+y+z=24\end{cases}\Rightarrow \lambda=1.$$

将 $\lambda=1$ 代入方程组(36)得

$$\begin{cases}y+z-x=4,\\ x+z-y=8,\\ x+y-z=12\end{cases}\Rightarrow (x,\ y,\ z)=(10,\ 8,\ 6).$$

所以，所求唯一实数解为

$$(x,\ y,\ z)=(10,\ 8,\ 6).$$

例 3　n 是一个正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个正实数，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，求 $\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ 的最小值.

解　由柯西不等式知

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n)\left(\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\right)$$

$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=1,$$

且
$$a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n=2,$$

所以
$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant\frac{1}{2},$$

且当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=b_1=b_2=\cdots=b_n=\frac{1}{n}$ 时取到.

所以 $\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

例 4　已知 x、y、z 为实数，且满足

$$x+y+z=xy+yz+zx.$$

求$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$的最小值.

解　令$x=1$，$y=z=-1$. 则

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=-\frac{1}{2}.$$

猜想最小值为$-\frac{1}{2}$.

只须证：

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\geqslant-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}\geqslant\frac{(z-1)^2}{z^2+1}. \tag{39}$$

注意到$z(x+y-1)=x+y-xy$.

若$x+y-1=0$，则$x+y=xy=1$. 矛盾.

故$x+y-1\neq0$.

于是，$z=\frac{x+y-xy}{x+y-1}$.

代入不等式(39)得

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}$$
$$\geqslant\frac{(xy-1)^2}{(x+y-1)^2+(x+y-xy)^2}. \tag{40}$$

由柯西不等式得

式(40)左边

$$\geqslant\frac{[(1+x)(1-y)+(1+y)(1-x)]^2}{(1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2}$$
$$=\frac{4(xy-1)^2}{(1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2}.$$

于是，只须证

$$4(x+y-1)^2+4(x+y-xy)^2$$
$$\geqslant(1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2$$
$$\Leftrightarrow f(x)=(y^2-3y+3)x^2-(3y^2-8y+3)x+3y^2-3y+1\geqslant0.$$

由 $\Delta=(3y^2-8y+3)^2-4(y^2-3y+3)(3y^2-3y+1)=-3(y^2-1)^2\leqslant 0$，故 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

从而，猜想成立，即 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

例 5　设 a、b、c、x、y、z 为实数，且

$$a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30.$$

求$\frac{a+b+c}{x+y+z}$的值.

解　由柯西不等式，得

$$25\times 36=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2=30^2.$$

上述不等式等号成立，得

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k.$$

于是 $k^2(x^2+y^2+z^2)=25$，所以 $k=\pm\frac{5}{6}$（负的舍去）. 从而

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}=k=\frac{5}{6}.$$

例 6　设实数 a、b、c、d、e 满足

$$a+b+c+d+e=8,\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16,$$

求 e 的最大值.

解　将条件改写为

$$8-e=a+b+c+d,\ 16-e^2=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

由此得到一个包含 e 的不等式. 由柯西不等式，得

$$a+b+c+d\leqslant(1+1+1+1)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2+c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

将条件代入并两边平方，得

$$(8-e)^2\leqslant 4(16-e^2),$$
$$64-16e+e^2\leqslant 64-4e^2,$$
$$5e^2-16e\leqslant 0,\ e(5-16e)\leqslant 0.$$

从此得到 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$，当 $a=b=c=d=\frac{6}{5}$ 时达到最大值$\frac{16}{5}$.

注　用类似的方法可以证明下面的命题：

设 $n(\geqslant 3)$ 为正整数，a、b 为给定的实数，实数 x_0，x_1，x_2，…，x_n 满足

$$x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n=a,$$
$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=b,$$

则当 $b<\dfrac{a^2}{n+1}$ 时，x_0 不存在；

当 $b=\dfrac{a^2}{n+1}$ 时，$x_0=\dfrac{a}{n+1}$；

当 $b>\dfrac{a^2}{n+1}$ 时，x_0 满足

$$\frac{a-\frac{1}{2}\sqrt{\delta}}{n+1}\leqslant x_0\leqslant\frac{a+\frac{1}{2}\sqrt{\delta}}{n+1},$$

其中 δ 为二次方程 $(n+1)x_0^2-2ax_0+a^2-nb=0$ 的判别式.

例 7　设 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，a、b、c、l、m、n 是给定的正数，并且 $ax+by+cz=\delta$ 为常数，求

$$w=\frac{l}{x}+\frac{m}{y}+\frac{n}{z}$$

的最小值.

解　由柯西不等式，得

$$\begin{aligned} w\cdot\delta &= \left[\left(\sqrt{\frac{l}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{m}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{n}{z}}\right)^2\right] \\ &\quad\cdot\left[(\sqrt{ax})^2+(\sqrt{by})^2+(\sqrt{cz})^2\right] \\ &\geqslant(\sqrt{al}+\sqrt{bm}+\sqrt{cn})^2, \end{aligned}$$

所以
$$w\geqslant\frac{(\sqrt{al}+\sqrt{bm}+\sqrt{cn})^2}{\delta}.$$

利用柯西等式成立的条件，得 $x=k\sqrt{\dfrac{l}{a}}$，$y=k\sqrt{\dfrac{m}{b}}$，$z=k\sqrt{\dfrac{n}{c}}$，其中 $k=\dfrac{\delta}{\sqrt{al}+\sqrt{bm}+\sqrt{cn}}$，它们使得 $ax+by+cz=\delta$，且 $w=\dfrac{(\sqrt{al}+\sqrt{bm}+\sqrt{cn})^2}{\delta}$，所以

$$w_{\min}=\frac{(\sqrt{al}+\sqrt{bm}+\sqrt{cn})^2}{\delta}.$$

例 8　对满足 $a+b=1$ 的正实数 a、b,求

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

的最小值.

解　当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,我们有

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

下面证明

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

从而最小值为$\frac{25}{2}$.

令 $x=a+\frac{1}{a}$, $y=b+\frac{1}{b}$, 由

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right]&\geqslant\left\{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]\right\}^2\\&=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2.\end{aligned}$$

由柯西不等式,得 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geqslant(1+1)^2=4$. 则

$$\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2\geqslant\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{a+b}\right)\right]^2=\left(\frac{1+4}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

从而命题成立.

例 9　设 n 和 k 是给定的正整数 $(k<n)$, 已知正实数 a_1, a_2, …, a_k, 试求正实数 a_{k+1}, a_{k+2}, …, a_n 使得和式

$$M=\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}$$

取最小值.

解　通过对 $n=1, 2, 3$ 计算，得

$$M=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n.$$

令 $a=a_1+a_2+\cdots+a_k$，$b=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}$，则由假设 a、b 为给定的常数. 因此由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}M&=(a+a_{k+1}+\cdots+a_n)\left(b+\frac{1}{a_{k+1}}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n\\&\geqslant(\sqrt{ab}+1+\cdots+1)^2-n\\&=(\sqrt{ab}+n-k)^2-n,\end{aligned}$$

且当
$$\frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}}=\cdots=\frac{\sqrt{a_n}}{\frac{1}{\sqrt{a_n}}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

即 $a_{k+1}=\cdots=a_n=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，M 取最小值.

例 10　设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足 $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$，求

$$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

的最大值.

解　当 $n=1$ 时，$(a_2-a_1)^2=1$，则 $a_2-a_1=\pm1$，最大值为 1.

当 $n\geqslant2$ 时，设 $x_1=a_1$，$x_{i+1}=a_{i+1}-a_i$，$i=1, 2, \cdots, 2n-1$. 则 $\sum_{i=2}^{2n}x_i^2=1$，且 $a_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$k=1, 2, \cdots, 2n$.

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=x_2+2x_3+\cdots+(n-1)x_n+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}\\&\leqslant[1+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+1]^{\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}\\&=\left[n^2+2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.\end{aligned}$$

当
$$a_k=\frac{\sqrt{3}k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}},\ k=1, 2, \cdots, n+1,$$

$$a_{n+k}=\frac{\sqrt{3}\left[2n^2-(n-k)(n-k+1)\right]}{2\sqrt{n(2n^2+1)}},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

时，上述不等式等号成立，所求最大值为$\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$.

例 11　设 $x_i\geqslant 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\sqrt{\frac{j}{k}}x_jx_k=1.$$

求 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的最小值和最大值.

解　由

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k\geqslant 1,$$

取 $x_1=1$，$x_2=\cdots=x_n=0$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n$的最小值为 1. 再令 $y_i=\frac{x_i}{\sqrt{i}}$，则条件化为

$$\sum_{i=1}^{n}iy_i^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}jy_jy_k=1,$$

等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i+1}+\cdots+y_n)^2=1.$$

令 $t_i=y_i+y_{i+1}+\cdots+y_n$，则 $y_i=t_i-t_{i+1}$，$x_i\geqslant 0$，推出 $y_i\geqslant 0$，t_i 不增，则 $x_i=\sqrt{i}y_i=\sqrt{i}(t_i-t_{i+1})$，令 $t_{i+1}=0$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}(t_i-t_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}t_i(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}).$$

所以由 $\sum_{i=1}^{n}t_i^2=1$ 以及柯西不等式，得

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2&=\left[\sum_{i=1}^{n}t_i(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})\right]^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^2\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\frac{t_1}{1}=\frac{t_2}{\sqrt{2}-1}=\cdots=\frac{t_n}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$ 及 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 时，$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$唯一确定推出$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$唯一确定. 故 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的最大值为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2}$.

例 12　设 x、y、z 是大于 -1 的实数. 求

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

的最小值.

解　由于 $x, y, z>-1$，则 $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}$，$\frac{1+y^2}{1+z+x^2}$，$\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$ 的分子、分母均为正，所以

$$\begin{aligned}&\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\\ \geqslant&\frac{1+x^2}{1+z^2+\frac{1+y^2}{2}}+\frac{1+y^2}{1+x^2+\frac{1+z^2}{2}}+\frac{1+z^2}{1+y^2+\frac{1+x^2}{2}}\\ =&\frac{2a}{2c+b}+\frac{2b}{2a+c}+\frac{2c}{2b+a},\end{aligned}$$

其中 $a=\frac{1+x^2}{2}$，$b=\frac{1+y^2}{2}$，$c=\frac{1+z^2}{2}$.

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}\\ \geqslant&\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}\\ =&\frac{3(ab+bc+ac)+\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]}{3(ab+bc+ac)}\\ \geqslant&1.\end{aligned}$$

且当 $a=b=c=1$ 时，上式取到最小值.

故所求的最小值为 2.

例 13　设 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$a_i\in\mathbf{Z}^{+}$，且对任意 $S_1, S_2\subseteq S$，$S_1\neq S_2$，有 $\sum_{i\in S_1}i\neq\sum_{j\in S_2}j$. 求

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}$$

的最小值.

解法一 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 记 $T_i=\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$, $1\leqslant i\leqslant n$. 则 T_i 所有子集元素之和不同. 故 $a_1+a_2+\cdots+a_i\geqslant 2^i-1$, $1\leqslant i\leqslant n$. 由 Abel 恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}&=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{1}{\sqrt{a_k}}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\Big)\\&\geqslant\frac{1}{\sqrt{a_n}}(2^n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)\Big(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\Big)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{\sqrt{a_k}}.\end{aligned}$$

由柯西不等式,得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{\sqrt{a_k}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\Big)\geqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k-1}{2}}\Big)^2.$$

于是 $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k-1}{2}}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^n-1).$$

当 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{1, 2, 4, \cdots, 2^{n-1}\}$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}=\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k-1}{2}}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^n-1).$$

故 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}$ 的最小值为 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^n-1)$.

解法二 记 $b_1=1$, $b_2=2$, $\cdots$, $b_n=2^{n-1}$, 则 $b_1<b_2<\cdots<b_n$, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_i\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_i$, $1\leqslant i\leqslant n$.

首先容易证明下面的结论.

引理 设 $x, y\in\mathbf{R}^+$, 则 $\dfrac{x-y}{2\sqrt{x}}\leqslant\sqrt{x}-\sqrt{y}$, 当且仅当 $x=y$ 时等号成立.

利用上述引理,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i}=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i}-\sqrt{b_i})$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{2\sqrt{a_i}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{a_1}}-\frac{1}{2\sqrt{a_2}}\right)(a_1-b_1)+\left(\frac{1}{2\sqrt{a_2}}-\frac{1}{2\sqrt{a_3}}\right)(a_1+a_2-b_1-b_2)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2\sqrt{a_{n-1}}}-\frac{1}{2\sqrt{a_n}}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-b_1-b_2-\cdots-b_{n-1})\\
&\quad+\frac{1}{2\sqrt{a_n}}(a_1+a_2+\cdots+a_n-b_1-b_2-\cdots-b_n)\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

且当 $a_i=b_i$，$1\leqslant i\leqslant n$ 时等号成立，从而 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}$ 的最小值为 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^n-1)$.

例 14 设 $n>3$ 为给定的正整数，实数 x_1，x_2，…，x_{n+1}，x_{n+2} 满足 $0<x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}<x_{n+2}$，求

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{j+2}}{x_{j+1}}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_{k+1}^2+x_kx_{k+2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}^2+x_ix_{i+2}}{x_ix_{i+1}}}$$

的最小值，并讨论等号成立的条件.

解 令 $t_i=\frac{x_{i+1}}{x_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$，则原式等于

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})}.$$

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}\cdot\sqrt{t_i+t_{i+1}}\right)^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}.
\end{aligned}$$

所以最小值大于或等于 1.

由柯西不等式成立的条件,得

$$\frac{\frac{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}{t_i}}{\frac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}}=d\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

即
$$\frac{t_{i+1}}{t_i}=d-1=c,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

再令 $t_1=b$, $t_j=bc^{j-1}$, $1\leqslant j\leqslant n+1$, 相应地有

$$\frac{x_{j+1}}{x_j}=t_j=bc^{j-1},\ 1\leqslant j\leqslant n+1.$$

记 $x_1=a>0$, 得

$$x_k=t_{k-1}t_{k-2}\cdots t_1a=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}},\ 2\leqslant k\leqslant n+2.$$

因为 $x_2>x_1$, 所以 $b=\frac{x_2}{x_1}>1$.

又因为 $t_j=bc^{j-1}>1$, $1\leqslant j\leqslant n+1$, 所以

$$c>\sqrt[n]{\frac{1}{b}}\left(\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{1}{b}},\ 1\leqslant j\leqslant n+1\right).$$

故最小值为 1, 且当且仅当 $x_1=a$, $x_k=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\left(2\leqslant k\leqslant n+2\right.$, 其中 $\left.a>0,\ b>1,\ c>\sqrt[n]{\frac{1}{b}}\right)$ 时等号成立.

注 这个题目的表达形式看起来很复杂,但通过变量代换后,可以发现各项之间的关系,借助于柯西不等式,估计出它的下界.

4.3 柯西不等式在证明分式不等式中的应用

在各种不等式中,分式不等式的问题由于自身的特点,证明它们需要有较灵活的技巧和方法.对于分式型的不等式,通常运用柯西不等式的一些变形.

例 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数,求证:

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证明　由柯西不等式，得

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\right)(a_2+a_3+\cdots+a_1)$$
$$\geqslant\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\cdot\sqrt{a_2}+\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\cdot\sqrt{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{a_1}}\cdot\sqrt{a_1}\right)^2$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,$$

故
$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

例 2　已知正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n(n\geqslant 2)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}.$$

证明　因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{2-a_i}-1\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2-a_i}-n.$$

由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}(2-a_i)\right]\geqslant n^2.$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(2-a_i)}=\frac{n^2}{2n-1},$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geqslant\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}.$$

例 3　设 $a_i, b_i, i\geqslant 1$ 为正数，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

证明　由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，所以上式即为

$$2\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\Big)\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^2,$$

故命题成立.

例 4 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列,求证:

$$\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}.$$

证明 由柯西不等式,得

$$[(P_1+P_2)+(P_2+P_3)+\cdots+(P_{n-1}+P_n)]\cdot$$
$$\Big(\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\Big)\geqslant(n-1)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\\ \geqslant&\frac{(n-1)^2}{2(P_1+P_2+\cdots+P_n)-P_1-P_n}\\ =&\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-P_1-P_n}\\ \geqslant&\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-1-2}\\ =&\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)-1}\\ >&\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)}=\frac{n-1}{n+2}.\end{aligned}$$

例 5 设正数 x_i 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

证明 由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\geqslant n^2,$$

以及

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1\cdot\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}=\sqrt{n(n-1)},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\\&\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\\&\geqslant\frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}-\sqrt{n(n-1)}\\&=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

又由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{n},$$

故命题成立

例 6 设 a、b、c 是大于 -1 的实数,证明:

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geqslant 2.$$

证明 由假设我们有 $1+a^2$，$1+b^2$，$1+c^2$，$1+b+c^2$，$1+c+a^2$，$1+a+b^2$ 均大于零.

由柯西不等式,得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\right)\cdot[(1+a^2)(1+b+c^2)+\\&(1+b^2)(1+c+a^2)+(1+c^2)(1+a+b^2)]\\&\geqslant(1+a^2+1+b^2+1+c^2)^2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\\&\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2+3)^2}{(1+a^2)(1+b+c^2)+(1+b^2)(1+c+a^2)+(1+c^2)(1+a+b^2)}\\&=\frac{a^4+b^4+c^4+9+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+6a^2+6b^2+6c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2+b^2+c^2)+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c+3}\\&=2+\frac{a^4+b^4+c^4+3+2a^2+2b^2+2c^2-2(a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2+b^2+c^2)+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c+3}\end{aligned}$$

$$=2+\frac{(a^2-b)^2+(b^2-c)^2+(c^2-a)^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2+b^2+c^2)+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c+3}$$

$\geqslant 2$，

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

例 7 正数 a, b, c 满足 $abc=1$，n 为正整数，求证：

(a) $\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{1}{1+2b}+\dfrac{1}{1+2c}\geqslant 1$；

(b) $\dfrac{c^n}{a+b}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{a^n}{b+c}\geqslant \dfrac{3}{2}$.

证明 (a) 首先来证明

$$\frac{1}{1+2a}\geqslant\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}$$
$$\Leftrightarrow a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}\geqslant a^{-\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}\geqslant 2bc^{-\frac{1}{3}}$$

这是显然的.

同理有 $\dfrac{1}{1+2b}\geqslant\dfrac{b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}$，$\dfrac{1}{1+2c}\geqslant\dfrac{c^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}$.

所以 $\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{1}{1+2b}+\dfrac{1}{1+2c}\geqslant 1$.

(b) 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，那么 $a^{n-1}\geqslant b^{n-1}\geqslant c^{n-1}$，$\dfrac{a}{b+c}\geqslant\dfrac{b}{c+a}\geqslant\dfrac{c}{a+b}$.

由排序不等式得到

$$\frac{c^n}{a+b}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{a^n}{b+c}\geqslant\frac{ca^{n-1}}{a+b}+\frac{bc^{n-1}}{c+a}+\frac{ab^{n-1}}{b+c},$$
$$\frac{c^n}{a+b}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{a^n}{b+c}\geqslant\frac{cb^{n-1}}{a+b}+\frac{ba^{n-1}}{c+a}+\frac{ac^{n-1}}{b+c},$$

所以
$$\frac{c^n}{a+b}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{a^n}{b+c}$$
$$\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{b+c}\right)(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}),$$

而显然有 $a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\geqslant 3$，下面来证明 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{a}{b+c}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

即证
$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{b+c}\geqslant\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right)\geqslant 9.$$

这由柯西不等式可知是显然的.所以

$$\frac{c^n}{a+b}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{a^n}{b+c}$$
$$\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{b+c}\right)(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\geqslant\frac{3}{2}.$$

证毕.

例 8　证明:对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x, y, z 都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geqslant 0.$$

证明　注意到 $\frac{x(x+2)}{2x^2+1}=\frac{(2x+1)^2}{2(2x^2+1)}-\frac{1}{2}$ 等式子,所以原不等式等价于

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geqslant 3,$$

由柯西不等式,我们有

$$2x^2=\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}(y+z)^2\leqslant\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}(y^2+z^2),$$

所以

$$\sum\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}\geqslant 3\sum\frac{(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3}=3.$$

例 9　已知正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n>2)$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 证明:

$$\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_1+n-2}+\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2+n-2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{a_n+n-2}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}.$$

证明　由柯西不等式,知对于正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,有

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}.$$

又 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1\ (n>2)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+n-2)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(1-a_j)}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_i(1-a_j)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{a_i(1-a_j)}.$$

由已知得

$$a_i\in(0,1)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

于是,对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$a_i\geqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}{a_{i-1}a_j},$$

$$a_{j+1}\geqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}{a_{j-1}a_j},$$

其中,$i=1,2,\cdots,n,i\neq j,i\neq j+1,a_0=a_n$.

故
$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_i\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}{a_ia_j}\Rightarrow(1-a_j)\frac{a_j}{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{a_i},$$

即
$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{a_i(1-a_j)}\leqslant\frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_k}.$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+n-2)}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_k}.$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_k}{a_i+n-2}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{j=1}^{n}a_j=\frac{1}{(n-1)^2}.$$

例10 设 $n\geqslant 2$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数,满足:

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

证明：$\max\{a_1, \cdots, a_n\}\leqslant 4\min\{a_1, \cdots, a_n\}$.

证明　不妨设

$$m=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n=M,$$

要证 $M\leqslant 4m$.

当 $n=2$ 时，条件为

$$(m+M)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\leqslant\frac{25}{4}.$$

等价于

$$4(m+M)^2\leqslant 25mM,$$

即

$$(4M-m)(M-4m)\leqslant 0,$$

而

$$4M-m\geqslant 3M>0,$$

故 $M\leqslant 4m$.

当 $n\geqslant 3$ 时，利用柯西不等式可知

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2&\geqslant(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\&=(m+a_2+\cdots+a_{n-1}+M)\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{m}\right)\\&\geqslant\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\text{个}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2.\end{aligned}$$

故

$$n+\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}+n-2,$$

于是

$$\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\leqslant\frac{5}{2}.$$

从而

$$2(m+M)\leqslant 5\sqrt{mM},$$

同 $n=2$ 的情形可得 $M\leqslant 4m$. 命题获证.

例 11 设

$$f(x,y,z)=\frac{x(2y-z)}{1+x+3y}+\frac{y(2z-x)}{1+y+3z}+\frac{z(2x-y)}{1+z+3x},$$

其中 $x,y,z\geqslant 0$，且 $x+y+z=1$. 求 $f(x,y,z)$的最大值和最小值.

解 先证 $f\leqslant\frac{1}{7}$，当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时等号成立. 因为

$$f=\sum\frac{x(x+3y-1)}{1+x+3y}=1-2\sum\frac{x}{1+x+3y},\tag{41}$$

由柯西不等式

$$\sum\frac{x}{1+x+3y}\geqslant\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x(1+x+3y)}=\frac{1}{\sum x(1+x+3y)},$$

因为

$$\sum x(1+x+3y)=\sum x(2x+4y+z)=2+\sum xy\leqslant\frac{7}{3}.$$

从而

$$\sum\frac{x}{1+x+3y}\geqslant\frac{3}{7},$$

$$f\leqslant 1-2\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7},$$

$f_{\max}=\frac{1}{7}$，当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

再证 $f\geqslant 0$，当 $x=1$，$y=z=0$ 时等号成立.

事实上，

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\frac{x(2y-z)}{1+x+3y}+\frac{y(2z-x)}{1+y+3z}+\frac{z(2x-y)}{1+z+3x}\\&=xy\left(\frac{2}{1+x+3y}-\frac{1}{1+y+3z}\right)\\&\quad+xz\left(\frac{2}{1+z+3x}-\frac{1}{1+x+3y}\right)\end{aligned}$$

$$+yz\left(\frac{2}{1+y+3z}-\frac{1}{1+z+3x}\right)$$

$$=\frac{7xyz}{(1+x+3y)(1+y+3z)}+\frac{7xyz}{(1+z+3x)(1+x+3y)}+\frac{7xyz}{(1+y+3z)(1+z+3x)}\geqslant 0.$$

故 $f_{\min}=0$，当 $x=1$，$y=z=0$ 时等号成立.

另证：设 $z=\min\{x, y, z\}$，若 $z=0$，则

$$f(x, y, 0)=\frac{2xy}{1+x+3y}-\frac{xy}{1+y}=\frac{2xy}{2x+4y}-\frac{xy}{x+2y}=0.$$

下设 $x, y\geqslant z>0$，由(41)式，要证 $f\geqslant 0$，只要证

$$\sum\frac{x}{1+x+3y}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{42}$$

注意到

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{2x+4y}+\frac{y}{x+2y},$$

于是(42)等价于

$$\frac{z}{1+z+3x}\leqslant\left(\frac{x}{2x+4y}-\frac{x}{1+x+3y}\right)+\left(\frac{y}{x+2y}-\frac{y}{1+y+3z}\right)$$
$$=\frac{z}{2x+4y}\left(\frac{x}{1+x+3y}+\frac{8y}{1+y+3z}\right),$$

即
$$\frac{2x+4y}{1+z+3x}\leqslant\frac{x}{1+x+3y}+\frac{8y}{1+y+3z}. \tag{43}$$

而由柯西不等式，可得

$$\frac{x}{1+x+3y}+\frac{8y}{1+y+3z}=\frac{x^2}{x(1+x+3y)}+\frac{(2y)^2}{y(1+y+3z)/2}$$
$$\geqslant\frac{(x+2y)^2}{(x+x^2+3xy)+(y+y^2+3yz)/2}$$
$$=\frac{2x+4y}{1+z+3x},$$

即(43)成立，从而 $f\geqslant 0$，故 $f_{\min}=0$，当 $x=1$，$y=z=0$ 时等号成立.

例 12 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^{+}$，且 $x+y+z=1$，证明：

$$\sum_{x,y,z}\frac{x^{4}}{y(1-y^{2})}\geqslant\frac{1}{8}.$$

证明 左边 $\geqslant\dfrac{\left(\sum x^{2}\right)^{2}}{\sum y(1-y^{2})}\geqslant\dfrac{\left[\dfrac{\left(\sum x\right)^{2}}{3}\right]^{2}}{\sum x-\sum x^{3}}=\dfrac{\dfrac{1}{9}}{1-\sum x^{3}}$.

又 $$\sum x^{3}=\sum\frac{x^{4}}{x}\geqslant\frac{\left(\sum x^{2}\right)^{2}}{\sum x}\geqslant\left[\frac{\left(\sum x\right)^{2}}{3}\right]^{2}=\frac{1}{9},$$

所以，左边 $\geqslant\dfrac{\dfrac{1}{9}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{8}$，故原不等式成立.

例 13 设 $x, y, z, w\in\mathbf{R}^{+}$，证明：

$$\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}+\frac{w}{x+2y+3z}\geqslant\frac{2}{3}.$$

证明
$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sum\frac{x}{y+2z+3w}=\sum\frac{x^{2}}{x(y+2z+3w)}\\&\geqslant\frac{\left(\sum x\right)^{2}}{\sum x(y+2z+3w)}\\&=\frac{\left(\sum x\right)^{2}}{4\sum xy},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x-y)^{2}+(x-z)^{2}+(x-w)^{2}+(y-z)^{2}+(y-w)^{2}+(z-w)^{2}\\=&\ 3(x^{2}+y^{2}+z^{2}+w^{2})-2(xy+xz+xw+yz+yw+zw)\\=&\ 3(x+y+z+w)^{2}-8(xy+xz+xw+yz+yw+zw)\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\left(\sum x\right)^{2}}{\sum xy}\geqslant\frac{8}{3},$$

故原不等式成立.

例 14 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数，证明：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^2$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^2\right]\cdot n.$$

对 $k\geqslant 2$，有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2\\=&\frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_k^2)^2}\\\leqslant&\frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\cdots+x_k^2)}\\=&\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}.\end{aligned}$$

对于 $k=1$，有

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2\leqslant\frac{x_1^2}{1+x_1^2}=1-\frac{1}{1+x_1^2}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2\leqslant 1-\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<1,$$

从而

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2<n,$$

故命题成立.

例 15 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+(i\geqslant 1)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i}\leqslant 1.$$

证明 令 $y_i=\frac{1}{n-1+x_i}$，则 $x_i=\frac{1}{y_i}-(n-1)$，$0<y_i<\frac{1}{n-1}$.

如果 $\sum_{i=1}^{n} y_i > 1$，将证明 $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$，即等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{y_i}-(n-1)\right]<\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1-(n-1)y_i}.$$

对固定 i，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j} \frac{1-(n-1)y_i}{1-(n-1)y_j}\\
\geqslant&\frac{[1-(n-1)y_i](n-1)^2}{\sum\limits_{i\neq j}[1-(n-1)y_i]}\\
>&\frac{[1-(n-1)y_i](n-1)^2}{(n-1)y_i}=\frac{(n-1)[1-(n-1)y_i]}{y_i}.
\end{aligned}$$

对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} \frac{1-(n-1)y_i}{1-(n-1)y_j} \geqslant (n-1)\sum_{i=1}\left[\frac{1}{y_i}-(n-1)\right].$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} \frac{1-(n-1)y_i}{1-(n-1)y_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1)y_j}{1-(n-1)y_j},$$

故
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1-(n-1)y_i} > \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{y_j}-(n-1)\right].$$

4.4 柯西不等式在组合计数估计中的应用

在研究组合，特别是组合计数问题时，常常需要由给定的条件，对一些不等式进行估计. 如果能灵活地应用，柯西不等式在解决这些问题中能发挥很好的作用.

例 1 将 1650 个学生排成 22 行，75 列的方阵，已知任意给定的两列处于同一行的两个人中，性别相同的学生不超过 11 对，证明：男生的人数不超过 928.

解 设第 i 行的男生数为 x_i，则女生数为 $75-x_i$，依题意，得

$$\sum_{i=1}^{22}\left(C_{x_i}^2 + C_{75-x_i}^2\right) \leqslant 11 \times C_{75}^2.$$

于是 $$\sum_{i=1}^{22}(x_i^2-75x_i)\leqslant -30\,525,$$

即 $\sum_{i=1}^{22}(2x_i-75)^2\leqslant 1650$. 由柯西不等式，得

$$\left[\sum_{i=1}^{22}(2x_i-750)\right]^2\leqslant 22\sum_{i=1}^{22}(2x_i-75)^2\leqslant 36\,300,$$

因此 $\sum_{i=1}^{22}(2x_i-75)<191$，从而

$$\sum_{i=1}^{22}x_i<\frac{191+1650}{2}<921,$$

故男生的人数不超过 928.

例 2 在一群数学家中，每一个人都有一些朋友（关系是互相的）. 证明：存在一个数学家他所有的朋友的平均值不小于这群人的朋友的平均数.

证明 记 M 为这群数学家的集合，$n=|M|$，$F(m)$ 表示数学家 m 的朋友的集合，$f(m)$ 表示数学家 m 的朋友数（$f(m)=|F(m)|$）. 即命题等价于证明：必有一个 m_0 使

$$\frac{1}{f(m_0)}\sum_{m\in F(m_0)}f(m)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{m\in M}f(m).$$

我们用反证法来证明这个命题，如果不存在这样的数学家 m_0. 则对任意的 m_0，有

$$n\cdot\sum_{m\in F(m_0)}f(m)<f(m_0)\sum_{m\in M}f(m).$$

对一切 m_0 求和，得

$$n\cdot\sum_{m_0}\sum_{m\in F(m_0)}f(m)=n\sum_{m}\sum_{m\in F(m_0)}f(m)=n\sum_{m\in M}f^2(m)<\Big(\sum_{m\in M}f(m)\Big)^2.$$

这与柯西不等式矛盾，故命题成立.

例 3 设空间中有 $2n$ $(n\geqslant 2)$ 个点，其中任何 4 点都不共面. 在它们之间任意连接 N 条线段，这些线段都至少构成一个三角形. 求 N 的最小值.

解 将 $2n$ 个已知点均分为 A 和 B 两组：

$$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\},\ B=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}.$$

现将每对点 A_i 和 B_i 之间都连接一条线段 A_iB_i，而同组的任意两点之间不连线，则共有 n^2 条线段. 这时，$2n$ 个已知点中的任何 3 点中至少有两点属

于同一组，两者之间没有连线. 因而这 n^2 条线段不能构成任何三角形. 这表明 N 的最小值必大于 n^2. 由于 $2n$ 个点之间连有 n^2+1 条线段，平均每点引出 n 条线段还多，故可以猜想有一条线段的两个端点引出的线段之和不小于 $2n+1$. 下面证明 N 的最小值为 $2n+1$.

设从 A_1，A_2，…，A_{2n}引出的线段条数分别为 a_1，a_2，…，a_{2n}，且对于任一线段 A_iA_j 都有 $a_i+a_j\leqslant 2n$. 于是，所有线段的两端点所引出的线段条数之和不超过 $2n(n^2+1)$. 但在此计数中，A_i 点恰被计算了 a_i 次，故有

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \leqslant 2n(n^2+1).$$

另一方面，显然有 $$\sum_{i=1}^{2n} a_i = 2(n^2+1),$$

故由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^2 \leqslant 2n\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\right),$$

即 $$\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \geqslant \frac{1}{2n}\cdot 4(n^2+1)^2 > 2n(n^2+1).$$

于是矛盾，从而证明了必有一条线段，从它的两端点引出的线段数之和不小于 $2n+1$. 不妨设 A_1A_2 是一条这样的线段，从而又有 A_k $(k\geqslant 3)$，使线段 A_1A_k，A_2A_k 都存在，于是 $\triangle A_1A_2A_k$ 即为所求.

例 4 在 $m\times m$ 方格纸中，至少要挑出多少个小方格，才能使得这些小方格中存在四个小方格，它们的中心组成一个矩形的 4 个顶点，而矩形的边平行于原正方形的边.

解 所求的最小值为 $\left[\frac{m}{2}(1+\sqrt{4m-3})-1\right]+1$. 设最多能挑出 k 个小方格，使得这些小方格中不存在任何四个小方格，它们的中点组成一个矩形的 4 个顶点（矩形的边平行于原正方形的边）. 并假设位于第 i 行的有 k_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 个，则

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k.$$

设第 i 行的 k_i 个小方格位于这行的第 j_1，j_2，…，j_{k_i} 列，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{k_i}\leqslant m$. 如果第 r 行的第 j_p，j_q 列的两个方格已经挑出，则任意的第 s $(s\neq r)$ 行的 j_p，j_q 列的两个方格不能同时挑出，否则将组成一个矩形的 4 个顶点. 所以对于每个 i，考虑 j_1，j_2，…，j_{k_i} 中每两个的组合，可得到 $\mathrm{C}_{k_i}^2$ 个组

合. 对 $i=1, 2, \cdots, m$, 可得 $\sum C_{k_i}^2$ 个组合, 且其中任意两个不相同(即无重复), 这些组合都是 $1, 2, \cdots, m$ 中取两个的组合, 总数为 C_m^2. 所以

$$\sum_{i=1}^{m} C_{k_i}^2 \leqslant C_m^2,$$

即
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} k_i(k_i-1) \leqslant \frac{1}{2}m(m-1).$$

由 $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$, 得到 $\sum_{i=1}^{m} k_i^2 \leqslant m(m-1)+k$. 由柯西不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{m} k_i^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^2}{m} = \frac{k^2}{m}.$$

所以 $\frac{k^2}{m} \leqslant m(m-1)+k$, 故 $k \leqslant \frac{m}{2}(1+\sqrt{4m-3})$.

因此, 至少要挑出 $\left[\frac{m}{2}(1+\sqrt{4m-3})-1\right]+1$ 个小方格.

例 5 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{30}$ 是集 $\{1, 2, \cdots, 2003\}$ 的子集, 且 $|A_i| \geqslant 660$ $(i=1, 2, \cdots, 30)$. 证明: 存在 $i, j \in \{1, 2, \cdots, 30\}$, $i \neq j$, 使得

$$|A_i \cap A_j| \geqslant 2003.$$

证明 不妨设每个 A_i 的元素都为 660 个(否则去除一些元素), 我们作一个集合、元素的关系表: 表中每一行(除最上面的一行)表示 30 个集合, 表的 n 列(最左面一列除外)表示 2003 个元素 $1, 2, \cdots, 2003$. 如果 $i \in A_j (i=1, 2, \cdots, 2003, 1 \leqslant j \leqslant 30)$, 则在 i 所在的列与 A_j 所在的交叉处填上 1, 如果 $i \notin A_j$, 则写上 0. 表中每一行有 660 个 1, 因此共有 30×660 个 1. 第 j 列有 m_j 个 1 $(j=1, 2, \cdots, 2003)$, 则

$$\sum_{j=1}^{2003} m_j = 30 \times 660.$$

由于每个元素 j 属于 $C_{m_j}^2$ 个交集 $A_s \cap A_t$, 因此

$$\sum_{j=1}^{2003} C_{m_j}^2 = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant 30} |A_s \cap A_t|.$$

由柯西不等式, 得

$$\sum_{j=1}^{2003} C_{m_j}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right) \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_i\right)^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right].$$

所以，必有 $i\neq j$，满足

$$|A_i\cap A_j|\geqslant\frac{1}{C_{30}^2}\times\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003}m_j\right)^2-\sum_{j=1}^{2003}m_j\right]$$
$$=\frac{660(30\times660-2003)}{29\times2003}>2002,$$

故 $|A_i\cap A_j|\geqslant2003.$

例6 给定平面上的 n 个相异点. 证明：其中距离为单位长的点对少于$2\sqrt{n^3}$对.

证明 对于平面上的点集$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，令 a_i 为与P_i 相距为单位长的点 P_i 的个数. 不妨设 $a_i\geqslant1$，则相距为单位长的点对的对数是

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

设 C_i 是以点 P_i 为圆心，以 1 为半径的圆.

因为每对圆至多有 2 个交点，故所有的 C_i 至多有

$$2C_n^2=n(n-1)$$

个交点.

点 P_i 作为C_j 的交点出现 $C_{a_j}^2$ 次，因此

$$n(n-1)\geqslant\sum_{j=1}^{n}C_{a_j}^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(a_j-1)}{2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(a_j-1)^2.$$

由柯西不等式，得

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(a_j-1)\right]^2\leqslant n\cdot\sum_{j=1}^{n}(a_j-1)^2\leqslant n\cdot2n(n-1)<2n^3,$$

于是
$$\sum_{j=1}^{n}(a_j-1)<\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^3},$$

从而
$$A=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}{2}<\frac{n+\sqrt{2n^3}}{2}<2\sqrt{n^3},$$

故命题成立.

例7 在三维空间中给定一点 O 以及由总长度为 1988 的若干条线段组成的有限集 A，证明：存在一个平面与集 A 不相交且到点 O 的距离不超过 574.

证明　以点 O 为原点建立直角坐标系，并将所给的线段分别向 3 条坐标轴投影. 设 A 中共有 n 条线段且它们在 3 条轴上的投影长分别为

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

记 $x=\sum x_i$, $y=\sum y_i$, $z=\sum z_i$. 于是，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \left(\sum x_i\right)^2+\left(\sum y_i\right)^2+\left(\sum z_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)(x_j^2+y_j^2+z_j^2)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}\right)^2=1988^2. \end{aligned}$$

不妨设 $x=\min\{x,\ y,\ z\}$，于是

$$x\leqslant\frac{1988}{\sqrt{3}}<2\times 574.$$

从而在 x 轴上的区间 $[-574,\ 574]$ 内必有一点不在 n 条给定线段的投影上，过这点作与 x 轴垂直的平面便满足题中的要求.

例 8　设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系，S 是空间中一个有限点集，S_x，S_y，S_z 分别是 S 中所有点在 Oyz 平面，Ozx 平面和 Oxy 平面上的正投影所成的集合. 求证：

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

说明　所谓一个点在一个平面上的正投影是指由点向平面所作垂线的垂足.

证明　设共有 n 个平行于 Oxy 平面的平面上有 S 中的点，这些平面分别记为 M_1，M_2，…，M_n. 对于平面 M_i，$1\leqslant i\leqslant n$，设它与 Ozx，Ozy 平面分别交于直线 l_y 和 l_x，并设 M_i 上有 m_i 个 S 中的点. 显然，$m_i\leqslant|S_z|$.

设 M_i 上的点在 l_x，l_y 上的正投影的集合分别为 A_i 和 B_i，记 $a_i=|A_i|$，$b_i=|B_i|$，则有 $m_i\leqslant a_ib_i$. 又因为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=|S_y|,\ \sum_{i=1}^{n}b_i=|S_x|,\ \sum_{i=1}^{n}m_i=|S|,$$

从而由柯西不等式，得

$$
\begin{aligned}
|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z| &= \left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot|S_z| \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2\cdot|S_z| \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i\,|S_z|}\right)^2 \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)^2 = |S|^2.
\end{aligned}
$$

得证.

4.5　带参数的柯西不等式

如果 $a_i, b_i \in \mathbf{R}, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}b_i^2.$$

例 1　已知正实数 a、b、c、d 满足

$$a(c^2-1) = b(b^2+c^2),$$

且 $d \leqslant 1$. 证明：

$$d(a\sqrt{1-d^2}+b^2\sqrt{1+d^2}) \leqslant \frac{(a+b)c}{2}.$$

证明　设参数 $\lambda > 1$，由柯西不等式得

$$
\begin{aligned}
& d(a\sqrt{1-d^2}+b^2\sqrt{1+d^2}) \\
\leqslant\ & d\sqrt{\left(\frac{a^2}{\lambda}+b^4\right)[(1-d^2)\lambda+(1+d^2)]} \\
=\ & \sqrt{\left(\frac{a^2}{\lambda}+b^4\right)[(1-\lambda)d^4+(\lambda+1)d^2]} \\
\leqslant\ & \sqrt{\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{a^2}{\lambda}+b^4\right)}\cdot\frac{\lambda+1}{2}.
\end{aligned}
$$

由已知条件知 $c^2 = \dfrac{a+b^3}{a-b}$. 故 $a > b$，取 $\lambda = \dfrac{a}{b}$. 则

$$\frac{\lambda+1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{a^2}{\lambda}+b^4\right)} = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{a+b^3}{a-b}} = \frac{(a+b)c}{2}.$$

所以，命题得证.

例 2 设 $p, q \in \mathbf{R}^+$，$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，试求

$$\frac{p}{\sqrt{\sin x}}+\frac{q}{\sqrt{\cos x}}$$

的最小值.

解 由柯西不等式，得

$$(\sqrt{pm}+\sqrt{qn})^2 \leqslant \left[\frac{p}{\sqrt{\sin x}}+\frac{q}{\sqrt{\cos x}}\right](m\sqrt{\sin x}+n\sqrt{\cos x}),$$

当且仅当 $\dfrac{\frac{p}{\sqrt{\sin x}}}{m\sqrt{\sin x}}=\dfrac{\frac{q}{\sqrt{\cos x}}}{n\sqrt{\cos x}}$ 时，等号成立. 故

$$\tan x=\frac{np}{mq}.$$

又
$$\begin{aligned}(m\sqrt{\sin x}+n\sqrt{\cos x})^2&=\left(\frac{m}{a}\cdot a\sqrt{\sin x}+\frac{n}{b}\cdot b\sqrt{\cos x}\right)^2\\&\leqslant\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)(a^2\sin x+b^2\cos x)\\&\leqslant\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{a^4+b^4},\end{aligned}$$

当且仅当 $\tan x=\dfrac{a^2}{b^2}$，$\dfrac{a^2\sin x}{\frac{m^2}{a^2}}=\dfrac{b^2\cos x}{\frac{n^2}{b^2}}$ 时，即 $\tan x=\dfrac{b^4m^2}{a^4n^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ 时，等号成立. 故

$$\frac{m}{n}=\frac{a^3}{b^3},\ \tan x=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

且
$$m\sqrt{\sin x}+n\sqrt{\cos x}\leqslant(m^{\frac{4}{3}}+n^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}},$$

从而
$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{np}{mq},$$

即
$$\frac{m}{n}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

令 $m=p^{\frac{3}{5}}$，$n=q^{\frac{3}{5}}$，得

$$\frac{p}{\sqrt{\sin x}}+\frac{q}{\sqrt{\cos x}}\geqslant\frac{(\sqrt{pm}+\sqrt{nq})^2}{(m^{\frac{4}{3}}+n^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}}=(p^{\frac{4}{5}}+q^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}},$$

当且仅当 $\tan x=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{5}}$ 时，等号成立.

注　这里，在两次利用柯西不等式时，引进了参数 n、m、a、b.

例 3　(1) 设 3 个正实数 a、b、c 满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4),$$

求证：a、b、c 一定是某个三角形的 3 条边长；

(2) 设 n 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4).$$

求证：这些数中任意 3 个一定是某个三角形的 3 条边长.

证明　(1) 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，由题设，得

$$(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)>0.$$

分解因式，得

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0,$$

所以 $b+c-a>0$，即 $b+c>a$，从而 a, b, c 是某个三角形的 3 条边长；

(2) 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任取 3 个，不妨设为 a_1, a_2, a_3. 由带参数的柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&(n-1)\left(\sum a_i^4\right)\\&<\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\\&=\left[\lambda(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot\frac{1}{\lambda}+\sum_{i=4}^{n}a_i^2\right]^2\\&\leqslant\left[\lambda^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2+\sum_{i=4}^{n}a_i^4\right]\left(\frac{1}{\lambda^2}+n-3\right).\end{aligned}$$

令 $\frac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1$，即 $\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}}$，所以

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

由(1)知，a_1, a_2, a_3 为某个三角形的三边长.

例 4　设 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是两个不成比例的

实数序列，又设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是使

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$$

成立的任意实数序列. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{A}{AB - C^2},$$

其中 $A=\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B=\sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $C=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

证明　对任意实数 λ，由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\sum_{i=1}^{n}(a_i\lambda - b_i)^2 \geqslant \left(\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)^2 = 1.$$

从而
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)(A\lambda^2 - 2C\lambda + B) \geqslant 1,$$

即对任意实数 λ，有

$$A\lambda^2 - 2C\lambda + B - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant 0.$$

于是
$$\Delta = 4C^2 - 4AB + \frac{4A}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant 0,$$

故命题成立.

注　该不等式的证明，也可通过构造一个新的序列 $\{y_i\}$：

$$y_i = \frac{Ab_i - Ca_i}{AB - C^2},\ i \geqslant 1,$$

则 $\{y_i\}$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{A}{AB - C^2},\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{A}{AB - C^2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2,$$

从而命题成立.

4.6 利用平均值不等式与柯西不等式解题

例 1 设 a, b, c 为实数,满足 $a^2+2b^2+3c^2=\frac{3}{2}$,求证:

$$3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant 1.$$

证明 由平均值不等式,得

$$3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant 3\sqrt[3]{3^{-a-2b-3c}}=3^{\frac{3-a-2b-3c}{3}}.$$

再由柯西不等式,得

$$\begin{aligned}(a+2b+3c)^2&=(a+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}b+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}c)^2\\&\leqslant(1+2+3)(a^2+2b^2+3c^2)\\&=6\cdot\frac{3}{2}=9.\end{aligned}$$

从而 $a+2b+3c\leqslant 3$, $3-a-2b-3c\geqslant 0$, $3^{\frac{3-a-2b-3c}{3}}\geqslant 3^0=1$. 故命题成立.

例 2 求

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$

的最大值.

解 由柯西不等式,得

$$|x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}|^2\leqslant(x^2+y^2)(2-x^2-y^2).$$

再由平均值不等式,得

$$|x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}|\leqslant\frac{x^2+y^2+2-x^2-y^2}{2}=1.$$

若 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1,$$

于是所求的最大值为 1.

例 3 设 a, b, c 为正数,且满足 $abc=1$,求证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

证明　由柯西不等式,得

$$\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right]\cdot[a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)]$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=(ab+bc+ac)^2,$$

所以由平均值不等式,得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\\ \geqslant&\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\\ \geqslant&\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

例 4　设 x_i, $i=1,2,\cdots,n$ 为正数,且满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$, $a\in\mathbf{R}^+$, m, $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 2$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{a-x_i}\geqslant\frac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-2}}.$$

证明　当 $m=1$ 时,即证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a-x_i}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a}{a-x_i}\right)-1\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{a-x_i}-n,$$

由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{a-x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a-x_i)\geqslant an^2,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{a-x_i}\geqslant\frac{an^2}{\sum_{i=1}^{n}(a-x_i)}=\frac{an^2}{(n-1)a},$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a-x_i}\geqslant\frac{an^2}{na-a}-n=\frac{n}{n-1},$$

于是命题成立.

当 $m\geqslant 2$ 时,由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{a-x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a-x_i)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{m}{2}}\right)^2.$$

再由幂平均值不等式,得

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{m}{2}}\right)^2\geqslant\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{m}{2}}\right]^2=\frac{a^m}{n^m}.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}(a-x_i)=(n-1)a$,于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{a-x_i}\geqslant\frac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-2}}.$$

例 5　设实数 x_i 满足 $|x_i|<1\ (i=1,2,\cdots,n)$, $n\geqslant 2$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-|x_i|^n}\geqslant\frac{n}{1-\prod_{i=1}^{n}x_i}.$$

证明　由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-|x_i|^n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(1-|x_i|^n)\geqslant n^2.$$

因此欲证原不等式只要证明

$$\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(1-|x_i|^n)}\geqslant\frac{n}{1-\prod_{i=1}^{n}x_i},$$

即证
$$n-n\prod_{i=1}^{n}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}(1-|x_i|^n),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^n\geqslant n\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

由平均值不等式知上述不等式成立,故原命题成立.

例 6　已知正数 x_i 满足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$,证明:

$$\prod_{i=1}^{n}x_i\geqslant(n-1)^n.$$

证明　由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{x_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{x_ix_j}}.$$

再由平均值不等式，得

$$n\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{x_ix_j}}\geqslant 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^{n-1}},$$

由此得到
$$\prod_{i=1}^{n}x_i\geqslant(n-1)^n.$$

例 7　设 $x, y, z\geqslant 0$，且 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$$\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-xz}+\frac{z}{1-xy}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

解　设 $S=\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-xz}+\frac{z}{1-xy}$，如果 $x=0(y=0$ 或 $z=0)$，则

$$S=y+z<2<\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

所以设 $xyz\neq 0$，使得 $x, y, z\in(0, 1)$. 因为

$$\frac{x}{1-yz}=x+\frac{zyx}{1-yz},$$

所以
$$S=x+y+z+xyz\left(\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}+\frac{1}{1-xy}\right).$$

因为
$$\begin{aligned}1-yz&\geqslant 1-\frac{1}{2}(y^2+z^2)\\&=\frac{1}{2}(1+x^2)\\&=\frac{1}{2}(2x^2+y^2+z^2)\\&\geqslant 2\sqrt[4]{x^2x^2y^2z^2}=2x\sqrt{yz},\end{aligned}$$

由平均值不等式，得

$$\begin{aligned}&xyz\left(\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}+\frac{1}{1-yx}\right)\\&\leqslant\frac{xyz}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{zx}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy})\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(x+y+z).\end{aligned}$$

再由柯西不等式，得

$$S\leqslant\frac{3}{2}(x+y+z)\leqslant\frac{3}{2}(1^2+1^2+1^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

故命题成立.

例 8 设 $a,b,c>0$，求证：

$$\sum\sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}}\geqslant 3\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}.$$

证明 由柯西不等式及均值不等式有

$$\begin{aligned}5a^2+8b^2+5c^2&\geqslant 4(a^2+b^2)+4(b^2+c^2)\\&\geqslant 2(a+b)^2+2(b+c)^2\\&\geqslant 4(a+b)(b+c),\end{aligned}$$

所以

$$\sum\sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}}\geqslant\sum\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}\geqslant 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

只需要证明

$$\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}\geqslant\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

等价于 $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$，即 $\sum a(b-c)^2\geqslant 0$，明显成立.

例 9 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$，$a_2>0$，$a_{n+2}=\frac{2}{a_n+a_{n+1}}$. $M_n=\max\left\{a_n,\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}},a_{n+1}\right\}$. 求证：

$$M_{n+3}\leqslant\frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4}.$$

证明 由于

$$M_{n+3}=\max\left\{a_{n+3},a_{n+4},\frac{1}{a_{n+3}},\frac{1}{a_{n+4}}\right\},$$

我们需证

$$a_{n+3}\leqslant\frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4},$$

$$a_{n+4}\leqslant\frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{a_{n+3}} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{a_{n+4}} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}.$$

由于

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= \frac{2}{a_{n+1}+a_{n+2}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}a_n \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[\min\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\max\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]+\frac{1}{4}M_n+\frac{1}{4}M_n \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1+M_n)+\frac{1}{2}M_n \\
&= \frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+3}} &= \frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n+a_{n+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{4} \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left(a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\max\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\min\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{4}(M_n+1)+\frac{1}{4}\cdot 2M_n \\
&= \frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= \frac{2}{a_{n+2}+a_{n+3}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}}}{2} \\
&= \frac{a_n+a_{n+1}}{4}+\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{4} \\
&= \frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n+a_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\
&=\frac{1}{8}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{8}\left(a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}a_{n+1}\\
&=\frac{1}{8}\left[\max\left(a_n,\frac{1}{a_n}\right)+\min\left(a_n,\frac{1}{a_n}\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{8}\left[\max\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\min\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]+\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}a_{n+1}\\
&\leqslant \frac{1}{8}(M_n+1)+\frac{1}{8}(M_n+1)+\frac{1}{8}M_n+\frac{3}{8}M_n\\
&=\frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+4}}&=\frac{a_{n+2}+a_{n+3}}{2}=\frac{1}{a_n+a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\\
&\leqslant \frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{4}+\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}}{4}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_{n+2}}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{8}(a_n+a_{n+1})\\
&=\frac{1}{8}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{8}\left(a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\\
&=\frac{1}{8}\left[\max\left(a_n,\frac{1}{a_n}\right)+\min\left(a_n,\frac{1}{a_n}\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{8}\left[\max\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\min\left(a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\\
&\leqslant \frac{1}{8}(M_n+1)+\frac{1}{8}(M_n+1)+\frac{1}{8}M_n+\frac{3}{8}M_n\\
&=\frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

因此，$M_{n+3}\leqslant \frac{3}{4}M_n+\frac{1}{4}$.

注 当 $x, y>0$ 时，$x+y=\max(x, y)+\min(x, y)$；当 $x>0$ 时，$\min\left(x, \frac{1}{x}\right)\leqslant 1$.

例 10 已知正实数 x、y、z 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. 求证：

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geqslant 1.$$

证明　证法 1　注意到

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\\=&\frac{x^2-x(y+z)+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\\=&\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}\\\geqslant&\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}.\end{aligned}$$

同理，

$$\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\geqslant\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2},$$

$$\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geqslant\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

以上三式相加得

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\\\geqslant&\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\\=&\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+1.\end{aligned}$$

从而，只需证明

$$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geqslant 0.$$

不失一般性，设 $x\geqslant y\geqslant z$. 于是，

$$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geqslant 0,$$

且
$$\begin{aligned}&\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\\=&\frac{(y-z)(x-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\\\geqslant&\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\\=&(y-z)(x-y)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right].\qquad(44)\end{aligned}$$

事实上，由
$$y^2(z+x)=y^2z+y^2x\geqslant yz^2+z^2x=z^2(x+y)$$
可知式(44)非负.

从而，题中不等式成立.

证法 2　根据柯西不等式得
$$\begin{aligned}&\left[\frac{x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]\cdot\\&\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\\\geqslant&(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=1\end{aligned}$$
和
$$\begin{aligned}&\left[\frac{yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]\cdot\\&\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\\\geqslant&\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2.\end{aligned}$$

以上两式相加得
$$\begin{aligned}&\left[\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]\cdot\\&\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\\\geqslant&1+\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2\\\geqslant&2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right).\end{aligned}$$

从而，只需证明

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)$$
$$\geqslant\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}.$$

根据均值不等式得

$$\left[\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\right]^2$$
$$\geqslant 4\sqrt{\frac{yz}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)=2(y+z),$$

即
$$\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right)\geqslant\sqrt{2(y+z)}.$$

同理，

$$\sqrt{\frac{zx}{y}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)\geqslant\sqrt{2(z+x)},$$
$$\sqrt{\frac{xy}{2}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)\geqslant\sqrt{2(x+y)}.$$

以上三式相加得

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)$$
$$\geqslant\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}.$$

从而，题中不等式成立.

例 11　设正整数 $n\geqslant 2$. 求常数 $C(n)$的最大值，使得对于所有满足 $x_i\in(0,1)\ (i=1,2,\cdots,n)$，且$(1-x_i)(1-x_j)\geqslant\frac{1}{4}(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的实数 x_1，x_2，…，x_n，均有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant C(n)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(2x_ix_j+\sqrt{x_ix_j}).\tag{45}$$

解　首先，取 $x_i=\frac{1}{2}\ (i=1,2,\cdots,n)$. 代入式(45)有

$$\frac{n}{2}\geqslant C(n)C_n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

于是，$C(n)\leqslant\frac{1}{n-1}$.

下面证明：$C(n)=\dfrac{1}{n-1}$ 满足条件.

由 $1-x_i+1-x_j\geqslant 2\sqrt{(1-x_i)(1-x_j)}\geqslant 1\ (1\leqslant i<j\leqslant n)$，得 $x_i+x_j\leqslant 1$.

取和得 $(n-1)\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\leqslant C_n^2$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\leqslant\dfrac{n}{2}$.

故

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(2x_ix_j+\sqrt{x_ix_j})\\
=&\frac{1}{n-1}\Big(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{x_ix_j}\Big)\\
=&\frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2-\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{x_ix_j}\Big]\\
\leqslant&\frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i+x_j}{2}\Big]\\
=&\frac{1}{n-1}\Big[\frac{n-1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2+\frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k\Big]\\
=&\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k\\
\leqslant&\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k\\
=&\sum_{k=1}^{n}x_k.
\end{aligned}$$

从而，原不等式成立.

因此，$C(n)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{n-1}$.

例 12　给定整数 $n\geqslant 2$ 和正实数 a，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 求最小的实数 $M=M(n, a)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}\leqslant M$$

恒成立，其中 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

解　首先考虑 $a\geqslant 1$ 的情况，令 $x_i=y_i^n$，$y_i>0$，于是 $y_1y_2\cdots y_n=1$，我们有

$$S-x_i=\sum_{j\neq i}y_j^n\geqslant(n-1)\left[\frac{\sum\limits_{j\neq i}y_j}{n-1}\right]^n\text{（幂平均不等式）}$$

$$\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{\sum\limits_{j\neq i} y_j}{n-1}}\cdot\prod_{j\neq i} y_j \text{(算术平均} \geqslant \text{几何平均)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{j\neq i} y_j}{y_i}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{ay_i+\sum\limits_{j\neq i}y_j}. \tag{46}$$

当 $a=1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{ay_i+\sum\limits_{j\neq i}y_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}y_j}=1.$$

且当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}=1$，此时 $M=1$.

下面假设 $a>1$. 令 $z_i=\frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}y_j}$，$i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=1$.

$$\frac{y_i}{ay_i+\sum\limits_{j\neq i}y_j}=\frac{y_i}{(a-1)y_i+\sum\limits_{j=1}^{n}y_j}$$

$$=\frac{z_i}{(a-1)z_i+1}$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[1-\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right]. \tag{47}$$

由柯西不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}[(a-1)z_i+1]\right\}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right]\geqslant n^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}[(a-1)z_i+1]=a-1+n,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a-1)z_i+1}\geqslant\frac{n^2}{a-1+n}. \tag{48}$$

结合(46)、(47)、(48)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right)\right]\\&\leqslant\frac{n}{a-1}-\frac{1}{a-1}\cdot\frac{n^2}{a-1+n}\\&=\frac{n}{a-1+n}.\end{aligned}$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}=\frac{n}{a-1+n},$$

故 $M=\dfrac{n}{a-1+n}$.

下面考虑 $a<1$ 的情况：对任何常数 $\lambda>0$，函数

$$f(x)=\frac{x}{x+\lambda}=1-\frac{\lambda}{x+\lambda}$$

在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增，故 $f(a)<f(1)$，即 $\dfrac{a}{a+\lambda}<\dfrac{1}{1+\lambda}$. 于是由 $a=1$ 时的结论，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{a+S-x_i}<\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+S-x_i}\leqslant\frac{1}{a},$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\varepsilon\to0^+$，而 $x_n=\varepsilon^{1-n}\to+\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}\\=&\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{n-1}{a+\varepsilon^{1-n}+(n-2)\varepsilon}+\frac{1}{a+(n-1)\varepsilon}\right]\\=&\frac{1}{a},\end{aligned}$$

故 $M=\dfrac{1}{a}$，综上所述，

$$M=\begin{cases}\dfrac{n}{a-1+n}, & 若\ a\geqslant1,\\[2mm] \dfrac{1}{a}, & 若\ 0<a<1.\end{cases}$$

习 题 4

1 已知非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2=1$. 证明：

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+\cdots+a_{100}^2a_1<\frac{12}{25}.$$

2 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z\geqslant 6$. 求

$$M=\sum x^2+\sum\frac{x}{y^2+z+1}$$

的最小值,其中,“$\sum$”表示轮换对称和.

3 设 x、y、z 为正实数,满足

$$xy+yz+zx=x+y+z.$$

证明：$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\leqslant 1$，并确定等号成立的条件.

4 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$. 证明：

$$\sum\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}<\sum\frac{4x^2+y^2}{x^2+4y^2}<9,$$

其中,“$\sum$”表示轮换对称和.

5 设 $a, b, c>0$ 且 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

6 已知 λ 为正实数. 求 λ 的最大值,使得对于所有满足条件

$$u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geqslant 1$$

的正实数 u、v、w,均有

$$u+v+w\geqslant\lambda.$$

7 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，$x_{n+1}=x_1+x_2+\cdots+x_n$，证明：

$$x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\right)^2.$$

8 设 $x, y, z, w \in \mathbf{R}^+$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\theta$ 满足 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 求证：

$$(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta)^2 \leqslant \frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw},$$

当且仅当 $x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$ 时等号成立.

9 已知 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$，对于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任意排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 令 $M=\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$，求使 M 取值最大的排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

10 设复数 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，$k=1, 2, \cdots, n$，x_i 和 y_i 为实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 令 r 表示 $\sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$ 的实部的绝对值，求证：

$$r\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

11 设 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$a_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 求证：

$$\left(A_n-\frac{1}{A_n}\right)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{a_i}\right)^2.$$

12 对满足 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant t$ 的一切实数 r、s、t. 求

$$w=(r-1)^2+\left(\frac{s}{r}-1\right)^2+\left(\frac{t}{s}-1\right)^2+\left(\frac{4}{t}-1\right)^2$$

的最小值.

13 设 $a_i>0$，$b_i>0$，$a_ib_i-c_i^2>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i-c_i^2}.$$

14 设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$，$a_i\geqslant 0$，$0\leqslant b_i\leqslant p$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}a_j\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

15 已给自然数 $n\geqslant 2$，求最小正数 λ，使得对任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，及 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 中任意 n 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，只要

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1,$$

就有

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

16 已给两个大于 1 的自然数 n 和 m，求所有的自然数 l，使得对任意正数 a_1，a_2，…，a_n，都有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)<m^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k},$$

其中，$S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$.

17 设 u、v 是正实数，对于给定的正整数 n，求：u、v 满足的充分必要条件，使得存在实数 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = u,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = v,$$

当这些数存在时，求 a_1 的最大值与最小值.

18 设 m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数之和为 1 987，对所有这样的 m 与 n，$3m+4n$ 的最大值是多少？

19 设 $x_i \in \mathbf{R}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$，求证：对任一整数 $k \geqslant 3$ 存在不全为零的整数 a_i，$|a_i| \leqslant k-1$. 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

20 设 $s, t, u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，满足 $s+t+u+v=\pi$，证明：$\frac{\sqrt{2}\sin s-1}{\cos s}+\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\cos t}+\frac{\sqrt{2}\sin u-1}{\cos u}+\frac{\sqrt{2}\sin v-1}{\cos v} \geqslant 0$.

21 证明：

$$\sqrt{\frac{AB_1}{AB}}+\sqrt{\frac{BC_1}{BC}}+\sqrt{\frac{CA_1}{CA}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}},$$

其中，A_1、B_1、C_1 分别为△ABC 的内切圆与边 BC、AC、AB 的切点.

22 a_1，a_2，a_3，a_4 是周长为 $2s$ 的四边形的四边长，证明：$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i+s} \leqslant \frac{2}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}}$.

23 设 a、b、c 是一个三角形的三边长. 证明：

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leqslant 3.$$

习题解答

习题 1

1. $1=a+2b=a+b+b\geqslant 3\sqrt[3]{ab^2}$，故 $\frac{1}{\sqrt[3]{ab^2}}\geqslant 3$. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}}\geqslant 3\times 3=9$.

2. 由均值不等式得 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}}=8$.

3. 设 $A=a(1-a^2)$，则 $A^2=\frac{1}{2}\cdot 2a^2(1-a^2)(1-a^2)\leqslant\frac{4}{27}$，则 $A\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}$，所以 $\frac{a}{1-a^2}=\frac{a^2}{a(1-a^2)}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，同理可得其他二式，则左边 $\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(ab+bc+ca)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. 证法 1　注意到 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 1+\frac{6}{a+b+c}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant a+b+c+6$. 由均值不等式知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3$，$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$. 故 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant a+b+c\cdots$①，$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\times 3\sqrt[3]{abc}=6\cdots$②. 将①、②相加得 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant a+b+c+6$. 因此，原命题成立.

证法 2　考虑如下两种情形.（1）当 $a+b+c\geqslant 3$ 时，由于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant$

$\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3$，则 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant 3(a+b+c)\geqslant a+b+c+6$.

(2) 当 $a+b+c<3$ 时，则 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\times 3\sqrt[3]{abc}=9>a+b+c+6$. 综上，原命题成立.

5. 注意到 $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\geqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3(x^2-xy+y^2)\geqslant x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2(x-y)^2\geqslant 0$. 则 $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}(x+y)\geqslant\frac{x+y}{3}$. 故 $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\geqslant\frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}(y+z)+\frac{1}{3}(z+x)=\frac{2}{3}(x+y+z)\geqslant 2\sqrt[3]{xyz}=2$.

6. 因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，所以由均值不等式可得 $1+a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_i\geqslant(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_i)^{1/(n+1)}$，$1-a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n-a_i\geqslant(n-1)(a_1a_2\cdots a_n/a_i)^{1/(n-1)}$. 取 $i=1,2,\cdots,n$ 再将之分别累积后得 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i^2)\geqslant(n^2-1)^n\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^2$，从而 $\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n$.

7. 由条件等式有 $(a+b+c)^2=9$. 于是 $ab+bc+ca=\frac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$. 只需证明 $2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geqslant 9$ 为此先证 $2\sqrt{a}+a^2\geqslant 3a$. 事实上，$2\sqrt{a}+a^2=\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^3}=3a$. 类似可得其余两个不等式，从而就有 $2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geqslant 3(a+b+c)=9$.

8. 设 $\frac{1}{x}=a$，$\frac{1}{y}=b$，$\frac{1}{z}=c$，代入已知条件等式得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，即 $abc=ab+bc+ca$，由均值不等式易得到 $abc\geqslant 27$，所以，$\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)\left(\frac{1}{z}-z\right)=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)=\frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc}=\frac{1}{abc}(a^2b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+a^2+b^2+c^2-1)=\frac{1}{abc}[(ab+bc+ca)^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+a^2+b^2+c^2-1]=\frac{1}{abc}[2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+a^2+b^2+c^2-1]\geqslant\frac{1}{abc}[2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+ab+bc+ca-1]=2(a+b+c)+1-\frac{1}{abc}\geqslant 6\sqrt[3]{abc}+1-\frac{1}{abc}\geqslant 6\times 3+1-\frac{1}{27}=\frac{512}{27}=\left(\frac{8}{3}\right)^3$.

9. 证明：显然原不等式等价于 $\dfrac{1+x_1+x_1^2}{x_1(1+x_1)}+\dfrac{1+x_2+x_2^2}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\dfrac{1+x_n+x_n^2}{x_n(1+x_n)}\geqslant\dfrac{3n}{2}$. 注意到 $4(1+x_i+x_i^2)\geqslant 3(1+x_i)^2$ 对任意的 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立，因此要证明上式只需证明 $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1+x_1}{x_1}+\dfrac{1+x_2}{x_2}+\cdots+\dfrac{1+x_n}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{3n}{2}$，即 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\geqslant n\cdots$③. 由 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 及均值不等式易知③成立.

10. 证明：由 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$ 可知 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\leqslant 2$，因此 $\dfrac{2(ab+1)}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$ 即 $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\right)\cdots$④. 同理可得 $\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}\right)$，$\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\right)\cdots$⑤. 另外由均值不等式显然有 $\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\geqslant 3\cdots$⑥. 综合④⑤⑥可得 $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3$.

11. 证明：注意到 $\dfrac{a^2+2}{2}=\dfrac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2}\geqslant\sqrt{(a^2-a+1)\cdot(a+1)}=\sqrt{1+a^3}$. 要证原不等式只需证明 $\dfrac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)}+\dfrac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)}+\dfrac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)}\geqslant\dfrac{1}{3}$. 而上式等价于 $3a^2(c^2+2)+3b^2(a^2+2)+3c^2(b^2+2)\geqslant(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$. 即 $(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2b^2c^2+8=64+8=72$. 而 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3(abc)^{\frac{4}{3}}=48$，$a^2+b^2+c^2\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}=12$，则上式显然成立. 故原不等式得证，当且仅当 $a=b=c=2$ 时取等号.

12. $n=1$ 时显然成立. 假设 $n=k$ 时，有 $(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant 2^{2k}-2^{k+1}$. 则对 $n=k+1$，由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，有 $a+b=ab$，于是 $ab=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 即 $ab=a+b\geqslant 4$. 从而，$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k\geqslant 4(2^{2k}-2^{k+1})+2\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}}\geqslant 2^{2k+2}-2^{k+3}+2^{k+2}=2^{2(k+1)}-2^{(k+1)+1}$.

13. 已知 $ab>0$，$x-1>0$，则 $ax+\dfrac{x}{x-1}=\left[a(x-1)+\dfrac{1}{x-1}\right]+a+$

$1\geqslant 2\sqrt{a}+a+1=(\sqrt{a}+1)^2$. 当且仅当 $a(x-1)=\dfrac{1}{x-1}$，即 $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 时，$ax+\dfrac{x}{x-1}$ 的最小值为 $(\sqrt{a}+1)^2$，于是 $ax+\dfrac{x}{x-1}>b$ 对任意 $x>1$ 成立的充要条件是 $(\sqrt{a}+1)^2>b$，即 $\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$.

14. 若 $y_1^2+y_2^2-1\geqslant 0$，不等式显然成立. 若 $y_1^2+y_2^2-1<0$，则由平均值不等式，得 $x_1y_1\leqslant\dfrac{x_1^2+y_1^2}{2}$，$x_2y_2\leqslant\dfrac{x_2^2+y_2^2}{2}$. 则 $x_1y_1+x_2y_2\leqslant\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)\leqslant 1$. 因为 $1-x_1y_1-x_2y_2\geqslant 1-\dfrac{x_1^2+y_1^2}{2}-\dfrac{x_2^2+y_2^2}{2}=\dfrac{1-x_1^2-x_2^2+1-y_1^2-y_2^2}{2}>0$，所以，$(1-x_1y_1-x_2y_2)^2\geqslant\left(\dfrac{1-x_1^2-x_2^2+1-y_1^2-y_2^2}{2}\right)^2\geqslant(x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1)$.

15. 由于 $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)=2+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)=2+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{c}\right)-3\geqslant -1+3\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 2\left(1+\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

16. 由平均值不等式，得 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_2}{x_3}\cdot\dfrac{x_3}{x_1}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^2+\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2\right]$，$\dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{x_3}{x_1}\cdot\dfrac{x_1}{x_2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2+\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2\right]$，$\dfrac{x_1}{x_3}=\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2}{x_3}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^2\right]$. 将它们相加，便得到命题成立.

17. 由于 $1+a=2-b-c=1-b+1-c\geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$，同理可得 $1+b\geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-c)}$，$1+c\geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$. 将以上三式相乘便可以.

18. $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}-x^2-y^2-z^2=\dfrac{x^2}{z}(y-z)+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}-y^2-z^2\geqslant\dfrac{y^2}{z}(y-z)+2z\sqrt{yz}-y^2-z^2=\dfrac{y-z}{z}\left[y^2-yz+z^2-\dfrac{2z^2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right]=\dfrac{(y-z)(\sqrt{y}-\sqrt{z})}{z(\sqrt{y}+\sqrt{z})}[y(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-z^2]\geqslant 0$.

19. 因 $\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)^2=\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2(a^2+b^2+c^2)=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+2\geqslant a^2+b^2+c^2+2=3$. 所以,命题成立.

20. 因为 $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{18}+\frac{1}{12}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{a+c+d}\cdot\frac{b+c+d}{18}\cdot\frac{1}{12}}=\frac{a}{2}$，即 $\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{a}{2}-\frac{b+c+d}{18}-\frac{1}{12}$，所以左 $\geqslant\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{1}{18}(3a+3b+3c+3d)-\frac{4}{12}=\frac{1}{3}(a+b+c+d)-\frac{1}{3}$. 又由假设知 $ab+bc+cd+da=1$，即 $(a+c)(b+d)=1$，所以，$a+b+c+d=a+c+\frac{1}{a+c}\geqslant 2$. 故 $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$.

21. 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，则 $a_i-a_j\geqslant(i-j)m$. $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right]\leqslant n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=n$. 另一方面，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2\geqslant m^2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2=m^2\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k^2=\frac{m^2n^2(n^2-1)}{12}$. 所以 $n\geqslant\frac{m^2n^2(n^2-1)}{12}$，即 $m\leqslant\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$. 且当 $\{a_i\}$ 成等差数列，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$ 时等号成立. 故 m 的最大值为 $\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$.

习　题　2

1. 由均值不等式 $u\geqslant\frac{2}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}\geqslant\frac{2}{\frac{1-a+1-b}{2}}=\frac{4}{2-(a+b)}\geqslant\frac{4}{2-2\sqrt{ab}}=\frac{4}{2-\frac{1}{3}}=\frac{12}{5}$. 当 $a=b=\frac{1}{6}$ 时，上式取等号，故 u 的最小值为 $\frac{12}{5}$.

2. 不失一般性，令 $a\geqslant b\geqslant c$. 则 $\frac{(c-a)(c-b)}{3(c+ab)}\geqslant 0$ 及 $\frac{(a-b)(a-c)}{3(a+bc)}+\frac{(b-a)(b-c)}{3(b+ac)}=\frac{c(a-b)^2}{3}\left[\frac{1+a+b-c}{(a+bc)(b+ac)}\right]\geqslant 0$. 故 $\sum\frac{(a-b)(a-c)}{3(a+bc)}\geqslant 0$. 而 $\sum\frac{1}{a+bc}\leqslant\frac{9}{2(ab+bc+ac)}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a(a+b+c)+3bc}\leqslant$

$\dfrac{3}{2(ab+bc+ac)} \Leftrightarrow \sum\left[\dfrac{1}{2(ab+bc+ac)}-\dfrac{1}{a(a+b+c)+3bc}\right] \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\sum\dfrac{(a-b)(a-c)}{a(a+b+c)+3bc}=\sum\dfrac{(a-b)(a-c)}{3(a+bc)}\geqslant 0$. 由均值不等式知 $\dfrac{1}{a\sqrt{2(a^2+bc)}}=\dfrac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{(ab+ac)(a^2+bc)}}\geqslant\dfrac{\sqrt{2(b+c)}}{\sqrt{a}(a+c)(a+b)}$. 只需证 $\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}\cdot\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}\geqslant\dfrac{9}{4(ab+bc+ac)}$. 又 $\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}\leqslant$ $\sqrt{\dfrac{a+c}{2b}}\leqslant\sqrt{\dfrac{a+b}{2c}}$, $\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}\leqslant\dfrac{1}{(b+c)(a+b)}\leqslant\dfrac{1}{(a+c)(c+b)}$, 则由切比雪夫不等式知 $\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}\cdot\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}\geqslant\dfrac{1}{3}\left(\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}\right)\cdot$ $\sum\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}=\dfrac{2}{(a+b)(b+c)(a+c)}\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}$. 只需证 $\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}$ $\geqslant\dfrac{9(a+b)(b+c)(a+c)}{8(ab+bc+ac)}$. 令 $t=\sqrt[6]{\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8abc}}\geqslant 1$. 则 $\dfrac{9(a+b)(b+c)(a+c)}{8(ab+bc+ac)}=\dfrac{27t^6}{8t^6+1}$. 由均值不等式知 $\sum\sqrt{\dfrac{b+c}{2a}}\geqslant 3t$. 故 $3t\geqslant\dfrac{27t^6}{8t^6+1}\Leftrightarrow 8t^6-9t^5+1\geqslant 0$. 而当 $t\geqslant 1$ 时，上述不等式恒成立.

3. 令 $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$. 又设 $a_{i_1}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，原式左边为 s，s 中分子含 a_{i_1} 的项是 $\dfrac{a_{i_1}}{a_{i_1+1}+a_{i_1+2}}$. 令 $a_{i_2}=\max\{a_{i_1+1}, a_{i_1+2}\}$. 仿此取 $a_{i_3}=\max\{a_{i_2+1}, a_{i_2+2}\}$. 将继续上面手续，最终将回到 a_{i_1}. 即经 r 次后，有 $a_{i_r+1}=a_{i_1}$. 从取法易知 $r\geqslant\dfrac{n}{2}$. 于是，$s>\dfrac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\dfrac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\cdots+\dfrac{a_{i_r}}{2a_{i_r+1}}\geqslant\dfrac{1}{2}r\cdot\sqrt[r]{\dfrac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\dfrac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{i_r}}{a_{i_1}}}=$ $\dfrac{1}{2}r\geqslant\dfrac{n}{4}$.

4. 设 $a_{n+1}=1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $a_{n+1}\geqslant 0$, $a_1+\cdots+a_{n+1}=1$. 则原不等式等价于 $n^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n+1}\leqslant(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1})$. 对 $i=1, 2, \cdots, n+1$，由平均值不等式，得 $1-a_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}\geqslant n\sqrt[n]{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1}}$. 将 $n+1$ 个不等式相乘，得 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n+1})\geqslant n^{n+1}\sqrt[n]{a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n}=n^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n+1}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ 时等号成立.

5. $\frac{\text{右}}{\text{左}}=\left(\prod \frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod \frac{b_i}{a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum \frac{a_i}{a_i+b_i}+\sum \frac{b_i}{a_i+b_i}\right)=1$. 所以左$\geqslant$右.

6. $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}>\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x+y>\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}\Leftrightarrow (x+y)^2>\frac{x^2+y^2}{2}+xy+\sqrt{2xy(x^2+y^2)}\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y)^2>\sqrt{2xy(x^2+y^2)}\Leftrightarrow (x+y)^4>8xy(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\geqslant 8x^3y+8xy^3\Leftrightarrow (x-y)^4>0$. 因为$x\neq y$，所以上面最后一个不等式成立，即$A-G>Q-A$.

下面证明$Q-A>G-H$. 因为$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy}>\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)-xy}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}}>\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y>\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}$. 此不等式前面已经证明成立，所以$Q-A>G-H$.

7. $\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{a_k}=\sum \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}=\sum \frac{a_{k+1}}{a_k}-n\geqslant n\left(\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}-1\right)$. 又$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{a_k}=\frac{d}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\leqslant\frac{d}{a_1}+(n-1)-(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1}{a_n}}=\frac{d}{a_1}+(n-1)\left(1-\sqrt[n-1]{\frac{a_1}{a_n}}\right)$.

8. 首先设$x_i\in\mathbf{N}$. 因为x_i互不相同，所以左边$=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\overbrace{x_i+\cdots+x_i}^{x_i\text{个}}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right]^{x_1+x_2+\cdots+x_n}>x_1^{x_1}\cdot x_2^{x_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{x_n}$. 下面设$x_i$为正有理数. 记$m$为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的各分母的最小公倍数，则$mx_1, mx_2, \cdots, mx_n\in\mathbf{Z}^+$，于是$\left[\frac{(mx_1)^2+\cdots+(mx_n)^2}{mx_1+mx_2+\cdots+mx_n}\right]^{mx_1+mx_2+\cdots+mx_n}>(mx_1)^{mx_1}\cdot(mx_2)^{mx_2}\cdot\cdots\cdot(mx_n)^{mx_n}$. 两边开$m$次方并除以$m^{(x_1+\cdots+x_n)}$，即得到原不等式.

9. 设$x_i>1\ (i=1, 2, \cdots, n)$，则$\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}+1\cdots$①. $\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)^{\frac{1}{n}}+1$，即$0<\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}-1\cdots$②.

由①、②，得 $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left[\frac{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}+1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}-1}\right]^n\cdots$③. 又函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$ 在 $x>1$ 时是减函数. 令 $x_i=r_is_it_iu_iv_i$，由平均值不等式，得 $\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r_1\cdots r_n}\cdots\sqrt[n]{v_1\cdots v_n}\leqslant RSTUV$. 代入③式，得 $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n$.

10. 由平均值不等式，得左边 $\leqslant\left\{\frac{1}{25}\left[\left(1-\frac{1}{365}\right)+\left(1-\frac{2}{365}\right)+\cdots+\left(1-\frac{25}{365}\right)\right]\right\}^{25}=\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}$. 在 $\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}$ 的二项式展开中，相邻两项的符号相反，其绝对值的比为 $\frac{C_{25}^{k+1}\left(\frac{13}{365}\right)^{k+1}}{C_{25}^{k}\left(\frac{13}{365}\right)^{k}}=\frac{25+k}{k+1}\cdot\frac{13}{365}\leqslant\frac{25\times13}{365}<1$. 即 $C_{25}^{k}\left(\frac{13}{365}\right)^{k}>C_{25}^{k+1}\left(\frac{13}{365}\right)^{k+1}$. 所以 $\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}=1-\left[C_{25}^{1}\left(\frac{13}{365}\right)-C_{25}^{2}\left(\frac{13}{365}\right)^2\right]-\left[C_{25}^{3}\left(\frac{13}{365}\right)^3-C_{25}^{4}\left(\frac{13}{365}\right)^4\right]-\cdots-\left(\frac{13}{365}\right)^{25}<1-C_{25}^{1}\cdot\frac{13}{365}+C_{25}^{2}\left(\frac{13}{365}\right)^2=1-\frac{65}{73}+\frac{169\times12}{73^2}=\frac{2622}{5329}<\frac{1}{2}$.

11. 由已知，得 $b+c\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. 不妨设 $a+b=c+d$，则 $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\geqslant\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)}{c+d}+(c+d)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)=\frac{a+b}{2(c+d)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}$. 当 $a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=2$，$d=0$ 时，取等号. 故所求最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

12. 令 $b_i=S-a_i$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=(n-1)S$. 由平均值不等式，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+1\right)-n=S\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}-n\geqslant\frac{nS}{\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}}-n\geqslant\frac{n^2S}{b_1+\cdots+b_n}-n=\frac{n}{n-1}$. 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时，等号成立，故最小值为 $\frac{n}{n-1}$.

13. 由平均值不等式，得 $\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u}\leqslant\frac{2x+xy+z+zyu}{4}=\frac{1}{4}$，即

$x^2y^2z^2u\leqslant\frac{1}{512}$. 而且当 $2x=xy=z=yzu=\frac{1}{4}$，即 $x=\frac{1}{8}$，$y=2$，$z=\frac{1}{4}$，$u=\frac{1}{2}$ 时等式成立. 于是，所求的最大值为 $\frac{1}{512}$.

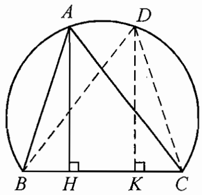
14. 所求的最小值为 $\frac{3}{4}$. 当 $a_1=a_2=a_3$ 时，其值为 $\frac{3}{4}$. 下面证明：$\frac{a_1a_2}{(a_2+a_3)(a_3+a_1)}+\frac{a_2a_3}{(a_3+a_1)(a_1+a_2)}+\frac{a_3a_1}{(a_3+a_2)(a_2+a_3)}\geqslant\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4[a_1a_2(a_1+a_2)+a_2a_3(a_2+a_3)+a_3a_1(a_3+a_1)]\geqslant 3(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)\Leftrightarrow 4[a_1(a_2^2+a_3^2)+a_2(a_3^2+a_1^2)+a_3(a_1^2+a_2^2)]\geqslant 3[a_1(a_2^2+a_3^2)+a_2(a_3^2+a_1^2)+a_3(a_1^2+a_2^2)+2a_1a_2a_3]\Leftrightarrow a_1(a_2^2+a_3^2)+a_2(a_3^2+a_1^2)+a_3(a_1^2+a_2^2)\geqslant 6a_1a_2a_3$. ⊛　由平均值不等式，得⊛的左边 $\geqslant a_1(2a_2a_3)+a_2(2a_1a_3)+a_3(2a_1a_2)=6a_1a_2a_3$. 故⊛成立，最小值为 $\frac{3}{4}$.

15. 令 $b_i=2-a_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=2n-1$. 由平均值不等式，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}-1\right)-n=2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}-n\geqslant\frac{2n}{\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}}-n\geqslant\frac{2n^2}{b_1+\cdots+b_n}-n=\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}$. 当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}=\frac{n}{2n-1}$，故最小值为 $\frac{n}{2n-1}$.

16. 由平均值不等式，得 $(x_1x_2\cdots,x_n)^{\frac{1}{2n}}=[(a-x_1)(a-x_2)\cdots(a-x_n)]^{\frac{1}{n}}\leqslant a-\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leqslant a-(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$. 令 $y=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{2n}}\geqslant 0$，则有 $y\leqslant a-y^2$，即 $y^2+y-a\leqslant 0$. 解不等式得 $0\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}$，故 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值为 $\left(\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)^{2n}$.

17. 由已知条件，得 $2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=2$. 即 $x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-2}+x_{n-1})^2+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2=2$. 对给定的正整数 k，$1\leqslant k\leqslant n$，由平均值不等式，得 $\sqrt{\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}}\geqslant\frac{|x_1|+|x_1+x_2|+\cdots+|x_{k-1}+x_k|}{k}\geqslant\frac{|x_1-(x_1+x_2)+\cdots+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)|}{k}=$

$\frac{|x_k|}{k}$. 所以 $\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}\geqslant\frac{x_k^2}{k^2}$，即 $x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2\geqslant\frac{x_k^2}{k}$. 同理，可得 $(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2\geqslant\frac{x_k^2}{n-k+1}$. 将以上两式相加，得 $|x_k|\leqslant\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，当且仅当 $x_1=-(x_1+x_2)=(x_2+x_3)=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$ 及 $x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n$ 时，等号成立，即当且仅当 $x_i=x_k(-1)^{i-k}\frac{i}{k}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$ 且 $x_j=x_k(-1)^{j-k}\frac{n+1-j}{n-k+1}$ $(j=k+1,k+2,\cdots,n)$ 时，$|x_k|=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$. 于是 $|x_k|_{\max}=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$.



（第 18 题）

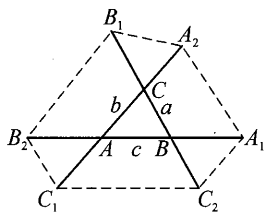
18. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，且 $\angle BAC=\alpha$，考虑 $\triangle ABC$ 的外接圆周上边 BC 的对弧 $\overset{\frown}{BAC}$，因为弧的中点 D 是弧上离弦 BC 最远的点，所以对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的高 $AH=h$ 与 DK，有 $h\leqslant DK=BK\cdot\cot\frac{\angle BDC}{2}=\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$. 由平均值不等式，得 $\frac{ab+ac+bc}{4S}\geqslant\frac{3}{4S}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)^2\cdot\frac{1}{2}ah}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{h\sin^2\alpha}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\sin^2\alpha\cot\frac{\alpha}{2}}}$. 令 $\cos\alpha=x$，再由平均值不等式，得 $\frac{1}{2}\sin^2\alpha\cot\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1+x)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3(1-x)}=\frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1+x}{3}\right)^3(1-x)}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{27}\left[\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{1+x}{3}+(1-x)\right)\right]^2=\frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{2}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$. 从而 $\frac{ab+bc+ca}{4S}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

19. 记 $a=BC$，$b=AC$，$c=AB$，$S=S_{\triangle ABC}$，$S_0=S_{\triangle DEF}$. 由三角形平分线的性质，得 $\frac{AF}{b}=\frac{BF}{a}=\frac{AF+BF}{b+a}=\frac{c}{a+b}$. 从而 $AF=\frac{bc}{a+b}$，同理可得 $AE=\frac{bc}{a+c}$. 因此，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot AE\sin\angle BAC=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC\cdot$

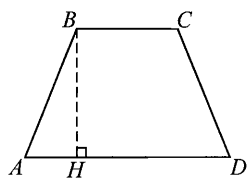
$\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{bcS}{(a+b)(a+c)}$. 同理可得 $S_{\triangle BDF}=\dfrac{acS}{(a+b)(b+c)}$，$S_{\triangle CDE}=\dfrac{abS}{(a+c)(b+c)}$. 由平均值不等式，得 $S-S_0=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}=\left[\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]S\geqslant\dfrac{6abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}=3\left[1-\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}-\dfrac{ac}{(a+b)(c+b)}-\dfrac{ab}{(a+c)(c+b)}\right]S=3(S-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CDE})=3S_0$. 于是，$S_0\leqslant\dfrac{1}{4}S$，即命题成立.

20. 设△ABC 的三个内角为 α、β、γ，则 $P=\dfrac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$. 由于△$A'B'C'$ 的内角为 $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，所以 $Q=\dfrac{1}{2}R^2[\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta)]$. 由平均值不等式，得 $16Q^3=2R^6[\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta)]^3\geqslant 2R^6\cdot 27\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta)=27R^6[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{27}{2}R^6[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin 2\alpha+\sin 2\beta]=\dfrac{27}{2}R^6(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=27R^4P$.

21. 如图所示，知 $S_{\triangle AB_2C_1}=S_{\triangle BC_2A_1}=S_{\triangle CA_2B_1}=S_{\triangle ABC}$，所以 $\dfrac{G}{F}=\dfrac{S_{ABC_2C_1}+S_{BCA_2A_2}+S_{ACB_1B_2}+4F}{F}=\dfrac{S_{\triangle AA_1A_2}+S_{\triangle BB_1B_2}+S_{\triangle CC_1C_2}+F}{F}=1+\dfrac{(b+a)(c+a)}{bc}+\dfrac{(a+b)(c+b)}{ac}+\dfrac{(a+c)(b+c)}{ab}=1+3+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}\geqslant 4+9\sqrt[9]{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a^2}{bc}\cdot\dfrac{b^2}{ac}\cdot\dfrac{c^2}{ab}}=13$.



（第 21 题）



（第 22 题）

22. 如图所示，设 AD 是较大的底边，BH 是给定梯形 $ABCD$ 的高. 如果

$AB=CD=13$，则 $AD+BC=2$，且 $S_{梯形ABCD}=BH\cdot\dfrac{AD+BC}{2}\leqslant 13\cdot\dfrac{2}{2}=13<27$，不可能. 因此，$AD=13$. 记 $AB=x$，则 $BC=28-13-2x=15-2x$，$AH=x-1$，$BH=\sqrt{2x-1}$. 由平均值不等式，得 $S_{梯形ABCD}=\sqrt{2x-1}\cdot\dfrac{28-2x}{2}=\sqrt{(2x-1)(14-x)^2}\leqslant\sqrt{\left[\dfrac{(2x-1)+(14-x)+(14-x)}{3}\right]^3}=27$. 当且仅当 $2x-1=14-x$，即 $x=5$，也是 $AB=BC=CD=5$ 时，$S_{梯形ABCD}=27$，而等式 $S_{梯形ABCD}=27.001$ 是不可能成立的.

23. 设 a、b、c 是半周长 p 一定的三角形的边长，S 与 r 是它的面积与内切圆半径. 则由平均值不等式，得 $(rp)^2=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant p\left[\dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3=\dfrac{p^4}{27}$. 由此得到 $r\leqslant\dfrac{p}{\sqrt{27}}$，当且仅当 $p-a=p-b=p-c$，即三角形为等边三角形时，r 取到最大值.

24. 因为 a、b、c 为正有理数，故存在 $m\in\mathbf{N}$，使 ma，mb，mc 为正整数，又 a、b、c 为三边之长，有 $1+\dfrac{b-c}{a}>0$，$1+\dfrac{c-a}{b}>0$，$1+\dfrac{a-b}{c}>0$. 由平均值不等式，得 $\left[\left(1+\dfrac{b-c}{a}\right)^{ma}\left(1+\dfrac{c-a}{b}\right)^{mb}\left(1+\dfrac{a-b}{c}\right)^{mc}\right]^{\frac{1}{ma+mb+mc}}\leqslant\dfrac{ma\left(1+\dfrac{b-c}{a}\right)+mb\left(1+\dfrac{c-a}{b}\right)+mc\left(1+\dfrac{a-b}{c}\right)}{ma+mb+mc}=1$.

25. 首先求最大值，由平均值不等式，得 $\sqrt[n]{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2}\leqslant\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=\dfrac{1}{n}$. 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{n}$ $(n\geqslant 2)$ 时等号成立. 所以最大值为 $n^{-\frac{n}{2}}$. 再求最小值. 令 $y_1=x_1$，…，$y_{n-2}=x_{n-2}$，$y_{n-1}=\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-\dfrac{1}{n^2}}$，$y_n=\dfrac{1}{n}$，则 $y_i\geqslant\dfrac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $y_1^2+\cdots+y_n^2=x_1^2+\cdots+x_n^2=1$. 由于 $y_{n-1}^2y_n^2-x_{n-1}^2x_n^2=-\left(x_{n-1}^2-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(x_n^2-\dfrac{1}{n^2}\right)\leqslant 0$，所以 $y_1y_2\cdots y_{n-2}y_{n-1}y_n\leqslant x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n$. 重复这个过程 $n-1$ 次，得 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\sqrt{1-\dfrac{n-1}{n^2}}=\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$. 当 $x_1=\cdots=x_{n-1}=\dfrac{1}{n}$，$x_n=\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$ 时，等号成立. 故最小值为 $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$.

26. 易知 $a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc=(a+b-c)^2+2c^2+2ac-2bc=$

$(a+b-c)^2+2c(a+c-b)$. 令 $I=\dfrac{(a+b-c)^2+2c(a+c-b)}{2c(a+b-c)}=\dfrac{a+b-c}{2c}+\dfrac{a+c-b}{a+b-c}$，由于 $a\geqslant\dfrac{1}{3}(b+c)$，所以 $a\geqslant\dfrac{1}{4}(a+b-c)+\dfrac{c}{2}$. 于是 $a+c-b=2a-(a+b-c)\geqslant-\dfrac{1}{2}(a+b-c)+c$. 由此可知 $I\geqslant\dfrac{a+b-c}{2c}-\dfrac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{a+b-c}+\dfrac{c}{a+b-c}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a+b-c}{2c}+\dfrac{c}{a+b-c}\geqslant-\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$. 即 $\dfrac{ac+bc-c^2}{a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc}=\dfrac{1}{2I}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$. 所以，$\lambda\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$. 另一方面，当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}$，$c=1$，则 $ac+bc-c^2=\sqrt{2}$，$a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc=4-\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{1}{2I}=\dfrac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$. 故 $\lambda=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

27. 显然 $2j+1=(j+1)^2-j^2$，由平均值不等式，得 $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{2j+1}{j^2}=\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\dfrac{(j+1)^2}{j^2}-1\right]=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(j+1)^2}{j^2}-n\geqslant n\left[\dfrac{2^2}{1^2}\cdot\dfrac{3^2}{2^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}-n=n\left[(n+1)^{\frac{2}{n}}-1\right]$.

28. 不妨设 $A\geqslant60^\circ$，则 $B+C\leqslant180^\circ-60^\circ=120^\circ$. $\sin3A+\sin3B+\sin3C=\sin3A+2\sin\dfrac{3}{2}(B+C)\cos\dfrac{3}{2}(B-C)\leqslant\sin3A+2\sin\dfrac{3}{2}(B+C)$. 记 $\alpha=\dfrac{3}{2}(B+C)$，则 $0\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$，且 $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\dfrac{2}{3}\alpha$. 于是 $\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\sin(3\times180^\circ-2\alpha)+2\sin\alpha=\sin2\alpha+2\sin\alpha=2\sin\alpha(1+\cos\alpha)=8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^3\dfrac{\alpha}{2}$. 由平均值不等式，得 $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^3\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^6\dfrac{\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}\cdot3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^6\dfrac{\alpha}{2}}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}\right]^4}\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. 所以 $\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，且当且仅当 $A=140^\circ$，$B=C=20^\circ$ 时，等号成立.

29. 由平均值不等式，得 $\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\csc\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时等号成立. 再由平均值不等式及凸函数性质，得 $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\leqslant\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，因此 $\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\geqslant 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=12$. 当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时，等号成立.

30. 令 $x=\tan\frac{A}{2}$，$y=\tan\frac{B}{2}$，$z=\tan\frac{C}{2}$. 这里 $A,B,C\in[0,\pi)$. 由于 $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$，所以 $\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{1-(xy+yz+zx)}{x+y+z-xyz}$. 由已知条件知 y、z 不全为 0 且 $0\leqslant yz\leqslant 1$，从而 $x+y+z>x\geqslant xyz\geqslant 0$，于是 $\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=0$. 所以 $0<\frac{1}{2}(A+B+C)<\frac{3\pi}{2}$，得 $\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\pi}{2}$，即 $A+B+C=\pi$. 又 $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=\frac{\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=4xyz$，由平均值不等式，得 $(xyz)^2\leqslant\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，从而 $xyz\leqslant\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

31. 已知 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ 单调增加且收敛于 e. 对任意 $i\in\mathbf{N}$，有 $i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i\leqslant ie$，记 $b_i=i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$. 则 $\frac{b_i}{i}\leqslant$ e. 由 $b_1b_2\cdots b_k=(1+k)^k$，得 $\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}=\frac{1}{1+k}\sqrt[k]{(a_1b_1)\cdots(a_kb_k)}$. 由平均值不等式，得 $\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}a_ib_i=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}a_ib_i$，$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}a_ib_i=$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)b_ia_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i}a_i<\mathrm{e}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

32. (1)由于 $(n-1)p^2-2nq=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$，所以 $\frac{n-1}{n}p^2-2q\geqslant 0$；

(2) $\left|x_i-\frac{p}{n}\right|=\frac{n-1}{n}\left|\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-x_k)\right|$. 由幂平均不等式，得 $\left|x_i-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-x_k)^2}\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_k)^2}$.

由(1)的结果，得 $\left|x_i-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$.

33. 设 $f(x)$ 的三个根为 α,β,γ，并设 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则 $x-a=x+\alpha+\beta+\gamma$，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. (1)当 $0\leqslant x\leqslant\alpha$ 时，则有 $-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leqslant\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=\frac{1}{27}(x-a)^3$，所以 $f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x-a)^3$. 当 $x=0$，$\alpha=\beta=\gamma$ 时，等号成立；(2)当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 或 $x>\gamma$ 时，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0>-\frac{1}{27}(x-a)^3$. (3)当 $\beta\leqslant x\leqslant\gamma$ 时，$-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x)\leqslant\left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3\leqslant\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=\frac{1}{27}(x-a)^3$. 所以 $f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x-a)^3$. 当 $\alpha=\beta=0$，$\gamma=2x$ 时，等号成立. 综上所述，λ 的最大值 $-\frac{1}{27}$.

习题 3

1. 由于关于 a、b、c 的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\geqslant 1$，所以 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

2. 由柯西不等式，可得原式左边 $\geqslant\frac{16}{(4a+3b+c)+(3a+b+4d)+(a+4c+3d)+(4b+3c+d)}=2$.

3. 由柯西不等式，有 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+ib}\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a+ib}\right)^2<$

$n\left\{\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{(a+b)(a+2b)}+\cdots+\dfrac{1}{[a+(n-1)b](a+nb)}\right\}=\dfrac{n}{b}\left[\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}\right)+\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a+2b}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a+(n-1)b}-\dfrac{1}{a+nb}\right)\right]=\dfrac{n}{b}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+nb}\right)=\dfrac{n^2}{a(a+nb)}$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a+ib}<\dfrac{n}{\sqrt{a(a+nb)}}$.

4. 由柯西不等式，当 $x,y>0$ 时，有 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant 4$，于是，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant\dfrac{4}{x+y}$. 可以得到 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\geqslant\dfrac{4}{a+2b+c}$，$\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{4}{b+2c+a}$，$\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\geqslant\dfrac{4}{c+2a+b}$ 三式相加，得 $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geqslant\dfrac{4}{a+2b+c}+\dfrac{4}{b+2c+a}+\dfrac{4}{c+2a+b}$，将 $a+b+c=1$ 代入其中，并约去 2 即得证.

5. 等式左边的分母显然为正数. 由柯西不等式得 $\dfrac{a}{a^2-bc+1}+\dfrac{b}{b^2-ca+1}+\dfrac{c}{c^2-ab+1}=\dfrac{a^2}{a^3-abc+a}+\dfrac{b^2}{b^3-abc+b}+\dfrac{c^2}{c^3-abc+c}\geqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}=\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)}=\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}=\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\dfrac{1}{a+b+c}$. 命题得证.

6. 由柯西不等式得 $\left(1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}\right)(1+xy+xz)\geqslant(1+y+z)^2\Rightarrow\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}\geqslant\dfrac{x}{x+y+z}$. 同理，$\dfrac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}\geqslant\dfrac{y}{x+y+z}$. $\dfrac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geqslant\dfrac{z}{x+y+z}$. 上述三个不等式相加即得 $\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\dfrac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\dfrac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geqslant 1$.

7. 原不等式等价于 $\sum\dfrac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}$. 利用 $xyz\geqslant 1$ 及柯西不等式得 $(x^5+y^2+z^2)\cdot(yz+y^2+z^2)\geqslant(\sum x^2)^2$. 而 $\sum(yz+y^2+z^2)\leqslant\sum\left(\dfrac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2\right)=3\sum x^2$. 代入即得结果.

8. 由柯西不等式知 $(b^2+c+c^2+a+a^2+b)\cdot\left(\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{c^2+b}\right)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$. 故 $\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3}$. 令 $a^2+b^2+c^2=x$. 易证 $x\geqslant 3$. 故 $\frac{x^2}{3+x}\geqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2x^2\geqslant 9+3x\Leftrightarrow 2x^2-3x-9\geqslant 0\Leftrightarrow(2x+3)(x-3)\geqslant 0$. 显然成立. 于是, $\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

9. 记 $A=\frac{a^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2}{ca^2(4-ca)}$, $B=\frac{b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{a^2}{ca^2(4-ca)}$. 欲证明原不等式,只需证明 $A\geqslant 1$, $B\geqslant 1$. 由柯西-施瓦兹不等式得 $\left(\frac{4-ab}{a}+\frac{4-bc}{b}+\frac{4-ac}{c}\right)A\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$. 设 $k=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, 则 $A\geqslant\frac{k^2}{4k-3}$. 由 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 3^2\Rightarrow k=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\Rightarrow(k-3)(k-1)\geqslant 0\Rightarrow k^2-4k+3\geqslant 0\Rightarrow A=\frac{k^2}{4k-3}\geqslant 1$. 又 $B=\frac{1}{a(4-ab)}+\frac{1}{b(4-bc)}+\frac{1}{c(4-ca)}$, 则 $\left(\frac{4-ab}{a}+\frac{4-bc}{b}+\frac{4-ca}{c}\right)B\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$. 故 $B\geqslant\frac{k^2}{4k-3}\geqslant 1$. 因此, $A+3B\geqslant 4$.

10. 令 $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, 则原不等式等价于 $\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\geqslant 1$. 由柯西不等式,得 $[x(x+2z)+y(y+2x)+z(z+2y)]\left(\frac{x}{x+2z}+\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}\right)\geqslant(x+y+z)^2$, 即 $(x+y+z)^2\left(\frac{x}{x+2z}+\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}\right)\geqslant(x+y+z)^2$.

11. 由 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i^4\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3$, 则 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

12. 由柯西不等式,得 $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=[(a+b)+$

$(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant 9$，故命题成立.

13. 由柯西不等式，得 $\frac{k^2(k+1)^2}{4}=\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{\sqrt{a_i}}\cdot\sqrt{a_i}\right)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$.

所以 $\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}\leqslant\frac{4}{k(k+1)^2}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}$. 求和，得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right]<$

$2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{i^2}{a_i}\sum\limits_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right]=2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{i^2}{a_i}\sum\limits_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\right]=2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<$

$2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\cdot\frac{1}{i^2}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.

14. $(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_ic_id_i)^4\leqslant[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ib_i)^2]^2[\sum\limits_{i=1}^{n}(c_id_i)^2]^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^4\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^4\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^4$.

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$. 由柯西不等式，得 $[(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)]\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>n^2$，所以 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{2n}{3n+1}\geqslant\frac{4}{7}$. 又 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<(1^2+1^2+\cdots+1^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]^{\frac{1}{2}}<\sqrt{n}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. 令 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geqslant\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})}$. 只需证 $2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})$，即 $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}[(a_i^2+a_{i+1}^2)+(a_i^2+a_{i+2}^2)]\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})$. 由 $a_i^2+a_{i+1}^2\geqslant 2a_ia_{i+1}$，便得到命题成立.

17. $\frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab)=\frac{1}{4}[bc(a+d)+da(b+c)]\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2(a+d)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2(b+c)\right]=\frac{1}{16}(b+c)(a+d)(a+b+c+d)\leqslant\frac{1}{64}(a+b+c+d)^3=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3\leqslant\left(\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}\right)^3$.

18. 当 $n=2$ 时，则 $\sqrt{2}<2$. 命题成立. 当 $n=3$ 时，则 $1<\sqrt{3}$. 所以可设 $n\geqslant 4$. 由柯西不等式，得 $1\cdot\sqrt{C_n^1}+2\cdot\sqrt{C_n^2}+\cdots+n\cdot\sqrt{C_n^n}\leqslant(1^2+2^2+\cdots+n^2)^{\frac{1}{2}}(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)^{\frac{1}{2}}=\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot(2^n-1)^{\frac{1}{2}}$. 即证明：$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot(2^n-1)<2^{n-1}\cdot n^3$ 便可. 等价于 $(2n^2+3n+1)(2^n-1)<3n^2\cdot 2^n$. 因为 $n\geqslant 4$，故 $n^2>3n$，$n^2\geqslant 3n+1$，进而 $3n^2\geqslant 2n^2+3n+1$. 所以 $(2n^2+3n+1)(2^n-1)<3n^2\cdot 2^n$. 从而，命题成立.

习 题 4

1. 设 $S=\sum\limits_{k=1}^{100}a_k^2a_{k+1}$，其中，定义 $a_{101}=a_1$，$a_{102}=a_2$. 由柯西不等式及均值不等式得 $(3S)^2=[\sum\limits_{k=1}^{100}a_{k+1}(a_k^2+2a_{k+1}a_{k+2})]^2\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{100}a_{k+1}^2)\sum\limits_{k=1}^{100}(a_k^2+2a_{k+1}a_{k+2})^2=1\times\sum\limits_{k=1}^{100}(a_k^2+2a_{k+1}a_{k+2})^2=\sum\limits_{k=1}^{100}(a_k^4+4a_k^2a_{k+1}a_{k+2}+4a_{k+1}^2a_{k+2}^2)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{100}[a_k^4+2a_k^2(a_{k+1}^2+a_{k+2}^2)+4a_{k+1}^2a_{k+2}^2]=\sum\limits_{k=1}^{100}(a_k^4+6a_k^2a_{k+1}^2+2a_k^2a_{k+2}^2)$. 又 $\sum\limits_{k=1}^{100}(a_k^4+2a_k^2a_{k+1}^2+2a_k^2a_{k+2}^2)\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{100}a_k^2)^2$，$\sum\limits_{k=1}^{100}a_k^2a_{k+1}^2\leqslant(\sum\limits_{i=1}^{50}a_{2i-1}^2)(\sum\limits_{j=1}^{50}a_{2j}^2)$，故 $(3S)^2\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{100}a_k^2)^2+4(\sum\limits_{i=1}^{50}a_{2i-1}^2)(\sum\limits_{j=1}^{50}a_{2j}^2)\leqslant 1+(\sum\limits_{i=1}^{50}a_{2i-1}^2+\sum\limits_{j=1}^{50}a_{2j}^2)^2=2$. 从而，$S\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{3}\approx 0.4714<0.48=\dfrac{12}{25}$.

2. 由均值不等式有 $\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{x}{y^2+z+1}+\dfrac{2}{49}(y^2+z+1)\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{7^3}}=\dfrac{3}{7}x$. 则 $\dfrac{1}{14}\sum x^2+\sum\dfrac{x}{y^2+z+1}+\dfrac{2}{49}\sum x^2+\dfrac{2}{49}\sum x+\dfrac{6}{49}\geqslant\dfrac{3}{7}\sum x$. 故 $\dfrac{11}{98}\sum x^2+\sum\dfrac{x}{y^2+z+1}+\dfrac{6}{49}\geqslant\left(\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{49}\right)\sum x=\dfrac{19}{49}\sum x$. 又 $\sum x^2\geqslant\dfrac{1}{3}(\sum x)^2\geqslant 12$，故 $\sum x^2+\sum\dfrac{x}{y^2+z+1}=\dfrac{87}{98}\sum x^2+\dfrac{11}{98}\sum x^2-\dfrac{6}{49}\geqslant\dfrac{87}{98}\sum x^2+\dfrac{19}{49}\sum x-\dfrac{6}{49}\geqslant\dfrac{87\times 6+19\times 6-6}{49}=\dfrac{90}{7}$. 从而，$M_{\min}=\dfrac{90}{7}$. 此时，$(x,y,z)=(2,2,2)$.

3. 由柯西不等式得 $\dfrac{1}{x^2+y+1}\leqslant\dfrac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$，$\dfrac{1}{y^2+z+1}\leqslant$

$\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}$，$\frac{1}{z^2+x+1}\leqslant\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}$. 故 $\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leqslant\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$. 记上不等式右边为 S. 只须证 $S\leqslant 1$. 事实上，$S\leqslant 1\Leftrightarrow 3+x+y+z\leqslant 2(xy+yz+zx)$. 因为 $x+y+z=xy+yz+zx$，所以，只须证 $x+y+z\geqslant 3$. 又 $x+y+z=xy+yz+zx\leqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}$，因此，$x+y+z\geqslant 3$. 故原式得证. 当且仅当 $x=y=z=1$ 时，原式等号成立.

4. 令 $x\geqslant y$、z. 则 $\frac{4z^2+x^2}{z^2+4x^2}\leqslant 1$，$\frac{4x^2+y^2}{x^2+4y^2}<4$，$\frac{4y^2+z^2}{y^2+4z^2}<4$. 三式相加，知右边的不等式成立. 由均值不等式知 $4xy^2\leqslant y^3+4x^2y$. 则 $y^3+4x^2y+4x^3+xy^2>4xy^2+x^3\Rightarrow\frac{4x^2+y^2}{x^2+4y^2}>\frac{x}{x+y}$. 故 $\sum\frac{x}{x+y}<\sum\frac{4x^2+y^2}{x^2+4y^2}$. 由柯西—施瓦兹不等式知 $\sum\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\leqslant\sum\frac{x}{x+y}<\sum\frac{4x^2+y^2}{x^2+4y^2}$. 故命题得证.

5. 由柯西不等式，我们有 $\sum\frac{a^2}{a+b^2}\sum a^2(a+b^2)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$，因此只需要证明 $2(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3[a^2(a+b^2)+b^2(b+c^2)+c^2(c+a^2)]$，这等价于 $2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2+c^2\geqslant 3(a^3+b^3+c^3)$，由 $a+b+c=3$ 代入上式转化为 $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$，由均值不等式 $(a^4+a^2b^2)+(a^4+a^2c^2)\geqslant 2a^3b+2a^3c$，$(b^4+b^2c^2)+(b^4+b^2a^2)\geqslant 2b^3c+2b^3a$，$(c^4+c^2a^2)+(c^4+c^2b^2)\geqslant 2c^3a+2c^3b$. 上述三式相加除以 2 即得证.

6. 首先，易观察出当 $u=v=w=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}=1$ 及 $u+v+w=\sqrt{3}$. 因此，λ 的最大值不超过$\sqrt{3}$. 下面证明：对于所有 $u,v,w>0$，且满足 $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geqslant 1$，均有 $u+v+w\geqslant\sqrt{3}$. 由均值不等式及柯西不等式有 $\frac{(u+v+w)^4}{9}=\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3\cdot 3(u+v+w)\geqslant 3uvw(u+v+w)=(uvw+vwu+wuv)(u+v+w)\geqslant(u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv})^2\geqslant 1$. 因此，$u+v+w\geqslant\sqrt{3}$. 当且仅当 $u=v=w=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，上式等号成立. 综上，所求 λ 的最大值为$\sqrt{3}$.

7. 由于 $\sum_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i)=nx_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i=(n-1)x_{n+1}$，于是，只需证明，$x_{n+1}\sqrt{n-1}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}$，即证 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)}\leqslant\sqrt{n-1}$. 由柯西不等式，得 $\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}\cdot\left(1-\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)}\right]^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)\right]=\left(\frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(n-\frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=n-1$.

8. 设 $u=x\sin\alpha+y\sin\beta$，$v=z\sin\gamma+w\sin\theta$，则 $u^2=(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2\leqslant(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2+(x\cos\alpha-y\cos\beta)^2=x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta)$. 所以 $\cos(\alpha+\beta)\leqslant\frac{x^2+y^2-u^2}{2xy}$. 同理 $\cos(\gamma+\theta)\leqslant\frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}$. 由假设 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+\theta)=0$，则 $\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\leqslant\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}$. 于是 $(u+v)^2=\left[u\cdot\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}+v\cdot\frac{\sqrt{zw}}{\sqrt{zw}}\right]^2\leqslant\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)(xy+zw)\leqslant(xy+zw)\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}\right)$. 等号成立 $\Leftrightarrow x\cos\alpha=y\cos\beta$，$z\cos\gamma=w\cos\theta$，$\frac{u}{xy}=\frac{v}{zw}\Leftrightarrow x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$.

9. 令 $A=a_1a_2\cdots a_n$，则 $M=\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)$. 由 $(a_ib_i+1)^2\leqslant(a_i^2+1)(b_i^2+1)$ 知等号成立 $\Leftrightarrow a_i=b_i$. 由此得到 $M\leqslant\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^2)$，且等号成立 $\Leftrightarrow a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 故 $b_1=a_1$，$b_2=a_2$，$\cdots$，$b_n=a_n$ 时，M 取值最大.

10. 设 $a+\mathrm{i}b=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，$a$，$b\in\mathbf{R}$，则 $a^2-b^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\sum_{k=1}^{n}y_k^2$，$ab=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$. 若 $r=|a|>\sum_{k=1}^{n}|x_k|$，由于 $\sum_{k=1}^{n}|x_k|\geqslant(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^{\frac{1}{2}}$，则 $|a|>(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^{\frac{1}{2}}$. 由柯西不等式，得 $|a|\cdot|b|\leqslant(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}y_k^2)^{\frac{1}{2}}$，从而 $|b|\leqslant(\sum_{k=1}^{n}y_k^2)^{\frac{1}{2}}$，于是 $a^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b^2-\sum_{k=1}^{n}y_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 与 $|a|>(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ 矛盾.

11. $n\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{a_i}\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2+n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}-2n^2\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2-2n^2\geqslant n^2\left(A_n^2+\frac{1}{A_n^2}-2\right)=n^2\left(A_n-\frac{1}{A_n}\right)^2$.

12. 由柯西不等式,得 $w \geqslant \frac{1}{4}\left[(r-1)+\left(\frac{s}{r}-1\right)+\left(\frac{t}{s}-1\right)+\left(\frac{4}{t}-1\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(r+\frac{s}{r}+\frac{t}{s}+\frac{4}{t}-4\right)^2$. 又 $r+\frac{s}{r}+\frac{t}{s}+\frac{4}{t} \geqslant 4\sqrt[4]{r\cdot\frac{s}{r}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{4}{t}} = 4\sqrt{2}$，所以 $w \geqslant 4(\sqrt{2}-1)^2$. 当且仅当 $r=\sqrt{2}$，$s=2$，$t=2\sqrt{2}$ 时,取等号. 故 $w_{\min}=4(\sqrt{2}-1)^2$.

13. 令 $a_ib_i - c_i^2 = d_i^2 > 0$，则由柯西不等式，得 $(\sum a_i)(\sum b_i) \geqslant (\sum \sqrt{a_ib_i})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_ib_i}\ \sqrt{a_jb_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{c_i^2+d_i^2}\ \sqrt{c_j^2+d_j^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_ic_j+d_id_j) = (\sum_{i=1}^{n}c_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2$，又因为 $(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2(\sum_{i=1}^{n}d_i^{-2}) \geqslant n^3$，故左边 $\leqslant \frac{n^3}{(\sum d_i)^2} \leqslant \sum d_i^{-2}$. 等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，$b_1=b_2=\cdots=b_n$，$c_1=c_2=\cdots=c_n$.

14. 不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. 令 $A_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j$，则 $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n \geqslant 0$. 由排序不等式,得 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant b_1A_1+(1-b_1)A_2 = pA_1+pA_2+(-p+1-b_1)A_2+(b_1-p)A_1 = p(A_1+A_2)-(p-b_1)(A_1-A_2)+(1-2p)A_2 \leqslant p(A_1+A_2)$ （因为 $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$）. 由 $A_{n-1} \geqslant G_{n-1}$，得 $A_1+A_2 = a_3a_4\cdots a_n(a_2+a_1) \leqslant \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)^{n-1}}$，所以 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant \frac{p}{(n-1)^{n-1}}$.

15. 由柯西不等式,得 $1=\sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^{\frac{1}{2}}$，从而 $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$. 令 $M=\prod_{i=1}^{n} a_i$，$A_i=\frac{M}{a_i}$，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $\frac{M}{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_iA_i$.

不妨设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$，$A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n$，由排序不等式，得 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant b_1A_1+(1-b_1)A_2$. 由于 $0 \leqslant b_1 \leqslant \frac{1}{2}$，$A_1 \geqslant A_2$，所以 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant$

$\frac{1}{2}(A_1+A_2)=\frac{1}{2}(a_1+a_2)a_3\cdots a_n$. 由平均值不等式，得 $\sum_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$，所以 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$. 另一方面，当 $a_1=a_2=\frac{1}{2(n-1)}$，$a_3=\cdots=a_n=\frac{1}{n-1}$，$b_1=b_2=\frac{1}{2}$，$b_3=\cdots=b_n=0$ 时，$\prod_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，所以 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$. 故 $\lambda_{\min}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

16. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{S_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{k^2}{S_k}\right]=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{S_1}-\frac{n^2}{S_n}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{S_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{S_{k-1}}\right]$. 由于当 $k=2,3,\cdots,n$ 时，有 $\frac{1}{S_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{S_{k-1}}=\frac{1}{S_kS_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2S_{k-1}+(l+2)(k-1)S_{k-1}+(k-1)^2(S_{k-1}-S_k)\right]=\frac{1}{S_kS_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2S_{k-1}-\left(\sqrt{a_k}(k-1)-\left(\frac{l}{2}+1\right)\frac{S_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\right)^2+\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{S_{k-1}^2}{a_k}\right]\leqslant\frac{1}{S_kS_{k-1}}\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\left(S_{k-1}+\frac{S_{k-1}^2}{a_k}\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{a_k}$，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)\leqslant\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{S_n}<\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$. 显然，$\frac{l}{2}+1\leqslant m$，即 $l\leqslant 2(m-1)$ 满足所要之条件. 另一方面，当 $l>2(m-1)$，即 $l\geqslant 2m-1$ 时，任意给定 $a_1>0$. 令 $a_k=\frac{l+2}{2(k-1)}S_{k-1}$，$k=2,3,\cdots,n$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-\frac{n^2}{S_n}=\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{S_n}$. 由 $l\geqslant 2m-1$，可推出 $\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\geqslant\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-1=m^2+m+\frac{1}{4}-1>m^2$. 由柯西不等式，得 $n^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)=S_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$，即 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{S_n}\geqslant 0$. 从而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)>m^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$，于是 $1,2,\cdots,2(m-1)$ 是满足要求的所有自然数 l.

17. 若存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，由柯西不等式，得 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}a_i^2$. 又 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，所以 u、v 满足的必要条件是 $v\leqslant u^2\leqslant nv$…①. 可以证明，以上也为充分条件. 若①成立，取正数 $a_1=\frac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}$，则 $a_1\leqslant u$. 若 $n>$

1，再取 $a_2=a_3=\cdots=a_n=\dfrac{u-a_1}{n-1}$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=u$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=v$，$a_1\geqslant\dfrac{u-a_1}{n-1}$. 可以证明，$a_1$ 的最大值为 $\dfrac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}$. 事实上，若 $a_1>\dfrac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}$，则 $n>1$，且 $na_1^2-2ua_1+u^2-(n-1)v>0$，即 $(n-1)(v-a_1^2)<(u-a_1)^2$…②. 若有 $a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$，使 $\sum\limits_{k=2}^{n}a_i=u-a_1$，$\sum\limits_{k=2}^{n}a_k^2=v-a_1^2$，则由柯西不等式，得 $(u-a_1)^2\leqslant(n-1)(v-a_1^2)$，矛盾. 以下求 a_1 的最小值，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足所要之条件，则对于任何 $1\leqslant i,j\leqslant n$，有 $a_i^2+a_j^2\leqslant(a_i+a_j)^2$…③. $a_i^2+a_j^2\leqslant a_i^2+a_j^2+2(a_1-a_i)(a_1-a_j)=a_1^2+(a_i+a_j-a_1)^2$…④. 若 $n=1$，显然 $u^2=v$，且 $a_1=u$，对 $n\geqslant2$，显然 $\dfrac{u}{n}\leqslant a_1\leqslant u$. 若存在 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $a_1\leqslant\dfrac{u}{k}$，则当 $a_i+a_j\leqslant a_1$ 时，使用③，$a_i+a_j>a_1$ 时，使用④. 重复上述步骤有限次，得 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant ka_1^2+(u-ka_1)^2$…⑤. 进一步，若 $\dfrac{u}{k+1}\leqslant a_1\leqslant\dfrac{u}{k}$，由⑤可得 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant ka_1^2+(u-ka_1)^2\leqslant\dfrac{u^2}{k}$…⑥. 由①知，$\dfrac{u^2}{n}\leqslant v\leqslant u^2$，显然 $v=\dfrac{u^2}{n}$ 的充要条件为 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{u}{n}$. 若 $v>\dfrac{u^2}{n}$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $\dfrac{u^2}{k+1}<v\leqslant\dfrac{u^2}{k}$. 可以证明 $a_1\geqslant\dfrac{ku+\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}$…⑦. 如果⑦不成立，则存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足题设中的条件，且 $a_1<\dfrac{ku+\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}$…⑧. 由于 $0<(k+1)v-u^2\leqslant\dfrac{u^2}{k}$，所以 $a_1\leqslant\dfrac{u}{k}$. 由⑤可知 $v\leqslant ka_1^2+(u-ka_1)^2$，即 $k(k+1)a_1^2-2kua_1+u^2-v\geqslant0$. 再由 $k^2u^2-k(k+1)(u^2-v)=k[(k+1)v-u^2]>0$ 和⑧可推出 $a_1\leqslant\dfrac{ku-\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}<\dfrac{u}{k+1}$. 于是存在 $k+1\leqslant m\leqslant n-1$，使得 $\dfrac{u}{m+1}\leqslant a_1<\dfrac{u}{m}$. 由⑥可得 $v\leqslant\dfrac{u^2}{m}\leqslant\dfrac{u^2}{k+1}$ 与 $v>\dfrac{u^2}{k+1}$ 矛盾. 所以⑦成立. 另一方面，在 $\dfrac{u^2}{k+1}<v\leqslant\dfrac{u^2}{k}$ 的条件下，若 $a_1=$

$\dfrac{ku+\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}$，则 $\dfrac{u}{k+1}<a_1\leqslant\dfrac{u}{k}$ 且 $k(k+1)a_1^2-2kua_1+u^2-v=0$，即 $v=ka_1^2+(u-ka_1)^2$. 令 $a_1=\cdots=a_k=\dfrac{u}{k}$，$a_{k+1}=u-ka_1$，$a_{k+2}=\cdots=a_n=0$，则 a_1，a_2，…，a_n 满足所要条件. 故当 $\dfrac{u^2}{k+1}<v\leqslant\dfrac{u^2}{k}$ $(k\in\{1,2,\cdots,n-1\})$ 时，a_1 的最小值为 $\dfrac{kn+\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}$.

18. 设 $a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n=1987$，$a_i\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 为互不相同正偶数，$b_j\ (1\leqslant j\leqslant n)$ 是互不相同的正奇数. 显然，n 为奇数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1)$，$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$. 所以 $m^2+m+n^2\leqslant 1987$，即 $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+n^2\leqslant 1987+\dfrac{1}{4}$. 由柯西不等式，得 $3\left(m+\dfrac{1}{2}\right)+4n\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+n^2}\leqslant 5\sqrt{1987+\dfrac{1}{4}}$，$3m+4n\leqslant 5\sqrt{1987+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{3}{2}$. 由于 $3m+4n$ 为整数，所以 $3m+4n\leqslant 221$. 易证，$3m+4n=221$ 的整数解的一般形式为 $m=71-4k$，$n=2+3k$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 n 为奇数，所以，$k=2t+1$ 为奇数，$t\in\mathbf{Z}$，即 $m=67-8t$，$n=5+6t$，$t\in\mathbf{Z}$. 因为 m^2，$n^2\leqslant 1987$，所以 m，$n<44$，代入上式，得 $3\leqslant t\leqslant 6$. 当 $t=3,4,5,6$ 时，有解 $(m,n)=(43,23)$，$(35,29)$，$(27,35)$，$(19,41)$. 易证 $(m,n)=(27,35)$ 为所求. 此时，最小值为 221.

19. 不妨设 $x_i\geqslant 0$，考虑 $A=\{\sum\limits_{i=1}^{n}e_ix_i\mid e_i\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}\}$. 若 A 中的数均不相同，则 $|A|=k^n$. 由柯西不等式，得 $0\leqslant\sum e_ix_i\leqslant(k-1)\sum x_i\leqslant(k-1)\sqrt{\sum x_i^2}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n}(k-1)$. 所以 A 中的 k^n 个数落在 $[0,(k-1)\sqrt{n}]$ 内，将它分成 k^n-1 个小区间，每个小区间长 $\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$，依抽屉原理知存在 $\sum e_ix_i$，$\sum d_ix_i$ 落在同一小区间上（包括端点），令 $a_i=e_i-d_i$，则 $|a_i|\leqslant k-1$，满足要求.

20. 令 $a=\tan s$，$b=\tan t$，$c=\tan u$，$d=\tan v$，则 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，由 $s+t+u+v=\pi$，得 $\tan(s+t)+\tan(u+v)=0$. 即 $\dfrac{a+b}{1-ab}+\dfrac{c+d}{1-cd}=0$. 两边乘以 $(1-ab)(1-cd)$，得 $a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$. 推

出 $(a+b)(a+c)(a+d)=(a^2+1)(a+b+c+d)$，即 $\frac{a^2+1}{a+b}=\frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$. 类似，得到 $\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}=a+b+c+d$. 由柯西不等式，得 $2(a+b+c+d)^2=2(a+b+c+d)\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)\geqslant(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1})^2$，即 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\leqslant\sqrt{2}(a+b+c+d)$，等价于 $\frac{1}{\cos s}+\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\cos u}+\frac{1}{\cos v}\leqslant\sqrt{2}\left(\frac{\sin s}{\cos s}+\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}\right)$.

21. 设 $x=AB_1$，$y=BC_1$，$z=CA_1$. 要证 $\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}$，即证 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}$，其中 a，b，c 为正实数，且 $abc=1$. 不妨设 $ab\leqslant1$. 由柯西—施瓦兹不等式得 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\leqslant\sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)}$，$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\leqslant1+\frac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2}=\frac{2}{1+ab}$，$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{1+c}$. 由算术—几何均值不等式得 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant2\sqrt{\frac{c}{1+c}}+\frac{\sqrt{2}}{1+c}=\frac{\sqrt{2}}{1+c}[\sqrt{2c(c+1)}+1]\leqslant\frac{\sqrt{2}}{1+c}\left(\frac{2c+c+1}{2}+1\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

22. 证明：因为 $\frac{2}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}\frac{1}{\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}}\geqslant\frac{4}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}\frac{1}{(s-a_i)(s-a_j)}\cdots$①. 所以只要证明：$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i+s}\leqslant\frac{4}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}\frac{1}{\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}}$. 记 $a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=c$，$a_4=d$. 上式等价于 $\frac{2}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right)\geqslant\frac{1}{3a+b+c+d}+\frac{1}{a+3b+c+d}+\frac{1}{a+b+3c+d}+\frac{1}{a+b+c+3d}$. 由柯西不等式，可得 $(3a+b+c+d)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}\right)\geqslant9$，即 $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}\right)\geqslant\frac{1}{3a+b+c+d}$. 轮换相加即得①. 证毕.

23. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 于是，$\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a}=\dfrac{(a+b-c)-a}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}}\leqslant\dfrac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\sqrt{b}-\sqrt{c}$. 因此，$\dfrac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 1\cdots$①. 设 $p=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$q=\sqrt{a}-\sqrt{b}$. 则 $a-b=pq$，$p\geqslant 2\sqrt{c}$. 由柯西不等式有 $\left[\dfrac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right]^2=\left[\dfrac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\dfrac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\right]^2\leqslant\left(\dfrac{c-pq}{\sqrt{c}-q}+\dfrac{c+pq}{\sqrt{c}+q}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}-q}+\dfrac{1}{\sqrt{c}+q}\right)=\dfrac{2(c\sqrt{c}-pq^2)}{c-q^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{c}}{c-q^2}=4\times\dfrac{c^2-\sqrt{c}pq^2}{(c-q^2)^2}\leqslant 4\times\dfrac{c^2-2cq^2}{(c-q^2)^2}\leqslant 4$. 从而，$\dfrac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\leqslant 2$. 结合式①即得所证不等式.

参考文献

[1] 李胜宏,冯祖鸣主编. 高中数学竞赛培训教材,高一、高二分册. 杭州:浙江大学出版社,2004.

[2] Titu Andreescu, Zuming Feng. USA and International Mathematical Oilmpiads. 2002, 2003. mathematical association of america, 2003.

[3] 熊斌,刘诗雄主编,高中竞赛数学教程(上、下册). 武汉:武汉大学出版社,2003.

[4] 常庚哲. 中学数学竞赛导引. 上海:上海教育出版社,1997.

[5] 单墫. 数学竞赛研究教程. 南京:江苏教育出版社,1993.

[6] 李胜宏,李名德主编. 高中数学竞赛培优教程(专题讲座). 杭州:浙江大学出版社. 2003.

[7] 唐立华. 奥赛兵法-高中数学. 上海:文汇出版社,2002.

[8] 严镇军. 数学奥林匹克高中版竞赛篇. 北京:北京大学出版社,1993.

[9] 冷岗松等. 奥林匹克中的代数问题. 长沙:湖南师大出版社,2004.

[10] 李胜宏. 数学分析. 杭州:浙江大学出版社,2009.

[11] 李名德,李胜宏. 高中数学竞赛培优教程. 杭州:浙江大学出版社,2011.

[12] 熊斌,冷岗松. 高中数学联赛赛前辅导. 上海:华东师范大学出版社,2004.

“奥数”联赛冲刺篇——《高中数学联赛考前辅导》

- 选题经典且贴近高中联赛
- 知识上查漏补缺，能力上全面提升
- 全新模拟题让你提前感受考场氛围

读者对象：参加联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

“奥数”IMO终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

- 从2009年起，每年出版一册
- 以国家集训队测试题和国家队训练题为主
- 收集了国内主要竞赛：全国联赛、联赛加试、冬令营、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克、东南地区数学奥林匹克
- 附有美国、俄罗斯、罗马尼亚和国际数学奥林匹克

读者对象：参加联赛、冬令营等赛事的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

“奥数”域外篇——《全俄中学生数学奥林匹克(1993－2006)》

俄罗斯是世界上开展数学活动最早、最广泛、也是影响最大的国家之一。俄罗斯是世界上竞赛试题的最大生产国，不仅产量高，而且质量好，其中最出色的当数组合题。

本书收录1993－2006年俄罗斯9—11年级数学奥林匹克第四轮（联邦区域竞赛）和第五轮（全俄决赛）竞赛的所有试题和解答。

读者对象：参加数学竞赛的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

更多图书信息及免费资料请登录：
http://www.hdsdjf.com/downloadfileinfor.aspx? classid＝69

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书.高中卷.平均值不等式与柯西不等式/李胜宏，边红平编著.—2版.—上海：华东师范大学出版社，2012.2(2012重印)
ISBN 978-7-5617-9311-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李…②边… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第023080号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷

平均值不等式与柯西不等式(第二版)

编　　著　李胜宏　边红平
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　石　岩
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　12
字　　数　211千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年7月第二次
印　　数　13001—16100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9311-4/G·5567
定　　价　23.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)