数学奥林匹克小丛书　高中卷 5

第二版

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

不等式的解题方法与技巧

苏勇　熊斌　编著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 证明不等式的基本方法

现实世界中的量，相等是局部的、相对的，而不等则是普遍的、绝对的，不等式的本质是研究"数量关系"中的"不等关系".

对于两个量，我们常常要比较它们之间的大小，或者证明一个量大于另一个量，这就是不等式的证明. 不等式的证明因题而异，灵活多变，常常要用到一些基本的不等式，如平均不等式、柯西不等式等，其中还需用到一些技巧性高的代数变形. 本节将介绍证明不等式的一些最基本的方法.

1.1 比 较 法

比较法一般有两种形式：

(1) 差值比较　欲证 $A\geqslant B$，只需证 $A-B\geqslant 0$；

(2) 商值比较　若 $B>0$，欲证 $A\geqslant B$，只需证 $\frac{A}{B}\geqslant 1$.

在用比较法时，常常需要对式子进行适当变形，如因式分解、拆项、合并项等.

例 1　设 a、b、c 是正实数，求证：

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

证明　上式左边－右边

$$=\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c$$

$$=\frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c}+\frac{b^2+ca-bc-ba}{c+a}+\frac{c^2+ab-ca-cb}{a+b}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 0,$$

所以 $$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

例 2　实数 x、y、z 满足 $xy+yz+zx=-1$，求证：
$$x^2+5y^2+8z^2\geqslant 4.$$

证明　因为 $$\begin{aligned}&x^2+5y^2+8z^2-4\\=&x^2+5y^2+8z^2+4(xy+yz+zx)\\=&(x+2y+2z)^2+(y-2z)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $$x^2+5y^2+8z^2\geqslant 4.$$

说明　本题的拆项配方，有一定的技巧，需要有较强的观察能力.

例 3　设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，试证：对任意实数 x、y、z，有：
$$x^2+y^2+z^2$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right).$$

并指出等号成立的充要条件.

分析　熟知 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0$，我们用类似的方法证明本题.

证明　上式左边－右边
$$\begin{aligned}=&\left[\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{c+a}y^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy\right]\\&+\left[\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}yz\right]\\&+\left[\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}xz\right]\\=&\sum_{cyc}ab\left[\frac{x}{\sqrt{a(b+c)}}-\frac{y}{\sqrt{b(c+a)}}\right]^2\end{aligned}$$

$\geqslant 0$（这里 $\sum\limits_{cyc}$ 表示循环和号），

故原不等式成立.

例 4 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

证明 由于不等式是关于 a、b、c 对称的，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，于是

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geqslant 1,$$

所以
$$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

说明 由本题的结论得

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c} \geqslant a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c},$$

即
$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

一般地，设 $x_i \in \mathbf{R}^+$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则有

$$x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{x_n} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}},$$

证法与本例完全一样.

例 5 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，$a^2+b^2+c^2=1$，求

$$S = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

的最小值.

解 当 $a=b=c$ 时，$S=3$. 猜测：$S \geqslant 3$.

事实上，

$$\begin{aligned}
S-3 &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right) \\
&= a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right) \\
&= a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

综上所述，S 的最小值为 3.

说明 先猜后证是处理许多最值问题的有效手段. 猜，一猜答案，二猜等号成立的条件；证明的时候要注意等号是否能取到.

1.2 放缩法

有时我们直接证明不等式 $A \leqslant B$ 比较困难，可以试着去找一个中间量 C，

如果有 $A\leqslant C$ 及 $C\leqslant B$ 同时成立，自然就有 $A\leqslant B$ 成立. 所谓"放缩"即将 A 放大到 C，再把 C 放大到 B 或者反过来把 B 缩小到 C 再缩小到 A. 不等式证明的技巧，常体现在对放缩尺度的把握上.

例 6 设 n 是正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}\geqslant\frac{n^3+1}{(n^2+2011)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{2011}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^2.$$

证明 由柯西不等式可得，

$$\left(1+1+\cdots+1+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}\right)$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\right)^2,$$

所以
$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$$
$$\geqslant\frac{n^2}{n^3+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\right)^2,$$

于是只需证
$$\frac{n^2}{n^3+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\right)^2$$
$$\geqslant\frac{n^3+1}{(n^2+2011)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{2011}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad n(n^2+2011)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\right)$$
$$\geqslant(n^3+1)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{2011}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad (n^3+2011n)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+(n^2+2011)\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$$
$$\geqslant(n^3+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+(2011n^3+2011)\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$$

$$\Leftrightarrow\quad (2011n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant(2011n-1)n^2\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2,$$

从而命题得证.

例 7　求证：对任意正实数 a、b、c，均有

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

证明　因为

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geqslant(a+b)ab,$$

所以 $$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{abc(a+b+c)},$$

同理可得 $$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leqslant\frac{a}{abc(a+b+c)},$$
$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{b}{abc(a+b+c)},$$

把上面三式相加，便得

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

说明　在处理分式不等式时，通分只有在不得已的情况下才进行，若想变为同分母比较简便的一种思想就是“放缩”.

例 8　设 $a_i\geqslant1(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

分析　观察两边的式子，首先要设法让左边“变出”2^n.

证明
$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\=&2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right).\end{aligned}$$

由于 $a_i-1\geqslant0$，可得：

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\ \geqslant&2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ \geqslant&2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)\\ =&\frac{2^n}{n+1}[n+1+(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)]\\ =&\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

故原不等式成立.

例 9　求最大的实数 α，使得 $\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\alpha$ 对所有正实数 x、y、z 成立.

解法 1　令 $x=y$，$z\to 0$，则原式左端 $\to 2$，因此，若 $\alpha>2$，将出现矛盾，故 $\alpha\leqslant 2$.

下面证明：$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>2$.

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，我们设法证明

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

将 $\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}$、$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 移到右边，即证

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

也即

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+z^2}+z)}.$$

两边约去 x，并且由于 $\sqrt{x^2+y^2}+y>2y$，$\sqrt{x^2+z^2}+z>2z$，所以，只要证明

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{x}{2y\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{x}{2z\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}}$，所以 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ 随 x 的增大而增大.

同样，$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 也随 x 的增大而增大.

所以我们只须考虑 $x=y$ 时的情况.

令 $x=y$，即证

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}z},$$

也就是 $\dfrac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}z}$，即证 $\sqrt{2}z \geqslant \sqrt{y^2+z^2}$.

这是显然成立的.

因此，

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\geqslant 2.$$

故 $\alpha_{\max}=2$.

说明　本题也可利用待定系数法给出解答.

解法 2　同样，我们来证明

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>2.$$

设
$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{2x^a}{x^a+y^a+z^a}. \quad ①$$

其中 a 为待定参数.

注意到①等价于 $(x^a+y^a+z^a)^2\geqslant 4x^{2a-2}(y^2+z^2)$.

上式左边 $\geqslant 4x^a(y^a+z^a)$，故只须保证

$$y^a+z^a\geqslant x^{a-2}(y^2+z^2).$$

不难发现，取 $a=2$ 即可. 于是

$$\sum\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\sum\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}=2.$$

而等号显然不可能成立，所以 $\sum\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>2$.

故 $\alpha_{\max}=2$.

例 10　设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 同时满足以下条件：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$.

求证：对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $\max\{a_k, b_k\}\leqslant\dfrac{10}{10+k^2}$.（2010 年中国西部数学奥林匹克）

证明 对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$(ka_k)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 b_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$= \left(10 - \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i\right) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

$$\leqslant (10 - k^2 a_k) \cdot (1 - a_k) = 10 - (10 + k^2) a_k + k^2 a_k^2,$$

从而 $a_k \leqslant \dfrac{10}{10 + k^2}$.

同理有 $b_k \leqslant \dfrac{10}{10 + k^2}$，所以 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \dfrac{10}{10 + k^2}$.

例 11 正实数 x、y、z 满足 $xyz \geqslant 1$，证明

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

（2005 年国际数学奥林匹克）

证明 原不等式可变形为

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant 3.$$

由柯西不等式及题设条件 $xyz \geqslant 1$，得

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geqslant (x^2 (xyz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geqslant (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

即 $$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leqslant \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

同理 $$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} \leqslant \frac{zx + z^2 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant \frac{xy + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

把上面三个不等式相加，并利用 $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$，得

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 3.$$

摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 的解法获得了特别奖. 他的证法如下：

因为

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3 (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 (x^3 - 1)^2 (y^2 + z^2)}{x^3 (x^5 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant 0,$$

所以

$$\sum_{cyc}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\sum_{cyc}\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{cyc}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{cyc}(x^2-yz)(\text{因为 } xyz\geqslant 1)$$
$$\geqslant 0.$$

1.3 分析法

所谓分析法就是先假定要证的不等式成立，然后由它出发推出一系列与之等价的不等式(即要求推理过程的每一步都可逆)，直到得到一个较容易证明的不等式或者一个明显成立的不等式. 分析法是一种执果索因的证明方法，在寻求证明思路时尤为有效.

例 12 若 $x, y\in\mathbf{R}$, $y\geqslant 0$，且 $y(y+1)\leqslant(x+1)^2$，求证：$y(y-1)\leqslant x^2$.

证明 若 $0\leqslant y\leqslant 1$，则 $y(y-1)\leqslant 0\leqslant x^2$.

若 $y>1$，由题设知

$$y(y+1)\leqslant(x+1)^2,$$
$$y\leqslant\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}.$$

要证明 $y(y-1)\leqslant x^2$，即只需证明

$$\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2},$$

$$\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+\frac{1}{4}\leqslant x^2+\frac{1}{4}+2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x\leqslant 2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}.$$

最后这个不等式是显然的，从而原不等式得证.

例 13 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant a+b-2\sqrt{ab}.$$

证明 注意到

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant a+b-2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \qquad c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

因为
$$\begin{aligned} c+2\sqrt{ab} &= c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{c\sqrt{ab}\sqrt{ab}}\\ &=3\sqrt[3]{abc}, \end{aligned}$$

从而
$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant a+b-2\sqrt{ab}.$$

说明　在不等式的证明中，分析法和综合法有时需交替使用. 本题在用分析法得到 $c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，再用分析法继续证明下去的话，会使问题变得复杂，此时结合综合法便使问题迎刃而解了.

例 14　已知 $n\in\mathbf{N}_+$，求证：

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ①$$

证明　要证明①，我们只要证

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geqslant(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ②$$

②的左边为
$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right), \qquad ③$$

②的右边为
$$\begin{aligned} &n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\ =&\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ④ \end{aligned}$$

比较③式和④式，若有

$$\frac{n}{2}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \qquad ⑤$$

及
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geqslant\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \qquad ⑥$$

则②得证. 而⑤、⑥两式显然成立，因此①得证.

例 15　已知 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，$abc=1$. 求证：

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 4(a+b+c-1).$$

分析　想法是把 a 当作参数，将其看成是关于 $b+c$ 的一元二次方程，用判别式的方法来证明.

证明　不妨设 $a\geqslant 1$，则原不等式等价于

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6\geqslant 4(a+b+c), \quad ①$$

即
$$(a^2-1)(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4a+3(b+c)$$

由于
$$(a+1)(b+c)\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{bc}=4,$$

所以如果我们能够证明

$$4(a-1)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6\geqslant 4a+3(b+c), \quad ②$$

则①式成立.

而②等价于

$$2+a(b^2+c^2)+bc(b+c)-3(b+c)\geqslant 0,$$

故只需证
$$\frac{a}{2}(b+c)^2+(bc-3)(b+c)+2\geqslant 0.$$

记
$$f(x)=\frac{a}{2}\cdot x^2+(bc-3)x+2,$$

则其判别式
$$\Delta=(bc-3)^2-4a.$$

我们只要证明 $\Delta\leqslant 0$ 即可，这相当于

$$\left(\frac{1}{a}-3\right)^2-4a\leqslant 0.$$

即
$$1-6a+9a^2-4a^3\leqslant 0.$$

也即
$$(a-1)^2(4a-1)\geqslant 0. \quad ③$$

由 $a\geqslant 1$，③显然成立，进而①成立.

由上知等号在 $a=b=c=1$ 时成立.

1.4 待定系数法

引入适当的参数，根据题中式子的特点，将参数确定，从而使不等式获得证明.

例 16 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数，求 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

分析 欲求 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值，只需先证明存在一个常数 c，使

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant c, \quad ①$$

且 x、y、z 取某组数时，等号成立.

①式可化为 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{c}(xy+2yz)$. 由于右边两项为 xy 和 $2yz$，所以左边的 y^2 需拆成两项 αy^2 和 $(1-\alpha)y^2$. 由

$$x^2+\alpha y^2\geqslant 2\sqrt{\alpha}xy,$$
$$(1-\alpha)y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{1-\alpha}yz,$$

又由 $\dfrac{2\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=2$，得 $\alpha=\dfrac{1}{5}$.

从而 $$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz).$$

解 因为 $$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy,$$
$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz,$$

所以 $$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz),$$

即 $$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x=1$，$y=\sqrt{5}$，$z=2$ 时，等号成立.

所以，欲求的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

例 17 对于 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，求 $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值.

解 我们考虑 $[\alpha(1+x)]^5[\beta(1-x)][\gamma(2x-1)]^2$ 的最大值，这里 α、β、γ 是正整数，满足 $5\alpha-\beta+4\gamma=0$，$\alpha(1+x)=\beta(1-x)=\gamma(2x-1)$. 后者即

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{2\gamma+\beta},$$

代入 $\beta=5\alpha+4\gamma$，得

$$0=2(3\alpha\gamma+5\alpha^2-2\gamma^2)=2(5\alpha-2\gamma)(\alpha+\gamma),$$

我们取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,30,5)$，由平均不等式得，

$$[2(1+x)]^5[30(1-x)][5(2x-1)]^2\leqslant\left(\frac{15}{4}\right)^8,$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6\geqslant 4(a+b+c), \quad ①$$

即
$$(a^2-1)(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4a+3(b+c)$$

由于
$$(a+1)(b+c)\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{bc}=4,$$

所以如果我们能够证明

$$4(a-1)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6\geqslant 4a+3(b+c), \quad ②$$

则①式成立.

而②等价于

$$2+a(b^2+c^2)+bc(b+c)-3(b+c)\geqslant 0,$$

故只需证
$$\frac{a}{2}(b+c)^2+(bc-3)(b+c)+2\geqslant 0.$$

记
$$f(x)=\frac{a}{2}\cdot x^2+(bc-3)x+2,$$

则其判别式
$$\Delta=(bc-3)^2-4a.$$

我们只要证明 $\Delta\leqslant 0$ 即可，这相当于

$$\left(\frac{1}{a}-3\right)^2-4a\leqslant 0.$$

即
$$1-6a+9a^2-4a^3\leqslant 0.$$

也即
$$(a-1)^2(4a-1)\geqslant 0. \quad ③$$

由 $a\geqslant 1$，③显然成立，进而①成立.

由上知等号在 $a=b=c=1$ 时成立.

1.4 待定系数法

引入适当的参数，根据题中式子的特点，将参数确定，从而使不等式获得证明.

例 16 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

分析 欲求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值，只需先证明存在一个常数 c，使

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant c, \quad ①$$

且 x、y、z 取某组数时，等号成立.

①式可化为 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{c}(xy+2yz)$. 由于右边两项为 xy 和 $2yz$，所以左边的 y^2 需拆成两项 αy^2 和 $(1-\alpha)y^2$. 由

$$x^2+\alpha y^2\geqslant 2\sqrt{\alpha}xy,$$
$$(1-\alpha)y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{1-\alpha}yz,$$

又由 $\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=2$，得 $\alpha=\frac{1}{5}$.

从而
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz).$$

解　因为
$$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy,$$
$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz,$$

所以
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz),$$

即
$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x=1$，$y=\sqrt{5}$，$z=2$ 时，等号成立.

所以，欲求的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

例 17　对于 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，求 $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值.

解　我们考虑 $[\alpha(1+x)]^5[\beta(1-x)][\gamma(2x-1)]^2$ 的最大值，这里 α、β、γ 是正整数，满足 $5\alpha-\beta+4\gamma=0$，$\alpha(1+x)=\beta(1-x)=\gamma(2x-1)$. 后者即

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{2\gamma+\beta},$$

代入 $\beta=5\alpha+4\gamma$，得

$$0=2(3\alpha\gamma+5\alpha^2-2\gamma^2)=2(5\alpha-2\gamma)(\alpha+\gamma),$$

我们取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,30,5)$，由平均不等式得，

$$[2(1+x)]^5[30(1-x)][5(2x-1)]^2\leqslant\left(\frac{15}{4}\right)^8,$$

此时 $x=\frac{7}{8}$. 所以，当 $x=\frac{7}{8}$ 时，$(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值为 $\frac{3^7\cdot 5^5}{2^{22}}$.

例 18（Ostrowski）　设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不成比例. 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足：

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=1. \end{cases}$$

求证：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n b_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2}$.

证法 1　设 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+\alpha\cdot\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i+\beta\left(\sum\limits_{i=1}^n b_ix_i-1\right)$，其中 α、β 为待定系数. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n\left(x_i+\frac{\alpha a_i+\beta b_i}{2}\right)^2-\sum_{i=1}^n\frac{(\alpha a_i+\beta b_i)^2}{4}-\beta \\ &\geqslant -\sum_{i=1}^n\frac{(\alpha a_i+\beta b_i)^2}{4}-\beta.\end{aligned}$$

上述不等式等号成立，当且仅当

$$x_i=-\frac{\alpha a_i+\beta b_i}{2}\ (i=1, 2, \cdots, n). \quad ①$$

将①式代回 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=0$ 及 $\sum\limits_{i=1}^n b_ix_i=1$ 中，有：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha A-\frac{1}{2}\beta C=0, \\ -\frac{1}{2}\alpha C-\frac{1}{2}\beta B=1. \end{cases}$$

其中，$A=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$，$B=\sum\limits_{i=1}^n b_i^2$，$C=\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i$. 因此，

$$\alpha=\frac{2C}{AB-C^2},\ \beta=-\frac{2A}{AB-C^2}.$$

故

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant -\sum_{i=1}^n\left(\frac{\alpha a_i+\beta b_i}{2}\right)^2-\beta=\frac{A}{AB-C^2}.$$

说明 1　本题还有下列两种证明方法，供读者参考：

证法 2　由 Cauchy 不等式可得，对任意 $t \in \mathbf{R}$，

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i t+b_i)^2\right]\cdot(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i t+b_i)x_i\right]^2=1,$$

即
$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(At^2+2Ct+B)-1 \geqslant 0$$

恒成立.

由判别式（关于 t 的）$\Delta \leqslant 0$，即有：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{A}{AB-C^2}.$$

证法 3　（综合运用上述两种方法）

由条件，对任意 $\lambda \in \mathbf{R}$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)x_i=1$.

利用 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)^2 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)x_i\right]^2=1.$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B+\lambda^2 A-2\lambda C}.$$

我们的目标是证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B-\dfrac{C^2}{A}},$$

因此，只需
$$\lambda^2 A-2\lambda C \leqslant -\frac{C^2}{A}.$$

即
$$\lambda^2 A^2-2\lambda AC+C^2 \leqslant 0.$$

取 $\lambda=\dfrac{C}{A}$ 即可满足上述条件.

说明 2　可以从本题证明 Fan-Todd 定理：

设 a_k、b_k（$k=1,2,\cdots,n$）为两组不成比例的实数列，已知 $a_i b_k \neq a_k b_i$（$i \neq k$），则

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leqslant (\mathrm{C}_n^2)^{-2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\neq k}\frac{a_k}{a_i b_k-a_k b_i}\right)^2.$$

证明 只需在本题中令 $x_k=(C_n^2)^{-1}\cdot\sum\limits_{r\neq k}\dfrac{a_r}{a_rb_k-a_kb_r}$，读者不难自行验证 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足全部条件.

例 19 求函数 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{x_1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^2}+\dfrac{x_2}{(1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{(1+x_n)^2}$ 的最大值 m_n（其中 $x_i\geqslant 0$）. 用 m_{n-1} 表示 m_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n$.

分析 f_n 的每一项分母都很复杂，自然应先作代换将其简化.

解 令 $a_i=\dfrac{1}{1+x_i+\cdots+x_n}$，$1\leqslant i\leqslant n$，并约定 $a_{n+1}=1$. 则

$$1+x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n=\frac{1}{a_i}.$$

又

$$1+x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_n=\frac{1}{a_{i+1}},$$

故

$$x_i=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}f_n&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{1}\right).\end{aligned}$$

为求 f_n 之最大值，构造下列不等式：

$$\begin{cases}\dfrac{a_1^2}{a_2}+\lambda_1^2a_2\geqslant 2\lambda_1a_1,\\\dfrac{a_2^2}{a_3}+\lambda_2^2a_3\geqslant 2\lambda_2a_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\dfrac{a_n^2}{1}+\lambda_n^2\geqslant 2\lambda_na_n.\end{cases}\qquad ①$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为参数，$\lambda_i\geqslant 0$.

将①中 n 个不等式相加，只须使

$$\begin{cases}2\lambda_1=1,\\2\lambda_2=1+\lambda_1^2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\2\lambda_n=1+\lambda_{n-1}^2.\end{cases}\qquad ②$$

即有 $f_n \leqslant \lambda_n^2$.

注意到 $\lambda_i \geqslant \lambda_{i-1}$，且 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ 存在，易见它的值为 1.

1.5 标准化(归一化)

当不等式为齐次式的时候，常可设变量之和为 k（某个常数），这样不仅简化了式子，而且增加了条件，有助于我们解决问题.

例 20 设 a、b、c 是正实数，求证：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

证明 因为左边的式子是齐次的，所以不妨设 $a+b+c=3$，于是只需证明

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leqslant 8.$$

令
$$f(x)=\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2},\ x\in\mathbf{R}^+.$$

则
$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x^2+6x+9}{3(x^2-2x+3)}\\ &=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{x^2-2x+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{(x-1)^2+2}\right)\\ &\leqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{2}\right)=\frac{1}{3}(4x+4), \end{aligned}$$

所以

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{1}{3}(4a+4+4b+4+4c+4)=8.$$

例 21 已知 $a+b+c>0$，$ax^2+bx+c=0$ 有实根，求证：

$$4\min\{a,\ b,\ c\}\leqslant a+b+c\leqslant\frac{9}{4}\max\{a,\ b,\ c\}.$$

证明 不妨设 $a+b+c=1$，否则可用 $\frac{a}{a+b+c}$、$\frac{b}{a+b+c}$、$\frac{c}{a+b+c}$ 代替 a、b、c.

先证明：$\max\{a,\ b,\ c\}\geqslant\frac{4}{9}$.

（1）若 $b\geqslant\frac{4}{9}$，则结论成立.

（2）若 $b<\frac{4}{9}$，因为 $b^2\geqslant 4ac$，有 $ac<\frac{4}{81}$.

又 $a+c=1-b>\frac{5}{9}$，所以如果 $a<0$ 或 $c<0$，即有 $c>\frac{5}{9}$ 或 $a>\frac{5}{9}$，结论成立.

如果 $a,\ c\geqslant 0$，则 $\left(\frac{5}{9}-c\right)\cdot c<ac<\frac{4}{81}$，得 $c<\frac{1}{9}$ 或 $c>\frac{4}{9}$.

若 $c<\frac{1}{9}$，此时 $a>\frac{4}{9}$，故结论成立.

再证明：$\min\{a,\ b,\ c\}\leqslant\frac{1}{4}$.

（1）若 $a\leqslant\frac{1}{4}$，则无须证明.

（2）若 $a>\frac{1}{4}$，则有 $b^2\geqslant 4ac\geqslant c$，$b+c=1-a<\frac{3}{4}$.

不妨设 $c\geqslant 0$（否则 $c<0$，结论已得），故 $\sqrt{c}+c\leqslant b+c<\frac{3}{4}$，于是 $\left(\sqrt{c}+\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{c}-\frac{1}{2}\right)<0$.

因此 $c<\frac{1}{4}$，结论成立.

说明　本题的结论是最佳的.

方程 $\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}=0$ 表明 $\frac{9}{4}$ 不能改为更小的数；而方程 $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{4}x+\frac{1}{4}=0$ 表明 4 不能改为更大的数.

例 22　非负实数 a、b、c、d 满足：$a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求证：

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab\leqslant 8.$$

证明　原不等式等价于

$$(a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)^3.$$

因为

$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab=a(a^2+bc)+b(b^2+cd)+c(c^2+da)+d(d^2+ab)$.

所以，由柯西不等式，得

$$(a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2+d^2)\left[(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2\right].$$

于是只需证明

$$(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

$$2(a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab) \leqslant a^2b^2+c^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2(a^2c^2+b^2d^2),$$

$$(ab-ac)^2+(ac-cd)^2+(bc-bd)^2+(ad-bd)^2 \geqslant 0.$$

从而命题得证.

说明　本题把右边的常数 8 利用已知条件化为关于 a、b、c、d 的表达式，使得两边的次数一样，从而有利于解题.

例 23　给定整数 $n \geqslant 4$，对任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$

的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，求 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值.（2011年中国数学奥林匹克）

解　由齐次性可知，不妨假设 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=\sum\limits_{i=1}^n b_i=1$. 首先，当 $a_1=1$，$a_2=a_3=\cdots=a_n=0$，$b_1=0$，$b_2=b_3=\cdots=b_n=\dfrac{1}{n-1}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)=1$，$\sum\limits_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)=\dfrac{1}{n-1}$，故

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)}=n-1.$$

下证对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=\sum\limits_{i=1}^n b_i=1$ 的 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，都有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)} \leqslant n-1.$$

由于分母是正数，故上式等价于

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i) \leqslant (n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i),$$

即 $$(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

由对称性，不妨设 b_1 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中最小的一个，则有

$$\begin{aligned}(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i &\geqslant (n-1)b_1^2+(n-1)\sum_{i=2}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_1 \\ &\geqslant (n-1)b_1^2+\left(\sum_{i=2}^{n} b_i\right)^2+(n-2)b_1 \\ &= (n-1)b_1^2+(1-b_1)^2+(n-2)b_1 \\ &= nb_1^2+(n-4)b_1+1 \\ &\geqslant 1=\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2,\end{aligned}$$

所以，所求的最大值为 $n-1$.

1.6 Schur 不等式

Schur 不等式：设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，则

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geqslant 0 \qquad ①$$

（即：$\sum\limits_{cyc}[x(x-y)(x-z)] \geqslant 0.$）.

一般地，**Schur 不等式**为：设 $x, y, z \geqslant 0$，$r>0$，则

$$\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \geqslant 0. \qquad ②$$

证明 不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$，则

$$\begin{aligned}\text{左边} &\geqslant x^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z) \\ &\geqslant y^r(x-y)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Schur 不等式的如下两个变形形式在解题中非常有用：

变形Ⅰ： $$\sum_{cyc} x^3-\sum_{cyc}[x^2(y+z)]+3xyz \geqslant 0.$$

变形Ⅱ： $$\left(\sum_{cyc} x\right)^3-4\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} yz\right)+9xyz \geqslant 0.$$

事实上,把①展开即得变形Ⅰ,因为 $(\sum_{cyc}x)^3=\sum_{cyc}x^3+3\sum_{cyc}[x^2(y+z)]+6xyz$,代入变形Ⅰ,得

$$(\sum_{cyc}x)^3-3\sum_{cyc}[x^2(y+z)]-6xyz-\sum_{cyc}[x^2(y+z)]+3xyz\geqslant 0,$$

$$(\sum_{cyc}x)^3-4\sum_{cyc}[x^2(y+z)]-3xyz\geqslant 0,$$

所以
$$(\sum_{cyc}x)^3-4(\sum_{cyc}x)(\sum_{cyc}yz)+9xyz\geqslant 0.$$

例 24 证明:在△ABC 中,有

$$\sum_{cyc}a^3-2\sum_{cyc}a^2(b+c)+9abc\leqslant 0.$$

证明 令 $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$,则由 Schur 不等式可得

$$\sum_{cyc}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)(b-a)(c-a)\geqslant 0,$$

$$\sum_{cyc}(a-b)(a-c)(b+c-a)\geqslant 0,$$

$$-\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}a^2(b+c)-9abc\geqslant 0,$$

所以
$$\sum_{cyc}a^3-2\sum_{cyc}a^2(b+c)+9abc\leqslant 0.$$

例 25 设 $x, y, z\geqslant 0$,且 $x+y+z=1$,求证:

$$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

证明 由 Schur 不等式的变形Ⅱ,得

$$(\sum_{cyc}x)^3-4(\sum_{cyc}x)(\sum_{cyc}yz)+9xyz\geqslant 0,$$

由题设条件 $\sum_{cyc}x=1$,得

$$1-4\sum_{cyc}yz+9xyz\geqslant 0,$$

$$\sum_{cyc}yz-2xyz\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}xyz\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{7}{27}.$$

另一方面，$\sum\limits_{cyc} yz-2xyz \geqslant \sum\limits_{cyc} yz-xy-yz=zx \geqslant 0$.

从而命题得证.

例 26 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+}$，且 $x+y+z=xyz$，求证：

$$x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)+9 \geqslant 0. \quad ③$$

证明 因为 $x+y+z=xyz$，所以③等价于

$$[x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)](x+y+z)+9xyz \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz \geqslant 0$$

即
$$\sum_{cyc} x^3-\sum_{cyc} x^2(y+z)+3xyz \geqslant 0,$$

这就是 Schur 不等式的变形Ⅰ. 故命题得证.

例 27 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^{+}$，求证：

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2 \geqslant 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

证明 由 Schur 不等式(在②中，令 $r=2$)，得

$$\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z) \geqslant 0,\ x, y, z \in \mathbf{R}^{+},$$

所以
$$\sum_{cyc} x^4+xyz\sum_{cyc} x \geqslant \sum_{cyc} x^3(y+z).$$

又因为
$$\sum_{cyc} x^3(y+z)=2\sum_{cyc} y^2z^2+\sum_{cyc} yz(y-z)^2 \geqslant 2\sum_{cyc} y^2z^2,$$

所以
$$\sum_{cyc} x^4+xyz\sum_{cyc} x \geqslant 2\sum_{cyc} y^2z^2. \quad ④$$

在④式中，令 $x=\sqrt{a},\ y=\sqrt{b},\ z=\sqrt{c}$，得

$$\sum_{cyc} a^2+\sqrt{abc}\sum_{cyc}\sqrt{a} \geqslant 2\sum_{cyc} bc,$$
$$\sqrt{abc}\sum_{cyc}\sqrt{a}+(\sum_{cyc} a)^2 \geqslant 4\sum_{cyc} bc.$$

下证 $\sum\limits_{cyc} bc \geqslant \sqrt{3abc(a+b+c)}$.

事实上，由 $(u+v+w)^2 \geqslant 3(uv+vw+wu)$，得

$$(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)$$
$$=3abc(a+b+c),$$

所以
$$\sum_{cyc} bc \geqslant \sqrt{3abc(a+b+c)},$$

故 $\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geqslant 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$.

1.7 Hölder 不等式

Hölder 不等式：设 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是正实数，$w_1+w_2+\cdots+w_n=1$，对任意正实数 a_{ij}，有

$$(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m})^{w_1}(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2m})^{w_2}\cdots(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm})^{w_n}$$
$$\geqslant a_{11}^{w_1}a_{21}^{w_2}\cdots a_{n1}^{w_n}+a_{12}^{w_1}a_{22}^{w_2}\cdots a_{n2}^{w_n}+\cdots+a_{1m}^{w_1}a_{2m}^{w_2}\cdots a_{nm}^{w_n}. \quad ①$$

（即：$\prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}a_{ij})^{w_i}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}a_{ij}^{w_i}$.）

证明 记 $A_\alpha=\sum_{j=1}^{m}a_{\alpha j}(\alpha=1, 2, \cdots, n)$，则①式为

$$(A_1^{w_1}A_2^{w_2}\cdots A_n^{w_n})^{-1}\sum_{j=1}^{m}a_{1j}^{w_1}a_{2j}^{w_2}\cdots a_{nj}^{w_n}\leqslant 1,$$

即
$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant 1.$$

因为 $f(x)=\ln x\ (x>0)$ 是向上凸函数（因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$），由加权的 Jensen 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&w_1\ln\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\ln\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\ln\frac{a_{nj}}{A_n}\\
=&\frac{1}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\left(w_1\ln\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\ln\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\ln\frac{a_{nj}}{A_n}\right)\\
\leqslant&\ln\frac{w_1\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\frac{a_{nj}}{A_n}}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\\
\leqslant&\ln\left(w_1\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\frac{a_{nj}}{A_n}\right),
\end{aligned}$$

所以 $\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant w_1\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\frac{a_{nj}}{A_n}$,

把上式对 j 从 1 到 m 求和，得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant w_1+w_2+\cdots+w_n=1,$$

从而命题得证.

特别地，当 $w_1=w_2=\cdots=w_n=\dfrac{1}{n}$ 时，有

$$(a_{11}^n+a_{12}^n+\cdots+a_{1m}^n)(a_{21}^n+a_{22}^n+\cdots+a_{2m}^n)\cdots(a_{n1}^n+a_{n2}^n+\cdots+a_{nm}^n)$$
$$\geqslant(a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{n2}+\cdots+a_{1m}a_{2m}\cdots a_{nm})^n. \quad ②$$

在②中，取 $n=3$，$m=3$，有

$$(a_{11}^3+a_{12}^3+a_{13}^3)(a_{21}^3+a_{22}^3+a_{23}^3)(a_{31}^3+a_{32}^3+a_{33}^3)$$
$$\geqslant(a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{23}a_{33})^3. \quad ③$$

在②中，取 $n=3$，$m=2$，有

$$(a_{11}^3+a_{12}^3)(a_{21}^3+a_{22}^3)(a_{31}^3+a_{32}^3)\geqslant(a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32})^3. \quad ④$$

在①中，取 $n=2$，有

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)^\alpha\left(\sum_{i=1}^m b_i\right)^\beta\geqslant\sum_{i=1}^m a_i^\alpha b_i^\beta, \quad ⑤$$

其中 α、β 是正实数，且 $\alpha+\beta=1$. 当 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ 时，⑤ 即为 Cauchy 不等式.

在⑤中，令 $m=n$，$a_i^\alpha=x_i$，$b_i^\beta=y_i$，$\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\beta=\dfrac{1}{q}$，则⑤式为

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad ⑥$$

其中 $p>0$，$q>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

例 28 设 a，$b\in\mathbf{R}^+$.

(1) 求 $S=\dfrac{(a+1)^2}{b}+\dfrac{(b+3)^2}{a}$ 的最小值；

(2) 求 $T=\dfrac{(a+1)^3}{b^2}+\dfrac{(b+3)^3}{a^2}$ 的最小值.

解 (1) 由柯西不等式，得

$$S\cdot(b+a)\geqslant(a+1+b+3)^2,$$

所以

$$S\geqslant\frac{(a+b+4)^2}{a+b}=(a+b)+\frac{16}{a+b}+8$$
$$\geqslant2\sqrt{16}+8=16,$$

当 $a=\dfrac{7}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$ 时等号成立.

故 S 的最小值为 16.

(2) 由③(Hölder 不等式)，有

$$\left(\frac{(a+1)^3}{b^2}+\frac{(b+3)^3}{a^2}\right)(b+a)(b+a)\geqslant(a+1+b+3)^3,$$

所以

$$\begin{aligned}T&\geqslant\frac{(a+b+4)^3}{(a+b)^2}=x+12+\frac{48}{x}+\frac{64}{x^2}\ (\text{记 } a+b=x)\\&=x+\frac{64}{x}+\left(\frac{64}{x^2}-\frac{16}{x}+1\right)+11\\&=\left(x+\frac{64}{x}\right)+\left(\frac{8}{x}-1\right)^2+11\geqslant2\sqrt{64}+0+11\\&=27.\end{aligned}$$

当 $a=\frac{22}{5}$, $b=\frac{18}{5}$时等号成立.

所以 T 的最小值为 27.

例 29 设 a, b, $c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}.$$

证明 由平均不等式，得

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

所以
$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

由②(Hölder 不等式)，有

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}&=\frac{1}{27}\left(\frac{a+b}{2}+b+a\right)\left(b+\frac{b+c}{2}+c\right)\left(a+c+\frac{a+c}{2}\right)\\&\geqslant\frac{1}{27}\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}\cdot b\cdot a}+\sqrt[3]{b\cdot\frac{b+c}{2}\cdot c}+\sqrt[3]{a\cdot c\cdot\frac{a+c}{2}}\right)^3\\&\geqslant\frac{1}{27}\left(\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot a\cdot b}+\sqrt[3]{\sqrt{bc}\cdot b\cdot c}+\sqrt[3]{\sqrt{ca}\cdot c\cdot a}\right)^3\\&=\frac{1}{27}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^3,\end{aligned}$$

所以
$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}.$$

例 30　设 a、b、c 是正实数，求证：

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geqslant(a+b+c)^3.$$

证明　对于 $x\in\mathbf{R}^+$，x^2-1 与 x^3-1 具有相同的符号，所以

$$(x^2-1)(x^3-1)\geqslant 0,$$

即

$$x^5-x^2+3\geqslant x^3+2.$$

于是 $(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geqslant(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$.

而由②(Hölder 不等式)，有

$$\begin{aligned}(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)&=(a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3)\\&\geqslant(a+b+c)^3,\end{aligned}$$

从而命题得证.

例 31(幂平均不等式)　设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是正实数，$\alpha>\beta>0$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

证明　在⑥中(Hölder 不等式)，令 $x^i=1$, $i=1, 2, \cdots, n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

由于 $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$，所以上式可以写成

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

在上式中，令 $y_i=a_i^{\beta}$, $q=\frac{\alpha}{\beta}>1$，得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$，于是 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

习　题　1

1　设 x, y, $z\in\mathbf{R}$，求证：

$$(x^2+y^2+z^2)[(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2]$$

$$\geqslant (x+y+z)^2[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)]^2.$$

2 设 $m, n \in \mathbf{N}^+$，$m>n$，求证：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$.

3 给定大于 1 的自然数 a、b、n，A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数，A_{n-1}、A_n、B_{n-1}、B_n 定义为：

$$A_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0,\ A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0\text{（按 } a \text{ 进制写出）}$$
$$B_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0,\ B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0\text{（按 } b \text{ 进制写出）}$$

其中 $x_n\neq 0$，$x_{n-1}\neq 0$. 求证：当 $a>b$ 时，有 $\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$.

4 设 $a, b, c\in \mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

5 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足：

(1) $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{100}\geqslant 0$；

(2) $a_1+a_2\leqslant 100$；

(3) $a_3+a_4+\cdots+a_{100}\leqslant 100$.

求 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 的最大值.

6 已知 $5n$ 个实数 r_i、s_i、t_i、u_i、v_i 都大于 1 $(1\leqslant i\leqslant n)$，记 $R=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n r_i$，$S=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n s_i$，$T=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n t_i$，$U=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n u_i$，$V=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n v_i$. 求证下述不等式成立：

$$\prod_{i=1}^n\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n.$$

7 设 k、n 是正整数，$1\leqslant k<n$；$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 k 个正数，且知它们的和等于它们的积. 求证：$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1}\geqslant kn$.

8 如果 $a, b, c\in\mathbf{R}$，求证：

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geqslant(ab+bc+ca)^3.$$

9 求证：对任意 $c>0$，存在正整数 n 和复数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使

$$c\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}|\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\cdots+\varepsilon_na_n|<\left(\sum_{j=1}^n|a_j|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

其中 $\varepsilon_j\in\{-1, 1\}$，$j=1, 2, \cdots, n$.

10 设 a、b 是正常数，$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，求 $y = a\sqrt{\sin\theta} + b\sqrt{\cos\theta}$ 的最大值.

11 设 n 个实数，它们的绝对值都小于等于 2，其立方和为 0. 求证：它们的和 $\leqslant \frac{2}{3}n$.

12 已知正整数 $n \geqslant 3$，$[-1, 1]$ 中的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足：$\sum_{k=1}^{n} x_k^5 = 0$.

求证：$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \frac{8}{15}n$.

13 已知 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值为 a. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - a|\right)^2.$$

14 设 $x, y, z \geqslant 0$，求证：

$$x(y+z-x)^2 + y(z+x-y)^2 + z(x+y-z)^2 \geqslant 3xyz.$$

并确定等号成立的条件.

15 已知正整数 $n \geqslant 2$，实数 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$，并且，有 $a_1a_2\cdots a_n = b_1b_2\cdots b_n$；$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i - a_j) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(b_i - b_j)$. 求证：$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$.

16 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，求证：

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] \geqslant \frac{9}{4}.$$

17 求证：在锐角△ABC 中，有

$$\begin{aligned}&\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6\cot A\cot B\cot C \\ &\geqslant \cot A + \cot B + \cot C.\end{aligned}$$

18 设 $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，求证：

$$\begin{aligned}&\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)} \\ &+ \frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

19 设正实数 a、b、c 满足：$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4$，求证：

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3.$$

（2011 年美国数学奥林匹克）

20 设正实数 a、b、c 满足：$abc=1$，求证：对于整数 $k\geqslant 2$，有 $\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$.（2007 年中国东南数学奥林匹克）

2 和式的恒等变换

在不等式的证明过程中，我们时常要对和式进行处理，对和式作一些恒等变形. 因此，有必要了解一下一些重要的恒等变换式以及变换法：

(1) $a_ia_j+b_ib_j-a_ib_j-a_jb_i=(a_i-b_i)(a_j-b_j)$；

(2) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$；

(3) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$；

(4) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_jb_i$；

(5) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=i}^{n}a_ia_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{j}a_ia_j\right)$；

(6) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_ib_j=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)$；

(7) $a_n-a_1=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$.

以上变换公式请读者自行证明并熟记于心. 下面再看一下著名的 Abel 变换方法：

首先，设 $m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ m<n$，则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1}).\qquad①$$

①称为 Abel 和差变换公式.

在①中令 $A_0=0,\ A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(1\leqslant k\leqslant n)$，可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=b_n\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)(b_k-b_{k+1}).\qquad②$$

②称为 Abel 分部求和公式.

由②不难得到著名的 Abel 不等式：

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$，$m \leqslant \sum_{k=1}^{t} a_k \leqslant M$，$t=1, 2, \cdots, n$. 则有：

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant b_1 M. \quad ③$$

在实际证题的时候，如果发现一列数和易求，一列数差易求，就可以考虑采用 Abel 变换.

例 1　证明 Lagrange 恒等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

并由此式说明 Cauchy 不等式成立.

证明

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ = & \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \end{aligned}$$

故 Lagrange 恒等式成立. 又因为 $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geqslant 0$，所以有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2,$$

即 Cauchy 不等式成立.

例 2　若 $p > s \geqslant r > q$，$p + q = r + s$，$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right).$$

证明

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i^p a_j^q - a_i^s a_j^r) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^pa_j^q-a_i^sa_j^r)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j^pa_i^q-a_j^sa_i^r)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^pa_j^q+a_j^pa_i^q-a_i^sa_j^r-a_j^sa_i^r)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^qa_j^q(a_i^{p-q}+a_j^{p-q}-a_i^{s-q}a_j^{r-q}-a_j^{s-q}a_i^{r-q})\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^qa_j^q(a_i^{p-s}-a_j^{p-s})(a_i^{s-q}-a_j^{s-q})\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

故原不等式成立.

说明　恒等变换式(6)可以帮助我们把和项变得对称，进而便于因式分解.

例3　若 $a_i>0$, $b_i>0$, $a_ib_i=c_i^2+d_i^2(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2,$$

等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{a_j}=\frac{b_i}{b_j}=\frac{c_i}{c_j}=\frac{d_i}{d_j}$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

证明

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_id_j\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-c_ic_j-d_id_j)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i-2c_ic_j-2d_id_j)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_i}{a_j}(c_j^2+d_j^2)+\frac{a_j}{a_i}(c_i^2+d_i^2)-2c_ic_j-2d_id_j\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}c_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}c_i\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}d_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}d_i\right)^2\right]\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当

$$
\begin{cases}
\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}c_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}c_i=0,\\
\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}d_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}d_i=0.
\end{cases}
\quad(1\leqslant i<j\leqslant n)
$$

即
$$\begin{cases} a_ic_j = a_jc_i, & ① \\ a_id_j = a_jd_i. & ② \end{cases}$$

由 $①^2 + ②^2$，得 $a_i^2(c_j^2+d_j^2) = a_j^2(c_i^2+d_i^2)$，即 $a_i^2a_jb_j = a_j^2a_ib_i$.

故
$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j}. \qquad ③$$

由①②③立刻得到，等号成立当且仅当

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} = \frac{d_i}{d_j} (1 \leqslant i < j \leqslant n).$$

说明　本题也可以直接从右边证到左边.

证明
$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2 \\
=& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_ic_j + d_id_j) \\
\leqslant& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{c_i^2+d_i^2} \cdot \sqrt{c_j^2+d_j^2} \\
=& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{a_ib_i} \cdot \sqrt{a_jb_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{a_ib_j} \cdot \sqrt{a_jb_i} \\
\leqslant& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_ib_j + a_jb_i}{2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ib_j \\
=& \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i\right).
\end{aligned}$$

例 4　实数集 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 满足以下条件：

(1) $a_0 = a_n = 0$；

(2) 对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$a_k = c + \sum\limits_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$.

求证：
$$c \leqslant \frac{1}{4n}.$$

证明　记
$$s_k = \sum_{i=0}^k a_i, \ k = 1, 2, \cdots, n,$$

则
$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = nc + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}).$$

补充定义
$$a_{-1} = a_{-2} = \cdots = a_{-(n-1)} = 0,$$

则
$$s_n = nc + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1})\sum_{k=0}^{i} a_{i-k} \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) \cdot s_i \\
&= nc + s_1 s_0 + (s_2 - s_0)s_1 + (s_3 - s_1)s_2 \\
&\quad + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-3})s_{n-2} + (s_n - s_{n-2})s_{n-1} \\
&= nc + s_n s_{n-1} \\
&= nc + s_n^2,
\end{aligned}
$$

故
$$s_n^2 - s_n + nc = 0.$$

由 $\Delta = 1 - 4nc \geqslant 0$ 即知 $c \leqslant \frac{1}{4n}$.

例 5 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，$n \in \mathbf{N}_+$. 求证：对 $n \geqslant 2$，有

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right).$$

分析 若直接通过 a_n 的表达式来证将非常复杂，但通过建立其递推公式，可以使问题很容易得到解决，我们便可从此处入手.

证明

$$
\begin{aligned}
a_n^2 - a_{n-1}^2 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\left(a_n - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

故 $a_n^2 - a_1^2 = 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$.

所以 $a_n^2 = 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{n^2}\right)$

$$>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}-\cdots-\frac{1}{(n-1)n}\right)$$

$$=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

$$>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right).$$

故原不等式成立.

说明　本题也可以用数学归纳法证明加强的命题：

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}.$$

例 6　设数列$\{a_k\}$满足：$a_{k+1}=a_k+f(n)\cdot a_k^2$，$0\leqslant k\leqslant n$. 其中 $0<a_0<1$，$0<f(n)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_0}-1\right)$. 求证：

$$\frac{a_0(1+f(n))}{1+(1-a_0p)f(n)}\leqslant a_p\leqslant\frac{a_0}{1-a_0pf(n)}\ (0\leqslant p\leqslant n),\qquad ①$$

等号成立当且仅当 $p=0$.

证明　当 $p=0$ 时，①式两边等号成立.

当 $p\geqslant 1$ 时，由 $a_0>0$，$f(n)>0$，易知 $a_p>0\ (1\leqslant p\leqslant n)$，于是

$$a_{k+1}=a_k+f(n)a_k^2>a_k(0\leqslant k\leqslant n),$$

故
$$a_{k+1}=a_k+f(n)a_k^2<a_k+f(n)a_ka_{k+1}.$$

所以
$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}<f(n).$$

因此
$$\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)<pf(n),\ p=1,2,\cdots,n,$$

即
$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_p}<pf(n).$$

故
$$\frac{1}{a_p}>\frac{1}{a_0}-pf(n)\geqslant\frac{1}{a_0}-p\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_0}-1\right)\geqslant 1,$$

于是
$$a_p<\frac{1}{\frac{1}{a_0}-pf(n)}=\frac{a_0}{1-a_0pf(n)}\leqslant 1\ (1\leqslant p\leqslant n).$$

另一方面，由 $a_p^2<a_p<1$，有

$$a_{k+1}<a_k+f(n)\cdot a_k,$$

即
$$a_k > \frac{1}{1+f(n)} a_{k+1},$$

故
$$a_{k+1} > a_k + f(n)\frac{a_k \cdot a_{k+1}}{1+f(n)},$$

则
$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} > \frac{f(n)}{1+f(n)},$$

于是
$$\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) > p \cdot \frac{f(n)}{1+f(n)}\ (1 \leqslant p \leqslant n),$$

即
$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_p} > p \cdot \frac{f(n)}{1+f(n)},$$

也即
$$\frac{1}{a_p} < \frac{1}{a_0} - \frac{p \cdot f(n)}{1+f(n)} = \frac{1+(1-a_0 p)f(n)}{a_0(1+f(n))},$$

所以
$$a_p > \frac{a_0(1+f(n))}{1+(1-a_0 p)f(n)}\ (1 \leqslant p \leqslant n).$$

综合两方面情况，命题得证.

例 7　(钟开莱不等式)设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，且 $\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i (1 \leqslant k \leqslant n)$，则

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2$.

证明　(1) 由 Abel 变换公式，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(a_k - a_{k+1})\\ &\leqslant a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)(a_k - a_{k+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.\end{aligned}$$

再由 Cauchy 不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即得
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

（2）
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^3 &= a_n^2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)(a_k^2-a_{k+1}^2)\\ &\leqslant a_n^2\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)(a_k^2-a_{k+1}^2)\\ &=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i\\ &=\sum_{i=1}^{n}\big(a_i^{\frac{3}{2}}\cdot a_i^{\frac{1}{2}} b_i\big)\\ &\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2.$$

例 8 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是正实数列，且对所有 $i, j=1, 2, \cdots$ 满足 $a_{i+j}\leqslant a_i+a_j$. 求证：对于正整数 n，有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geqslant a_n.$$

分析 由条件，当 $i+j=k$ 时，有 $a_i+a_{k-i}\geqslant a_k$，于是得到关于和 $s_{k-1}=a_1+\cdots+a_{k-1}$ 的估计，而差 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$ 是易求的，提示我们用 Abel 变换公式.

证明 利用 Abel 变换法.

记 $s_i=a_1+a_2+\cdots+a_i,\ i=1, 2, \cdots, n.$

约定 $s_0=0$，则

$$2s_i=(a_1+a_i)+\cdots+(a_i+a_1)\geqslant i a_{i+1}.$$

即
$$s_i\geqslant\frac{i}{2}\cdot a_{i+1}.$$

故
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i} &=\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i-s_{i-1}}{i}\\ &=\sum_{i=1}^{n-1} s_i\Big(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\Big)+\frac{1}{n}\cdot s_n\\ &\geqslant\frac{1}{2}s_1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i a_{i+1}}{2}\Big(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\Big)+\frac{1}{n}s_n\\ &=\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{i+1}+\frac{1}{n}\cdot s_n\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}+\frac{1}{n}s_n.$$

因此
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}&\geqslant\frac{2}{n}s_n\\&=\frac{2}{n}(s_{n-1}+a_n)\\&\geqslant\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{2}a_n+a_n\right)\\&=\frac{n+1}{n}a_n>a_n.\end{aligned}$$

故原不等式成立.

说明 如果去掉 a_1，a_2，…，是正的这一条件，则可用数学归纳法证明本题(参见习题 7 第 5 题).

例 9 (排序不等式)设有两个有序数组：$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 及 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. 求证：

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ (\text{顺序和})\\\geqslant\ &a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\ (\text{乱序和})\\\geqslant\ &a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\ (\text{逆序和}),\end{aligned}$$

其中 j_1，j_2，…，j_n 是 1，2，…，n 的任意一个排列.

证明 令
$$s_i=b_1+b_2+\cdots+b_i,$$
$$s'_i=b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_i}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由题设易知
$$s_i\leqslant s'_i\ (i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$s_n=s'_n.$$

又因为 $a_i-a_{i+1}\leqslant 0$，故 $s_i(a_i-a_{i+1})\geqslant s'_i(a_i-a_{i+1})$.

所以
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i&=\sum_{i=1}^{n-1}s_i(a_i-a_{i+1})+a_ns_n\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}s'_i(a_i-a_{i+1})+a_ns'_n\\&=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{j_i}.\end{aligned}$$

此即左端不等式.类似可证得右端不等式.

例 10 将 1，2，3，…，2007 这 2007 个数任意排列可得 2007！个不同数

列，问其中是否存在 4 个数列：

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2007};\ b_1, b_2, \cdots, b_{2007};\ c_1, c_2, \cdots, c_{2007};\ d_1, d_2, \cdots, d_{2007},$$

使得 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{2007}b_{2007}=2(c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_{2007}d_{2007})$?

并证明你的结论.

解 由排序不等式

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{2007}b_{2007} &\leqslant 1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2007\cdot 2007 \\ &=\frac{2007\cdot 2008\cdot 4015}{6}=2\,696\,779\,140, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_{2007}d_{2007} &\geqslant 1\cdot 2007+2\cdot 2006+\cdots+2007\cdot 1 \\ &=\sum_{k=1}^{2007}k(2008-k)=2008\sum_{k=1}^{2007}k-\sum_{k=1}^{2007}k^2 \\ &=2008\cdot\frac{2007\cdot 2008}{2}-2\,696\,779\,140 \\ &=1\,349\,397\,084, \end{aligned}$$

于是 $2(c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_{2007}d_{2007})\geqslant 2\,698\,794\,168>a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{2007}b_{2007}$.

由此可见，满足条件的四个数列不存在.

例 11 求证：对每个正整数 n，有

$$\frac{2n+1}{3}\sqrt{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\leqslant\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{1}{6}.$$

不等式两边等号成立当且仅当 $n=1$.

分析 对于$\sqrt{i}$，既可看成是 $1\cdot\sqrt{i}$，也可看成是 $i\cdot\frac{1}{\sqrt{i}}$，这样就得到两种估计方法.

证明 容易验证当 $n=1$ 时，两个不等式都取等号. 下面不妨设 $n\geqslant 2$.

先证左边不等式. 令 $a_i=1,\ b_i=\sqrt{i}\ (1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$s_i=a_1+a_2+\cdots+a_i=i.$$

利用 Abel 分部求和公式，得

$$\begin{aligned} s&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}i(\sqrt{i}-\sqrt{i+1})+n\sqrt{n} \\ &=n\sqrt{n}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}. \end{aligned}$$

由 $\dfrac{i}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}<\dfrac{i}{2\sqrt{i}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{i}$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}<\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{i}=\frac{1}{2}(s-\sqrt{n}),$$

所以 $$s>n\sqrt{n}-\frac{1}{2}(s-\sqrt{n}),$$

解之，得 $$s>\frac{2n+1}{3}\cdot\sqrt{n}.$$

下证右边不等式. 令 $a_i=i$，$b_i=\dfrac{1}{\sqrt{i}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$s_i=a_1+a_2+\cdots+a_i=\frac{1}{2}i(i+1).$$

利用 Abel 分部求和公式，有

$$\begin{aligned}s&=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{i}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n+1}{2}\cdot\sqrt{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})}\\&=\frac{n+1}{2}\cdot\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sqrt{i(i+1)}}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}.\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\sqrt{i(i+1)}}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}<\dfrac{1}{4}(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，

故有 $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sqrt{i(i+1)}}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}&<\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})\\&=\frac{1}{4}(2s-\sqrt{n}-1),\end{aligned}$$

于是得到 $$s<\frac{1}{8}(2s-\sqrt{n}-1)+\frac{n+1}{2}\cdot\sqrt{n},$$

从而 $$s<\frac{4n+3}{6}\cdot\sqrt{n}-\frac{1}{6}.$$

命题获证.

例 12 设 $\{a_n\}$ 为无穷正数列，若存在常数 C，使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\leqslant C$ 对所有正整数 n 成立.

求证:存在常数 M,使得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\cdot a_k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}\leqslant M$ 对所有正整数 n 成立.

证明 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\cdot a_k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}$, $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\geqslant 1)$, $A_0=0$. 所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\cdot(A_k-A_{k-1})}{A_k^2}\leqslant\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2\cdot(A_k-A_{k-1})}{A_kA_{k-1}}$$
$$=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{A_k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_k}$$
$$=\frac{1}{a_1}+2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k}+\frac{4}{A_1}-\frac{n^2}{A_n}\leqslant\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

而
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}\sqrt{a_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{A_k}\sqrt{a_k}\right)^2\right]^{1/2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{1/2}=\left[S_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{1/2},$$

所以
$$S_n\leqslant\frac{5}{a_1}+2\left[S_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k},$$

由此解出
$$\sqrt{S_n}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}+\sqrt{\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}.$$

取 $M=\left(\sqrt{C}+\sqrt{\frac{5}{a_1}+2C}\right)^2$ 即可.

例 13 设 n 是一个正整数,实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 满足: $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 和 $0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_n$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i,r_j)\geqslant 0.$$

证明 作一张 $n\times n$ 的表:

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1a_1r_1 & a_1a_2r_1 & a_1a_3r_1\cdots a_1a_nr_1\\ a_2a_1r_1 & a_2a_2r_2 & a_2a_3r_2\cdots a_2a_nr_2\\ a_3a_1r_1 & a_3a_2r_2 & a_3a_3r_3\cdots a_3a_nr_3\\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \\ a_na_1r_1 & a_na_2r_2 & a_na_3r_3\cdots a_na_nr_n\end{pmatrix}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i,\ r_j)=\sum_{j=1}^{n}a_1a_j\min(r_1,\ r_j)+\sum_{j=1}^{n}a_2a_j\min(r_2,\ r_j)+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_ka_j\min(r_k,\ r_j)+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_na_j\min(r_n,\ r_j)$，它的第 k 项 $\sum_{j=1}^{n}a_ka_j\min(r_k,\ r_j)=a_ka_1r_1+a_ka_2r_2+\cdots+a_ka_kr_k+a_ka_{k+1}r_k+\cdots+a_ka_nr_k$ 就是表中第 k 行各元素的和，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

因此，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i,\ r_j)$ 就是表 A_1 中所有元素的和.

另外，此和也可以按以下方式求得：先取出表 A_1 中第一行、第一列的各元素，并求其和；剩下的表记为 A_2（相当于删去 A_1 中的第一行和第一列而得到 A_2），再取出表 A_2 中第一行、第一列的各元素，并求其和；剩下的表记为 A_3（相当于删去 A_2 中的第一行和第一列而得到 A_3），再取出表 A_3 中第一行、第一列的各元素，并求其和；……，如此得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i,\ r_j)\\
=&\sum_{k=1}^{n}r_k\left(a_k^2+2a_k(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)\right)\text{（这是 }A_k\text{ 中第一行第一列各元素的和）}\\
=&\sum_{k=1}^{n}r_k\Big(\big(a_k+\sum_{i=k+1}^{n}a_i\big)^2-\big(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\big)^2\Big)=\sum_{k=1}^{n}r_k\Big(\big(\sum_{i=k}^{n}a_i\big)^2-\big(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\big)^2\Big)\\
=&r_1\big(\sum_{i=1}^{n}a_i\big)^2+r_2\big(\sum_{i=2}^{n}a_i\big)^2+r_3\big(\sum_{i=3}^{n}a_i\big)^2+\cdots+r_n\big(\sum_{i=n}^{n}a_i\big)^2\\
&-r_1\big(\sum_{i=2}^{n}a_i\big)^2-r_2\big(\sum_{i=3}^{n}a_i\big)^2-\cdots-r_{n-1}\big(\sum_{i=n}^{n}a_i\big)^2\\
=&\sum_{i=k}^{n}(r_i-r_{i-1})\big(\sum_{i=k}^{n}a_i\big)^2\geqslant 0\text{（此处约定 }r_0=0\text{）}.
\end{aligned}
$$

因此结论得证.

习　题　2

1 设 $a,\ b,\ p,\ q>0$. 求证：

$$\frac{a^{p+q}+b^{p+q}}{2}\geqslant\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\left(\frac{a^q+b^q}{2}\right).$$

2 设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$；$0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}.$$

3 设 n 是给定的正整数，$n\geqslant3$，对于 n 个给定的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，记 m 为 $|a_i-a_j|$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的最小值. 求在 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ 的条件下，m 的最大值.

4 求所有的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$\frac{99}{100}=\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

其中 $a_0=1$，且 $(a_{k+1}-1)a_{k-1}\geqslant a_k^2-1$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$.

5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不全相等的 n 个正数 $(n\geqslant2)$，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{-2n}=1$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{2n}-n^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2>n^2.$$

6 给定 $n(\geqslant2)$ 个实数 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，令 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$y=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$，求证：$2\sqrt{y-x^2}\leqslant a_n-a_1\leqslant\sqrt{2n(y-x^2)}$.

7 设不等式

$$\begin{aligned}&|z_1'-z_2'|+|z_2'-z_3'|+\cdots+|z_{n-1}'-z_n'|\\ \leqslant{}&\lambda\cdot[|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+\cdots+|z_{n-1}-z_n|]\end{aligned}$$

对一切不全相等的复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 都成立. 其中 $kz'_k=\sum\limits_{j=1}^{k}z_j$，$k=1,2,\cdots,n$. 求证：$\lambda\geqslant1-\frac{1}{n}$. 并问何时取到等号？

8 设 $n(\geqslant3)$ 为正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数，对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$，有 $x_i<x_{i+1}$，求证：

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j>\left[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right]\left[\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right].$$

9 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}=0$ 是实数序列，求证：

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right).$$

10 证明 Chebyshev 不等式：

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \geqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

11（W. Janous 不等式推广形式）

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$，$p, q \in \mathbf{R}^+$. 记 $S=(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}$，则对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$，有：$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^q-a_{i_k}^q}{S^p-a_k^p} \geqslant 0$.

12 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是正实数数列，对所有 $n \geqslant 1$ 满足条件：$\sum_{j=1}^{n} a_j \geqslant \sqrt{n}$，求证：对所有的 $n \geqslant 1$，有 $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

13 试证：对任意实数 x，有 $\sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{k} \leqslant [nx]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

14 已知 $a_k \geqslant 0$，$k=1, 2, \cdots, n$. 定义 $A_k=\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

3 变量代换法

变量代换是数学中常用的解题方法之一，将一个较复杂的式子视为一个整体，用一个字母去代换它，从而使复杂问题简单化．有时候，有些式子可以用三角换元，从而使问题简化．当问题的条件或结论中出现“$x^2+y^2=r^2$”、“$x^2+y^2\leqslant r^2$”、“$\sqrt{r^2-x^2}$”或“$|x|\leqslant 1$”等形式时，可以考虑用“$\sin\alpha$”与“$\cos\alpha$”代换；当问题的条件或结论中出现“$\sqrt{r^2+x^2}$”、“$\sqrt{x^2-r^2}$”形式时，可作“$x=r\tan\alpha$”或“$x=r\sec\alpha$”代换等．在作代换时，要特别注意 α 的取值范围是由原变量 x 的取值范围所决定的．

例 1　已知 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$，求证：

$$2\leqslant\sqrt{5-4\sin\alpha}+\sin\alpha\leqslant\frac{9}{4}.$$

证明　令 $x=\sqrt{5-4\sin\alpha}$，则 $\sin\alpha=\frac{5-x^2}{4}$，由于 $0\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$，所以 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$．令

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{5-4\sin\alpha}+\sin\alpha\\&=x+\frac{5-x^2}{4}\\&=-\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{9}{4},\end{aligned}$$

由 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$ 便知 $2\leqslant y\leqslant\frac{9}{4}$．从而

$$2\leqslant\sqrt{5-4\sin\alpha}+\sin\alpha\leqslant\frac{9}{4}.$$

说明　本题中令 $x=\sqrt{5-4\sin\alpha}$，可以使式子变成容易处理的二次函数形式，从而获得解决．

例 2　已知实数 x、y 满足 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$，求证：

$$19 \leqslant x^2+y^2+12x+6y \leqslant 99.$$

证明　题设条件可化为

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4,$$

即
$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2=1.$$

令 $\dfrac{x-2}{2}=\cos\theta$，$\dfrac{y-3}{2}=\sin\theta$，其中 $\theta\in[0,\ 2\pi)$，所以

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+12x+6y\\=&(4x+6y-9)+12x+6y\\=&16x+12y-9\\=&16(2\cos\theta+2)+12(2\sin\theta+3)-9\\=&32\cos\theta+24\sin\theta+59\\=&8(4\cos\theta+3\sin\theta)+59\\=&40\cos(\theta+\varphi)+59\ \left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{3}{4}\right),\end{aligned}$$

而
$$19 \leqslant 40\cos(\theta+\varphi)+59 \leqslant 99,$$

所以
$$19 \leqslant x^2+y^2+12x+6y \leqslant 99.$$

例 3　设 a、b、c 是三角形的三边长，求证：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

证明　令 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$，x，y，$z\in\mathbf{R}^+$，则欲证的不等式等价于

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\quad xy^3+yz^3+zx^3 \geqslant x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqslant x+y+z.$$

因为
$$\frac{x^2}{y}+y \geqslant 2x,\ \frac{y^2}{z}+z \geqslant 2y,\ \frac{z^2}{x}+x \geqslant 2z,$$

所以
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqslant x+y+z.$$

从而原不等式得证.

说明 在涉及到三角形三边长 a、b、c 的不等式时，常常作代换 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$，其中 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$. 其实，如图 3.1 所示，D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 的切点，令 $AE=AF=x$，$BD=BF=y$，$CD=CE=z$，则 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$.

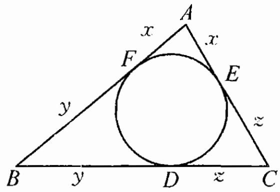


图 3.1

通过代换，关于 a、b、c 的不等式就转化为关于正实数 x、y、z 的不等式了.

例 4 设 $a, b, c, d\in\mathbf{R}^+$，且

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{d^2}{1+d^2}=1.$$

求证：$abcd\leqslant\frac{1}{9}$.

证明 令 $a=\tan\alpha$，$b=\tan\beta$，$c=\tan\gamma$，$d=\tan\delta$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 于是 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=1$. 所以

$$3\cdot\sqrt[3]{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\cos^2\delta,$$
$$3\cdot\sqrt[3]{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\delta=\cos^2\gamma,$$
$$3\cdot\sqrt[3]{\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\cos^2\beta,$$
$$3\cdot\sqrt[3]{\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\cos^2\alpha.$$

上面四式相乘，得 $\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma\tan^2\delta\leqslant\frac{1}{81}$.

因此 $$abcd=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta\leqslant\frac{1}{9}.$$

例 5 设 a、b、c 是正实数，求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

的最小值.

解 令

$$\begin{cases}x=a+2b+c,\\ y=a+b+2c,\\ z=a+b+3c,\end{cases}$$

则有 $x-y=b-c$，$z-y=c$，由此可得

$$\begin{cases}a+3c=2y-x,\\ b=z+x-2y,\\ c=z-y.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}\\ =&\frac{2y-x}{x}+\frac{4(z+x-2y)}{y}-\frac{8(z-y)}{z}\\ =&-17+2\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}+4\frac{z}{y}+8\frac{y}{z}\\ \geqslant&-17+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=-17+12\sqrt{2}.\end{aligned}$$

上式中的等号可以成立.事实上，由上述推导过程知，等号成立，当且仅当平均不等式中的等号成立，而这等价于

$$\begin{cases}2\dfrac{y}{x}=4\dfrac{x}{y},\\ 4\dfrac{z}{y}=8\dfrac{y}{z},\end{cases}\text{即}\begin{cases}y^2=2x^2,\\ z^2=2y^2,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y=\sqrt{2}x,\\ z=2x,\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}a+b+2c=\sqrt{2}(a+2b+c),\\ a+b+3c=2(a+2b+c).\end{cases}$$

解该不定方程，得到

$$\begin{cases}b=(1+\sqrt{2})a,\\ c=(4+3\sqrt{2})a.\end{cases}$$

不难算出，对任何正实数 a，只要 $b=(1+\sqrt{2})a$，$c=(4+3\sqrt{2})a$，就都有

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}=-17+12\sqrt{2},$$

所以所求的最小值为 $-17+12\sqrt{2}$.

例 6 已知 $a, b, c\geqslant 0$，$a+b+c=1$. 求证：

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}.$$

（2007 年中国女子数学奥林匹克）

证法 1　不妨设 $b \geqslant c$. 令 $\sqrt{b}=x+y, \sqrt{c}=x-y$，则

$$b-c=4xy,\ a=1-2x^2-2y^2,\ x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}\text{原式左边}&=\sqrt{1-2x^2-2y^2+4x^2y^2}+2x\\&\leqslant \sqrt{1-2x^2}+x+x \leqslant \sqrt{3}.\end{aligned}$$

最后一步由柯西不等式得到.

证法 2　令 $a=u^2,\ b=v^2,\ c=w^2$，则 $u^2+v^2+w^2=1$，于是待证不等式变为

$$\sqrt{u^2+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}}+v+w \leqslant \sqrt{3}. \quad ①$$

注意到

$$\begin{aligned}u^2+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}&=1-(v^2+w^2)+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}=\frac{4-4(v^2+w^2)+(v^2-w^2)^2}{4}\\&=\frac{4-4(v^2+w^2)+(v^2+w^2)^2-4v^2w^2}{4}\\&=\frac{(2-v^2-w^2)^2-4v^2w^2}{4}\\&=\frac{(2-v^2-w^2-2vw)(2-v^2-w^2+2vw)}{4}\\&=\frac{[2-(v+w)^2][2-(v-w)^2]}{4} \leqslant 1-\frac{(v+w)^2}{2}.\end{aligned}$$

（注意 $(v+w)^2 \leqslant 2(v^2+w^2) \leqslant 2$）将上式代入①，得

$$\sqrt{1-\frac{(v+w)^2}{2}}+v+w \leqslant \sqrt{3}.$$

令 $\frac{v+w}{2}=x$，将上述不等式改写为 $\sqrt{1-2x^2}+2x \leqslant \sqrt{3}$，以下同证法 1.

说明　证法 2 解释了证法 1 中替换的动机.

例 7　设 $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}^{+}$，且 $abc=1$，求证：

(1) $\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c} \geqslant 1$；

(2) $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leqslant 1$.

证明　(1) **证法 1**　设 $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, x, y, $z\in\mathbf{R}^+$，则原不等式等价于

$$s=\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}+\frac{x}{x+2z}\geqslant 1.$$

利用 Cauchy 不等式，得

$$s\cdot[y(y+2x)+z(z+2y)+x(x+2z)]\geqslant(x+y+z)^2,$$

即有 $s\geqslant 1$ 成立.

证法 2　首先我们证明

$$\frac{1}{1+2a}\geqslant\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}.\qquad ①$$

①等价于　$b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}\geqslant 2a^{\frac{1}{3}}$.

又由于 $b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}\geqslant 2\cdot(bc)^{-\frac{1}{3}}=2a^{\frac{1}{3}}$，故①成立.

同理，有

$$\frac{1}{1+2b}\geqslant\frac{b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}},\qquad ②$$

$$\frac{1}{1+2c}\geqslant\frac{c^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}.\qquad ③$$

将①②③相加即得原不等式成立.

(2) 令 $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$, x, y, $z\in\mathbf{R}^+$. 那么，由题设得 $xyz=1$. 利用 $x^3+y^3\geqslant x^2y+y^2x$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a+b}&=\frac{1}{1+x^3+y^3}\leqslant\frac{1}{1+x^2y+xy^2}\\&=\frac{1}{xyz+x^2y+y^2x}=\frac{1}{xy(x+y+z)}\\&=\frac{z}{x+y+z}.\end{aligned}$$

同理，有

$$\frac{1}{1+b+c}\leqslant\frac{x}{x+y+z},$$

$$\frac{1}{1+c+a}\leqslant\frac{y}{x+y+z}.$$

三式相加即得原不等式成立.

说明　当三数的乘积为 1 时，本题的两种代换方法都是常用的.

例 8　设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证：

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geqslant\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

证明　令 $x=\frac{1}{\alpha}$，$y=\frac{1}{\beta}$，$z=\frac{1}{\gamma}$，则 $\alpha+\beta+\gamma=1$.

原不等式等价于

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta\gamma}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}+\sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{\alpha}},$$

即

$$\sum_{cyc}\sqrt{\alpha+\beta\gamma}\geqslant\sum_{cyc}\sqrt{\alpha^2}+\sum_{cyc}\sqrt{\beta\gamma},$$

即

$$\sum_{cyc}\sqrt{\alpha\cdot\sum_{cyc}\alpha+\beta\gamma}\geqslant\sum_{cyc}\sqrt{\alpha^2}+\sum_{cyc}\sqrt{\beta\gamma},$$

即

$$\sum_{cyc}\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\geqslant\sum_{cyc}(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta\gamma}).$$

又不难证明　$\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\geqslant\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta\gamma}$.

故原不等式成立.

例 9　设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant0.\text{（W. Janous 不等式）}$$

分析　左端式子分母是变量和的形式，难以直接处理，故先将它们代换掉，简化分母.

证明　令 $x+y=c$，$y+z=a$，$z+x=b$，原不等式等价于

$$\frac{c(a-b)}{b}+\frac{a(b-c)}{c}+\frac{b(c-a)}{a}\geqslant0,$$

即

$$\frac{ac^2(a-b)+a^2b(b-c)+b^2c(c-a)}{abc}\geqslant0.$$

故只须证明

$$a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-abc^2-a^2bc-ab^2c\geqslant0.$$

这是很显然的.

例 10　设 x_1、x_2、x_3 是正数，求证：

$$x_1x_2x_3\geqslant(x_2+x_3-x_1)(x_1+x_3-x_2)(x_1+x_2-x_3).$$

证明 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 > 0$.

令 $x_1 = x_3 + \delta_1$，$x_2 = x_3 + \delta_2$，则 $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant 0$. 于是

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2x_3 - (x_2 + x_3 - x_1)(x_1 + x_3 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3) \\
= & (x_3 + \delta_1)(x_3 + \delta_2)x_3 - (x_3 + \delta_2 - \delta_1)(x_3 + \delta_1 - \delta_2)(x_3 + \delta_1 + \delta_2) \\
= & (x_3^2 + \delta_1 x_3 + \delta_2 x_3 + \delta_1\delta_2)x_3 - [x_3^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2](x_3 + \delta_1 + \delta_2) \\
= & x_3\delta_1\delta_2 + x_3^2(x_3 + \delta_1 + \delta_2) - [x_3^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2](x_3 + \delta_1 + \delta_2) \\
= & x_3\delta_1\delta_2 + (\delta_1 - \delta_2)^2(x_3 + \delta_1 + \delta_2) \\
\geqslant & 0.
\end{aligned}
$$

所以

$$x_1x_2x_3 \geqslant (x_2 + x_3 - x_1)(x_1 + x_3 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3).$$

说明 本题用的代换方法称为“增量代换法”.

例 11 求最大的正整数 n，使得存在 n 个不同的实数 x_1，x_2，…，x_n，满足：对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有

$$(1 + x_ix_j)^2 \leqslant 0.9(1 + x_i^2)(1 + x_j^2).$$

解 $$(1 + x_ix_j)^2 \leqslant 0.9(1 + x_i^2)(1 + x_j^2)$$

等价于 $$0.1(x_ix_j + 1)^2 \leqslant 0.9(x_i - x_j)^2,$$

也即 $$|x_ix_j + 1| \leqslant 3|x_i - x_j|.$$

令 $x_i = \tan\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，不妨设 $0 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \pi$.

则原不等式等价于 $|\tan(\alpha_i - \alpha_j)| \geqslant \dfrac{1}{3}$，即

$$\pi - \theta \geqslant \alpha_j - \alpha_i \geqslant \theta, \text{其中 } \theta = \arctan\frac{1}{3}.$$

因此，只需求出最大的 n，使得存在 n 个角：$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \pi$，满足：

$$\alpha_n - \alpha_1 \leqslant \pi - \theta, \text{且 } \alpha_{i+1} - \alpha_i \geqslant \theta.$$

考虑复数 $z = 3 + \mathrm{i}$，则 $\theta = \arg z$.

由 $z^8 = 16(-527 + 336\mathrm{i})$，$z^9 = 16(-1917 + 481\mathrm{i})$，$z^{10} = 16(-(1917 \times 3 + 481) - 474\mathrm{i})$，知 z^9 的辐角主值 $< \pi$，z^{10} 的辐角主值 $> \pi$. 所以

$$9\theta < \pi < 10\theta.$$

又因为 $\pi - \theta \geqslant \alpha_n - \alpha_1 \geqslant (n-1)\theta$，则 $n \leqslant 9$.

当 $\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = \theta$，$\alpha_3 = 2\theta$，…，$\alpha_9 = 8\theta$ 时，等号可以取到. 故 n 的最大值

为 9.

例 12 已知 x、y、z 都是正数，求证：

$$x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2 \geqslant 2xyz\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right),$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立.

证明 令 $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$, 则

$$x=\frac{b+c}{2},\ y=\frac{a+c}{2},\ z=\frac{a+b}{2}.$$

于是原不等式等价于

$$\frac{1}{2}\sum a^2(b+c)\geqslant 2\,\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\cdot\sum\frac{\frac{b+c}{2}}{a+\frac{b+c}{2}},$$

即

$$2[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)] \geqslant (a+b)(b+c)(c+a)\cdot\sum\frac{b+c}{2a+b+c}.$$

下面我们证明

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)\geqslant(a+b)(b+c)(c+a)\cdot\frac{a+b}{2c+a+b}. \qquad ①$$

注意到①等价于$\frac{a^2}{a+c}+\frac{b^2}{b+c}\geqslant\frac{(a+b)^2}{a+b+2c}$.

由 Cauchy 不等式，这是显然的.

同理还有类似①的其他两式，相加即得原不等式成立.

例 13 设 a, b, $c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab}\geqslant\frac{a+b+c}{9}.$$

证明 记不等式的左端为 M，令

$$\begin{aligned}S&=(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)\\&=(a+b+c)^2+6(ab+bc+ca)\\&\leqslant 3(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
3 &= \frac{1}{M}\cdot\left(\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab}\right)+\frac{1}{S}((a^2+8bc)\\
&\quad+(b^2+8ca)+(c^2+8ab))+\frac{1+1+1}{3}\\
&=\sum\left[\frac{b^3}{M(a^2+8bc)}+\frac{a^2+8bc}{S}+\frac{1}{3}\right]\\
&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{3SM}}+3\sqrt[3]{\frac{a^3}{3SM}}+3\sqrt[3]{\frac{c^3}{3SM}}\\
&=\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{3SM}}.
\end{aligned}
$$

因此 $3SM\geqslant(a+b+c)^3$，故有 $M\geqslant\frac{1}{9}(a+b+c)$ 成立.

例 14　已知非负实数 a、b、c 满足：$a+b+c=1$，求证：

$$
\begin{aligned}
2 &\leqslant (1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\\
&\leqslant (1+a)(1+b)(1+c),
\end{aligned}
$$

并求出等号成立的条件.

证明　设 $ab+bc+ca=m$，$abc=n$，则

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+mx-n.$$

令 $x=a$，则有 $a^3=a^2-ma+n$（注意：这起到了降次的作用！）. 于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{cyc}a^3 &= \sum_{cyc}a^2-m\cdot\sum_{cyc}a+3n.\\
\sum_{cyc}a^4 &= \sum_{cyc}a^3-m\sum_{cyc}a^2+n\sum_{cyc}a\\
&=(1-m)\sum_{cyc}a^2-m\sum_{cyc}a+n\sum_{cyc}a+3n\\
&=(1-m)(1-2m)-m+n+3n.
\end{aligned}
$$

所以
$$
\begin{aligned}
\sum_{cyc}(1-a^2)^2 &= 3-2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}a^4\\
&=3-2(1-2m)+2m^2-3m+1-m+4n\\
&=2m^2+4n+2\geqslant 2,
\end{aligned}
$$

等号当 a、b、c 中有 2 个为 0 时取到.

又因为　$$(1+a)(1+b)(1+c)=2+m+n,$$

则 $2m^2+4n+2\leqslant 2+m+n$ 相当于 $3n\leqslant m-2m^2$，即

$$3abc \leqslant m(1-2m)=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2),$$

即
$$3 \leqslant \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a^2+b^2+c^2). \quad ①$$

而由 Cauchy 不等式可得

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2=a+b+c.$$

于是
$$\begin{aligned}&3(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ \geqslant\ &(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.\end{aligned}$$

故①成立，且等号当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时成立.

例 15 （1）设实数 x、y、z 都不等于 1，$xyz=1$，求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

（2）求证：存在无穷多组三元有理数组 (x, y, z)，使得上述不等式等号成立.（2008 年国际数学奥林匹克）

证法 1 （1）令 $\frac{x}{x-1}=a$，$\frac{y}{y-1}=b$，$\frac{z}{z-1}=c$，则

$$x=\frac{a}{a-1},\ y=\frac{b}{b-1},\ z=\frac{c}{c-1}.$$

由题设条件 $xyz=1$ 得，

$$abc=(a-1)(b-1)(c-1),$$

即
$$a+b+c-1=ab+bc+ca,$$

所以
$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2-2(a+b+c-1)\\&=(a+b+c-1)^2+1 \geqslant 1,\end{aligned}$$

从而
$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

（2）令 $(x, y, z)=\left(-\frac{k}{(k-1)^2}, k-k^2, \frac{k-1}{k^2}\right)$，$k$ 是正整数，则 (x, y, z) 是三元有理数组，x、y、z 都不等于 1，且对于不同的正整数 k，三元有理数组 (x, y, z) 是互不相同的. 此时

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\\=&\frac{k^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-k^2)^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-1)^2}{(k^2-k+1)^2}\\=&\frac{k^4-2k^3+3k^2-2k+1}{(k^2-k+1)^2}=1,\end{aligned}$$

从而命题得证.

证法 2 （1）由 $xyz=1$,可设 $p=x$, $q=1$, $r=\frac{1}{y}$,得 $x=\frac{p}{q}$, $y=\frac{q}{r}$, $z=\frac{1}{xy}=\frac{r}{p}$, p、q、r 互不相等.故

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1\\ \Leftrightarrow&\frac{p^2}{(p-q)^2}+\frac{q^2}{(q-r)^2}+\frac{r^2}{(r-p)^2}\geqslant 1.\end{aligned} \quad ①$$

令 $a=\frac{p}{p-q}$, $b=\frac{q}{q-r}$, $c=\frac{r}{r-p}$,则①化为 $\sum_{cyc}a^2\geqslant 1$. 由于

$$\frac{-1+a}{a}=\frac{q}{p},\ \frac{-1+b}{b}=\frac{r}{q},\ \frac{-1+c}{c}=\frac{p}{r},$$

所以
$$\frac{-1+a}{a}\cdot\frac{-1+b}{b}\cdot\frac{-1+c}{c}=1,$$
$$1-\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}ab=0, \quad ②$$

由②可得
$$1-\sum_{cyc}a^2=-(a+b+c-1)^2\leqslant 0,$$

所以 $\sum_{cyc}a^2\geqslant 1$,从而①式成立.

（2）令 $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$, $c=\frac{t+1}{t^2+t+1}$, $a=-\frac{bc}{b+c}$,其中 t 可取除 0、-1 外的一切有理数,改变 t,其中使得 b、c、a 中有某个为 1 的至多只有有限个,这样就得到无穷多组三元有理数组 (a, b, c), a、b、c 都不等于 1,使得 $\sum_{cyc}a=\sum_{cyc}a^2=1$,而由 $(x, y, z)=\left(\frac{a}{a-1}, \frac{b}{b-1}, \frac{c}{c-1}\right)$ 知(2)成立.

习 题 3

1 已知 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$. 求 $\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{8c+4a}+\dfrac{9c}{3a+2b}$ 的最小值.

2 若椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1\ (m, n>0)$ 经过点 $p(a, b)\ (ab\neq 0, |a|\neq|b|)$，求 $m+n$ 的最小值.

3 在$\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{c-a}{b+c-a}+\frac{a-b}{c+a-b}+\frac{b-c}{a+b-c}\leqslant 0.$$

4 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

5 若 $x, y\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\left(\frac{2x+y}{3}\cdot\frac{x+2y}{3}\right)^2\geqslant\sqrt{xy}\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^3.$$

6 设实数 a、b 满足 $ab>0$，求证：$\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^2(a+b)^2}{4}}\leqslant\dfrac{a^2+10ab+b^2}{12}$，并确定等号成立的条件. 一般地，对任意实数 a、b，求证：

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b^2(a+b)^2}{4}}\leqslant\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

7 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，$abc=1$，求证：

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqslant\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

8 已知 a、b、c、d、e 为正数，且 $abcde=1$，求证：

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\geqslant\frac{10}{3}.$$

9 设 a、b、c 是正实数，求证：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{c(a^2+b^2)}{a+b}+\frac{b(c^2+a^2)}{c+a}+\frac{a(b^2+c^2)}{b+c}.$$

10 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，且满足 $xyz+x+z=y$，求 $p=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}+\frac{3}{z^2+1}$ 的最大值.

11 求证：在开区间(0，1)内一定能找到四对两两不同的正数(a, b) $(a \neq b)$，满足：

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab-\frac{1}{8ab}.$$

12 设 s 是所有满足下列条件的三角形集合：

$$5\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR}\right)-\frac{3}{\min\{AP, BQ, CR\}}=\frac{6}{r},$$

其中 r 为$\triangle ABC$ 内切圆半径，P、Q、R 分别是内切圆切边 AB、BC、CA 的切点. 求证：s 中所有三角形都是等腰三角形并且均相似.

13 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，且满足 $abc=1$，求证：

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

14 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

4 反证法

反证法是我们论证数学命题时常用的有力工具.有些问题从正面很难下手,就应试着用反证法来考虑,因为当我们从正面去看问题而发现条件不多时,反证假设就相当于又加了一个条件,这样自然更易入手.

反证法有着广泛的应用,这一章我们就来看一下它在不等式证明中的应用.

例 1 求证:对任何实数 x、y、z,下述三个不等式不可能同时成立:

$$|x|<|y-z|, |y|<|z-x|, |z|<|x-y|.$$

证明 用反证法,假设三个不等式都成立,那么

$$\begin{cases} x^2<(y-z)^2, \\ y^2<(z-x)^2, \\ z^2<(x-y)^2. \end{cases}$$

则有
$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)<0, \\ (y-z+x)(y+z-x)<0, \\ (z-x+y)(z+x-y)<0. \end{cases}$$

上面三个不等式相乘即得

$$(x+y-z)^2(y+z-x)^2(z+x-y)^2<0.$$

矛盾!

例 2 若 a、b、c、d 为非负整数,且 $(a+b)^2+3a+2b=(c+d)^2+3c+2d$. 求证:

$$a=c, b=d.$$

证明 先证明 $a+b=c+d$. 用反证法.

若 $a+b\neq c+d$,不妨设 $a+b>c+d$,则 $a+b\geqslant c+d+1$. 故

$$\begin{aligned}(a+b)^2+3a+2b &= (a+b)^2+2(a+b)+a\\ &\geqslant (c+d+1)^2+2(c+d+1)+a\\ &= (c+d)^2+4(c+d)+3+a\\ &> (c+d)^2+3c+2d.\end{aligned}$$

矛盾！所以 $a+b=c+d$，代入原式即得 $a=c$，进而有 $b=d$.

说明 对于整数 x、y，若 $x>y$，则 $x\geqslant y+1$. 这一性质在处理与整数有关的不等式时很有用.

例 3 已知 12 个实数 a_1，a_2，…，a_{12} 满足：

$$\begin{cases}a_2(a_1-a_2+a_3)<0,\\ a_3(a_2-a_3+a_4)<0,\\ \cdots\cdots\\ a_{11}(a_{10}-a_{11}+a_{12})<0.\end{cases}$$

求证：从这些数中至少可找到 3 个正数和 3 个负数.

证明 用反证法，不妨设 a_1，a_2，…，a_{12} 中至多有两个负数，则存在 $1\leqslant k\leqslant 9$ 使 a_k、a_{k+1}、a_{k+2}、a_{k+3} 都是非负实数.

由题设可得 $\begin{cases}a_{k+1}(a_k-a_{k+1}+a_{k+2})<0,\\ a_{k+2}(a_{k+1}-a_{k+2}+a_{k+3})<0.\end{cases}$

又因为 $a_{k+1}\geqslant 0$，$a_{k+2}\geqslant 0$，则 $a_{k+1}>0$，$a_{k+2}>0$，且

$$\begin{cases}a_k-a_{k+1}+a_{k+2}<0,\\ a_{k+1}-a_{k+2}+a_{k+3}<0.\end{cases}$$

两式相加得 $a_k+a_{k+3}<0$，此式与 $a_k\geqslant 0$，$a_{k+3}\geqslant 0$ 矛盾！所以 a_1，a_2，…，a_{12} 中至少有 3 个正数和 3 个负数.

例 4 已知正整数 a、b、c、d、n 满足：$n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$，求证：$ad\neq bc$.

证明 用反证法. 若 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，令 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{p}{q}$，其中 p、q 是两个互素的正整数.

因为 $\frac{p}{q}>1$，有 $p\geqslant q+1$，则

$$\frac{p}{q}\geqslant 1+\frac{1}{q}. \quad ①$$

又由 $b=\dfrac{ap}{q}$ 得出 $q\mid ap$，故 $q\mid a$，同理有 $q\mid c$. 于是 $q\mid c-a$，所以 $c-a\geqslant q$，$c\geqslant a+q$，因此

$$\frac{p}{q}=\frac{d}{c}\leqslant\frac{d}{a+q}<\frac{(n+1)^2}{n^2+q}. \qquad ②$$

由①②可知 $\dfrac{(n+1)^2}{n^2+q}>1+\dfrac{1}{q}$，即 $2n>q+\dfrac{n^2}{q}$. 矛盾！故 $ad\neq bc$.

例 5　已知 a、b、c 是正实数，满足 $a+b+c\geqslant abc$. 求证：在下列三个式子中至少有两个成立

$$\frac{6}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}\geqslant 2,\ \frac{6}{b}+\frac{3}{c}+\frac{2}{a}\geqslant 2,\ \frac{6}{c}+\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2.$$

证明　用反证法.

(i) 如果 $\dfrac{6}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}<2$，$\dfrac{6}{b}+\dfrac{3}{c}+\dfrac{2}{a}<2$，$\dfrac{6}{c}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}<2$，则 $11\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)<6$，与 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2\geqslant 3\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\geqslant 3$ 矛盾.

(ii) 不妨设三式中仅有 2 个小于 2，即设

$$\begin{cases}\dfrac{6}{b}+\dfrac{3}{c}+\dfrac{2}{a}<2, & ①\\[2mm] \dfrac{6}{c}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}<2, & ②\\[2mm] \dfrac{6}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}\geqslant 2. & ③\end{cases}$$

由①×1+②×7−③×1 可得 $\dfrac{43}{c}+\dfrac{17}{b}+\dfrac{17}{a}<14$.

但上式左端 $>17\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 17\sqrt{3}>14$，矛盾！

因此结论成立.

例 6　4 个实数 a、b、c、d 满足：

(1) $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$；

(2) $a+b+c+d=9$；

(3) $a^2+b^2+c^2+d^2=21$.

求证：$ab-cd\geqslant 2$.

证明　若 $a+b<5$，则 $4<c+d\leqslant a+b<5$，于是

$$(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)=\frac{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}$$
$$=30,$$

而 $ab+cd\geqslant ac+bd\geqslant ad+bc$（$\Leftrightarrow(a-d)(b-c)\geqslant 0$，$(a-b)(c-d)\geqslant 0$），所以

$$ab+cd\geqslant 10.$$

由 $0\leqslant(a+b)-(c+d)<1$ 知

$$(a+b)^2+(c+d)^2-2(a+b)(c+d)<1,$$

又由题设知　$(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)=9^2$，

上面两式相加得　$(a+b)^2+(c+d)^2<41$.

故

$$\begin{aligned}41=21+2\times 10&\leqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(ab+cd)\\&=(a+b)^2+(c+d)^2<41,\end{aligned}$$

矛盾！所以，$a+b\geqslant 5$.

于是

$$a^2+b^2+2ab\geqslant 25=4+(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant 4+a^2+b^2+2cd,$$

即 $ab-cd\geqslant 2$.

例 7　设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}}\geqslant\sqrt[32]{xyz}.$$

证明　用反证法.

若存在正实数 x_0、y_0、z_0，使得 $\sqrt{x_0+\sqrt[3]{y_0+\sqrt[4]{z_0}}}<\sqrt[32]{x_0y_0z_0}$，那么

$$\begin{cases}\sqrt{x_0}<\sqrt[32]{x_0y_0z_0},\\ \sqrt[6]{y_0}<\sqrt[32]{x_0y_0z_0},\\ \sqrt[24]{z_0}<\sqrt[32]{x_0y_0z_0},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_0^{16}<x_0y_0z_0,\\ y_0^{16}<(x_0y_0z_0)^3,\\ z_0^{16}<(x_0y_0z_0)^{12}.\end{cases}$$

上面三式相乘即得 $x_0^{16}\cdot y_0^{16}\cdot z_0^{16}<(x_0y_0z_0)^{16}$，矛盾！故原不等式成立.

从而得证.

例 8 设对于任意实数 x 都有 $\cos(a\sin x)>\sin(b\cos x)$，求证：

$$a^2+b^2<\frac{\pi^2}{4}.$$

证明 用反证法. 设 $a^2+b^2\geqslant\frac{\pi^2}{4}$，将 $a\sin x+b\cos x$ 表示为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 的形式. 其中，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

由于 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\pi}{2}$，故存在实数 x_0，使得

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x_0+\varphi)=\frac{\pi}{2}.$$

即
$$a\sin x_0+b\cos x_0=\frac{\pi}{2}.$$

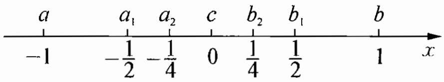
由此即得 $\cos(a\sin x_0)=\sin(b\cos x_0)$，与题设矛盾！

所以
$$a^2+b^2<\frac{\pi^2}{4}.$$

例 9 将一些整数排在数轴的一切有理点上，求证：可以找到这样一个区间，使这区间的两个端点上的数之和不大于区间中点上的数的 2 倍.

证明 用反证法. 设存在一些整数的这样的排列，使得对于含中点 C 的任意区间$[A, B]$，有不等式 $c<\frac{a+b}{2}$ 成立，其中 a、b、c 分别表示置于 A、B、C 上的整数.

设 A、B、C、A_n、B_n 分别代表数轴上的点 -1、1、0、$-\frac{1}{2^n}$ 及 $\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，并设置于它们上的整数分别为 a、b、c、a_n、b_n，



则
$$a_1<\frac{a+c}{2},\ a_2<\frac{a_1+c}{2},$$

故
$$\max\{a_1, a_2\}<\max\{a, c\}.$$

同理，有

$$\max\{a, c\}>\max\{a_1, a_2\}>\max\{a_3, a_4\}>\cdots,$$
$$\max\{b, c\}>\max\{b_1, b_2\}>\max\{b_3, b_4\}>\cdots.$$

所以存在 m，使得

$$a_{2m}\leqslant \max\{a, c\}-m,\ b_{2m}\leqslant \max\{b, c\}-m.$$

故 $$a_{2m}+b_{2m}\leqslant 1-2m<0.$$

但 0 为区间 $[a_{2m}, b_{2m}]$ 的中点，矛盾！

例 10 设 p 是两个大于 2 的连续整数之积，求证：没有整数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 适合方程

$$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\Big(\sum_{i=1}^{p}x_i\Big)^2=1.$$

证明 用反证法. 设 $p=k(k+1)$，$k\geqslant 3$，则 $p\geqslant 12$，$4p+1\geqslant 4p$.

假设有整数 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_p$ 满足等式：

$$\begin{aligned}4p+1&=(4p+1)\sum_{i=1}^{p}x_i^2-4\Big(\sum_{i=1}^{p}x_i\Big)^2\\&=4\Big[p\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\Big(\sum_{i=1}^{p}x_i\Big)^2\Big]+\sum_{i=1}^{p}x_i^2\\&=4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(x_i-x_j)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2.\end{aligned}$$

如果所有的 x_i 全相等 $(i=1, 2, \cdots, p)$，从上式，有 $4p+1=px_1^2$. 矛盾！于是，必有 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_l>x_{l+1}\geqslant\cdots\geqslant x_p$，其中 $l\in\mathbf{Z}^+$. 我们分两种情形来讨论：

(i) 当 $2\leqslant l<p-1$ 时，

$$4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(x_i-x_j)^2\geqslant 4\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=l+1}^{p}(x_i-x_k)^2\geqslant 4l(p-l),$$

又由于 $$\begin{aligned}l(p-l)-2(p-2)&=lp-l^2-2p+4\\&=(l-2)(p-l-2)\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$

有 $$4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(x_i-x_j)^2\geqslant 8(p-2)>4p+1,\text{矛盾！}$$

因而这种情况不可能.

(ii) 当 $l=1$ 或 $l=p-1$ 时. 不妨设 $l=1$. 即

$$x_1>x_2=x_3=\cdots=x_{p-1}\geqslant x_p.$$

则 $$4p+1=4\sum_{s=2}^{p}(x_1-x_s)^2+4\sum_{s=2}^{p-1}(x_s-x_p)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$$

$$= 4(p-2)(x_1-x_2)^2 + 4(x_1-x_p)^2 + 4(p-2)(x_2-x_p)^2 + \sum_{i=1}^{p} x_i^2,$$

故有 $x_1 - x_2 = 1$，于是，$9 = 4(x_1-x_p)^2 + 4(p-2)(x_2-x_p)^2 + \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2$，故 $x_2 = x_p(p \geqslant 12)$ 且 $x_1 - x_p = 1$，所以 $5 = x_1^2 + (p-1)^2 x_2^2$.

由于 $p \geqslant 12$，则 $x_2 = 0$，于是 $x_1^2 = 5$，矛盾！

例 11 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数，满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$. 求证：

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+a_n} \geqslant 1.$$

证明 令 $b_i = \frac{1}{n-1+a_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 $b_i < \frac{1}{n-1}$，且

$$a_i = \frac{1-(n-1)b_i}{b_i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

故条件转化为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1-(n-1)b_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{1-(n-1)b_i}.$$

下面用反证法，假设

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 1. \qquad ①$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{j\neq i}(1-(n-1)b_j) \cdot \sum_{j\neq i} \frac{1}{1-(n-1)b_j} \geqslant (n-1)^2,$$

由①，
$$\sum_{j\neq i}(1-(n-1)b_j) < (n-1)b_i,$$

所以
$$\sum_{j\neq i} \frac{1}{1-(n-1)b_j} > \frac{n-1}{b_i},$$

故
$$\sum_{j\neq i} \frac{1-(n-1)b_i}{1-(n-1)b_j} > (n-1) \cdot \frac{1-(n-1)b_i}{b_i}.$$

上式对 $i=1, 2, \cdots, n$ 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1-(n-1)b_i}{1-(n-1)b_j}>(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1-(n-1)b_i}{b_i},$$

即
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1-(n-1)b_i}{1-(n-1)b_j}>(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1-(n-1)b_i}{b_i},\qquad ②$$

而由①，
$$\sum_{i\neq j}(1-(n-1)b_i)<b_j(n-1),$$

故利用②，有

$$(n-1)\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{1-(n-1)b_j}>(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1-(n-1)b_i}{b_i}.$$

矛盾！

例 12 对正整数 $n\ (n\geqslant 2)$，假设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数全为实数，$f(x)$ 的全部复根有负实部，且 $f(x)$ 有一对相等实根. 求证：一定存在 k，$1\leqslant k\leqslant n-1$，满足：

$$a_k^2-4a_{k-1}a_{k+1}\leqslant 0.$$

证明 当 $n=2$ 时，$f(x)=a_2(x+a)^2$，这里 a 是一个正实数，所以

$$f(x)=a_2(x^2+2ax+a^2).$$

故 $a_1=2aa_2$，$a_0=a^2a_2$，$a_1^2-4a_0a_2=0$，结论成立.

下设正整数 $n>2$，且设 $a_n>0$（若否，则每个系数都乘以(-1)），则

$$f(x)=(x+a)^2(b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\cdots+b_1x+b_0)\ (a\in\mathbf{R}^+).\qquad ①$$

因为实系数多项式的复根是成对出现的，假设有 k 对共轭复根，记为 $x_j\pm \mathrm{i}y_j$，$j=1,2,\cdots,k$，则 $x_j<0$. 其余 $n-2-2k$ 个根为负实根，记为 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-2-2k}$. 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b_{n-2}}\cdot f(x)\\&=(x+a)^2\cdot\prod_{j=1}^{k}[x-(x_j+\mathrm{i}y_j)][x-(x_j-\mathrm{i}y_j)]\cdot\prod_{l=1}^{n-2-2k}(x-z_l)\\&=(x+a)^2\cdot\prod_{j=1}^{k}(x^2-2x_jx+x_j^2+y_j^2)\cdot\prod_{l=1}^{n-2-2k}(x-z_l),\end{aligned}\qquad ②$$

从①和②可得，$b_j>0$，$j=0,1,2,\cdots,n-2$. 且

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+a)^2(b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\cdots+b_1x+b_0)\\&=b_{n-2}x^n+(2ab_{n-2}+b_{n-3})x^{n-1}+(a^2b_{n-2}\end{aligned}$$

$$+2ab_{n-3}+b_{n-4})x^{n-2}+\cdots+(a^2b_2+2ab_1+b_0)x^2+(a^2b_1+2ab_0)x+a^2b_0.$$

为便于统一书写，引入 b_i：当 $i<0$ 时，$b_i=0$；当 $i>n-2$ 时，$b_i=0$. 故

$$a_j=a^2b_j+2ab_{j-1}+b_{j-2},\ j=0,1,2,\cdots,n.$$

当 $n=3$ 时，可用反证法证明.

设
$$a_1^2-4a_0a_2>0,\ a_2^2-4a_1a_3>0.$$

因为
$$a_0=a^2b_0,\ a_1=a^2b_1+2ab_0,$$
$$a_2=2ab_1+b_0,\ a_3=b_1.$$

所以
$$\begin{aligned}0<a_1^2-4a_0a_2&=(a^2b_1+2ab_0)^2-4a^2b_0(2ab_1+b_0)\\&=a^3b_1(ab_1-4b_0),\end{aligned}$$

于是
$$ab_1>4b_0. \quad ①$$

又由于
$$\begin{aligned}0<a_2^2-4a_1a_3&=(2ab_1+b_0)^2-4(a^2b_1+2ab_0)b_1\\&=b_0(b_0-4ab_1),\end{aligned}$$

故
$$b_0>4ab_1. \quad ②$$

①与②矛盾！

当 $n>3$ 时，也使用反证法证明.

设对于 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有 $a_k^2-4a_{k-1}a_{k+1}>0$，则

$$\begin{aligned}0&<a_k^2-4a_{k-1}a_{k+1}\\&=(a^2b_k+2ab_{k-1}+b_{k-2})^2-4(a^2b_{k-1}+2ab_{k-2}\\&\quad+b_{k-3})(a^2b_{k+1}+2ab_k+b_{k-1})\\&<b_{k-2}^2+a^4b_k^2-4ab_{k-2}b_{k-1}-4a^3b_{k-1}b_k.\end{aligned}$$

$$0=a^3b_k(ab_k-4b_{k-1})+b_{k-2}(b_{k-2}-4ab_{k-1}).$$

令
$$q_k=ab_k-4b_{k-1},\ r_k=b_{k-1}-4ab_k,$$
$$k=1,2,\cdots,n-1.$$

则
$$0<a^3b_kq_k+b_{k-2}r_{k-1}. \quad ③$$

当 $k=1$ 时，
$$q_1=ab_1-4b_0.$$

从③有 $0<a^3b_1q_1$，故 $q_1>0$，有 $ab_1>4b_0$，$r_1=b_0-4ab_1<0$.

当 $k=n-1$ 时，从③有 $b_{n-3}r_{n-2}>0$，故 $r_{n-2}>0$.

用 u 表示使 $r_u > 0$ 的最小的下标($2 \leqslant u \leqslant n-2$)，即 $r_{u-1} \leqslant 0$.
在③中令 $k=u$，由 $0 < a^3 b_u q_u + b_{u-2} r_{u-1}$，有 $q_u > 0$，此时有

$$q_u = ab_u - 4b_{u-1} > 0, \text{则 } ab_u > 4b_{u-1}. \qquad ④$$

$$r_u = b_{u-1} - 4ab_u > 0, \text{则 } b_{u-1} > 4ab_u. \qquad ⑤$$

由④和⑤即得矛盾！

习 题 4

1 已知 $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$，且 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$. 求证：

$$a>0,\ b>0,\ c>0.$$

2 求证：下列不等式组无实数解

$$\begin{cases} |x| > |y-z+t|, \\ |y| > |x-z+t|, \\ |z| > |x-y+t|, \\ |t| > |x-y+z|. \end{cases}$$

3 设实数 a、b、c、d、p、q 满足：

$$ab+cd=2pq,\ ac \geqslant p^2 > 0,$$

求证：$bd \leqslant q^2$.

4 设 a、b、c 为正实数，且 $a+b+c \geqslant abc$，求证：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant abc.$$

5 设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $[0,\ 1]$ 上的实值函数. 求证：存在 $x_0,\ y_0 \in [0,\ 1]$，使得

$$|x_0 y_0 - f(x_0) - g(y_0)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

6 求证：对于任意实数 a、b，存在 $[0,\ 1]$ 中的 x 和 y，使得

$$|xy - ax - by| \geqslant \frac{1}{3}.$$

并问上述命题中的 $\frac{1}{3}$ 改为 $\frac{1}{2}$ 或 0.333 34 是否仍成立？

7 设 $m,\ n \in \mathbf{Z}^+$，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ 是集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中的不同元素，每当

$a_i+a_j\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$，就有某个 k，$1\leqslant k\leqslant m$，使得 $a_i+a_j=a_k$. 求证：$\frac{1}{m}(a_1+a_2+\cdots+a_m)\geqslant\frac{1}{2}(n+1)$.

8 对于任意 $n\in\mathbf{Z}^+$ 以及实数序列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，求证存在 $k\in\mathbf{Z}^+$，满足：

$$\left|\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|.$$

9 设 x_k，$y_k\in\mathbf{R}$，$j_k=x_k+\mathrm{i}y_k(k=1,2,\cdots,n,\mathrm{i}=\sqrt{-1})$. r 是 $\pm\sqrt{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_n^2}$ 的实部的绝对值. 求证：

$$r\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

10 给定非增的正数列 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$，其中 $a_1=\frac{1}{2k}$ $(k\in\mathbf{N}$，$k\geqslant 2)$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=1$. 求证：从数列中可找出 k 个数，最小数超过最大数的一半.

11 证明或否定命题：若 x、y 为实数且 $y\geqslant 0$，$y(y+1)\leqslant(x+1)^2$，则 $y(y-1)\leqslant x^2$.

12 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数：对任何正整数 k，有 $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\geqslant 0$. 令 $p=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$，求证：$p=a_1$，并且对任意 $x>a_1$，均有

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant x^n-a_1^n.$$

13 设实数 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n(n\geqslant 2)$ 和 A 满足：$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$. 求证：对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $A<2a_ia_j$.

14 设 $\{a_k\}$ 是一个非负实数的无限序列，$k=1,2,\cdots$，满足：$a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0$ 及 $\sum_{j=1}^{k}a_j\leqslant 1$，$k=1,2,\cdots$. 求证：$0\leqslant a_k-a_{k+1}\leqslant\frac{2}{k^2}$，$k=1,2,\cdots$.

15 若方程 $x^4+ax^3+bx+c=0$ 的根都是实数，求证：$ab\leqslant 0$.

5 构造法

构造法是不等式证明中的一种重要方法.主要利用引入适当的恒等式、函数、图形、数列等辅助手段，使命题转化，变成较为直观和本质的形式，进而使不等式获证.

5.1 构造恒等式

恒等式可以看作是最强的不等式，有时候，通过补充不等式中略去的那些项或因式，可以得到隐藏在其背后的恒等式，这样往往能找到证题的突破口，因为恒等式的结果是显然的.

例 1 已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，求证：

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6. \quad ①$$

分析 由已知可得 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=1$，我们要设法挖掘它与四次式①间的关系.注意到要使 $(a+b)^4$ 中 a 的奇次项不在 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 的展开式中出现，可以配上 $(a-b)^4$ 与之相消，这样就找到了突破口.

证明 考虑和式：$(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$，不难发现它与①左端恰好构成恒等式，即：

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a-b)^4+(a+c)^4+(a-c)^4+(a+d)^4+(a-d)^4\\&+(b+c)^4+(b-c)^4+(b+d)^4+(b-d)^4+(c+d)^4+(c-d)^4\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,\end{aligned} \quad ②$$

由②立刻证得①成立.

例 2 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1、a_2、a_3 与 b_1、b_2、b_3，面积分别为 S_1、S_2，又记

$$H=a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2).$$

则对于 $\lambda \in \left\{\frac{b_1^2}{a_1^2}, \frac{b_2^2}{a_2^2}, \frac{b_3^2}{a_3^2}\right\}$，求证：$H \geqslant 8\left(\lambda S_1^2 + \frac{1}{\lambda}S_2^2\right)$.

证明　由海伦公式，有

$$16S_1^2 = 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^2a_3^2 + 2a_3^2a_1^2 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4,$$

$$16S_2^2 = 2b_1^2b_2^2 + 2b_2^2b_3^2 + 2b_3^2b_1^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4.$$

记 $D_1 = \sqrt{\lambda}a_1^2 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}b_1^2$，$D_2 = \sqrt{\lambda}a_2^2 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}b_2^2$，$D_3 = \sqrt{\lambda}a_3^2 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}b_3^2$. 则有恒等式

$$\begin{aligned} &H - 8\left(\lambda S_1^2 + \frac{1}{\lambda}S_2^2\right) \\ =\ &\frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) - (D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_1). \end{aligned} \quad ①$$

当 $\lambda = \frac{b_1^2}{a_1^2}$ 时，$D_1 = 0$，①式即为

$$H - 8\left(\lambda S_1^2 + \frac{1}{\lambda}S_2^2\right) = \frac{1}{2}(D_2 - D_3)^2.$$

故结论成立.

同理原不等式对 $\lambda = \frac{b_2^2}{a_2^2}$ 或 $\frac{b_3^2}{a_3^2}$ 也成立.

5.2　构造函数

根据代数式的特征，构造适当的函数，利用一次函数、二次函数的性质，以及函数的单调性等性质，可以帮助我们来证明不等式.

例 3　已知 $a, b, c \in (-2, 1)$，求证：

$$abc > a + b + c - 2.$$

分析　不等式的两边是关于 a、b、c 对称的，且 a、b、c 都是一次的，所以可以尝试构造一次函数.

证明　设 $f(x) = (bc - 1)x - b - c + 2$，则有

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2bc - b - c + 4 \\ &= -2\left(b + \frac{1}{2}\right)\left(c + \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

因为 $b, c \in (-2, 1)$，所以 $b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2} \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$，故

$$\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right) \leqslant \left|b+\frac{1}{2}\right| \cdot \left|c+\frac{1}{2}\right| < \frac{9}{4},$$

从而

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2} \\ &> -2 \cdot \frac{9}{4}+\frac{9}{2}=0, \end{aligned}$$

$$f(1)=bc-b-c+1=(1-b)(1-c)>0,$$

所以，当 $x \in (-2, 1)$ 时，$f(x)$ 恒大于 0，于是 $f(a)>0$，即

$$abc > a+b+c-2.$$

例 4　设 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R}$，且满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 1$，求证：

$$\begin{aligned} &(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2 \\ \geqslant &(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1). \end{aligned}$$

证明　当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时，原不等式显然成立.

当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ 时，构造二次函数

$$\begin{aligned} f(t) &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)t+(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1) \\ &= (x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+(x_3t-y_3)^2-(t-1)^2, \end{aligned}$$

这是一个开口向下的抛物线，又因为

$$f(1)=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2 \geqslant 0,$$

所以，此抛物线的图象与 x 轴一定有交点，从而

$$\Delta = 4(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2-4(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1) \geqslant 0,$$

故

$$\begin{aligned} &(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2 \\ \geqslant &(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1). \end{aligned}$$

说明　对于要证明“$A \cdot C \geqslant$（或 $\leqslant$）B^2”这类不等式，我们先把不等式变形为

$$4A \cdot C \geqslant (\text{或} \leqslant)(2B)^2,$$

然后构造一个二次函数 $f(x)=Ax^2-(2B)x+C$，再设法证明其判别式 $\Delta \leqslant 0$（或 $\geqslant 0$）.

例 5 设△ABC 的三边长 a、b、c 满足：$a+b+c=1$，求证：

$$5(a^2+b^2+c^2)+18abc\geqslant\frac{7}{3}.$$

证明 由 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$$=1-2(ab+bc+ca),$$

可知原不等式等价于

$$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{4}{27}.\qquad ①$$

令 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc$，则

$$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc.$$

由于 a、b、c 为三角形三边长，有 $a,b,c\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，故 $\frac{5}{9}-a$、$\frac{5}{9}-b$ 及 $\frac{5}{9}-c$ 都大于 0，所以

$$\begin{aligned}f\left(\frac{5}{9}\right)&=\left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right)\\&\leqslant\frac{1}{27}\cdot\left[\left(\frac{5}{9}-a\right)+\left(\frac{5}{9}-b\right)+\left(\frac{5}{9}-c\right)\right]^3\\&=\frac{8}{27^2}.\end{aligned}$$

因此 $\frac{8}{27^2}\geqslant\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$，整理即得①式，故原不等式得证.

例 6 已知不等式

$$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta<3a+6$$

对于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解 设 $\sin\theta+\cos\theta=x$，则 $x\in[1,\sqrt{2}]$，且

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=x^2-1,$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

从而原不等式可化为

$$(2a+3)x+\frac{6}{x}-2(x^2-1)<3a+6,$$

即
$$2x^3-(2a+3)x^2+(3a+4)x-6>0,$$
$$(2x-3)(x^2-ax+2)>0,$$

因为 $x\in[1,\sqrt{2}]$,所以 $2x-3<0$,从而不等式 $x^2-ax+2<0$ 对于 $x\in[1,\sqrt{2}]$ 恒成立,即 $a>x+\frac{2}{x}$, $x\in[1,\sqrt{2}]$ 恒成立.

令 $f(x)=x+\frac{2}{x}$, $x\in[1,\sqrt{2}]$,则 $a>f_{\max}(x)$.

因为 $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递减,所以 $f_{\max}(x)=f(1)=3$,所以 a 的取值范围为 $a>3$.

说明　利用函数的单调性,以及求函数最值的方法可以帮助我们来证明不等式.

例 7　求证:对任意正实数 a、b、c,都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

证明　令 $x=\frac{b^2}{a^2}$, $y=\frac{c^2}{b^2}$, $z=\frac{a^2}{c^2}$,则 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$, $xyz=1$. 于是只需证明

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,令 $A=xy$,则 $z=\frac{1}{A}$, $A\leqslant 1$. 于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}>1.$$

设 $u=\frac{1}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}$,则 $u\in\left(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right]$,当且仅当 $x=\sqrt{A}$ 时,

$u=\frac{1}{1+\sqrt{A}}$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2\\
=&\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{x}}}\right]^2\\
=&\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}\\
=&\frac{2+x+\frac{A}{x}}{1+A+x+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}\\
=&1+(1-A)u^2+2u.
\end{aligned}
$$

构造函数，令 $f(u)=(1-A)u^2+2u+1$，则 $f(u)$ 在 $u\in\left(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right]$ 上是增函数，所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\sqrt{f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}.$$

令 $\sqrt{A}=v$，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\\
\leqslant&\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{A}}}\\
=&\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2(1+v^2)}}\\
\leqslant&\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{1+v}\\
=&\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{1+v}\\
=&-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+v}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\
\leqslant&\frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

5.3 构造图形

如果问题条件中的数量关系有明显的几何意义或以某种方式可与几何图形建立联系，那么通过作图构造图形，将题设的条件及数量关系直接在图形中得到实现，然后在构造的图形中寻求所证的结论.

例 8 求证：对任意实数 x，均有

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|\\=&\left|\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|.\end{aligned}$$

上式可看作直角坐标系中点 $P\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 到点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 与点 $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的距离的差，如图 5-1 所示.

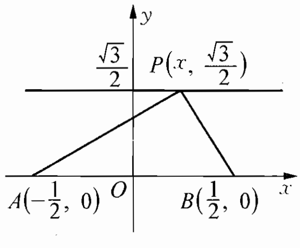


图 5-1

根据三角形两边之差小于第三边及 $AB=1$，得

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1.$$

例 9 设 x、y、z 为实数，$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，求证：

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

证明 原不等式等价于

$$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z.$$

构造图形如图 5-2 所示.

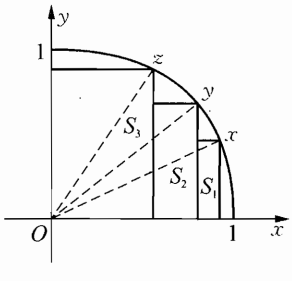


图 5-2

圆 O 是单位圆，S_1、S_2、S_3 分别是三个小矩形的面积，则

$$S_1=\sin x(\cos x-\cos y),$$
$$S_2=\sin y(\cos y-\cos z),$$
$$S_3=\sin z\cos z.$$

由于 $S_1+S_2+S_3<\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{1}{4}\pi$，故有

$$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z,$$

故原不等式成立.

例 10 设 x、y、z、α、β、γ 为正数，α、β、γ 中任意两数之和大于第三个且属于区间$[0,\pi)$，求证：

$$\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}+\sqrt{y^2+z^2-2yz\cos\beta}\geqslant\sqrt{z^2+x^2-2zx\cos\gamma}.$$

分析 不等式中的项让我们联想到余弦定理的形式，提示我们去构造一些三角形.

证明 因为 $\alpha<\beta+\gamma<\pi$，$\beta<\gamma+\alpha<\pi$，$\gamma<\alpha+\beta<\pi$，$\gamma<\alpha+\beta<\pi$，故从空间一点 P 可作一个三角面 $P-ABC$ 使得：

$$\angle APB=\alpha,$$
$$\angle BPC=\beta,$$
$$\angle CPA=\gamma;$$
$$PA=x,\ PB=y,$$
$$PC=z\ (\text{如图 }5-3).$$

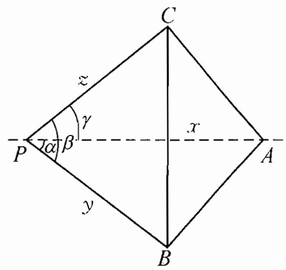


图 5－3

这样一来，利用 $AB+BC\geqslant AC$，有原不等式成立.

例 11 已知 $|u|\leqslant\sqrt{2}$，v 是正实数，求证：

$$S=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2\geqslant 8.$$

证明 关键是看出 S 的表达式恰为直角坐标系中点 $A(u,\sqrt{2-u^2})$ 与点 $B\left(u,\frac{9}{v}\right)$ 之间距离的平方.

显然，点 A 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，点 B 在双曲线 $xy=9$ 上.

因此，问题就转化为求圆 $x^2+y^2=2$ 到双曲线 $xy=9$ 之间的最短距离，

在图形上易见此最短距离即点 $A(1,1)$ 与 $B(3,3)$ 的距离，长为 $2\sqrt{2}$.

所以 S 的最小值为 $(2\sqrt{2})^2=8$.

5.4 构造对偶式

在一些轮换不等式中，构造一个新的对偶轮换式与原不等式一起考虑，常常能起到意想不到的效果.

例 12 若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：

$$\frac{a_1^4}{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\frac{a_2^4}{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}+\cdots+\frac{a_n^4}{a_n^3+a_n^2a_1+a_1^2a_n+a_1^3}\geqslant\frac{1}{4}.$$

证明 记原不等式左端为 A.

构造对偶式

$$B=\frac{a_2^4}{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\cdots+\frac{a_1^4}{a_n^3+a_n^2a_1+a_1^2a_n+a_1^3},$$

那么

$$\begin{aligned}A-B&=\frac{(a_1^2+a_2^2)(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{(a_1^2+a_2^2)(a_1+a_2)}+\cdots+\frac{(a_n^2+a_1^2)(a_n+a_1)(a_n-a_1)}{(a_n^2+a_1^2)(a_n+a_1)}\\&=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_1)\\&=0,\end{aligned}$$

故 $A=B$.

又因为

$$\begin{aligned}\frac{a_1^4+a_2^4}{(a_1^2+a_2^2)(a_1+a_2)}&\geqslant\frac{(a_1^2+a_2^2)^2}{2(a_1^2+a_2^2)(a_1+a_2)}\\&=\frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_1+a_2)}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{4(a_1+a_2)}\\&=\frac{a_1+a_2}{4},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}(A+B)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(a_1+a_2)+\frac{1}{4}(a_2+a_3)+\cdots+\frac{1}{4}(a_n+a_1)\right]\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

5.5 构造数列

在遇到与 n 有关的不等式时，可以考虑构造辅助数列，并通过数列的性质（如单调性）来证题.

例 13 设 $x_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$，求证：

$$x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n!},\ n=2,3,\cdots.$$

证明 当 $n=2$ 时，$x_3-x_2=\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}-\sqrt{2}<\frac{1}{2!}$.

当 $n\geqslant 3$ 时，构造数列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$、$\{c_i\}$ 如下：

$$a_i=\sqrt[i]{i+\sqrt[i+1]{(i+1)+\cdots+\sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}}},\ i=2,\cdots,n+1;$$

$$b_i=\sqrt[i]{i+\sqrt[i+1]{(i+1)+\cdots+\sqrt[n]{n}}},\ i=2,3,\cdots,n,\ b_{n+1}=0;$$

$$c_i=a_i^{i-1}+a_i^{i-2}b_i+\cdots+a_ib_i^{i-2}+b_i^{i-1},\ i=2,3,\cdots.$$

显然，$x_{n+1}=a_2$，$x_n=b_2$，且

$$(a_i-b_i)c_i=a_i^i-b_i^i=a_{i+1}-b_{i+1}.$$

故
$$a_i-b_i=\frac{a_{i+1}-b_{i+1}}{c_i},\ i=2,3,\cdots,n.$$

将以上 $n-1$ 个等式相乘，并注意到

$$a_{n+1}-b_{n+1}=(n+1)^{\frac{1}{n+1}},$$

则有
$$a_2-b_2=\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{c_2c_3\cdots c_n}=\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{c_2c_3\cdots c_n}.$$

又因为 $a_k>b_k\geqslant\sqrt[k]{k}$，故 $c_k\geqslant k\cdot k^{\frac{k-1}{k}}>k\cdot k^{\frac{k-1}{k+1}}$，于是

$$x_{n+1}-x_n=a_2-b_2<\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{n-1}{n+1}}}<\frac{1}{n!}.$$

上式中当 $n>2$ 时，$\frac{n+1}{n^{n-1}}<\frac{2n}{n^2}<1$ 是明显的.

例 14 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k^2)\leqslant \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2.$$

证明　只需对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，证明不等式成立即可.

记 $d_k=a_k-a_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则

$$a_k=a_k,$$

$$a_{k+1}=a_k-d_k,\ a_{k+2}=a_k-d_k-d_{k+1},\ \cdots,\ a_n=a_k-d_k-d_{k+1}-\cdots-d_{n-1},$$

$$a_{k-1}=a_k+d_{k-1},\ a_{k-2}=a_k+d_{k-1}+d_{k-2},\ \cdots,\ a_1=a_k+d_{k-1}+d_{k-2}+\cdots+d_1,$$

把上面这 n 个等式相加，并利用 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，可得

$$na_k-(n-k)d_k-(n-k-1)d_{k+1}-\cdots-d_{n-1}+$$
$$(k-1)d_{k-1}+(k-2)d_{k-2}+\cdots+d_1=0.$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}(na_k)^2&=((n-k)d_k+(n-k-1)d_{k+1}+\cdots+d_{n-1}\\&\quad-(k-1)d_{k-1}-(k-2)d_{k-2}-\cdots-d_1)^2\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-k}i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)\\&\leqslant\frac{n^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right),\end{aligned}$$

所以

$$a_k^2\leqslant\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2.$$

5.6　构造辅助命题

如果一个命题直接证比较困难，可以试着考虑建立辅助命题来帮助证题.

例 15　给定两组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，现知

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>0,\ y_1>y_2>\cdots>y_n>0,$$

$$x_1>y_1,\ x_1+x_2>y_1+y_2,\ \cdots,$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n>y_1+y_2+\cdots+y_n.$$

求证：对于任何自然数 k，都有

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k>y_1^k+y_2^k+\cdots+y_n^k.$$

分析 我们猜想是否有如下的递推关系：

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k>x_1^{k-1}y_1+x_2^{k-1}y_2+\cdots+x_n^{k-1}y_n,$$

$$x_1^{k-1}y_1+x_2^{k-1}y_2+\cdots+x_n^{k-1}y_n>x_1^{k-2}y_1^2+x_2^{k-2}y_2^2+\cdots+x_n^{k-2}y_n^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1y_1^{k-1}+x_2y_2^{k-1}+\cdots+x_ny_n^{k-1}>y_1^k+y_2^k+\cdots+y_n^k.$$

从而联想到构造辅助命题：

若 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$，且满足题设的条件，那么：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n>a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n. \quad ①$$

证明 因为 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$，故存在正数 $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}, b_n$ 使得：

$$a_n=b_1,$$
$$a_{n-1}=b_1+b_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_2=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1},$$
$$a_1=b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

于是

$$\begin{aligned}&a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\=&(b_1+b_2+\cdots+b_n)x_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})x_2+\cdots+b_1x_n\\=&b_1(x_1+x_2+\cdots+x_n)+b_2(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+\cdots+b_nx_1\\>&b_1(y_1+y_2+\cdots+y_n)+b_2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+\cdots+b_ny_1\\=&(b_1+b_2+\cdots+b_n)y_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})y_2+\cdots+b_1y_n\\=&a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n.\end{aligned}$$

故①式成立.

再依次取 $a_i=x_i^{k-1}, x_i^{k-2}y_i, \cdots, y_i^{k-1}(i=1, 2, \cdots, n)$，利用不等式的传递性，自大到小逐渐缩小，即得所要证的不等式.

5.7 构造例子(反例)

例 16 对于给定的大于 1 的正整数 n，是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$，同时满足以下条件：

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(2) $n-1>\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}>n-1-\frac{1}{2002}$.

解 答案是肯定的.

取 $a_1=N+1,\ a_2=N+2,\ \cdots,\ a_{n-1}=N+(n-1)$；

$$b_1=1,\ b_2=2,\ \cdots,\ b_{n-1}=n-1.$$

于是，由(1)有 $b_n-a_n=N(n-1)$. 令 $a_n=N^2,\ b_n=N^2+N(n-1)$.

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=n-1-\left(\frac{2}{N+2}+\cdots+\frac{2(n-1)}{2(n-1)+N}+\frac{n-1}{2N+(n-1)}\right)$$
$$<n-1.$$

(上式利用了$\dfrac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=1-\dfrac{2i}{2i+N},\ 1\leqslant i\leqslant n-1$)

又取 $N>2002n(n-1)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}>n-1-\frac{2n(n-1)}{N}>n-1-\frac{1}{2\,002}.$$

例 17 求所有大于 1 的正整数 n，使得对任意正实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，都有不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\geqslant n(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1).$$

(2011 年上海市高中数学竞赛)

解 当 $n=2$ 时，不等式为$(x_1+x_2)^2\geqslant 2(x_1x_2+x_2x_1)$，即$(x_1-x_2)^2\geqslant 0$，故 $n=2$ 满足题意.

当 $n=3$ 时，不等式 $(x_1+x_2+x_3)^2\geqslant 3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$，

等价于 $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geqslant 0$，

故 $n=3$ 满足题意.

当 $n=4$ 时，不等式为

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)$$
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2+x_3-x_4)^2\geqslant 0.$$

故 $n=4$ 满足题意.

下证当 $n>4$ 时，不等式不可能对任意正实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 都成立.

取 $$x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=\cdots=x_n=\frac{1}{5(n-2)},$$

则原不等式为

$$\left[1+1+(n-2)\cdot\frac{1}{5(n-2)}\right]^2\geqslant n\left(1+\frac{2}{5(n-2)}+\frac{n-3}{25(n-2)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{121}{25} \geqslant n+\frac{2n}{5(n-2)}+\frac{n(n-3)}{25(n-2)^2},$$

这与 $\frac{121}{25}<5\leqslant n$ 矛盾.

所以满足题意的正整数 n 为 2、3、4.

例 18 已知正整数 $n\geqslant 2$，实数 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$，并且有：$a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j)$，问：是否一定有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant(n-2)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$？

解 不一定.

令
$$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=h,\ a_n=\frac{1}{h^{n-1}};$$
$$b_1=k,\ b_2=b_3=\cdots=b_{n-1}=1,\ b_n=\frac{1}{k}\ (k\geqslant 1).$$

（想法是把 h 取的充分大，这样 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 可以充分大，为了不让 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)$ 过大，可以把 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 取成相同的数，反向考虑 b_i 的取法.）

则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-b_j)\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j)$ 等价于
$$(n-1)h-\frac{n-1}{h^{n-1}}\leqslant(n-1)k-\frac{n-1}{k}.$$

即
$$k-h\geqslant\frac{1}{k}-\frac{1}{h^{n-1}}.$$

注意到 $k\geqslant 1$，$h>0$，故只须 $k-h\geqslant 1$，即 $k\geqslant h+1$ 即可.

而 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i>(n-2)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$ 等价于
$$(n-1)h+\frac{1}{h^{n-1}}>(n-2)\left[k+(n-2)+\frac{1}{k}\right].$$

为简便起见，取 $k=h+1$，仅需 $(n-1)h>(n-2)[h+1+(n-2)+1]$，即 $h>n^2-2n$ 即可. 取 $h=n^2-2n+1=(n-1)^2$，此时，便有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i>(n-2)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

说明 事实上，我们可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，过程详见习题 1 第

15 题.

习 题 5

1 已知 $k>a>b>c>0$，求证：

$$k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)>0.$$

2 方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三根 α、β、γ 均为实数，且 $a^2=2b+2$，求证：$|a-c|\leqslant 2$.

3 设 $F(x)=|f(x)\cdot g(x)|$，其中 $f(x)=ax^2+bx+c$，$x\in[-1,1]$；$g(x)=cx^2+bx+a$，$x\in[-1,1]$，且对任意参数 a、b、c，恒有 $|f(x)|\leqslant 1$，求 $F(x)$的最大值.

4 设 a、b、c 都是实数，求证：

$$\frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}+\frac{|c|}{1+|c|}.$$

5 求所有的实数 a，使得不等式 $x^2+y^2+z^2\leqslant a(xy+yz+zx)$ 的任何正整数解都是某个三角形的三边长.

6 设 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为正实数，求证：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_1+a_1b_3)^2\\ \geqslant&4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1),\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ 时成立.

7 设 $a_n\in\mathbf{R}$ 满足：$a_{n+1}\geqslant a_n^2+\dfrac{1}{5}$，$n\geqslant 0$，求证：

$$\sqrt{a_{n+5}}\geqslant a_{n-5}^2,\ n\geqslant 5.$$

8 设 x、y、z 为任意实数，求证：

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

9 设 x，y，$z>0$，求证：

$$\begin{aligned}&3\sqrt{xy+yz+zx}\\ \leqslant&\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\\ \leqslant&2(x+y+z).\end{aligned}$$

10 已知 α、β、γ 都是锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证：

$$\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta+\gamma<\pi.$$

11 若 p、q 为实数，且对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，成立不等式：

$$\left|\sqrt{1-x^2}-px-q\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

求证：$p=-1$，$q=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

12 (Minkovski 不等式)求证：对于任意 $2n$ 个正数 a_1，a_2，…，a_n 及 b_1，b_2，…，b_n，有

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \geqslant&\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2},\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$ 时成立.

13 设 $0<a_i\leqslant a$ $(i=1, 2, \cdots, 6)$. 求证：

(1) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}a_i}{a}-\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1}{a^2}\leqslant 2.$

(2) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}a_i}{a}-\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_6a_1}{a^2}\leqslant 3.$

14 已知 100 个正数 x_1，x_2，…，x_{100}，满足：

(1) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2>10\,000$；

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{100}\leqslant 300$.

求证：可在它们之中找出 3 个数，使得这三个数之和大于 100.

15 设 n 为一个大于 2 的奇数，求证：当且仅当 $n=3$ 或 5 时，对于任意 a_1，a_2，…，$a_n\in\mathbf{R}$，有下面不等式成立：

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)\\ &+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0.\end{aligned}$$

16 设 a_1，a_2，…，$a_n(n\geqslant 2)$ 都大于 -1 且同号，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

17 设 a_i 为正实数 $(i=1, 2, \cdots, n)$，令：

$$kb_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k (k = 1, 2, \cdots, n),$$

$$C_n = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D_n = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2.$$

求证：$C_n \leqslant D_n \leqslant 2C_n$.

6 局部不等式

对于和式类不等式，如果从整体考虑较难入手的话，不妨先估计局部的性质，导出一些局部的不等式，再综合这些局部不等式推断出整体的性质. 这里所说的局部，既可以是由一个单项，也可以是由几项组成.

例 1　设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b}$$
$$\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

分析　直接证明这个不等式，有点难以下手，我们若能证明(局部不等式)

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}, \qquad ①$$

则同理可得 $\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}\geqslant\frac{b^2+c^2+d^2}{3}$，$\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}\geqslant\frac{c^2+d^2+a^2}{3}$，$\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b}\geqslant\frac{d^2+a^2+b^2}{3}$，把这些不等式相加，便得所要证明的式子. 所以，要证明本题，只需证明一个局部不等式①.

证明　先证：对 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，有

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z}\geqslant\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

事实上，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)&\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2\\&\geqslant(x^2+y^2+z^2)\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3},\end{aligned}$$

所以 $$\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z}\geqslant\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

于是有

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3},\ \frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geqslant \frac{b^2+c^2+d^2}{3},$$

$$\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a} \geqslant \frac{c^2+d^2+a^2}{3},\ \frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geqslant \frac{d^2+a^2+b^2}{3}.$$

把上面这4个不等式相加便得

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

例2 设 $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}^+$，求证：

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geqslant 2.$$

分析 对不等式左边进行处理似有难度，我们也拟从局部考虑，先证 $\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geqslant \frac{2x}{x+y+z}$ 即可.

证明 先证明
$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geqslant \frac{2x}{x+y+z}.$$

事实上，由平均不等式可得

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}=\frac{x}{\sqrt{x}\ \sqrt{y+z}} \geqslant \frac{x}{\frac{x+y+z}{2}}=\frac{2x}{x+y+z}.$$

同理可得
$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geqslant \frac{2y}{x+y+z},$$
$$\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geqslant \frac{2z}{x+y+z}.$$

把上面3个不等式相加，便得

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geqslant 2.$$

说明 本题中的等号是不成立的. 因为若等号成立，则 $x=y+z,\ y=z+x,\ z=x+y$，从而 $x+y+z=0$，不可能.

例3 设 $0 \leqslant a,\ b,\ c \leqslant 1$，求证：

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \leqslant 2.$$

分析　我们发现等号成立并不是当 $a=b=c$，而是当 a、b、c 中有一个为 0，另两个为 1 时取到，因此，不应从整体去考虑问题，而应考虑局部的性质，即单项性质.

证明　我们先证明

$$\frac{a}{bc+1}\leqslant\frac{2a}{a+b+c}. \quad ①$$

注意到①等价于 $a+b+c\leqslant 2bc+2$，即

$$(b-1)(c-1)+bc+1\geqslant a.$$

而 $a,b,c\in[0,1]$，上式显然成立，因此①成立.

同理，我们有

$$\frac{b}{ca+1}\leqslant\frac{2b}{a+b+c}, \quad ②$$

$$\frac{c}{ab+1}\leqslant\frac{2c}{a+b+c}. \quad ③$$

三式相加即得原不等式成立.

例 4　已知 $x_i\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $x_1x_2\cdots x_n=a^n$. 记 $a_{n+1}=x_1$. 求证：当 $n>2$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\geqslant\frac{n}{2}(a^2-1)$.

分析　为了联系 x_ix_{i+1} 与 x_i，自然想到 $(x_i-1)(x_{i+1}-1)$，利用条件，此式 $\geqslant 0$.

证明　由已知可得 $(x_i-1)(x_{i+1}-1)\geqslant 0$，故

$$2x_ix_{i+1}-x_i-x_{i+1}\geqslant x_ix_{i+1}-1,$$

上式对 i 从 1 到 n 求和，有 $2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}-n$.

利用平均不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\geqslant n\cdot\sqrt[n]{(a^n)^2}=na^2.$$

因此 $2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\geqslant n(a^2-1)$，所以原不等式成立.

例 5　设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in(-1,1]$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}\ (\text{约定 } a_{n+1}=a_1).$$

证明　首先证明：若 x，$y \in (-1, 1]$，则

$$\frac{2}{1+xy} \geqslant \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}. \qquad ①$$

①等价于　$2(1+x^2)(1+y^2)-(1+xy)(2+x^2+y^2) \geqslant 0$，

即 $(x-y)^2-xy(x-y)^2 \geqslant 0$. 故①成立.

因此

$$\frac{2}{1+a_1a_2} \geqslant \frac{1}{1+a_1^2}+\frac{1}{1+a_2^2},$$

$$\frac{2}{1+a_2a_3} \geqslant \frac{1}{1+a_2^2}+\frac{1}{1+a_3^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{1+a_na_1} \geqslant \frac{1}{1+a_n^2}+\frac{1}{1+a_1^2}.$$

上述 n 个式子相加即得原不等式成立.

例 6　设 x，y，$z \geqslant 0$，且 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy} \geqslant 1.$$

证明　我们只须证明局部不等式

$$\frac{x}{1+yz} \geqslant x^2. \qquad ①$$

①等价于　$x+xyz \leqslant 1$.

而

$$x+xyz \leqslant x+\frac{1}{2}x(y^2+z^2)=\frac{1}{2}(3x-x^3)$$

$$=\frac{1}{2}[2-(x-1)^2(x+2)] \leqslant 1.$$

故①成立，进而原不等式获证.

说明　我们可得一串不等式

$$1 \leqslant \frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}$$

$$\leqslant \frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}$$

$$\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

例 7　已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+}$，求证：

$$\frac{xz}{x^2+xz+yz}+\frac{xy}{y^2+xy+xz}+\frac{yz}{z^2+yz+xy} \leqslant 1.$$

证明　不妨设 $xyz=1$.

首先证明 $$\frac{xz}{x^2+xz+yz} \leqslant \frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}. \quad ①$$

①等价于 $$x^2+xz+yz \geqslant xz+1+x,$$

即 $x^2+\frac{1}{x} \geqslant 1+x$，也即 $(x-1)^2(x+1) \geqslant 0$. 故①成立.

又由于 $$\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}=\frac{z}{yz+z+1},$$

且同理有 $$\frac{xy}{y^2+xy+xz} \leqslant \frac{1}{1+z+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+z+yz},$$

$$\frac{yz}{z^2+yz+xy} \leqslant \frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}=\frac{xyz}{xyz+x+xz}=\frac{yz}{1+z+yz}.$$

故 $\sum\limits_{cyc} \frac{xz}{x^2+xz+yz} \leqslant \frac{1+z+yz}{1+z+yz}=1$，结论成立.

例 8　设实数 a、b、c 满足：$a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11} \leqslant \frac{1}{4}.$$

（2007 年西部数学奥林匹克）

证明　若 a、b、c 都小于 $\frac{9}{5}$，则可以证明

$$\frac{1}{5a^2-4a+11} \leqslant \frac{1}{24}(3-a). \quad ①$$

事实上，
$$\begin{aligned} ① &\Leftrightarrow (3-a)(5a^2-4a+11) \geqslant 24 \\ &\Leftrightarrow 5a^3-19a^2+23a-9 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2(5a-9) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow a<\frac{9}{5}. \end{aligned}$$

同理，对 b、c 也有类似的不等式，相加便得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\\ \leqslant&\frac{1}{24}(3-a)+\frac{1}{24}(3-b)+\frac{1}{24}(3-c)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

若 a、b、c 中有一个不小于 $\frac{9}{5}$，不妨设 $a\geqslant\frac{9}{5}$，则

$$\begin{aligned}5a^2-4a+11&=5a\left(a-\frac{4}{5}\right)+11\\ &\geqslant 5\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\right)+11=20,\end{aligned}$$

故
$$\frac{1}{5a^2-4a+11}\leqslant\frac{1}{20}.$$

由于 $5b^2-4b+11\geqslant 5\left(\frac{2}{5}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+11=11-\frac{4}{5}>10$，所以 $\frac{1}{5b^2-4b+11}<\frac{1}{10}$，同理，$\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{10}$，所以

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}.$$

因此，总有 $\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

例 9 设 $n(\geqslant 3)$ 是整数，求证：对正实数 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，有不等式

$$\frac{x_nx_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明 先证明一个引理：若 $0<x\leqslant y$，$0<a\leqslant 1$，则

$$x+y\leqslant ax+\frac{y}{a}. \quad ①$$

事实上，由 $ax\leqslant x\leqslant y$ 得 $(1-a)(y-ax)\geqslant 0$，即

$$a^2x+y\geqslant ax+ay.$$

因此
$$x+y\leqslant ax+\frac{y}{a}.$$

现在，令 $(x, y, a)=\left(x_i, x_{n-1}\cdot\frac{x_{i+1}}{x_2}, \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}}\right)i=1, 2, \cdots, n-2$. 代入

①,有

$$x_i+\frac{x_{n-1}x_{i+1}}{x_2}\leqslant\frac{x_ix_{i+1}}{x_{i+2}}+x_{n-1}\cdot\frac{x_{i+2}}{x_2}. \quad ②$$

②式对 $i=1,2,\cdots,n-2$ 求和,即得

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+\frac{x_{n-1}}{x_2}(x_2+x_3+\cdots+x_{n-1})$$

$$\leqslant\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_2}(x_3+x_4+\cdots+x_n),$$

所以

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}\leqslant\frac{x_1x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}x_n}{x_2}. \quad ③$$

另外,令 $(x,y,a)=\left(x_n,x_n\cdot\frac{x_{n-1}}{x_2},\frac{x_1}{x_2}\right)$,又有

$$x_n+\frac{x_nx_{n-1}}{x_2}\leqslant\frac{x_nx_1}{x_2}+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}. \quad ④$$

由③+④即得原不等式成立.

例 10 设 n 是正整数,且 $n\geqslant3$. 又设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数,其中 $2\leqslant a_i\leqslant3$, $i=1,2,\cdots,n$. 若取 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$,求证:

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant2S-2n.$$

分析 为了处理右边的 $2S$ 可以采用类似"分母有理化"的方法,从左边每一项中分离出 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$,它们的一部分和恰为 $2S$.

证明 $\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-\frac{2a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}$.

注意到 $1=2+2-3\leqslant a_i+a_{i+1}-a_{i+2}\leqslant3+3-2=4$,并且由 $(a_i-2)(a_{i+1}-2)\geqslant0$ 可得 $-2a_ia_{i+1}\leqslant-4(a_i+a_{i+1}-2)$,所以

$$\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}$$

$$\leqslant a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\cdot\frac{a_i+a_{i+1}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}$$

$$=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\left(1+\frac{a_{i+2}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\right)$$

$$\leqslant a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\left(1+\frac{a_{i+2}-2}{4}\right)$$

$$=a_i+a_{i+1}-2.$$

记 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$. 在上式中令 $i=1, 2, \cdots, n$，得 n 个不等式，再依次相加，得

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant 2S-2n.$$

习　题　6

1 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正实数，求证：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$$
$$\geqslant 2\left(\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}+x_n}+\frac{1}{x_n+x_1}\right).$$

2 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

3 已知 $0\leqslant x, y, z\leqslant 1$，解方程：

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}=\frac{3}{x+y+z}.$$

4 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$. 求证：

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leqslant 1.$$

并问等号何时成立?

5 给定 $\alpha, \beta>0$，$x, y, z\in\mathbf{R}^+$，$xyz=2004$. 求 u 的最大值，其中，$u=\sum\limits_{cyc}\frac{1}{2004^{\alpha+\beta}+x^{\alpha}(y^{2\alpha+3\beta}+z^{2\alpha+3\beta})}$.

6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$. 对 $m, n\in\mathbf{Z}^+$，$m, n>1$，求证：$\frac{x_1^m}{a-x_1}+\frac{x_2^m}{a-x_2}+\cdots+\frac{x_n^m}{a-x_n}\geqslant\frac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-2}}$.

7 已知 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，求证：

(1) $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}>\frac{3}{2}$；

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{(b+c)^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{(c+a)^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{(a+b)^2}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

8 设正整数 $n\geqslant 2$，已知 n 个正数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 满足下列两个条件：

(1) $v_1+v_2+\cdots+v_n=1$；

(2) $v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant 2v_1$.

求 $v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$ 的最大值.

9 已知 $a>1, b>1, c>1$，求证：

(1) $\dfrac{a^5}{b^2-1}+\dfrac{b^5}{c^2-1}+\dfrac{c^5}{a^2-1}\geqslant\dfrac{26}{6}\sqrt{15}$；

(2) $\dfrac{a^5}{b^3-1}+\dfrac{b^5}{c^3-1}+\dfrac{c^5}{a^3-1}\geqslant\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{50}$.

10 (反向 Cauchy 不等式——Polya-Szego 不等式)

设 $0<m_1\leqslant a_i\leqslant M_1$, $0<m_2\leqslant b_i\leqslant M_2$, $i=1, 2, \cdots, n$，则有：

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2.$$

11 已知 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{1}{x_i}-1}\geqslant(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x_i}-1}}$.

12 设 n 个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的元素由非负整数构成，x_i 为 S_i 的所有元素之和. 求证：若对某个自然数 k，$1<k<n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\frac{1}{k+1}\cdot\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right],$$

则存在下标 i、j、t、l(至少有三个互不相同)，使得 $x_i+x_j=x_t+x_l$.

7 数学归纳法与不等式证明

数学归纳法有很多表达形式，其中最基本和最常用的是第一数学归纳法和第二数学归纳法.

第一数学归纳法：设 $P(n)$ 是一个(关于正整数 n)的命题. 如果：

(1)$P(1)$成立；(2)设 $P(k)$ 成立，可推出 $P(k+1)$ 成立，那么 $P(n)$ 对一切正整数 n 都成立.

第二数学归纳法：设 $P(n)$ 是一个(关于正整数 n)的命题. 如果：

(1)$P(1)$成立；(2)设 $n\leqslant k$ (k 为任意正整数) 时 $P(n)$ ($1\leqslant n\leqslant k$) 成立，可推出 $P(k+1)$ 成立，那么 $P(n)$ 对一切正整数 n 都成立.

在遇到与正整数 n 有关的不等式时，往往可以想到采用数学归纳法去证明.

例 1 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ ($n=1, 2, \cdots, 2004$). 求证：

$$\sqrt{2}<a_{2005}<\sqrt{2}+\frac{1}{2005}.$$

证明 由平均不等式，得

$$a_{2005}=\frac{a_{2004}}{2}+\frac{1}{a_{2004}}>2\sqrt{\frac{a_{2004}}{2}\cdot\frac{1}{a_{2004}}}=\sqrt{2}.$$

下面证明：对一切正整数 n，有

$$\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}. \qquad ①$$

当 $n=1$ 时①式显然成立.

假设当 $n=k$ 时，有$\sqrt{2}<a_k<\sqrt{2}+\dfrac{1}{k}$，那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}<\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{k}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2k}\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{k+1}.$$

因此①对一切正整数 n 成立，当然对 2005 也成立.

例 2 设 $a>0$，求证：对任意正整数 n，有不等式

$$\frac{1+a^2+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}.$$

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$\frac{1+a^2}{a} \geqslant 2$，故不等式成立.

设当 $n=k$ 时不等式成立，即

$$A=\frac{1+a^2+\cdots+a^{2k}}{a+a^3+\cdots+a^{2k-1}} > \frac{k+1}{k}.$$

我们的目标是证明：

$$B=\frac{1+a^2+\cdots+a^{2k+2}}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}} > \frac{k+2}{k+1}.$$

A 和 B 的分母不一样，怎么把它们联系起来呢？一个自然的想法是取 A 的倒数. 注意到：$\frac{1}{A}<\frac{k}{k+1}$.

$$\begin{aligned}\text{而}\ \frac{1}{A}+B &= \frac{a+a^3+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2k}}+\frac{1+a^2+\cdots+a^{2k+2}}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}} \\ &= \frac{1+2a^2+2a^4+\cdots+2a^{2k}+a^{2k+2}}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}} \\ &= \frac{(1+a^2)+(a^2+a^4)+\cdots+(a^{2k-2}+a^{2k})+(a^{2k}+a^{2k+2})}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}} \\ &\geqslant 2.\end{aligned}$$

故

$$B>2-\frac{1}{A}>2-\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}.$$

因此当 $n=k+1$ 时不等式成立.

进而对一切正整数 n，原不等式成立.

例 3 已知正项数列 $\{a_n\}$ 对 $n\in \mathbf{N}_+$ 都有 $a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}$ 成立. 求证：$a_n<\frac{1}{n}$.

证法 1 首先，由 $a_{n+1} \leqslant a_n - a_n^2 = a_n(1-a_n)$ 以及 $\{a_n\}$ 每一项恒正，有：

$$a_n(1-a_n)>0 \Rightarrow 0<a_n<1.$$

下面我们用数学归纳法证明：$a_n<\frac{1}{n}$.

当 $n=1$ 时，命题显然成立.

当 $n=2$ 时，如果 $\frac{1}{2}\leqslant a_1<1$，那么有 $0<1-a_1\leqslant\frac{1}{2}$；如果 $0<a_1<\frac{1}{2}$，那么有 $\frac{1}{2}<1-a_1<1$. 因此总有 $a_2\leqslant a_1(1-a_1)<\frac{1}{2}$. 所以命题也成立.

现在假设当 $n=k$ 时，$a_k<\frac{1}{k}$ $(k\geqslant 2)$ 成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2=\frac{1}{4}-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2.$$

因为 $0<a_k<\frac{1}{k}$，所以

$$-\frac{1}{2}<a_k-\frac{1}{2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\leqslant 0.$$

故
$$0<\frac{1}{4}-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2<-\frac{1-k}{k^2}<\frac{k-1}{k^2-1}=\frac{1}{k+1}.$$

即 $a_{k+1}<\frac{1}{k+1}$，命题对 $k+1$ 也成立.

综上所述，对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，有 $a_n<\frac{1}{n}$.

说明 本题在 k 推 $k+1$ 时可以使用不同的方法. 当然也可以不采用归纳法：

证法 2(分区间讨论). 首先易证 $0<a_n<1$. 奠基同上法.

假设当 $n=k$ 时，有 $a_k<\frac{1}{k}$.

现在把 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 分为 $\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$ 和 $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)$ 两个子区间之异. 于是，当 $n=k+1$ 时，

(i) 在 $\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$ 上，$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<a_k<\frac{1}{k+1}$；

(ii) 在 $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)$ 上，$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$.

综合上述，对一切 n，有 $a_n<\frac{1}{n}$.

证法 3(累差法).

由 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)$，所以 $0<a_n<1$，且 $a_n>a_{n+1}$.

故
$$\frac{1}{a_{n+1}} \geqslant \frac{1}{a_n(1-a_n)} = \frac{1}{1-a_n} + \frac{1}{a_n},$$

即
$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-a_n} > 1.$$

于是
$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) > n-1.$$

所以 $\frac{1}{a_n} > (n-1) + \frac{1}{a_1} > (n-1) + 1 = n \Rightarrow a_n < \frac{1}{n}$.

例 4 设非负数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足条件：$a_{m+n} \leqslant a_n + a_m$，$m, n \in \mathbf{N}_+$，求证：对任意正整数 n，均有 $a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m$.

证法 1 令 $m = 1$，可得，

$$0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} + a_1 \leqslant \cdots \leqslant na_1. \quad ①$$

下面用归纳法证明，对任何 $n, m \in \mathbf{N}_+$ 命题成立.

固定 $m \in \mathbf{N}_+$，取 $n = 1$，要证明的是

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)a_m \leqslant (m-1)a_1,$$

即
$$(m-1)a_m \leqslant (m-1)ma_1.$$

由①即知此式成立. 因此当 $n = 1$ 时命题成立.

现假设当 $1 \leqslant n \leqslant k$ 时命题成立，分以下两种情况：

(i) $k < m$，则由①式可知

$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} \leqslant a_1 - \frac{a_m}{m}.$$

又因为 $a_1 - \frac{a_m}{m} \geqslant 0$，有

$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{m}{k+1}\left(a_1 - \frac{a_m}{m}\right).$$

故
$$a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m} - 1\right)a_m.$$

(ii) $k \geqslant m$，则 $k + 1 - m \geqslant 1$，由假设得 $a_{k+1} \leqslant a_{k+1-m} + a_m$.

利用归纳假设

$$a_{k+1-m} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1-m}{m} - 1\right)a_m,$$

故

$$a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m} - 1\right)a_m.$$

综合(i)及(ii)知　当 $n = k+1$ 时命题也成立.

说明　本题也可基于带余除法给出证明.

证法 2　由条件有 $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} + a_1 \leqslant \cdots \leqslant na_1$.

设 $n = mq + r$，则

$$\begin{aligned} ma_n &= ma_{mq+r} \\ &\leqslant m \cdot a_{mq} + ma_r \\ &\leqslant mqa_m + ma_r \\ &= (n-r)a_m + ma_r \\ &= (n-m)a_m + (m-r)a_m + ma_r \\ &\leqslant (n-m)a_m + (m-r)ma_1 + mra_1 \\ &= (n-m)a_m + m^2 a_1. \end{aligned}$$

因此

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m.$$

例 5　求证：对于所有正整数 n，有

$$\sqrt{1^2 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^3 + \cdots + \sqrt{n^2}}}} < 2.$$

分析　此题不宜从正向入手. 相反，采用反向归纳法原理，先从最里层的根号开始考虑，最后才扩大到最外层的根号就不难证明.

证明　下证

$$\sqrt{k^2 + \sqrt{(k+1)^2 + \cdots + \sqrt{n^2}}} < k+1. \tag{①}$$

当 $k = n$ 时，①式显然成立.

现假设当 $k = n, n-1, \cdots, m$ 时①式成立，则当 $k = m-1$ 时，只要证明

$$\sqrt{(m-1)^2 + \sqrt{m^2 + \cdots + \sqrt{n^2}}} < m-1+1 = m.$$

利用归纳假设

上式左端 $< \sqrt{(m-1)^2 + m + 1} = \sqrt{m^2 - m + 2} \leqslant m \ (m \geqslant 2)$.

故当 $k = m-1$ 时，①也成立.

综上，特别当 $k=1$ 时，有原不等式成立.

说明 反向归纳法原理是指：设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个命题. 如果：

(1) $P(n)$ 对无限多个自然数 n 成立；

(2) 假设 $P(k+1)$ 成立，可推出 $P(k)$ 也成立.

那么 $P(n)$ 对一切自然数 n 皆成立.

例6 设 $\{a_k\}$ $(k\geqslant 1)$ 是一个正实数数列，且存在一个常数 k，使得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<ka_{n+1}^2$（对所有 $n\geqslant 1$）. 求证：存在一个常数 c，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n<ca_{n+1}$（对所有 $n\geqslant 1$）.

证明 考查不等式链

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2<t(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)<c^2a_{n+1}^2,$$

其中，$t(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)<tk\cdot a_{n+1}^2$，故只需取 $tk=c^2$ 即可（t 为一参数）.

设命题 P_i 为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_i)^2<t(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2),$$

命题 Q_i 为
$$a_1+a_2+\cdots+a_i<ca_{i+1}.$$

当 $i=1$ 时，欲使 P_1 成立，可取 $t>1$.

现在设命题 P_k 成立，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2<t(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2).$$

于是，由不等式链，得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2<tka_{k+1}^2=c^2a_{k+1}^2.$$

故
$$a_1+a_2+\cdots+a_k<ca_{k+1}.$$

因此
$$P_k\text{ 成立}\Rightarrow Q_k\text{ 成立}.$$

我们希望证明：若 Q_k 成立 $\Rightarrow P_{k+1}$ 成立.

即由
$$a_1+a_2+\cdots+a_k<ca_{k+1}\Rightarrow$$
$$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^2<t(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2).$$

上述不等式成立，仅须

$$a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)<ta_{k+1}^2,$$

即
$$a_1+a_2+\cdots+a_k<\frac{t-1}{2}a_{k+1}.$$

故取 $c=\dfrac{t-1}{2}$ 就可以满足要求.

所以 $$c=\frac{t-1}{2}=\frac{\frac{c^2}{k}-1}{2}\Rightarrow c^2-2kc-k=0.$$

取 $c=k+\sqrt{k^2+k}$，则 $t=\frac{c^2}{k}>1$ 符合条件，进而由归纳法原理知本题结论成立.

说明 本题用了数学归纳法的另一种形式——螺旋归纳法：

设 $P(n)$、$Q(n)$ 是两列关于正整数 n 的命题，如果：

(1) 命题 $P(1)$ 成立；

(2) 对任何正整数 k，若命题 $P(k)$ 成立，则命题 $Q(k)$ 成立；若命题 $Q(k)$ 成立，则命题 $P(k+1)$ 成立，那么对所有正整数 n，命题 $P(n)$ 及 $Q(n)$ 都成立.

例 7 假设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 是实数，求证：

$$a_1a_2^4+a_2a_3^4+\cdots+a_na_1^4\geqslant a_2a_1^4+a_3a_2^4+\cdots+a_1a_n^4.$$

证明 对 n 使用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，不等式两边相等.

现假设 $n-1$ 时有结论成立，即

$$a_1a_2^4+a_2a_3^4+\cdots+a_{n-1}a_1^4\geqslant a_2a_1^4+a_3a_2^4+\cdots+a_1a_{n-1}^4.$$

考虑 n 时的情况.

我们只需证明：$a_{n-1}a_n^4+a_na_1^4-a_{n-1}a_1^4\geqslant a_na_{n-1}^4+a_1a_n^4-a_1a_{n-1}^4$.（注意：这正好是 $n=3$ 的情形！）

不失一般性，可设 $a_n-a_1=1$，否则可以用 $a_n-a_1>0$ 除以 a_1，a_{n-1}，a_n 中的每一个而不影响不等式.

利用关于凸函数 x^4 的 Jensen 不等式(详见第 11 章)，有：

$$a_1^4(a_n-a_{n-1})+a_n^4(a_{n-1}-a_1)\geqslant(a_1(a_n-a_{n-1})+a_n(a_{n-1}-a_1))^4,$$

展开即得结论成立.

例 8 给定正整数 n，及实数 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$，满足：

$$\sum_{i=1}^{n}ix_i=\sum_{i=1}^{n}iy_i.$$

求证：对任意实数 α，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i[i\alpha]\geqslant\sum_{i=1}^{n}y_i[i\alpha].$$

这里$[\beta]$表示不超过实数β的最大整数.(2008年中国数学奥林匹克)

证明 我们先证明一个引理:对任意实数x和正整数n,有

$$\sum_{i=1}^{n-1}[i\alpha]\leqslant\frac{n-1}{2}[n\alpha].$$

引理证明:只需要将$[i\alpha]+[(n-i)\alpha]\leqslant[n\alpha]$对$i=1,2,\cdots,n-1$求和即得.

回到原题,我们采用归纳法对n进行归纳,当$n=1$时显然正确.

假设当$n=k$时原命题成立,考虑当$n=k+1$时.令$a_i=x_i+\frac{2}{k}x_{k+1}$,$b_i=y_i+\frac{2}{k}y_{k+1}$,其中$i=1,2,\cdots,k$.显然我们有$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$,$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_k$,并且通过计算得知$\sum\limits_{i=1}^{k}ia_i=\sum\limits_{i=1}^{k}ib_i$,由归纳假设知$\sum\limits_{i=1}^{k}a_i[i\alpha]\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k}b_i[i\alpha]$.又由于$x_{k+1}\geqslant y_{k+1}$,否则若$x_{k+1}<y_{k+1}$,则$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{k+1}<y_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant y_2\leqslant y_1$,$\sum\limits_{i=1}^{k+1}ix_i=\sum\limits_{i=1}^{k+1}iy_i$,矛盾!

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}x_i[i\alpha]-\sum_{i=1}^{k}a_i[i\alpha]&=x_{k+1}\left\{[(k+1)\alpha]-\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]\right\}\\&\geqslant y_{k+1}\left\{[(k+1)\alpha]-\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]\right\}\\&=\sum_{i=1}^{k+1}y_i[i\alpha]-\sum_{i=1}^{k}b_i[i\alpha],\end{aligned}$$

由此可得$\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i[i\alpha]\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k+1}y_i[i\alpha]$.由归纳法知原命题对任意正整数$n$均成立.

例9 定义数列$x_1,x_2,\cdots,x_n$如下:$x_1\in[0,1)$,且

$$x_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{x_n}-\left[\frac{1}{x_n}\right], & 若\ x_n\neq 0,\\ 0, & 若\ x_n=0.\end{cases}$$

求证:对一切正整数n,有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_n}{f_{n+1}},$$

其中$\{f_n\}$为Fibonacci数列,$f_1=f_2=1$,$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$,$n\in\mathbf{N}_+$.

证法 1 当 $n=1$ 时，因为 $x_1\in[0,1)$，所以 $x_1<1=\frac{f_1}{f_2}$，故结论成立.

当 $n=2$ 时，分两种情况讨论：

(1) 如果 $x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则 $x_1+x_2<\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}=\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}$；

(2) 如果 $\frac{1}{2}<x_1<1$，则 $x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}-1$.

令 $f(t)=t+\frac{1}{t}$，则 $f(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调下降，故

$$x_1+x_2=f(x_1)-1<f\left(\frac{1}{2}\right)-1=\frac{3}{2}.$$

因此当 $n=2$ 时结论成立.

假设当 $n=k$，$n=k+1$ 时结论均成立. 那么就有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_k}{f_{k+1}},$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}.$$

把 x_2 作为新的 x_1，x_3 作为新的 x_2，…，有

$$x_2+x_3+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}. \quad ①$$

同样 $$x_3+x_4+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_k}{f_{k+1}}. \quad ②$$

再分两种情况讨论：

(i) 如果 $x_1\leqslant\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$，那么由①，

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}.$$

结论对 $n=k+2$ 成立.

(ii) 如果 $x_1>\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$，那么 $x_1\in\left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}},1\right)$. 故

$$x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}-1<\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}+\frac{f_{k+3}}{f_{k+2}}-1=\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}.$$

由②亦有 $x_1+x_2+\cdots+x_{k+2}<\dfrac{f_1}{f_2}+\dfrac{f_2}{f_3}+\cdots+\dfrac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$.

所以结论对 $n=k+2$ 成立.

说明 本题也可用连分数的方法证明,但较繁琐.

证法 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,令

$$g_n(x)=x+f(x)+f^{(2)}(x)+\cdots+f^{(n)}(x),\ n=0,1,2,\cdots.$$

注意到 $\dfrac{f_1}{f_2}=1$,且 $f\left(\dfrac{f_i}{f_{i+1}}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{f_i}{f_{i+1}}}=\dfrac{f_{i+1}}{f_{i+2}}$,可得

$$f^{(k)}(1)=f^{(k)}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)=f^{(k-1)}\left(\frac{f_2}{f_3}\right)=\cdots=f\left(\frac{f_k}{f_{k+1}}\right)=\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}},$$
$$k=1,2,\cdots.$$

所以
$$g_{n-1}(1)=\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_n}{f_{n+1}}.$$

下面先证明一个引理:

引理(Ⅰ) 对任何 $x,y\in[0,1]$,若 $x\neq y$,则 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$,并且 $f(x)-f(y)$ 与 $x-y$ 符号相反.

(Ⅱ) $g_n(x)$在$[0,1]$中单调递增.

引理证明:(Ⅰ) 由 $f(x)-f(y)=\dfrac{y-x}{(1+x)(1+y)}$ 易证.

对于(Ⅱ),若 $x>y$,由(Ⅰ)知,表达式

$$\begin{aligned}g_n(x)-g_n(y)=&(x-y)+(f(x)-f(y))\\&+\cdots+(f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y))\end{aligned}$$

中,每个差的绝对值小于前一个差的绝对值,且符号相反. 又因为 $x-y>0$,所以 $g_n(x)-g_n(y)>0$.

回到原题,如果每个 $x_i(i<n)=0$,则 $x_n=0$. 由关于前 $n-1$ 项的归纳假设易得结论. 否则对 $2\leqslant i\leqslant n$,有 $x_{i-1}=\dfrac{1}{a_i+x_i}$,其中 $a_i=\left[\dfrac{1}{x_{i-1}}\right]$为自然数.

故 $x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+\cdots+x_1$
$$=x_n+\frac{1}{a_n+x_n}+\frac{1}{a_{n-1}+\dfrac{1}{a_n+x_n}}+\cdots+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+x_n}}}}$$

记等式右边的式子为 S.

我们用归纳法证明，若固定 $x_n \in [0, 1)$，上式右端 S 对一切 i 都有 $a_i = 1$ 时达到最大值.

首先，a_2 只出现在 S 的最后一项中，与 x_n，a_n，…，a_3 的值无关，当 $a_2=1$ 时 S 为最大.

现设对于 $i>2$，S 在 $a_{i-1}=a_{i-2}=\cdots=a_2=1$ 时不依赖于 x_n，a_n，a_{n-1}，…，a_i 之值取得最大值. 此时 S 中只有后面 $i-1$ 项中含有 a_i，且这 $i-1$ 项之和为

$$g_{i-2}\left(\cfrac{1}{a_i+\cfrac{1}{a_{i+1}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+x_n}}}}\right).$$

由于 g_{i-2} 是增函数，故在 a_i 最小时取到最大值，即当 $a_i=1$ 时达到最大.

最后，由前所述，有

$$\begin{aligned} x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1 &\leqslant x_n+\frac{1}{1+x_n}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x_n}}+\cdots \\ &\quad +\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1+x_n}}}} \\ &= g_{n-1}(x_n)<g_{n-1}(1) \\ &= \frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_n}{f_{n+1}}. \end{aligned}$$

例 10 已知数列 $\{r_n\}$ 满足：$r_1=2$，$r_n=r_1r_2\cdots r_{n-1}+1$ $(n=2, 3, \cdots)$. 正整数 a_1，a_2，…，a_n 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$. 求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}$.

证明 由 $\{r_n\}$ 的定义不难发现

$$1-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\cdots-\frac{1}{r_n}=\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n}. \qquad ①$$

当 $\frac{1}{a_1}<1$ 时，正整数 $a_1\geqslant 2=r_1$，所以 $\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{r_1}$.

假设当 $n<k$ 时，原不等式对一切满足条件的正整数 a_1，a_2，…，a_n 成立.

如果当 $n=k$ 时，有一组满足条件的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}. \qquad ②$$

不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n.$

那么，由归纳假设，

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{r_1},$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{n-1}}.$$

将以上各式分别乘以非正数 $a_1-a_2, a_2-a_3, \cdots, a_{n-1}-a_n$；将②乘以 a_n，然后相加得

$$n>\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_n}{r_n},$$

于是 $$1>\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{r_1}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{r_1 r_2 \cdots r_n}},$$

即 $$r_1 r_2 \cdots r_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n. \qquad ③$$

另一方面，正数 $1-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$，所以由①②得

$$\frac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n} \geqslant \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}. \qquad ④$$

由③④即可得出矛盾！

因此②不能成立，故结论成立.

说明 读者可以进一步推出等号成立当且仅当 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$.

此题为 Erdös 的一个猜想，以上证明在归纳法中运用反证法（等于加了条件），十分巧妙.

从证明过程中不难验证以下两个命题：

(A) 设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n>0$，$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n>0$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i$；

$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i(k=1,2,\cdots,n-1)$，则 $\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$.

(B) 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，且 $\prod_{i=1}^{k} b_i \geqslant \prod_{i=1}^{k} a_i(1 \leqslant k \leqslant n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

习 题 7

1 设 $a_1=3$，$a_n=a_{n-1}^2-n\ (n=2,3,\cdots)$，求证：$a_n>0$.

2 设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 满足：$a_i-2a_{i+1}+a_{i+2}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,2n-1)$，求证：

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{n+1} \geqslant \frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}.$$

3 设 $\{a_n\}$ 是各项为正的数列，若 $a_{n+1}\leqslant a_n-a_n^2$，求证：对一切 $n\geqslant 2$，都有

$$a_n \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

4 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求证：对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，有

$$\operatorname{arccot} a_n \leqslant \operatorname{arccot} a_{n+1}+\operatorname{arccot} a_{n+2},$$

并指出等号成立的条件.

5 设 $a_1,a_2,\cdots$ 是实数列，且对所有 i、$j=1,2,\cdots$ 满足：$a_{i+j}\leqslant a_i+a_j$，求证：对于正整数 n，有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n} \geqslant a_n.$$

6 设非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2004}$ 满足 $a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1\ (1\leqslant i$、$j$，$i+j\leqslant 2004)$. 求证：存在 $x\in\mathbf{R}$，对所有 $n\ (1\leqslant n\leqslant 2004)$，有 $a_n=[nx]$.

7 设 $1<x_1<2$，对于 $n=1,2,3,\cdots$，定义 $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$. 求证：对于 $n\geqslant 3$，有 $|x_n-\sqrt{2}|<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

8 设 $a>0$，求证：

$$\sqrt{a+\sqrt{2a+\sqrt{3a+\cdots+\sqrt{na}}}}<\sqrt{a}+1.$$

9 若 $a_i>0\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，且 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant n.$$

10 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和. 求证：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{2^k}<2$.

11 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为 $\geqslant1$ 的实数，证明：

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

12 设 $f(n)$ 定义在正整数集合上，且满足 $f(1)=2$，$f(n+1)=f^2(n)-f(n)+1$，$n=1,2,\cdots$. 求证：对所有整数 $n>1$，有

$$1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

13 设 $\mathbf{N}_+$ 是正整数集，$\mathbf{R}$ 是实数集，S 是满足以下两个条件的函数 $f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R}$ 的集合，而且：

(1) $f(1)=2$；

(2) $f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant\dfrac{n}{n+1}f(2n)\ (n=1,2,\cdots)$.

试求最小的正整数 M，使得对任何 $f\in S$ 及任何 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $f(n)<M$ 成立.

14 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，满足：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=4$，$n\geqslant3$. 求证：

$$a_1^3a_2+a_2^3a_3+\cdots+a_{n-1}^3a_n+a_n^3a_1\leqslant27.$$

15 设 n 是正整数，x 是正实数，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k^2}}{k}\geqslant x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$.

16 设 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 n 个复数，$s_i=z_1+z_2+\cdots+z_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 求证：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|s_j-z_i|\leqslant\sum_{k=1}^{n}[(n+1-k)\cdot|z_k|+(k-2)|s_k|].$$

8 不等式与多变量函数最值

在这一章里我们主要学习最值问题中所常用的“固定变量法”，即当我们遇到那些有很多“互相制约因素和变量的最值问题时，可以先固定大多数变量，只允许一部分变量变动，借机看清它们与目标量之间的依赖关系. 然后，让先前被固定冻结住的变量活化而重新变动起来，最后达到解决问题的目的.

当然，使用固定变法处理问题时，可以从函数值入手，让函数值逐步逐步接近最值；也可以从自变量本身入手，使其较快达到最值点；还可以从正面推导，或从反面论证. 针对这些不同的手段，下面我们将分别介绍“累次求最值法”、“磨光变换法”以及“调整法”.

8.1 累次求最值法

累次求最值法的关键在于求最值的最值，即先固定一些变量，对于剩下的那小部分变量求出最值(当然与前面被固定的变量有关)，再解冻被固定住的变量，对求得的最值继续作估计. 如此一步一步，直至求出目的最值. 用累次求最值法证明不等式，也叫逐次逼近法，其技巧性很强.

例 1 求三位数(十进制下)与其各位数字之和的比的最小值.

解 设此三位数为 $100x+10y+z$，其中 x、y、z 为整数，且 $1\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y$，$z\leqslant 9$. 于是，比值为

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=1+\frac{99x+9y}{x+y+z}. \qquad ①$$

在①右端表达式中，只有分母含有 z，故当 x、y 固定时，$f(x,\ y,\ z)$ 当且仅当 $z=9$ 时取最小值. 同理可得

$$\begin{aligned}f(x,\ y,\ z)&\geqslant 1+\frac{99x+9y}{9+x+y}=10+\frac{90x-81}{9+x+y}\\&\geqslant 10+\frac{90x-81}{18+x}=100-\frac{1701}{18+x}\end{aligned}$$

$$\geqslant 100-\frac{1701}{18+1}=\frac{199}{19}.$$

故
$$f_{\min}(x, y, z)=f(1, 9, 9)=\frac{199}{19}.$$

例 2 设 A, B, C 为非负实数，$A+B+C=\frac{\pi}{2}$，且 $M=\sin A+\sin B+\sin C$，$N=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$，则 $M^2+N\leqslant 3$.

证明 不妨设 $C\leqslant A, B$，则 $C\in\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$，

$$\begin{aligned} M&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\\ &=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin C, \end{aligned}$$

$$N=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\sin^2 C.$$

固定 C，有

$$\begin{aligned} M^2+N&=1+2\sin^2 C+4\sin C\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}\\ &\quad+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin C\cdot\cos(A-B)\\ &=1+2\sin^2 C+4\sin C\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}\\ &\quad+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}+\sin C\\ &\quad-2\sin C\cos^2\frac{A-B}{2}\\ &=1+2\sin^2 C+\sin C+4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin C\\ &\quad+\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)-2\sin C\right]\cos^2\frac{A-B}{2}\\ &=1+2\sin^2 C+\sin C+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\sin C\\ &\quad+2(1-2\sin C)\cos^2\frac{A-B}{2}\\ &\leqslant 1+2\sin^2 C+\sin C+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\sin C \end{aligned}$$

$$+2(1-2\sin C)$$
$$=3+2\sin^2 C-3\sin C+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\sin C.$$

令 $t=\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}$，则 $t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，于是

$$\begin{aligned}M^2+N&=3+2\cos^2 2t-3\cos 2t+4\sin t\cos 2t\\&=3+\cos 2t(2\cos 2t-3+4\sin t)\\&=3+\cos 2t(-4\sin^2 t+4\sin t-1)\\&=3-\cos 2t(2\sin t-1)^2\\&\leqslant 3.\end{aligned}$$

当 $A=B$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\left(或\frac{\pi}{6}\right)$时，即 $A=B=C=\frac{\pi}{6}$ 或 $A=B=\frac{\pi}{4}$，$C=0$，不等式等号成立.

例 3　设 A、B、C、D 为空间四点，连结 AB、AC、AD、BC、BD、CD 中至多有一条的长度大于 1，试求六条线段长度之和的最大值.

解　设 AD 为六条线段中最长的一条.

(1) 将其余五条线段长度固定，易见当 A 和 D 为平行四边形 $ABDC$ 两相对顶点时，AD 取得最大值.

(2) 固定 B、C 的位置，则 A、D 必落在分别以 B、C 为圆心，1 为半径的两个圆相交的区域内. 此时具有最大可能距离的唯一一对点恰为两圆的两个交点，当 A、D 取这两点时，AB、BD、AC、CD 均达到各自的最大值 1.

(3) 剩下的问题是当 BC 变小时，AD 变大；当 BC 变大时，AD 变小，故我们应在其余四边固定为 1 的情况下探求 $BC+AD$ 的最大值.

记 $\angle ABO=\theta$，由 $AB=1$，$0<BC\leqslant 1$ 知 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.

于是，$AD+BC=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$在 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时取到最大值. 此时，六条线段之和为 $4+2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=5+\sqrt{3}$.

例 4　若 a、b、c 为非负实数且 $a+b+c=1$，试求 $S=ab+bc+ca-3abc$ 的最大值.

解　不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $c\leqslant\frac{1}{3}$. 固定 c，

$$S=ab+bc+ca-3abc=ab(1-3c)+c(a+b).$$

由于 $a+b$ 的值一定，$1-3c\geqslant 0$，ab 在 $a=b$ 时取最大值，故 S 在 $a=b$ 时取到最大值.

将 a、b、c 调整到 $a=b\geqslant c$，则 $b\geqslant\frac{1}{3}$. 固定 b，

$$S=ab+bc+ca-3abc=ac(1-3b)+b(a+c).$$

由于 $1-3b\leqslant 0$，$a+c$ 的值一定，故 S 在 a、c 的差最大时取到最大值. 而 $a-c\leqslant 1-b$，此时 $c=0$.

故只要在 $c=0$，$a+b=1$ 时求 ab 的最大值，显然为 $\frac{1}{4}$.

因此，当 a、b、c 中有两个为 $\frac{1}{2}$，另一个为 0 时 S 取到其最大值 $\frac{1}{4}$.

例 5 设非负数 α、β、γ 满足 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，求函数

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}+\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}$$

的最小值.

解 不妨设 $\gamma\leqslant\alpha,\beta$，则 $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$. 固定 γ，由于

$$\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}+\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}=2\cos\gamma\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)}+\sin\gamma\right),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)).$$

则

$$\begin{aligned}f&=\frac{1}{2}\frac{\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\gamma}+2\cos\gamma\left(\sin\gamma+\frac{\cos^2\gamma}{\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)}\right)\\&=\sin 2\gamma+\frac{1}{2}\frac{\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\gamma}+2\cdot\frac{\cos^3\gamma}{\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)}.\end{aligned}$$

因为 $\sin\gamma+\cos(\alpha-\beta)\leqslant\sin\gamma+1\leqslant\frac{3}{2}\leqslant 2\cos^2\gamma$，有

$$\begin{aligned}f&\geqslant\sin 2\gamma+\frac{1}{2}\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}+2\cdot\frac{\cos^3\gamma}{1+\sin\gamma}\\&=2\cos\gamma+\frac{1}{2}\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\end{aligned}$$

$$= 2\cos\gamma + \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

令 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$，则

$$\begin{aligned} f &= 2\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cot\theta = \frac{4\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + \frac{1}{2}\cot\theta \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\frac{(1-\tan\theta)(5\tan^2\theta - 4\tan\theta + 1)}{\tan\theta(1+\tan^2\theta)} \\ &\geqslant \frac{5}{2}\ \left(\tan\theta \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]\right). \end{aligned}$$

因此，当 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，$\gamma = 0$ 时，f 取到最小值 $\frac{5}{2}$.

8.2 磨光变换法

前述的累次求最值法，在每一次逼近过程中都保证了取到统一等号，这就要求我们首先发现取到最值的条件. 我们可以换一种方法来求解，当已知等号成立的条件后，就不必每步都取到等号，只要使变量组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 逐步接近等号组（即最值点），且保证有限步可达到最值点即可. 这种方法称为磨光变换法.

在用磨光变换法解题时，须注意确保函数值在磨光变换下向所需方向变化，如欲求最大值，则磨光变换必须保证函数值不减，有时就要求我们适当地选取变量才能满足这一要求.

例 6 设 x、y、z 都是非负实数，且 $x+y+z=1$，求证：

$$yz + zx + xy - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

证明 易见，当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时，不等式中等号成立. 不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$，则 $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z$.

令 $$x' = \frac{1}{3},\ y' = y,\ z' = x + z - \frac{1}{3},$$

则 $$x' + z' = x + z,\ x' \cdot z' \geqslant x \cdot z.$$

所以 $$yz + zx + xy - 2xyz = y(x+z) + (1-2y)xz$$

$$\leqslant y'(x'+z')+(1-2y')x'z'$$
$$=\frac{1}{3}(y'+z')+\frac{1}{3}y'z'\leqslant\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}.$$

例 7 已知非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n(n\geqslant 3)$ 满足不等式：$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{1}{2}$，求 $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$ 的最小值.

解 当 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}+x_n$ 皆为定值时，由于

$$(1-x_{n-1})(1-x_n)=1-(x_{n-1}+x_n)+x_{n-1}x_n,$$

可见，$|x_{n-1}-x_n|$ 越大，上式的值就越小. 为此，$n\geqslant 3$ 时，令

$$x_i'=x_i,\ i=1,2,\cdots,n-2,\ x_{n-1}'=x_{n-1}+x_n,\ x_n'=0. \qquad ①$$

则 $x_{n-1}'+x_n'=x_{n-1}+x_n$，$x_{n-1}'x_n'=0\leqslant x_{n-1}x_n$. 所以有

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant(1-x_1')(1-x_2')\cdots(1-x_{n-1}').$$

其中 $$x_1'+x_2'+\cdots+x_{n-1}'=x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{1}{2}.$$

再进行形如①的磨光变换 $n-2$ 次，可得

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant 1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\frac{1}{2},$$

等号当 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ 时取到.

例 8 设 $a, b, c, d\geqslant 0$，且 $a+b+c+d=1$，求证：

$$bcd+cda+dab+abc\leqslant\frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

证明 若 $d=0$，则 $abc\leqslant\frac{1}{27}$，不等式显然成立. 若 $a, b, c, d>0$，只要证明：

$$f(a,b,c,d)=\sum_{cyc}\frac{1}{a}-\frac{1}{27}\frac{1}{abcd}\leqslant\frac{176}{27}.$$

令 $$a\leqslant\frac{1}{4}\leqslant b,\ a'=\frac{1}{4},\ b'=a+b-\frac{1}{4},$$

则 $$a+b=a'+b',\ a'b'\geqslant ab.$$

于是 $$f(a,b,c,d)-f(a',b',c,d)$$
$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}\right)-\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{cd}\cdot\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{a'b'}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{a'b'-ab}{aba'b'}(a+b)\left(1-\frac{1}{27}\frac{1}{cd(a+b)}\right)\\
&\leqslant\frac{a'b'-ab}{aba'b'}(a+b)\left[1-\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)^{-3}\right]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

故 $$f(a,b,c,d)\leqslant f(a',b',c,d).$$

至多再进行两次磨光变换，即可得

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c,d)&\leqslant f\left(\frac{1}{4},a+b-\frac{1}{4},c,d\right)\\
&\leqslant f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},a+b+c-\frac{1}{2},d\right)\\
&\leqslant f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{176}{27}.
\end{aligned}
$$

所以原不等式成立.

例 9 设正实数 a、b、c、d 满足：$abcd=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{25}{4}.$$

（2011 年中国女子数学奥林匹克）

证法 1 首先我们证明，当 a、b、c、d 中有两个相等时，不等式成立. 不妨设 $a=b$，令 $s=a+b+c+d$，则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}=\frac{2}{a}+\frac{c+d}{cd}+\frac{9}{s}\\
&=\frac{2}{a}+a^2(s-2a)+\frac{9}{s}=\frac{2}{a}-2a^3+\left(a^2s+\frac{9}{s}\right).
\end{aligned}
$$

下面对 a 的取值分情况讨论：

若 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $s=a+b+c+d\geqslant 2a+\frac{2}{a}\geqslant\frac{3}{a}$，因此将 s 视为变量，上式最小值在 $s=2a+\frac{2}{a}$ 时取到，此时

$\frac{2}{a}-2a^3+\left(a^2s+\frac{9}{s}\right)=\frac{2}{a}-2a^3+a^2\left(2a+\frac{2}{a}\right)+\frac{9}{s}=\frac{2}{a}+2a+\frac{9}{s}=s+\frac{9}{s}=\frac{7}{16}s+\frac{9}{16}s+\frac{9}{s}\geqslant\frac{7}{16}\times 4+2\sqrt{\frac{9}{16}s\cdot\frac{9}{s}}=\frac{7}{4}+\frac{9}{2}=\frac{25}{4}$.（这里用到了 $s=2a+\frac{2}{a}\geqslant 4$）

若 $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则

$$\frac{2}{a}-2a^3+\left(a^2s+\frac{9}{s}\right)\geqslant\frac{2}{a}-2a^3+6a=\frac{2}{a}+5a+(a-2a^3)>\frac{2}{a}+5a$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot 5a}=2\sqrt{10}>\frac{25}{4}.$$

因此当 a、b、c、d 中有两个相等时，不等式成立.

下面假设 a、b、c、d 两两不等，不妨设 $a>b>c>d$. 由于 $\dfrac{ad}{c}\cdot b\cdot c\cdot c=abcd=1$，故由上面的分析得

$$\frac{1}{\frac{ad}{c}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{9}{\frac{ad}{c}+b+c+c}\geqslant\frac{25}{4}.$$

下面我们只需证明

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{1}{\frac{ad}{c}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{9}{\frac{ad}{c}+b+c+c}. \quad ①$$

而 ① $\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{9}{a+b+c+d}\geqslant\dfrac{c}{ad}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{9}{\frac{ad}{c}+b+2c}$

$$\Leftrightarrow\frac{ac+cd-c^2-ad}{acd}\geqslant\frac{9}{(a+b+c+d)\left(\frac{ad}{c}+b+2c\right)}\cdot\left(a+d-\frac{ad}{c}-c\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-c)(c-d)}{acd}\geqslant\frac{9}{(a+b+c+d)\left(\frac{ad}{c}+b+2c\right)}\cdot\frac{(a-c)(c-d)}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{ad}\geqslant\frac{9}{(a+b+c+d)\left(\frac{ad}{c}+b+2c\right)}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)\left(\frac{ad}{c}+b+2c\right)\geqslant 9ad$$

$$\Leftarrow\frac{ad}{c}+b+2c\geqslant\sqrt{9ad}\ \left(因为\ a+b+c+d>\frac{ad}{c}+b+2c\right)$$

$$\Leftarrow\frac{ad}{c}+3c\geqslant\sqrt{9ad}.$$

而最后一式可以用均值不等式推出，这样就证明了结论.

证法 2　不妨设 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，并记 $f(a,b,c,d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}$.

先证：$f(a,b,c,d)\geqslant f(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d)$.　　（*）

事实上，上式等价于

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{9}{2\sqrt{ac}+b+d}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{ac}\geqslant\frac{9(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)}\qquad(\text{因为}(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant 0)$$

$$\Leftarrow(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)\geqslant 9ac\qquad\left(\text{因为 } b+d\geqslant 2\sqrt{bd}=\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)$$

$$\Leftarrow\left(a+c+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)\left(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)\geqslant 9ac\qquad①$$

而 $1=abcd\geqslant a\cdot a\cdot c\cdot c\Rightarrow ac\leqslant 1\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{ac}}\geqslant 2\sqrt{ac}$. 且 $a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$，故

①左边 $\geqslant\left(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)\left(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)>4\sqrt{ac}\cdot 4\sqrt{ac}=16ac>9ac=$①右边. 所以（*）成立.

（*）说明 $f(a,b,c,d)$（其中 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$）的最小值（或极小值）总是在 $a=c$，即 $a=b=c$ 时取得. 欲得到该四元函数的下界，我们就可不妨设 $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)$，这里 $t\geqslant 1$；这也说明了只需证明对任意的 $t\geqslant 1$，总有

$$f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)\geqslant\frac{25}{4},\qquad(**)$$

就证明了原不等式成立. 代入，可知

$$f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)\geqslant\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3t+\frac{1}{t^3}+\frac{9}{t^3+\frac{3}{t}}\geqslant\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 12t^8-25t^7+76t^4-75t^3+12\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12)\geqslant 0$$

$$\Leftarrow 12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42 \geqslant 0. \qquad ②$$

而 $t \geqslant 1$，$12t^5+6t \geqslant 2\sqrt{12t^5 \cdot 6t}=12\sqrt{2}t^3>3t^3$，

$$11t^4+30 \geqslant 2\sqrt{11t^4 \cdot 30}=2\sqrt{330}t^2>30t^2.$$

故 $(t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42>0$，所以 ② 成立.

至此，$(**)$成立，原不等式得证.

例 10　求证：在周长为定值 l 的一切 n 边形中，正 n 边形有最大的面积.

证明　(1) 首先，凹多边形不可能具有最大面积.

如图 8 - 1，设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为一凹多边形，则当将$\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$以线段 $A_{i+1}A_{i-1}$的中点为中心，中心对称为$\triangle A_{i-1}A'_iA_{i+1}$时，得到的凸多边形 $A_1\cdots A_{i-1}A'_iA_{i+1}\cdots A_n$的周长也是 l，但面积却变大了. 因此，我们在以下的讨论中只考虑凸多边形的情形.

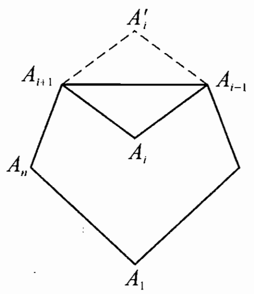


图 8 - 1

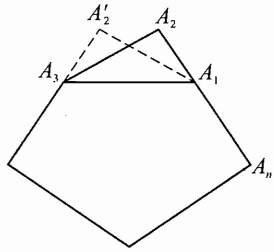


图 8 - 2

(2) 设凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 不等边，且其中存在两条邻边，一边小于$\frac{l}{n}$而另一边大于$\frac{l}{n}$，不妨设是边 A_1A_2 和 A_2A_3，连接 A_1A_3，以 A_1A_3，$\frac{l}{n}$，$A_1A_2+A_2A_3-\frac{l}{n}$为三边长作$\triangle A_1A'_2A_3$(如图 8 - 2 所示).

则 $A_1A_2<A_1A'_2$，$A'_2A_3<A_2A_3$，且 $A_1A'_2+A'_2A_3=A_1A_2+A_2A_3$.

于是由海伦公式知 $S_{\triangle A_1A'_2A_3}>S_{\triangle A_1A_2A_3}$，从而 $A_1A'_2A_3\cdots A_n$ 的面积大于 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积，且前者中有一边 $A_1A'_2$的长度为$\frac{l}{n}$.

若多边形 $A_1A'_2A_3\cdots A_n$ 仍不等边，又可重复上述磨光变换而使边长为 1 的边数每次至少增加 1 条，故至多经过 $n-1$ 次变换，就可变为等边 n 边形. 于是，不等边 n 边形的面积必小于某等边 n 边形的面积.

(3) 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 不等边，于是 n 边中存在两边 $A_iA_{i+1}<\frac{l}{n}<$

A_jA_{j+1}，但两边不相邻. 连接 A_iA_j 并作 A_iA_j 的垂直平分线 MN，以 MN 为对称轴将多边形 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ 对称为多边形 $A_iA'_{i+1}\cdots A_j$（如图 8-3 所示）.

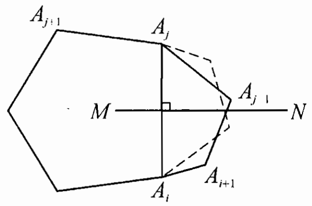


图 8-3

于是，得到的新 n 边形与原 n 边形周长、面积都相等，但新多边形中有两条邻边，一边大于 $\frac{l}{n}$，另一边小于 $\frac{l}{n}$，这样就化为了情形(2).

故知任一周长为 l 的不等边 n 边形的面积都小于某一个周长为 l 的等边 n 边形的面积.

(4) 由克拉美定理，在 n 条边长都为定值的 n 边形中，内接于圆的多边形面积最大. 故在周长为 l 的所有等边 n 边形中，正 n 边形面积最大.

综上所述，在周长为 l 的所有等边 n 边形中，正 n 边形面积最大.

8.3 调 整 法

对于一些最值问题，如离散极值问题，它们只有有限多种情形，自然存在最大、最小值. 这样，我们可以凭借最值存在这一点，用调整法来反证而解决问题. 由于最值必存在，我们不必像累次求极值法那样每步都取极值，也不必像磨光变换法那样保证迅速接近最值点. 只要对各种情形作局部的适当调整，说明它们不能取最值即可.

例 11　若干个正整数和为 2011，求它们积的最大值.

解　由于和为 2011 的不同正整数组只有有限多个，所以最大值必存在.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正整数，$x_1+x_2+\cdots+x_n=2011$ 且积 $u=x_1x_2\cdots x_n$ 取到最大值，那么

(1) $x_i\leqslant 4\ (i=1, 2, \cdots, n)$. 若不然，有某个 $x_j>4$，由于 $2+(x_j-2)=x_j$，$2(x_j-2)=x_j+(x_j-4)>x_j$，可用 2 和 x_j-2 代替 x_j 使和不变而积增大，矛盾！

(2) $x_i\geqslant 2\ (i=1, 2, \cdots, n)$. 若不然，有某个 $x_k=1$，由 $x_k\cdot x_i=x_i<x_i+x_k$，可用 x_k+x_i 代替 x_kx_i 而使和不变且积变大，矛盾！

(3) 因为 $4=2+2=2\times 2$，故 $x_j=4$ 可换为两个 2 而使 u 不变.

(4) 设 $u=2^\alpha\cdot 3^\beta$. 若 $\alpha>3$，则 $u=2^3\cdot 2^{\alpha-3}\cdot 3^\beta<3^2\cdot 2^{\alpha-3}\cdot 3^\beta$，且 $2+2+2=3+3$ 和不改变，u 却变大了，矛盾！

综上，因为 $2011=3\times 670+1$，故 $u_{\max}=2^2\times 3^{669}$.

一般地，若和为 m，则

$$u_{\max}=\begin{cases}3^s,\ m=3s;\\ 2^2\cdot 3^{s-1},\ m=3s+1;\\ 2\cdot 3^s,\ m=3s+2.\end{cases}$$

例 12 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个不减的正整数序列，对于 $m\geqslant 1$，定义 $b_m=\min\{n, a_n\geqslant m\}$，即 b_m 是使 $a_n\geqslant m$ 的 n 的最小值. 若已知 $a_{19}=85$，求

$$a_1+a_2+\cdots+a_{19}+b_1+b_2+\cdots+b_{85} \qquad ①$$

的最大值.

解 若存在 i，使得 $a_i<a_{i+1}(1\leqslant i\leqslant 18)$，则进行如下调整：$a_i'=a_i+1$，$a_j'=a_j(j\neq i)$，并将调整后的 b_j 记为 b_j' $(j=1, 2, \cdots, 85)$.

由定义可知 $b_{a_i+1}=i+1$，$b'_{a_i+1}=i=b_{a_i+1}-1$，$b_j'=bj$ $(j\neq a_i+1)$.

因此，上述调整使 b_{a_i+1} 减少了 1 而其余的 b_j 不动，故此调整保持①的值不变.

这样，可以经过一系列调整，使 $a_1=a_2=\cdots=a_{19}=85$ 并且保持 ① 的值不变，但此时 $b_1=b_2=\cdots=b_{85}=1$，于是所求①式的最大值为

$$19\times 85+1\times 85=20\times 85=1700.$$

习 题 8

1 设 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，$x+y+z=1$，求 $S=2x^2+y+3z^2$ 的最大值和最小值.

2 求证：在$\triangle ABC$ 中，对 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 2$ $(i=1, 2, 3)$，有

$$\sin\lambda_1 A+\sin\lambda_2 B+\sin\lambda_3 C\leqslant 3\sin\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C}{3}.$$

3 已知 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 都非负，且 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$. 求

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$$

的最大值.

4 设 $a, b, c, d\geqslant 0$，且 $a+b+c+d=4$. 求证：

$$bcd+cda+dab+abc-abcd\leqslant\frac{1}{2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

5 已知 x_i 是非负实数，$i=1, 2, 3, 4$. $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. 记 $S=1-$

$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 - 6\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} x_i x_j x_k$，求 S 的取值范围.

6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个非负实数($n>2$，$n\in\mathbf{N}^*$)，且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n,\ \sum_{i=1}^{n} i x_i = 2n-2.$$

求 $x_1+4x_2+\cdots+n^2x_n$ 的最大值.

7 对于满足条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，求 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 的最大值.

8 设 $a_1, a_2, a_3\geqslant 0$，求证：

$$a_1+a_2+a_3+3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\geqslant 2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}).$$

9 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是 10 个两两不同的正整数，和为 2002，试求 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_1$ 的最小值.

10 非负实数 a、b、c 满足：$ab+bc+ca=1$，求 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ 的最小值.

11 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2001}$ 都是非负实数，满足：

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_{2001}=2$；

(2) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{2000}a_{2001}+a_{2001}a_1=1$.

求 $S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2001}^2$ 的最值.

12 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均不小于 0，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求和式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i+x_j)$$

的最大值.

13 设 n 为一个固定的整数，$n\geqslant 2$.

(1) 确定最小的常数 c，使得不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2)\leqslant c\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Big)^4$$

对所有的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立；

(2) 对于这个常数 c，求等号成立的条件.

14 记 $S=\left\{\frac{l}{1997}\,\middle|\, l=0, 1, 2, \cdots, 1996\right\}$. S 中三个数 x、y、z 满足：$x^2+y^2-z^2=1$. 求 $x+y+z$ 的最小值和最大值.

9 一些特殊的证明方法和技巧

不等式形形色色，变化万千，在前面几节里我们已经学过了不少证明方法和技巧，这一章我们再学习几种证题方法，以供读者借鉴.

9.1 断开求和法

断开求和法是指把和式分为两部分，分别用不同的估计方法处理，最后再结合起来给出证明. 这种方法的技巧性很强，请读者认真体会.

例 1 求证：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k}\left\{\dfrac{n}{k}\right\}\right| \leqslant 3\sqrt{n}\ (n \in \mathbf{N}_{+})$.

分析 对于单调递降、正负交错的数列，我们可以采用下列处理方法：

设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_k > 0$，则有

$$-a_1 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots < a_1. \qquad ①$$

①是不难证明的.

回到原题，估计左边出现了两种可能的方法：

(1) 平凡估计每一项，都放到最大，则左边$\leqslant n$.

(2) 利用①可得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\left\{\frac{n}{k}\right\}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n}{k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\left[\frac{n}{k}\right]\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\cdot\frac{n}{k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\cdot\left[\frac{n}{k}\right]\right| \\ &\leqslant n+n=2n. \qquad ②\end{aligned}$$

我们发现(2)估计太宽松，原因关键在于②中的第一项，也就是①中的 a_1 太大了，但是(1)估计的项数太多也不合适，故我们应考虑断开求和.

证明 $\left|\sum\limits_{k=A}^{n}(-1)^{k}\dfrac{n}{k} - \sum\limits_{k=A}^{n}(-1)^{k}\left[\dfrac{n}{k}\right]\right|$

$$\leqslant \left|\sum_{k=A}^{n}(-1)^k\cdot\frac{n}{k}\right|+\left|\sum_{k=A}^{n}(-1)^k\left[\frac{n}{k}\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{n}{A}+\left[\frac{n}{A}\right]\leqslant\frac{2n}{A}.\text{（}A\text{ 为参数）}$$

$$\text{故原式左边}\leqslant\left|\sum_{k\leqslant A-1}(-1)^k\left\{\frac{n}{k}\right\}\right|+\left|\sum_{k\geqslant A}(-1)^k\left\{\frac{n}{k}\right\}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k\leqslant A-1}(-1)^k\left\{\frac{n}{k}\right\}\right|+\left|\sum_{k\geqslant A}(-1)^k\frac{n}{k}\right|+\left|\sum_{k\geqslant A}(-1)^k\left[\frac{n}{k}\right]\right|$$

$$\leqslant(A-1)+\frac{2n}{A}.$$

其中最后一步分别用了(1)和(2)两种估计方法.

取 $A=[\sqrt{2n}]+1$，则原式左边 $<\sqrt{2n}+\sqrt{2n}<3\cdot\sqrt{n}$.

例 2 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n(n\geqslant 3)$ 满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，且

$$2a_k\leqslant a_{k-1}+a_{k+1},\ k=2, 3, \cdots, n-1.$$

求最小的 $\lambda(n)$，使得对所有 $k\in\{1, 2, \cdots, n\}$，都有

$$|a_k|\leqslant\lambda(n)\cdot\max\{|a_1|, |a_n|\}.$$

（2009 年西部数学奥林匹克）

解 首先，取 $a_1=1$, $a_2=-\frac{n+1}{n-1}$, $a_k=\frac{n+1}{n-1}+\frac{2n(k-2)}{(n-1)(n-2)}$, $k=3, 4, \cdots, n$，则满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 及 $2a_k\leqslant a_{k-1}+a_{k+1}$, $k=2, 3, \cdots, n-1$. 此时

$$\lambda(n)\geqslant\frac{n+1}{n-1}.$$

下证当 $\lambda(n)=\frac{n+1}{n-1}$ 时，对所有 $k\in\{1, 2, \cdots, n\}$，都有

$$|a_k|\leqslant\lambda(n)\cdot\max\{|a_1|, |a_n|\}.$$

因为 $2a_k\leqslant a_{k-1}+a_{k+1}$，所以 $a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}$，于是

$$a_n-a_{n-1}\geqslant a_{n-1}-a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant a_2-a_1,$$

所以

$$\begin{aligned}(k-1)(a_n-a_1)&=(k-1)[(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)]\\&\geqslant(n-1)[(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\cdots+(a_2-a_1)]\\&=(n-1)(a_k-a_1),\end{aligned}$$

故

$$a_k\leqslant\frac{k-1}{n-1}(a_n-a_1)+a_1=\frac{1}{n-1}[(k-1)a_n+(n-k)a_1].\quad ①$$

同①可得，对固定的 k，$k\neq 1$，n，当 $1\leqslant j\leqslant k$ 时，

$$a_j\leqslant\frac{1}{k-1}[(j-1)a_k+(k-j)a_1],$$

当 $k\leqslant j\leqslant n$ 时，

$$a_j\leqslant\frac{1}{n-k}[(j-k)a_n+(n-j)a_k],$$

所以
$$\sum_{j=1}^{k}a_j\leqslant\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}[(j-1)a_k+(k-j)a_1]=\frac{k}{2}(a_1+a_k),$$

$$\sum_{j=k}^{n}a_j\leqslant\frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n}[(j-k)a_n+(n-j)a_k]=\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n),$$

相加得

$$\begin{aligned}a_k&=\sum_{j=1}^{k}a_j+\sum_{j=k}^{n}a_j\leqslant\frac{k}{2}(a_1+a_k)+\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n)\\&=\frac{k}{2}a_1+\frac{n+1}{2}a_k+\frac{n+1-k}{2}a_n,\end{aligned}$$

所以
$$a_k\geqslant-\frac{1}{n-1}[ka_1+(n+1-k)a_n].\qquad ②$$

由①②得

$$\begin{aligned}|a_k|&\leqslant\max\left\{\frac{1}{n-1}|(k-1)a_n+(n-k)a_1|,\frac{1}{n-1}|ka_1+(n+1-k)a_n|\right\}\\&\leqslant\frac{n+1}{n-1}\max\{|a_1|,|a_n|\},\ k=2,3,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

综上所述，$\lambda(n)_{\min}=\dfrac{n+1}{n-1}$.

例 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，记 k_i 是满足 $\dfrac{1}{2^i}\leqslant a_j<\dfrac{1}{2^{i-1}}$ 的 a_j 的个数，求证：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\leqslant\sqrt{2}+\sqrt{\log_2 n}.$$

分析 我们已经知道，$k_1+k_2+\cdots+k_l=n$（l 已知），由(1)很自然地想到对原式的左端用 Cauchy 不等式来估计：

$$\left(\sum_{i=1}^{l}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{l}k_i\cdot\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{2^i}\leqslant n\cdot 1=n.\qquad ①$$

故 $$\text{左边}\leqslant\sqrt{n}.$$

（注意：若用最平凡的估计方法：$\sum\limits_{i=1}^{l}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{l}\left(k_i+\frac{1}{2^i}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，则得到一个更弱的结果.）

条件应该怎么用呢？

把每个 $a_j\in\left[\frac{1}{2^i},\frac{1}{2^{i-1}}\right)$ 均缩小到 $\frac{1}{2^i}$，得不等式

$$\sum_{i=1}^{l}k_i\cdot\frac{1}{2^i}\leqslant 1.$$

于是得到第二种估计方法：

（2） $$\left(\sum_{i=1}^{l}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{l}1\cdot\sum_{i=1}^{l}\frac{k_i}{2^i}\leqslant l\leqslant n,\qquad ②$$

也有左边 $\leqslant\sqrt{n}$，问题出在①的 $\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{2^i}$ 与②的 $\sum\limits_{i=1}^{l}1$ 中，故我们应该考虑断开求和.

证明 $$\sum_{i=1}^{l}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}=\sum_{i\leqslant t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}+\sum_{i>t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}},$$

其中 $$\left(\sum_{i\leqslant t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{t}1\cdot\sum_{i=1}^{t}\frac{k_i}{2^i}\leqslant t,$$

即 $$\sum_{i\leqslant t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\leqslant\sqrt{t},$$

而 $$\left(\sum_{i>t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=t+1}^{l}k_i\cdot\sum_{i=t+1}^{l}\frac{1}{2^i}\leqslant n\cdot\frac{1}{2^t},$$

故 $$\sum_{i>t}\sqrt{\frac{k_i}{2^i}}\leqslant\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}},$$

因此原不等式左边 $\leqslant\sqrt{t}+\frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{t}{2}}}$.

取 $t=[\log_2 n]$，即有原不等式成立.

9.2 枚举法

在应用枚举法证题时一定要细心，不要漏了可能的情况.

例 4　设正整数 $n\geqslant 2$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，求证：存在某个 i，$1\leqslant i\leqslant n-1$，使得不等式

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n)$$

成立.

证明　令 $m=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且设 $x_r=m$，$0\leqslant m\leqslant 1$，分两种情况讨论：

(1) 如果 $x_2\leqslant\frac{1}{2}(m+1)$，取 $i=1$，就有

$$\begin{aligned}x_1(1-x_2)&\geqslant x_1\left(1-\frac{1+m}{2}\right)=\frac{1}{2}x_1(1-m)\\&\geqslant\frac{1}{2}x_1(1-x_n)\ (\text{利用了 } m\leqslant x_n\leqslant 1)\\&\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).\end{aligned}$$

(2) 如果 $x_2>\frac{1}{2}(m+1)$，则有以下两种可能：

(i) $x_1=m$，$x_2>\frac{1}{2}(1+m)$，$\cdots$，$x_n>\frac{1}{2}(1+m)$，设 x_k 是 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中的最小值. 取 $i=k-1$，就有

$$x_{k-1}(1-x_k)\geqslant x_1(1-x_n)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n),$$

其中第一个不等号利用了 $x_{k-1}\geqslant x_1$ 及 $1-x_k\geqslant 1-x_n$.

(ii) 存在某个 t，$3\leqslant t\leqslant n$，使得 $x_t=m\leqslant\frac{1}{2}(1+m)$.

于是一定存在某个正整数 i，$2\leqslant i\leqslant n-1$，满足：

$$x_i>\frac{1}{2}(1+m),\ x_{i+1}\leqslant\frac{1}{2}(1+m).$$

对于这个 i，有

$$\begin{aligned}x_i(1-x_{i+1})&>\frac{1}{2}(1+m)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(1+m)\cdot\frac{1}{2}(1-m)\\&=\frac{1}{4}(1-m^2)\geqslant\frac{1}{4}(1-m)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).\end{aligned}$$

综上所述，结论成立.

例 5 已知 x_1、x_2、x_3、x_4、y_1、y_2 满足：

$$y_2 \geqslant y_1 \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant y_1+y_2,$$

求证：$x_1x_2x_3x_4 \geqslant y_1y_2$.

证明 保持 y_1+y_2 不变，将 y_1 调大至 y_1、y_2 相等，且相等于 $\frac{y_1+y_2}{2}$，则 y_1y_2 在此过程中增大，因此我们只需对 $y_1=y_2=y$ 的情况作出证明.

即已知
$$y \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 2y,$$

要证明：
$$x_1x_2x_3x_4 \geqslant y^2.$$

下面分三种情况讨论：

(1) $y \leqslant 4$，显然 $x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^4 \geqslant y^2$.

(2) $4 < y \leqslant 6$. 保持 x_1+x_4，x_2+x_3 不变，将 x_1、x_2 调整为 2，接着保持 x_3+x_4 不变，再将 x_3 调整为 2.

由于 $x_1x_2x_3x_4$ 在调整过程中减小，故只需证明：

$$2^3 \cdot x_4 \geqslant y^2.$$

而
$$2^3 \cdot x_4 \geqslant 8(2y-6),$$

故只需证明 $8(2y-6) \geqslant y^2$，即 $(y-4)(y-12) \leqslant 0$.

由于 $4 < y \leqslant 6$，上式显然成立.

(3) $y > 6$. 保持和 x_1+x_4、x_2+x_3 不变，分情况作调整：

(i) 如果这两个和均 $\geqslant y+2$，则将 x_4、x_3 调整为 y，此时结论显然成立.

(ii) 如果两个和中只有 1 个 $\geqslant y+2$. 不妨设 $x_1+x_4 \geqslant y+2$，则将 x_4 调整为 y，x_2 调整为 2，再保持 x_1+x_3 不变，将 x_1 调整为 2，则 $x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^2y(y-4) > y^2$，结论成立.

(iii) 如果两个和都 $< y+2$，则将 x_1、x_2 调整为 2，再保持 x_3+x_4 不变，将其中较大的那个调整为 y，同样有 $x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^2y(y-4) > y^2$，故结论成立.

例 6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 3)$ 是实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1} \leqslant \left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2,$$

其中 $a_{n+1}=a_1$，$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$，$m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

（2011 年中国数学奥林匹克）

证明 若 $n=2k$（k 为正整数），则

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2\leqslant n\times(M-m)^2,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\frac{n}{2}(M-m)^2=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2.$$

若 $n=2k+1$（k 为正整数），则对于循环排列的 $2k+1$ 个数，必有连续三项递增或递减（因为 $\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)=\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})^2\geqslant0$，所以不可能对于每一个 i，都有 a_i-a_{i-1} 与 $a_{i+1}-a_i$ 异号），不妨设为 a_1、a_2、a_3，则有

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2\leqslant(a_1-a_3)^2,$$

从而

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2,$$

这就将问题化为了 $2k$ 个数的情形. 我们有

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2\leqslant2k(M-m)^2,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\leqslant k(M-m)^2=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2,$$

证毕.

9.3 加“序”条件

在无序的不等式中引入“序关系”，可以为我们增加有利条件，帮助证题.

例 7 （1）若 x、y、z 为不全相等的正整数，求 $(x+y+z)^3-27xyz$ 的最小值；

（2）若 x、y、z 为全不相等的正整数，求 $(x+y+z)^3-27xyz$ 的最小值.

解 （1） $(x+y+z)^3-27xyz$

$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2z+z^2x)+3(xy^2+yz^2+zx^2)+6xyz-27xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3(x^2y+y^2z+$

$$\begin{aligned}&z^2x+xy^2+yz^2+zx^2-6xyz)\\&=\frac{x+y+z}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]+3[x(y-z)^2+\\&y(z-x)^2+z(x-y)^2].\end{aligned}$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，则 $z\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，$x\geqslant 2$.

于是
$$\begin{aligned}&(x+y+z)^3-27xyz\\&\geqslant\frac{1+1+2}{2}\cdot[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]+3[(y-z)^2+\\&(z-x)^2+(x-y)^2]\\&=5\cdot[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\\&\geqslant 10.\end{aligned}$$

因此 $(x+y+z)^3-27xyz\geqslant 10$，且等号当 $(x,y,z)=(2,1,1)$ 时取到.

(2) 不妨设 $x>y>z$，则 $z\geqslant 1$，$y\geqslant 2$，$x\geqslant 3$.

由第(1)小题，

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3-27xyz&\geqslant\frac{6}{2}\cdot[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]+3\cdot[3(y\\&-z)^2+2(z-x)^2+(x-y)^2]\\&\geqslant 3\cdot(1^2+1^2+2^2)+3\cdot(3\cdot1^2+2\cdot2^2+1^2)\\&=54.\end{aligned}$$

因此 $(x+y+z)^3-27xyz\geqslant 54$，且等号当 $(x,y,z)=(3,2,1)$ 时取到.

说明 第(1)小题等价于下列命题：

对于不全相等的正整数 a、b、c，有

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc+\frac{10}{27}}.\qquad ①$$

当然，①也可以用以下方法(增量代换)来证明：

证明 不妨设 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant c$，$b=a+x$，$c=a+y$. 则 x，$y\geqslant 0$，且 x、y 不全为 0 $(x\leqslant y)$.

此时，①式等价于证明：

$$9a(x^2-xy+y^2)+(x+y)^3\geqslant 10.$$

由于 $a\geqslant 1$，$x^2-xy+y^2\geqslant 1$，$x+y\geqslant 1$，上式显然成立，并且等号当 $a=1$，$x^2-xy+y^2=1$，$x+y=1$，即 $(a,x,y)=(1,0,1)$ 时取到.

例 8 设 a_1，a_2，… 为无限实数序列，满足：存在一个实数 c，对所有 i 有

$0 \leqslant a_i \leqslant c$，并且 $|a_i - a_j| \geqslant \dfrac{1}{i+j}$ 成立（对所有 $i \neq j$），求证：$c \geqslant 1$.

证明 对固定的 $n \geqslant 2$，设序列前 n 项可排序为

$$0 \leqslant a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < \cdots < a_{\sigma(n)} \leqslant c,$$

其中，$\sigma(1)$，$\sigma(2)$，$\sigma(3)$，…，$\sigma(n)$ 是 1，2，3，…，n 的一个排列.

于是，
$$\begin{aligned} c &\geqslant a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)} \\ &= (a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)}) + (a_{\sigma(n-1)} - a_{\sigma(n-2)}) + \cdots + (a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(1)}) \\ &\geqslant \frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \frac{1}{\sigma(n-1)+\sigma(n-2)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)}. \end{aligned} \tag{①}$$

利用 Cauchy 不等式可得：

$$\left(\frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)}\right)((\sigma(1)+\sigma(n-1)) + \cdots + (\sigma(2)+\sigma(1))) \geqslant (n-1)^2.$$

所以
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma(n)+\sigma(n-1)} + \cdots + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(1)} \\ \geqslant &\frac{(n-1)^2}{2(\sigma(1)+\cdots+\sigma(n)) - \sigma(1) - \sigma(n)} \\ = &\frac{(n-1)^2}{n(n+1) - \sigma(1) - \sigma(n)} \\ \geqslant &\frac{(n-1)^2}{n^2+n-3} \geqslant \frac{n-1}{n+3}. \end{aligned}$$

故由①式知 $c \geqslant 1 - \dfrac{4}{n+3}$ 对所有 $n \geqslant 2$ 成立，因此 $c \geqslant 1$，结论成立.

9.4 一些非“对称”不等式的处理方法

我们经常会遇到一些不等式题，其变元的地位不尽相同，我们在处理时就不能再用“平均”的方法了，而了解等号成立的条件是大有益处的.

例 9 设 $a \leqslant b < c$ 是直角三角形 ABC 的三边长，求最大的常数 M，使得 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{M}{a+b+c}$ 恒成立.

分析 我们从熟悉的等腰直角三角形入手，这时，仅 a 与 b 地位相同，在证明过程中应注意这一点.

解 当 $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时，有

$$M \leqslant 2+3\sqrt{2}.$$

下面证明
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{2+3\sqrt{2}}{a+b+c},$$
即
$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqslant (2+3\sqrt{2})abc$$
恒成立.

$$\begin{aligned}
\text{上式左端} &= c(a^2+b^2)+\left(a^2b+b\cdot\frac{c^2}{2}\right)+\left(ab^2+\frac{c^2}{a\cdot 2}\right)+\frac{1}{2}c^2(a+b)\\
&\geqslant 2abc+\sqrt{2}abc+\sqrt{2}abc+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot(a+b)\\
&\geqslant 2abc+2\sqrt{2}abc+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{ab}\\
&=(2+3\sqrt{2})abc.
\end{aligned}$$

故
$$M_{\max}=2+3\sqrt{2}.$$

例 10　实数 a 使得对于任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，不等式
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5)$$
都成立，求 a 的最大值.（2010 年上海市高中数学竞赛）

解　a 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为当 $x_1=1$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=2$，$x_4=\sqrt{3}$，$x_5=1$ 时，得 $a \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$.

又由于当 $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，不等式恒成立.

事实上

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 &= \left(x_1^2+\frac{x_2^2}{3}\right)+\left(\frac{2x_2^2}{3}+\frac{x_3^2}{2}\right)+\left(\frac{x_3^2}{2}+\frac{2x_4^2}{3}\right)+\left(\frac{x_4^2}{3}+x_5^2\right)\\
&\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}x_1x_2+\frac{2}{\sqrt{3}}x_2x_3+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3x_4+\frac{2}{\sqrt{3}}x_4x_5,
\end{aligned}$$

所以，a 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 11　已知 a、b、c 为正数，$a+b+c=10$，且 $a \leqslant 2b$，$b \leqslant 2c$，$c \leqslant 2a$，求 abc 的最小值.

解　令
$$x=2b-a,\ y=2c-b,\ z=2a-c,$$

则 $$x+y+z=10,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,$$

且 $$a=\frac{x+2y+4z}{7},\ b=\frac{y+2z+4x}{7},\ c=\frac{z+2x+4y}{7},$$

故 $$abc=\frac{1}{343}\cdot[(x+2y+4z)(y+2z+4x)(z+2x+4y)],$$

而
$$\begin{aligned}&(x+2y+4z)(y+2z+4x)(z+2x+4y)\\=&(10+y+3z)(10+z+3x)(10+x+3y)\\=&1000+400(x+y+z)+130(xy+yz+zx)+30(x^2+y^2+z^2)+(3y^2z\\&+3x^2y+9xy^2+3xz^2+9yz^2+9x^2z+28xyz)\\=&1000+4000+30(x+y+z)^2+[70(xy+yz+zx)+3(y^2z+x^2y+\\&xz^2)+9(xy^2+yz^2+x^2z)+28xyz]\\\geqslant&8000.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $x=y=0$，$z=10$ 时取到，此时 $a=\frac{40}{7}$，$b=\frac{20}{7}$，$c=\frac{10}{7}$.

故 $abc_{\min}=\frac{8000}{343}$.

例 12 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，$abcd=1$，令 $T=a(b+c+d)+b(c+d)+cd$.

(1) 求 a^2+b^2+T 的最小值；

(2) 求 $a^2+b^2+c^2+T$ 的最小值.

分析 对(1)，我们把 a、b 放在一起，c、d 放在一起考虑，对 T 作适当变形. 对(2)，则应看到 a、b、c 的地位是相同的.

解 (1)
$$\begin{aligned}a^2+b^2+T&=a^2+b^2+(a+b)(c+d)+ab+cd\\&\geqslant 2ab+2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}+ab+cd\\&=4+3ab+cd\geqslant 4+2\cdot\sqrt{3abcd}\\&=4+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

当 $a=b$，$c=d$，$3ab=cd$，即 $a=b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$，$c=d=3^{\frac{1}{4}}$ 时等号成立.

所以，a^2+b^2+T 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.

(2)
$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+T&=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)d+ab+bc+ca\\&\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{abc}\cdot d+3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}\\&=3\cdot[2\sqrt[3]{(abc)^2}+\sqrt[3]{abc}\cdot d]\\&\geqslant 3\cdot 2\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{(abc)^2}\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot d}\end{aligned}$$

$$= 6\sqrt{2}.$$

等号当 $a=b=c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$，$d=2^{\frac{3}{4}}$ 时取到.

所以，$a^2+b^2+c^2+T$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

习 题 9

1 设 $n \geqslant a_1 > \cdots > a_k \geqslant 1$，满足：对任意 i、j，有 $[a_i, a_j] \leqslant n$ 成立. 求证：$k \leqslant 2\sqrt{n}+1$.

2 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 及 $n \in \mathbf{N}_+$，求证：

(1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi}$；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|\sin kx|}{k} \geqslant |\sin nx|$.

3 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 均为正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} \leqslant n-1.$$

4 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负实数，且满足：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}(x_ix_j)^2=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(1) 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的最大值；

(2) 求所有正整数 n，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$.

5 已知 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，且 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant 3+Q,$$

其中 $Q=|(a-1)(b-1)(c-1)|$.

6 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，且 $abc \leqslant 1$，求证：

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant Q+a+b+c,$$

其中 $Q=|(a-1)(b-1)(c-1)|$.

7 在平面上，将半径分别为 1、2、3、4、5、6 的六个圆，沿直线 l 排成一串（即六圆与 l 外切于六点，切点相邻的两圆外切）. 求首尾两圆外公切线长

的最值.

8 有 5 个正数满足条件：

(1) 其中一数为$\frac{1}{2}$；

(2) 从这 5 个数中任取 2 个数，在剩下的 3 个数中必有一个数，与前面取出的两数之和为 1.

求这 5 个数.

9 已知 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，$x+y+z=1$，求 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2$ 的最大值.

10 设 x，y，$z\geqslant 0$，且 $x+y+z=1$，求 $x^2y+y^2z+z^2x$ 的最大值和最小值.

11 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，求证：

$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|<\frac{1}{22}.$$

12 求最大常数 k，使 $\frac{kabc}{a+b+c}\leqslant(a+b)^2+(a+b+4c)^2$ 对所有正实数 a，b，c 成立.

13 (1) 求证：对任意实数 p、q，有 $p^2+q^2+1>p(q+1)$；

(2) 求最大的实数 b，使得对任意实数 p、q，都有 $p^2+q^2+1>bp(q+1)$；

(3) 求最大的实数 c，使得对任意整数 p、q，都有 $p^2+q^2+1>cp(q+1)$.

14 (1) 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，$n\geqslant 2$ 为整数，求证：

$$\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

(2) 设 a、b、c 为三角形的三边长，求最小正实数 k，使得：

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}+\sqrt[3]{b^3+c^3}+\sqrt[3]{c^3+a^3}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}<k$$

恒成立.

习题解答

习 题 1

1. 记 $a=x+y+z$, $b=xy+yz+zx$,则 $x^2+y^2+z^2=a^2-2b$,故原式左边－右边 $=2b^2(a^2-3b)=b^2\cdot[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0$.

2. 我们只需证明：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

当 $n=1$ 时,上式显然成立,当 $n\geqslant 2$ 时,由二项式定理,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+2,$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}&=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+2\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\\&\quad\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+2,\end{aligned}$$

于是,显然有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

3. 由于 $A_n>0$, $B_n>0$,所以只需证 $A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n>0$,而

$$\begin{aligned}&A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n\\&=(x_n\cdot a^n+A_{n-1})B_{n-1}-A_{n-1}(x_nb^n+B_{n-1})\\&=x_n(a^nB_{n-1}-b^nA_{n-1})\\&=x_n[x_{n-1}(a^nb^{n-1}-a^{n-1}b^n)+x_{n-2}(a^nb^{n-2}-a^{n-2}b^n)+\cdots+x_0(a^n-b^n)].\end{aligned}$$

因为 $a>b$,故当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时,$a^n\cdot b^{n-k}>a^{n-k}\cdot b^n$,并且 $x_i\geqslant 0$ $(i=0,1,2,\cdots,n-2)$,x_{n-1}, $x_n\geqslant 0$,于是 $A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n>0$.

4. 反复利用 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$,有

$$a^8+b^8+c^8\geqslant a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\geqslant a^2b^4c^2+b^2c^4a^2+c^2a^4b^2$$

$$=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2b^2c^2(ab+bc+ca).$$

两边同除以 $a^3b^3c^3$ 即得原不等式成立.

5. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2\leqslant(100-a_2)^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2$

$$\leqslant 100^2-(a_1+a_2+\cdots+a_{100})a_2+2a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2$$

$$=100^2-a_2(a_1-a_2)-a_3(a_2-a_3)-\cdots-a_{100}(a_2-a_{100})$$

$$\leqslant 100^2.$$

等号成立，当 $a_1=100$，$a_i=0\ (i>1)$ 或者 $a_1=a_2=a_3=a_4=50$，$a_j=0\ (j>4)$ 时.

6. 先证明一个引理：

引理：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个大于 1 的实数，$A=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，则 $\prod_{i=1}^{n}\frac{(x_i+1)}{(x_i-1)}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n$.

证明：不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则 $x_1\leqslant A\leqslant x_n$.

用通分不难证明：$\frac{(x_1+1)(x_n+1)}{(x_1-1)(x_n-1)}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\cdot\left(\frac{\frac{x_1x_n}{A}+1}{\frac{x_1x_n}{A}-1}\right)$.

于是，$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\left(\frac{\frac{x_1x_n}{A}+1}{\frac{x_1x_n}{A}-1}\right)\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$.

再考虑剩下的 $n-1$ 个实数：$x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 和 x_1x_n，它们的几何平均值仍为 A，故这 $n-1$ 个数中亦存在最大、最小值，且最大值不小于 A，最小值不大于 A. 采取同上的做法，经过 $n-1$ 次即可得：$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n$.

下面证明原命题. 令 $x_i=r_is_it_iu_iv_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$，由引理可得

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\geqslant\left(\frac{B+1}{B-1}\right)^n,$$

其中 $B=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(r_is_it_iu_iv_i)}$. 因此只需证明：$\frac{B+1}{B-1}\geqslant\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}$，而

$$RSTUV=\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\right)$$

$$\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}r_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}s_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}t_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}u_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}v_i}=B,$$

故 $(B+1)(RSTUV-1)-(B-1)(RSTUV+1)=2(RSTUV-B)\geqslant 0$.

所以结论成立. 原不等式得证.

注：我们也可以用 Jensen 不等式来证.

首先，不难证明，对任意 a，$b>1$，有 $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{b+1}{b-1}\right)\geqslant\left[\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right]^2$，故函数 $y=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸函数，于是

$$\prod_{i=1}^n\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n r_is_it_iu_iv_i}+1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n r_is_it_iu_iv_i}-1}\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n.$$

7. 记 $T=x_1x_2\cdots x_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$. 由平均不等式 $\frac{T}{k}\geqslant T^{\frac{1}{k}}$，$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1}\geqslant k\cdot T^{\frac{n-1}{k}}$. 因此，只需证明：$T^{\frac{n-1}{k}}\geqslant n$. 而 $\frac{T}{k}\geqslant T^{\frac{1}{k}}$ 等价于 $T^{\frac{n-1}{k}}\geqslant k^{\frac{n-1}{k-1}}$，故只需证明：$k^{\frac{n-1}{k-1}}\geqslant n$，即 $k\geqslant n^{\frac{k-1}{n-1}}$. 事实上，$k=\frac{(k-1)n+(n-k)\cdot 1}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{n^{k-1}\cdot 1^{n-k}}=n^{\frac{k-1}{n-1}}$，因此结论成立.

8. 如果我们能证明：$\frac{27}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\geqslant(ab+bc+ca)^2$，则结论成立. 令 $S_1=a+b+c$，$S_2=ab+bc+ca$，$S_3=abc$. 问题转化为去证明：$27(S_1S_2-S_3)^2\geqslant 64S_2^3$.

分两种情况加以讨论：

(1) 若 a、b、c 都是非负实数，则

$$27(S_1S_2-S_3)^2\geqslant 27\left(S_1S_2-\frac{1}{9}S_1S_2\right)^2=\frac{64}{3}S_1^2S_2^2\geqslant 64S_2^3.$$

(2) 若 a、b、c 中至少有一个为负数，由对称性，不妨假设 $a<0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$. 设 $S_2>0$（否则命题显然成立）. 此时 $S_1>0$，$S_3<0$，故

$$\begin{aligned}&27(S_1S_2-S_3)^2-64S_2^3>27S_1^2S_2^2-64S_2^3\\&=S_2^2\cdot(27S_1^2-64S_2)\\&=S_2^2\cdot[27a^2+22(b^2+c^2)+5(b-c)^2-10a(b+c)]\\&>0.\end{aligned}$$

题中等号成立，当且仅当 $a=b=c$.

9. 考虑 $S=\sum\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}|(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n)|^2$

$$= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n} (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n)(\overline{a}_1\varepsilon_1 + \overline{a}_2\varepsilon_2 + \cdots + \overline{a}_n\varepsilon_n)$$

$$= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n} (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 + \sum_{i\neq j} a_i\overline{a}_j\varepsilon_i\varepsilon_j).$$

不妨取 $|a_i| = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$,则

$$S = n \cdot 2^n + \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n} \sum_{i\neq j} a_i\overline{a}_j\varepsilon_i\varepsilon_j$$
$$= n \cdot 2^n + \sum_{i\neq j} a_i\overline{a}_j \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n} \varepsilon_i\varepsilon_j$$
$$= n \cdot 2^n.$$

现要求 $n^{\frac{2}{3}} > c \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n} |\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n|$,只需 $c \cdot \sqrt{\frac{S}{2^n}} = c \cdot \sqrt{n} \leqslant n^{\frac{2}{3}}$,即 $n^{\frac{1}{6}} \geqslant c$,故取 $n \geqslant c^6$ 即可.

10. 设 $\sqrt{u} = a \cdot \sqrt{\sin\theta}$，$\sqrt{v} = b \cdot \sqrt{\cos\theta}$,则条件转化为:$\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} = 1$，$u$、$v \geqslant 0$,利用 Cauchy 不等式,

$$y = \sqrt{u} + \sqrt{v} \leqslant \sqrt{\left(\frac{u}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{v}{b^{\frac{4}{3}}}\right)(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}})}$$
$$\leqslant \sqrt{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}})} \cdot (a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}})}$$
$$= (a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}},$$

并且易求得等号成立的条件.

注:在求解过程中,幂次都可以用待定系数法来确定.

11. 记这 n 个实数为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 令 $x_i = \frac{y_i}{2}$,则 $|x_i| \leqslant 1$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. 要证明:$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{1}{3}n$.

用待定系数法:设 $x_i \leqslant \frac{1}{3} + \lambda x_i^3$. 令 $x = \cos\theta$,由三倍角公式易知 $\lambda = \frac{4}{3}$ 可使上式成立,从而原不等式获证.

12. 由于 $x_k \in [-1, 1]$,则 $0 \leqslant (1 + x_k)(Bx_k - 1)^4$,这里 B 是一个待定实数,展开,得:$B^4x_k^5 + (B^4 - 4B^3)x_k^4 + B^2(6 - 4B)x_k^3 + B(4B - 6)x_k^2 + (1 - 4B)x_k + 1 \geqslant 0$.

令 $B = \frac{3}{2}$,从上式得 $\frac{81}{16}x_k^5 - \frac{135}{16}x_k^4 + \frac{15}{2}x_k^2 - 5x_k + 1 \geqslant 0$. 对 k 从 1 到 n 求

和，即有

$$
\begin{aligned}
5\sum_{k=1}^{n}x_k &\leqslant n-\frac{135}{16}\sum_{k=1}^{n}x_k^4+\frac{15}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\\
&=n+\frac{15}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{9}{8}\sum_{k=1}^{n}x_k^4\right)\\
&\leqslant n+\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{9}n=\frac{8}{3}n,
\end{aligned}
$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\leqslant\frac{8}{15}n$.

13. 先证明 $a=0$ 时的情况. 此时，$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\leqslant 2\sum\limits_{i\neq j}|x_ix_j|$，于是 $2\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum\limits_{i\neq j}|x_ix_j|=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2$，结论成立.

当 $a\neq 0$ 时，令 $y_k=x_k-a$，则 y_1，y_2，…，y_n 算术平均值为 0，于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|\right)^2$，故原不等式成立.

14. 无妨设 $x+y+z=1$，则原不等式等价于

$$4x^3+4y^3+4z^3-4(x^2+y^2+z^2)+1\geqslant 3xyz.$$

又由于 $x^3+y^3+z^3=1+3xyz-3(xy+yz+zx)$，$x^2+y^2+z^2=1-2(xy+yz+zx)$，故原不等式等价于 $xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz\leqslant\frac{1}{4}$.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$，则 $x+y\geqslant\frac{2}{3}$，$z\leqslant\frac{1}{3}$. 设 $x+y=\frac{2}{3}+\delta$，$z=\frac{1}{3}-\delta$. 其中 $\delta\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$. 于是

$$
\begin{aligned}
xy+z(x+y)-\frac{9}{4}xyz &= xy+\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)-\frac{9}{4}xy\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\\
&=xy\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\delta\right)+\frac{2}{9}-\delta^2-\frac{1}{3}\delta\\
&\leqslant\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\delta\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\delta\right)+\frac{2}{9}-\delta^2-\frac{1}{3}\delta\\
&=\frac{3}{16}\delta^2(3\delta-1)+\frac{1}{4}\leqslant 0,
\end{aligned}
$$

因此结论成立.

15. 当 $n=2$ 时，$(a_1+a_2)^2-(a_1-a_2)^2=(b_1+b_2)^2-(b_1-b_2)^2$

而 $a_1-a_2\leqslant b_1-b_2$，故 $a_1+a_2\leqslant b_1+b_2$.

当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned}&2b_1+2b_2+2b_3-(a_1+a_2+a_3)\\=&b_1+2b_2+3b_3+(b_1-b_3)-a_2-2a_3-(a_1-a_3)\\\geqslant&b_1+2b_2+3b_3-a_2-2a_3 \qquad ①\\=&(b_1-b_3)+2b_2+4b_3-(a_2-a_3)-3a_3\\\geqslant&2b_2+4b_3-3a_3. \qquad ②\end{aligned}$$

(1) 若 $2b_3\geqslant a_3$，则 $2b_2+4b_3\geqslant 6b_3\geqslant 3a_3$，由 ② 知结论成立.

(2) 若 $b_2\geqslant a_2$，则 $b_1+2b_2\geqslant 3b_2\geqslant 3a_2\geqslant a_2+2a_3$，由 ① 知结论成立.

(3) 若 $2b_3<a_3$，$b_2<a_2$，则 $b_1>2a_1$，故 $2(b_1+b_2+b_3)>2b_1>4a_1>a_1+a_2+a_3$，结论仍成立.

对当 $n\geqslant 3$ 时的一般情况，无妨设 $b_1b_2\cdots b_n=1$.

如果 $a_1\leqslant n-1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant n(n-1)\leqslant(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，结论成立.

下设 $a_1>n-1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)a_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}(n-2i)a_i\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i+(n-2)(a_1-a_{n-1})-na_n\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i+(a_1-a_{n-1})-na_n\ (n\geqslant 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j)&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)b_i\\&=\sum_{i=1}^{n}[(n-1)b_i+(2-2i)b_i]\\&\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i-2b_2-2(n-1)b_n.\end{aligned}$$

因此，不妨设 $a_1-a_{n-1}-na_n+2b_2+2(n-1)b_n<0$，不然结论显然成立.

于是，有 $na_n>2(n-1)b_n+2b_2\geqslant 2nb_n$，故 $a_n>2b_n$. 又由 $a_1a_2\cdots a_n=1$ 得 $a_n\leqslant 1$，所以 $a_1-(n-1)a_n>(n-1)-(n-1)=0$. 故 $2b_2<a_{n-1}+a_n\leqslant 2a_{n-1}$，即 $b_2<a_{n-1}$.

因此，$b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n>2b_n\cdot b_2\cdot a_1a_2\cdots a_{n-2}$，即有 $b_1b_3b_4\cdots b_{n-1}>$

$2a_1a_2\cdots a_{n-2}$.

而 $b_3\leqslant b_2<a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$，$b_4\leqslant b_3<a_{n-2}\leqslant a_{n-3}$，…，$b_{n-1}\leqslant b_{n-2}<a_3\leqslant a_2$，则 $b_1>2a_1$.

所以 $(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}b_i>2(n-1)a_1>na_1\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(n\geqslant 3)$.

结论也成立.

16. 易见，此题等价于证明：$\sum\limits_{cyc}\dfrac{yz}{x(y+z)^2}\geqslant\dfrac{9}{4(x+y+z)}$.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，且 $x+y+z=1$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{4yz}{x(y+z)^2}&=\sum_{cyc}\frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{x(y+z)^2}\\&=\sum_{cyc}\frac{1}{x}-\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2}\\&=\sum_{cyc}\frac{1}{x}\cdot\sum_{cyc}x-\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2}\\&=9+\sum_{cyc}\left[\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}-\sqrt{\frac{y}{z}}\right]^2-\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2}\\&=9+\sum_{cyc}\left(\frac{(y-z)^2}{yz}-\frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2}\right)\\&=9+S,\end{aligned}$$

式中，$S=\sum\limits_{cyc}(y-z)^2\cdot\left(\dfrac{1}{yz}-\dfrac{1}{x(y+z)^2}\right)$.

由于 $x>\dfrac{1}{4}$，所以 $\qquad\dfrac{1}{yz}\geqslant\dfrac{4}{(y+z)^2}>\dfrac{1}{x(y+z)^2}$，

又由于 $$\frac{1}{xz}-\frac{1}{y(x+z)^2}\geqslant 0,$$

$$y(x+z)^2\geqslant xz(x+y+z),$$

$$x^2(y-z)+xz(y-z)+yz^2\geqslant 0,$$

因此 $$S\geqslant(x-y)^2\cdot\left(\frac{1}{xz}-\frac{1}{y(x+z)^2}+\frac{1}{xy}-\frac{1}{z(x+y)^2}\right),$$

而 $$\begin{aligned}&\frac{1}{xz}-\frac{1}{y(x+z)^2}+\frac{1}{xy}-\frac{1}{z(x+y)^2}\\=&\frac{(x+z)^2-x}{xy(x+z)^2}+\frac{(x+y)^2-x}{xz(x+y)^2}\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{(x+y)^2-x+(x+z)^2-x}{xy(x+z)^2}$$
$$=\frac{2x^2+2xy+2xz+y^2+z^2-2x(x+y+z)}{xy(x+z)^2}\geqslant 0,$$

于是结论成立.

17. 令 $x=\cot A$，$y=\cot B$，$z=\cot C$，由 $A+B+C=\pi$ 知，$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$，即 $xy+yz+zx=1$. 所以，欲证的不等式等价是

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant(x+y+z)(xy+yz+zx),$$

此即 $\quad x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0.$

由 Schur 不等式知原不等式成立.

18. 因为 $\sin(x-y)\sin(x+y)=\dfrac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$，

所以
$$\begin{aligned}&\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(a+b)\sin(a+c)\\=&\sin a(\sin^2 a-\sin^2 b)(\sin^2 a-\sin^2 c).\end{aligned}$$

令 $x=\sin^2 a$，$y=\sin^2 b$，$z=\sin^2 c$，则原不等式等价于

$$x^{\frac{1}{2}}(x-y)(x-z)+y^{\frac{1}{2}}(y-z)(y-x)+z^{\frac{1}{2}}(z-x)(z-y)\geqslant 0,$$

此即 Schur 不等式.

19. 由已知得： $\quad a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac\leqslant 2,$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{2ab+2}{(a+b)^2}&\geqslant\sum_{cyc}\frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac}{(a+b)^2}\\&=\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\\&=3+\sum_{cyc}\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\geqslant 6,\end{aligned}$$

其中最后一个不等号是利用了平均值不等式. 两边同时除以 2 即知原不等式成立.

20. 因为 $\dfrac{a^k}{a+b}+\dfrac{1}{4}(a+b)+\underbrace{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2}}_{k-2\text{个}\frac{1}{2}}\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\dfrac{a^k}{2^k}}=\dfrac{k}{2}a,$

所以 $$\frac{a^k}{a+b}\geqslant\frac{k}{2}a-\frac{1}{4}(a+b)-\frac{k-2}{2}.$$

同理可得 $\dfrac{b^k}{b+c}\geqslant\dfrac{k}{2}b-\dfrac{1}{4}(b+c)-\dfrac{k-2}{2}$，$\dfrac{c^k}{c+a}\geqslant\dfrac{k}{2}c-\dfrac{1}{4}(c+a)-$

$\frac{k-2}{2}$.

三式相加可得 $\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{k}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{(k-1)}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\geqslant\frac{3}{2}(k-1)-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{3}{2}$.

习 题 2

1. 原不等式等价于 $(a^p-b^p)(a^q-b^q)\geqslant 0$.

而 a^p-b^p 与 a^q-b^q 同号或同为零，故结论成立.

2. 原不等式等价于 $\left(\sum a_i^2b_i\right)\left(\sum a_i\right)-\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum a_ib_i\right)\geqslant 0$，即 $\frac{1}{2}\sum\sum(a_i-a_j)(b_i-b_j)a_ia_j\geqslant 0$.

3. 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则

$$\begin{aligned}a_j-a_i&=(a_j-a_{j-1})+(a_{j-1}-a_{j-2})+\cdots+(a_{i+1}-a_i)\\&\geqslant(j-i)m.\end{aligned}$$

因此 $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2\geqslant\frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)m^2,$$

又由于 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n$，故 $m\leqslant\sqrt{\frac{12}{(n-1)n(n+1)}}$，易见等号成立的条件.

4. 显然 $a_k>a_{k-1}$，且 $a_k\geqslant 2$. $k=1, 2, \cdots, n-1$.

由条件可得 $$\frac{a_{k-1}}{a_k}\leqslant\frac{a_{k-1}}{a_k-1}-\frac{a_k}{a_{k+1}-1}.$$

上面不等式对 $k=i+1, i+2, \cdots, n$ 求和，得

$$\frac{a_i}{a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{a_i}{a_{i+1}-1}.$$

当 $i=0$ 时，由题设及上式，$\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{99}{100}<\frac{1}{a_1-1}$. 则

$$\frac{100}{99}\leqslant a_1<\frac{100}{99}+1，故 a_1=2.$$

当 $i=1$、2、3 时，同样可求得 $a_2=5$, $a_3=56$, $a_4=78\,400$.

所以 $\frac{1}{a_5}\leqslant\frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{5}{56}-\frac{56}{25-56^2}\right)=0$，故没有 a_5，因此，所

求的正整数 $a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=56$，$a_4=78\,400$.

5. 原不等式等价于 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{2n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k^{2n}}-n^2\sum\limits_{i<j}\left(\dfrac{a_i}{a_j}-\dfrac{a_j}{a_i}\right)^2>n^2$.

由 Lagrange 恒等式，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{2n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k^{2n}}-n^2=\sum\limits_{i<j}\left(\dfrac{a_i^n}{a_j^n}-\dfrac{a_j^n}{a_i^n}\right)^2$.

不难验证，对 $x>0$，有 $\left(x^n-\dfrac{1}{x^n}\right)^2\geqslant n^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$，因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{2n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k^{2n}}-n^2\geqslant n^2\sum\limits_{i<j}\left(\dfrac{a_i}{a_j}-\dfrac{a_j}{a_i}\right)^2$，等号不能成立.

6.
$$\begin{aligned}n^2(y-x^2)&=n\sum_{j=1}^{n}a_j^2-\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j\Big)^2\\&=(n-1)\sum_{j=1}^{n}a_j^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\\&=(n-1)(a_1^2+a_n^2)-2a_1a_n-2a_1(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})\\&\quad-2a_n(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_i-a_j)^2+2(a_2^2\\&\quad+a_3^2+\cdots+a_{n-1}^2)\\&=\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_i-a_j)^2+2\sum_{j=2}^{n-1}\left(a_j-\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2\\&\quad+\frac{n}{2}(a_1-a_n)^2\\&\geqslant\frac{n}{2}(a_n-a_1)^2,\end{aligned}$$

故
$$a_n-a_1\leqslant\sqrt{2n(y-x^2)}.$$

另一方面，
$$\begin{aligned}&n^2(y-x^2)+n\sum_{j=2}^{n-1}(a_n-a_j)(a_j-a_1)\\&=(n-1)\sum_{j=1}^{n}a_j^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j+na_n\sum_{j=2}^{n-1}a_j+na_1\sum_{j=2}^{n-1}a_j-n(n\\&\quad-2)a_1a_n-n\sum_{j=2}^{n-1}a_j^2\\&=(n-1)(a_1^2+a_n^2)-\sum_{j=2}^{n-1}a_j^2+(n-2)a_n\sum_{j=2}^{n-1}a_j+(n-2)a_1\sum_{j=2}^{n-1}a_j\\&\quad-[n(n-2)+2]a_1a_n-2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n-1}a_ia_j\\&=-\left[\Big(\sum_{j=2}^{n-1}a_j\Big)-\frac{n-2}{2}(a_1+a_n)\right]^2+\frac{n^2}{4}(a_1-a_n)^2.\end{aligned}$$

由此即得 $a_n-a_1\geqslant2\sqrt{y-x^2}$，

因此，$2\sqrt{y-x^2}\leqslant a_n-a_1\leqslant\sqrt{2n(y-x^2)}$.

7. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\mid z'_k-z'_{k+1}\mid&=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}z_j-\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}z_j\right|\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\left|\sum_{j=1}^{k}j(z_j-z_{j+1})\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k(k+1)}\cdot\sum_{j=1}^{k}j\mid z_j-z_{j+1}\mid\right)\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\left(\frac{1}{k(k+1)}j\mid z_j-z_{j+1}\mid\right)\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\mid z_j-z_{j+1}\mid\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\mid z_j-z_{j+1}\mid\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\mid z_j-z_{j+1}\mid.\end{aligned}$$

易见，当 $z_1\neq z_2$，$z_2=z_3=\cdots=z_n$ 时等号成立，故命题得证.

8. 令 $y_i=\sum\limits_{j=i+1}^{n}x_j$，$y=\sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_j$，$z_i=\dfrac{n(n-1)}{2}y_i-(n-i)y(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\left[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right]\cdot\left[\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right]\\=&\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}x_i\sum_{j=i+1}^{n}x_j-\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_iy\\=&\sum_{i=1}^{n-1}x_i\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}y_i-(n-i)y\right]=\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i.\end{aligned}$$

下面只需证明：$\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_iz_i>0$.

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i=y$，$\sum\limits_{i=1}^{n-1}z_i=0$，$y=\sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_j<\sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_n=\dfrac{n(n-1)}{2}x_n$，$z_{n-1}=\dfrac{n(n-1)}{2}y_{n-1}-y=\dfrac{n(n-1)}{2}x_n-y>0$.

又由于 $\dfrac{z_{i+1}}{\frac{n(n-1)}{2}(n-i-1)}-\dfrac{z_i}{\frac{n(n-1)}{2}(n-i)}=\dfrac{y_{i+1}}{n-i-1}-\dfrac{y_i}{n-i}=$

$\dfrac{x_{i+2}+x_{i+3}+\cdots+x_n}{n-i-1}-\dfrac{x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_n}{n-i}>0$,

有：$\frac{z_1}{n-1}<\frac{z_2}{n-2}<\cdots<\frac{z_{n-2}}{2}<z_{n-1}$.

因此，一定存在一个正整数 k，当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时 $z_i\leqslant 0$；当 $k+1\leqslant i\leqslant n$ 时，$z_i>0(k\leqslant n-2)$. 所以 $(x_i-x_k)z_i\geqslant 0$.

故 $\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i\geqslant x_k\sum_{i=1}^{n-1}z_i=0$，但等号不能成立. 证毕.

9. $\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\sqrt{a_k}\right]^2=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2a_i+2\sum_{i<j}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})(\sqrt{j}-\sqrt{j-1})\sqrt{a_ia_j}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2a_i+2\sum_{i<j}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})(\sqrt{j}-\sqrt{j-1})a_j=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2a_i+2\sum_{j=1}^{n}\sqrt{j-1}(\sqrt{j}-\sqrt{j-1})a_j=\sum_{i=1}^{n}a_i$，因此结论成立.

易见，等号成立时需存在 m，$a_1=a_2=\cdots=a_m$，而当 $k>m$ 时，$a_k=0$.

注：下面再给出两种证法.

证法 2：用 Abel 求和公式能把不等式转化为：

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kc_k}$，此处 $c_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$.

由于 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n$，诱使我们用 Chebyshev 不等式（详见第 10 题），即

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\cdot c_k\geqslant\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\cdot\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k},$$

并无多大用处，现将欲证结论改述如下：

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})+\sqrt{na_n}. \qquad ①$$

对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时，①显然成立.

假设对某个 $n\geqslant 1$，每个非增、非负、长为 n 的实数列有 ① 成立，考察长为 $n+1$，满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{n+1}\geqslant 0$ 的实数列. 由归纳假设，只需证明：$\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}a_k}-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\leqslant-\sqrt{na_{n+1}}+\sqrt{(n+1)a_{n+1}}$. 不妨设 $a_{n+1}>0$，$S=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$m=\frac{S}{a_{n+1}}$，则上式等价于 $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，显然成立.

证法 3：令 $x_i=\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}$，$i=1,2,\cdots,n$.

则 $a_i=(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n)^2$，$1\leqslant i\leqslant n$.

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k^2+2\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n}kx_kx_l\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k^2+2\sum\limits_{k<l}\sqrt{kl}\,x_kx_l=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}x_k\right)^2$，因此结论成立.

10. 定义 $b_{n+t}=b_n$，$t=0,1,2,\cdots$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_{i+t}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，$\sum\limits_{i=1}^{k}b_{i+t}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$，$a_k-a_{k+1}\leqslant 0(1\leqslant k\leqslant n-1)$.

由分部求和公式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)&=\sum_{t=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_{i+t}\right)\\&=\sum_{t=0}^{n-1}\left[a_n\sum_{i=1}^{n}b_{i+t}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}b_{i+t}\right)(a_k-a_{k+1})\right]\\&\leqslant\sum_{t=0}^{n-1}\left[a_n\sum_{i=1}^{n}b_i+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)(a_k-a_{k+1})\right]\\&=n\cdot\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.\end{aligned}$$

同理可证 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)\geqslant n\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$.

11. 由对称性，不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，则

$$\sum_{j=1}^{k}a_j^q\geqslant\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}^q\ (1\leqslant k\leqslant n-1),\ \sum_{j=1}^{n}a_j^q=\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}^q,$$

且 $(S^p-a_k^p)^{-1}\geqslant(S^p-a_{k+1}^p)^{-1}(1\leqslant k\leqslant n-1)$.

由分部求和公式，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^q-a_{i_k}^q}{S^p-a_k^p}=(S^p-a_n^p)^{-1}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j^q-a_{i_j}^q)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\sum\limits_{j=1}^{k}(a_j^q-a_{i_j}^q)\right]\cdot\left[(S^p-a_k^p)^{-1}-(S^p-a_{k+1}^p)^{-1}\right]\geqslant 0$，故原不等式成立.

12. 令 $b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k-\sqrt{k}\geqslant 0$，$1\leqslant k\leqslant n$，则 $a_k=(b_k-b_{k-1})+(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_j^2&=[b_1^2+(b_2-b_1)^2+\cdots+(b_n-b_{n-1})^2]+[1^2+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots\\&\quad+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2]+[2\cdot\sqrt{1}\cdot b_1+2\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{1})\cdot(b_2-b_1)\\&\quad+\cdots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(b_n-b_{n-1})]\\&\geqslant[1^2+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2]+[2\cdot\sqrt{1}\cdot b_1+2(\sqrt{2}-\\&\quad\sqrt{1})(b_2-b_1)+\cdots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(b_n-b_{n-1})]\end{aligned}$$

$$\geqslant 1^2+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2$$
$$>\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

13. 令 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$,下用数学归纳法证明:$A_n\leqslant[nx]$.

当 $n=1$ 时,显然成立.假设对 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有 $A_k\leqslant[kx]$,则由分部求和公式,

$$\begin{aligned}nA_n&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{[kx]}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}A_k(k-(k+1))\\&=\sum_{k=1}^{n}[kx]+\sum_{k=1}^{n-1}A_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}[kx]+\sum_{k=1}^{n-1}[kx]\\&=[nx]+\sum_{k=1}^{n-1}([(n-k)x]+[kx])\\&\leqslant[nx]+\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)x+kx](\text{因为}[x]+[y]\leqslant[x+y])\\&=n[nx],\end{aligned}$$

故 $A_n\leqslant[nx]$,命题得证.

14. 如果设 $\frac{1}{c}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^2\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cdot a_k$,则有 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cdot a_k\leqslant c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$,于是可将问题转为 Abel 方法处理:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}A_ka_k&=\sum_{k=1}^{n}A_k[kA_k-(k-1)A_{k-1}]\\&=\sum_{k=1}^{n}kA_k^2-\sum_{k=1}^{n}(k-1)A_kA_{k-1}\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n}kA_k^2-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(k-1)A_k^2+\sum_{k=1}^{n}(k-1)A_{k-1}^2\right]\\&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}A_k^2+\frac{1}{2}nA_n^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_k^2.\end{aligned}$$

故
$$\sum_{k=1}^{n}A_k^2\leqslant 4\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

注:由此思想可以证明 Hölder 型不等式:设 $p>1$,则 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p$,即类似的有:$\frac{1}{c}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^p\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^{p-1}\cdot a_k\leqslant c^{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p$,然后可证得 $c=\frac{p}{p-1}$ 是可使不等式成立的待定系数.此题是哈代一道不等式的初等形式.

习 题 3

1. 令 $b+3c=x$, $8c+4a=y$, $3a+2b=z$,则

原式 $=\frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)-\frac{61}{48}\geqslant\frac{47}{48}$.

2. 不妨设 m, $n\in\mathbf{R}^+$, a, $b\in\mathbf{R}^+$,令 $a=m\cos\alpha$, $b=n\sin\alpha$,其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $(m+n)^2=\left(\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{a^2}{\cos^2\alpha}+\frac{b^2}{\sin^2\alpha}+\frac{2ab}{\sin\alpha\cos\alpha}=a^2(1+\tan^2\alpha)+b^2\left(1+\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)+\frac{2ab(1+\tan^2\alpha)}{\tan\alpha}$.

记 $\tan\alpha=t$,则 $t\in\mathbf{R}^+$,故

$$\begin{aligned}(m+n)^2&=(a^2+b^2)+a^2t^2+\frac{b^2}{t^2}+\frac{2ab}{t}+2abt\\&=a\left(at^2+\frac{b}{t}+\frac{b}{t}\right)+b\left(\frac{b}{t^2}+at+at\right)+(a^2+b^2)\\&\geqslant a\cdot 3\sqrt[3]{ab^2}+b\cdot 3\sqrt[3]{a^2b}+(a^2+b^2).\end{aligned}$$

因此 $(m+n)_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$,等号当 $t=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ 时成立.

注:也可以用 Cauchy 不等式来解.

由于 $(a^{\frac{1}{3}}\cos\alpha+b^{\frac{1}{3}}\sin\alpha)^2\leqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$,故 $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}\right)\geqslant(a^{\frac{1}{3}}\cos\alpha+b^{\frac{1}{3}}\sin\alpha)\left(\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}\right)\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2$,即 $m+n\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$,且当 $\alpha=\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时等号成立.

3. 设 $b+c-a=2x$, $c+a-b=2y$, $a+b-c=2z$,则 x, y, $z\in\mathbf{R}^+$,且 $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$,故原不等式等价于 $\frac{x-z}{2x}+\frac{y-x}{2y}+\frac{z-y}{2z}\leqslant 0$,即 $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\geqslant 3$,显然成立.

4. 设 $x+y=2a$, $y+z=2b$, $z+x=2c$. 则 a、b、c 可组成一个三角形,设其面积为 S,外接圆半径为 R,则易见原不等式等价于 $a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}R$.

由 $2R(\sin A+\sin B+\sin C)=a+b+c\leqslant 2R\cdot 3\cdot\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sqrt{3}R$,因此原不等式成立.

5. 设 $x+y=a$, $xy=b$,则 $a^2\geqslant 4b>0$. 故

$$\text{左边}=\left(\frac{2a^2+b}{9}\right)^2=\left[\frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+\cdots+\frac{1}{4}a^2+b}{9}\right]^2$$
$$\geqslant\sqrt[9]{\frac{1}{4^{16}}\cdot a^{32}\cdot b^2}\geqslant\sqrt[9]{\frac{1}{2^{27}}\cdot a^{27}\cdot b^{\frac{9}{2}}}$$
$$=\frac{1}{8}a^3\cdot b^{\frac{1}{2}}=\text{右边}.$$

6. (1) 设 $ab=x>0$, $a+b=y$,则 $y^2\geqslant 4x$. 因此不等式右端 $=\frac{y^2+8x}{12}=\frac{y^2}{12}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{12\cdot 3^2}}=\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{4}}=$ 左边,故不等式成立,且当 $a=b$ 时等号才成立.

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时,由于 $\frac{y^2+8x}{12}\leqslant\frac{y^2-x}{3}$,结论仍成立. 此时等号成立,仅当 $a=b$;

当 $x<0$ 时, $-x>0$,故不等式右端 $=\frac{y^2-x}{3}=\frac{y^2}{3}-\frac{x}{6}-\frac{x}{6}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{3}\cdot\left(-\frac{x}{6}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{4}}$,所以不等式也成立,此时等号当 $b=-2a$ 或 $a=-2b$ 时取到.

7. 令 $x=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$, $y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$,则原不等式等价于

$$\frac{(1+b+c)(1+c+a)+(1+c+a)(1+a+b)+(1+a+b)(1+b+c)}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}$$
$$\leqslant\frac{(2+b)(2+c)+(2+c)(2+a)+(2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)},$$

即
$$\frac{3+4x+y+x^2}{2x+x^2+y+xy}\leqslant\frac{12+4x+y}{9+4x+y}.$$

上式等价于 $\left(\frac{5x^2y}{3}-5x^2\right)+\left(\frac{xy^2}{3}-y^2\right)+\left(\frac{4}{3}x^2y-12x\right)+(4xy-12x)+\left(\frac{1}{3}xy^2-3y\right)+\left(\frac{1}{3}xy^2-9\right)+(2xy-18)\geqslant 0.$

注意 $xy\geqslant 9$,故此式成立,原不等式得证.

8. 令 $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{y}$, $c=\frac{u}{z}$, $d=\frac{v}{u}$, $e=\frac{x}{v}$, $x, y, z, u, v\in\mathbf{R}^+$,则原不等式等价于 $\frac{u+y}{x+z+v}+\frac{z+v}{x+y+u}+\frac{x+u}{y+z+v}+\frac{y+v}{x+z+u}+$

$\frac{x+z}{y+u+v} \geqslant \frac{10}{3}$.

两边同加5，再乘以3，上式等价于

$$3(x+y+z+u+v)\cdot\left(\frac{1}{x+z+v}+\frac{1}{x+y+u}+\frac{1}{y+z+v}+\frac{1}{x+z+u}+\frac{1}{y+u+v}\right) \geqslant 25.$$

利用Cauchy不等式，上式是显然的.

9. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，令 $\frac{a}{c}=x$，$\frac{b}{c}=y$，则 $x \geqslant y \geqslant 1$.

原不等式转化为 $x^2+y^2+1 \geqslant \frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y(1+x^2)}{1+x}+\frac{x(1+y^2)}{1+y}$.

去分母，整理得 $(x^4y+xy^4)+(x^4+y^4+x+y) \geqslant (x^3y^2+x^2y^3)+(x^3+y^3+x^2+y^2)$，即

$$xy(x+y)(x-y)^2+x(x+1)(x-1)^2+y(y+1)(y-1)^2 \geqslant 0.$$

故原不等式成立.

注：本题也可以直接证. 证法如下：

设 $a \geqslant b \geqslant c$，$a^2-\frac{a(b^2+c^2)}{b+c}=\frac{a^2b+a^2c-ab^2-ac^2}{b+c}=\frac{ab(a-b)}{b+c}+\frac{ac(a-c)}{b+c}$，由于 $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$，则左边 $-$ 右边 $=\left[\frac{ab(a-b)}{b+c}-\frac{ab(a-b)}{c+a}\right]+\left[\frac{ac(a-c)}{b+c}-\frac{ac(a-c)}{a+b}\right]+\left[\frac{bc(b-c)}{c+a}-\frac{bc(b-c)}{a+b}\right] \geqslant 0$，故原不等式成立.

10. 由已知，$x+(-y)+z=x\cdot(-y)\cdot z$.

设 $x=\tan\alpha$，$y=-\tan\beta$，$z=\tan\gamma$，$(\alpha+\beta+\gamma=k\pi)$.

故 $p=2\cos^2\alpha-2\cos^2\beta+3\cos^2\gamma=2\cos^2\alpha-2\cos^2\beta+3\cos^2(\alpha+\beta)=-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+3\cos^2\gamma \leqslant 2\sin\gamma+3-3\sin^2\gamma=-3\left(\sin\gamma-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3} \leqslant \frac{10}{3}$，因此 $p_{\max}=\frac{10}{3}$.

11. 令 $a=\cos\alpha$，$b=\cos\beta$，α，$\beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\cos(\alpha-\beta).$$

两边平方，有 $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\frac{1}{2ab}\cdot[\cos^2(\alpha-\beta)-1]+\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab$.

当 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{6}$ 时，$\cos(\alpha-\beta)>\frac{\sqrt{3}}{2}$，则

$$\frac{1}{2ab}\cdot[\cos^2(\alpha-\beta)-1]>-\frac{1}{8ab},$$

原不等式成立.

显见，在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内选择 4 对两两不同的角对 (α_i,β_i)，使得存在某两个角对 (α,β)，满足 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{6}$ 是可以办到的，因此结论成立.

12. 设 $a=\max\{a,b,c\}$，则 $AP=\min\{AP,BQ,CR\}$，由题意可得 $\frac{4}{-a+b+c}+\frac{10}{-b+a+c}+\frac{10}{-c+a+b}=\frac{6}{r}$.

令 $-a+b+c=2x$，$-b+a+c=2y$，$-c+a+b=2z$，$x,y,z>0$.

则上式等价于：$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}+\frac{5}{z}=6\cdot\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}$，故

$$2\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{z}\right)^2=7\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2.$$

令 $p=\frac{1}{x}-\frac{4}{y}$，$q=\frac{1}{x}-\frac{4}{z}$，则 $25p^2+14pq+25q^2=0$.

易证 $p=q=0$，故 $y=z=4x$，于是易见结论成立.

13. 令 $a=\frac{x}{y}$，$b=\frac{y}{z}$，$c=\frac{z}{x}$，且 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则原不等式等价于 $\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leqslant 1$，即 $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz$. $x-y+z$，$y-z+x$，$z-x+y$ 中任意 2 个之和 >0，故至多只有 1 个 $\leqslant 0$.

(1) 若其中恰有 1 个 $\leqslant 0$，结论显然成立.

(2) 若每个都 >0，由于 $(x-y+z)(y-z+x)\leqslant x^2$，$(x-y+z)(z-x+y)\leqslant z^2$，$(y-z+x)(z-x+y)\leqslant y^2$，相乘即得不等式成立.

14. 记 $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$，$y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}$，$z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$，$x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$.

反设 $x+y+z<1$，则 $0<x,y,z<1$，故

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$> \frac{[(x+y+z)^2-x^2]\cdot[(x+y+z)^2-y^2]\cdot[(x+y+z)^2-z^2]}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{(y+z+x+x)(y+z)(x+y+y+z)(x+z)(x+y+z+z)(x+y)}{x^2y^2z^2}$$

$$\geqslant \frac{4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2}\cdot 2\sqrt{xy}}{x^2y^2z^2}=512,$$

矛盾！

因此 $x+y+z\geqslant 1$.

注：也可以先证明：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ 等. 进而易证得不等式成立.

习 题 4

1. 若不然，由于 $abc>0$，不妨设 $a<0$，$b<0$，$c>0$. 由 $a+b+c>0$ 得 $c>|a+b|$，而 $ab>c\cdot|a+b|$，则 $ab>|a+b|^2$，矛盾！

2. 反设存在实数 x、y、z、t 满足不等式组，则两边平方后可得：$(x+y-z+t)(x-y+z-t)>0$；$(y+x-z+t)(y-x+z-t)>0$；$(z+x-y+t)(z-x+y-t)>0$；$(t+x-y+z)(t-x+y-z)>0$. 从而有 $-(x+y-z+t)^2(x-y+z-t)^2(y-x+z-t)^2(z+x-y+t)^2>0$，矛盾！

3. 如果 $bd>q^2$，则 $4abcd=4(ac)(bd)>4p^2q^2=(ab+cd)^2=a^2b^2+2abcd+c^2d^2$，故 $(ab-cd)^2<0$. 矛盾！

4. 若 $a^2+b^2+c^2<abc$，则 $a<bc$，$b<ca$，$c<ab$.

故 $a+b+c<ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2<abc$，矛盾！

5. 用反证法，若不然，则对一切 x，$y\in[0,1]$，都有：$|xy-f(x)-g(y)|<\dfrac{1}{4}$，分别取 $(x,y)=(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$、$(1,1)$，有：$|f(0)+g(0)|<\dfrac{1}{4}$，$|f(0)+g(1)|<\dfrac{1}{4}$，$|f(1)+g(0)|<\dfrac{1}{4}$，$|1-f(1)-g(1)|<\dfrac{1}{4}$.

因此，$1=|1-f(1)-g(1)+f(0)+g(1)+f(1)+g(0)-f(0)-g(0)|\leqslant|1-f(1)-g(1)|+|f(0)+g(1)|+|f(1)+g(0)|+|f(0)+g(0)|<1$，矛盾！

6. 反设命题不成立，则存在实数 a、b，使得对于 $[0,1]$ 中的任意 x、y，均有 $|xy-ax-by|<\dfrac{1}{3}$.

分别取 $(x, y) = (1, 0)$；$(0, 1)$；$(1, 1)$，有 $|a| < \frac{1}{3}$，$|b| < \frac{1}{3}$，$|1-a-b| < \frac{1}{3}$，则 $1 = |a+b+1-a-b| \leqslant |a|+|b|+|1-a-b| < 1$，矛盾！

7. 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$，下面证明：对任意满足 $1 \leqslant i \leqslant m$ 的正整数 i，有
$$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1. \quad ①$$

如果①成立，则 $2(a_1+a_2+\cdots+a_m) = (a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_m+a_1) \geqslant m(n+1)$，因此结论成立.

对①可以用反证法，若存在某个正整数 i，$1 \leqslant i \leqslant m$，使得 $a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$，于是 $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \cdots < a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$. $a_i + a_m$，$a_i + a_{m-1}$，$\cdots$，$a_i + a_{m+1-i}$ 是 i 个正整数，且每个都 $\leqslant n$. 由题目条件，这 i 个正整数每个都是 a_k 的形式 $(1 \leqslant k \leqslant m)$，且两两不同，而它们都大于 a_i，故必为 a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1} 之一. 矛盾！

8. 用反证法，若对任意 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，有 $|S_k| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i\right| > \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. 记 $A = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.

补充定义 $S_0 = -S_n$，则 S_0 与 S_n 中有一个 $> A$，另一个 $< -A$. 不妨设 $S_0 < -A$，$S_n > A$（否则可用 $-a_i$ 代替 a_i），于是，存在 j，$0 \leqslant j \leqslant n-1$，使得 $S_j < -A$，$S_{j+1} > A$. 故 $|S_{j+1} - S_j| > 2A$，即 $2|a_{j+1}| > 2A$，则 $|a_{j+1}| > A$，与 A 的定义矛盾！

9. 设 $a + \mathrm{i}b$ 是 $j_1^2 + j_2^2 + \cdots + j_n^2$ 的任一平方根，则 $r = |a|$，且 $(a+\mathrm{i}b)^2 = \sum_{k=1}^{n} j_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + \mathrm{i}y_k)^2$.

故 $a^2 - b^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2$，$ab = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

反设 $r > \sum_{k=1}^{n} |x_k|$，则 $a^2 = r^2$，$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

于是 $b^2 > \sum_{k=1}^{n} y_k^2$，从而 $a^2b^2 > \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = a^2b^2$，矛盾！

10. 用反证法. 若不存在这样的 k 个数，则对 a_1，a_2，$\cdots$，a_k，有 $a_k \leqslant \frac{1}{2}a_1$；对 a_k，a_{k+1}，$\cdots$，a_{2k-1}，有 $a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2}a_k \leqslant \frac{1}{2^2}a_1$；$\cdots$；对 $a_{(n-1)(k-1)+1}$，$a_{(n-1)(k-1)+2}$，$\cdots$，$a_{n(k-1)+1}$，有 $a_{n(k-1)+1} \leqslant \frac{1}{2^n}a_1$. $n \in \mathbf{Z}^+$，则

$$S_1=a_1+a_k+a_{2k-1}+\cdots\leqslant a_1+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_1+\cdots=2a_1;$$

$$S_2=a_2+a_{k+1}+a_{2k}+\cdots\leqslant 2a_2\leqslant 2a_1;$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_{k-1}=a_{k-1}+a_{2k-2}+a_{3k-3}+\cdots\leqslant 2a_{k-1}\leqslant 2a_1.$$

故 $S=S_1+S_2+\cdots+S_{k-1}\leqslant 2(k-1)a_1=\dfrac{k-1}{k}<1$,矛盾!

11. 反设 $y(y-1)>x^2$,则由 $y\geqslant 0$ 知 $y>1$. 进一步有 $y>\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+x^2}$. 由假设 $y(y+1)\leqslant(x+1)^2$ 和 $y>1$ 可知,$y\leqslant-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+(x+1)^2}$,于是得到$\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+x^2}<-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+(x+1)^2}$.

由此不难推出$\sqrt{\dfrac{1}{4}+x^2}<x$,矛盾!故原命题成立.

12. 对第一个结论用反证法.

因为 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,则 $\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}=a_1$ 或者 $|a_n|$(显然 $a_1>0$). 而若$\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}=|a_n|$,则$a_n<0$,$|a_n|>a_1$.

下面令 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{n-k}>a_{n-k+1}=a_{n-k+2}=\cdots=a_n$.

由于 $0\leqslant\left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|<1$,故存在 l,使得$\left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|^{2l+1}<\dfrac{1}{n}$ $(1\leqslant i\leqslant n-k)$,

于是
$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\left(\frac{a_2}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_n}\right)^{2l+1}\\=&\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\left(\frac{a_2}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1}+k\\\geqslant& k-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{2l+1}-\left|\frac{a_2}{a_n}\right|^{2l+1}-\cdots-\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{2l+1}\\>&k-\frac{n-k}{n}=k-1+\frac{k}{n}>0.\end{aligned}$$

从而 $a_1^{2l+1}+a_2^{2l+1}+\cdots+a_n^{2l+1}<0$,矛盾!

下面来证明第二个结论.

当 $x>a_1$ 时,$x-a_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$, $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant(x-a_1)\cdot\left[\dfrac{(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)}{n-1}\right]^{n-1}=(x-a_1)\cdot\left(x-\dfrac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$.

由于 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$,即 $a_1\geqslant-(a_2+a_3+\cdots+a_n)$.

故 $x+\frac{1}{n-1}a_1 \geqslant x-\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}(>0)$，则有

$$\begin{aligned}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) &\leqslant (x-a_1)\left(x+\frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1}\\ &=(x-a_1)\cdot\sum_{S=0}^{n-1}C_{n-1}^{S}\left(\frac{a_1}{n-1}\right)^{S}\cdot x^{n-1-S}\\ &=(x-a_1)\cdot\sum_{S=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^{S}}{(n-1)^{S}}a_1^{S}\cdot x^{n-1-S}.\end{aligned}$$

易见，当 $0\leqslant S\leqslant n-1$ 时，$\frac{C_{n-1}^{S}}{(n-1)^{S}}\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) &\leqslant (x-a_1)\cdot\sum_{S=0}^{n-1}a_1^{S}x^{n-1-S}\ (x>a_1\geqslant 0)\\ &=(x-a_1)\cdot\frac{x^{n-1}-a_1^{n-1}\cdot\frac{a_1}{x}}{1-\frac{a_1}{x}}=x^n-a_1^n.\end{aligned}$$

13. 用反证法，设有 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 使得 $A\geqslant 2a_ia_j$.

不妨设 $i=1,\ j=2$，于是有

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 2a_1a_2+\sum_{i=1}^{n}a_i^2=(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2,$$

由 Cauchy 不等式，$(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n-1}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$.

从而有 $A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$，矛盾！

故对一切 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $A<2a_ia_j$.

14. 先证明 $a_k-a_{k+1}\geqslant 0$，可以用反证法.

假设存在某个 $a_k<a_{k+1}$，则 $a_{k+1}\leqslant a_k-a_{k+1}+a_{k+2}<a_{k+2}$，序列 $\{a_S\mid S=k,k+1,\cdots\}$ 是严格单调递增的.

则 $\sum_{S=k}^{n}a_S(n>k)$ 在 n 趋向于无穷大时也趋向于无穷大，矛盾！故有 $a_k-a_{k+1}\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots$.

令 $b_k=a_k-a_{k+1}\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}1&\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k\\ &=b_1+2b_2+3b_3+\cdots+kb_k+a_{k+1}\\ &\geqslant(1+2+3+\cdots+k)b_k=\frac{k(k+1)}{2}b_k.\end{aligned}$$

所以 $b_k \leqslant \dfrac{2}{k(k+1)} < \dfrac{2}{k^2}$，因此 $0 \leqslant a_k - a_{k+1} < \dfrac{2}{k^2}$.

15. 反设 $ab > 0$，不妨设 $a > 0$，则 $b > 0$. 分三种情况讨论：

(1) 若 $c > 0$，$x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ 的根均为负根，与 x^2 前系数为 0 矛盾.

(2) 若 $c < 0$，四个实根乘积为 $c < 0$，正根为 1 个或 3 个，其余为负根，再分别讨论：

(i) 如果有 3 个正根 x_2、x_3、x_4，负根为 x_1，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a < 0$，故 $-x_1 > -x_1 - a = x_2 + x_3 + x_4$. 由于 x^2 前系数为 0，应当有 $x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$.

而 $x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -x_1(x_2 + x_3 + x_4) > (x_2 + x_3 + x_4)^2$，矛盾！

(ii) 如果仅有一个正根，不妨设 x_1 为正根，x_2、x_3、x_4 为负根，$x_1x_2x_3x_4\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}\right) = -b < 0$，又由于 $x_1x_2x_3x_4 < 0$，则 $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} > 0$. 由于 $-x_1(x_2 + x_3 + x_4) = x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 > 0$，两式相乘，得到 $-(x_2 + x_3 + x_4) > \left(-\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3} - \dfrac{1}{x_4}\right)(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2) = -2(x_2 + x_3 + x_4) - \left(\dfrac{x_2x_3}{x_4} + \dfrac{x_3x_4}{x_2} + \dfrac{x_4x_2}{x_3}\right)$，矛盾！

(3) 若 $c = 0$，$x^3 + ax^2 + b = 0$ 有三个实根，由于 $a > 0$，$b > 0$，三个实数均为负根，由于 x 前面系数为 0，则根的两两乘积之和为 0，矛盾！

综上所述，$ab \leqslant 0$.

习　题　5

1. 考察恒等式 $(k-a)(k-b)(k-c) = k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc$.

2. 考察恒等式 $(\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma)^2 = 2(\alpha\beta - 1)(\beta\gamma - 1)(\gamma\alpha - 1) + 2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

3. $|g(x)| = |cx^2 - c + bx + a + c| \leqslant |c| \cdot |x^2 - 1| + |bx + a + c| \leqslant 1 + |bx + a + c|$.

考察一次函数 $T(x) = |bx + a + c|$，$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

当 $x = -1$ 时，$T(-1) = |a - b + c| \leqslant 1$；当 $x = 1$ 时，$T(1) = |a + b + c| \leqslant 1$. 故当 $|x| \leqslant 1$ 时，$T(x) \leqslant 1$. 则 $|g(x)| \leqslant 1 + T(x) \leqslant 2$. 于是 $F(x) \leqslant 2$. 且当 $x = \pm 1$ 时取到此最值.

4. 构造函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$，易证 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上是增函数，于是

$f(|a+b+c|)\leqslant f(|a|+|b|+|c|)$，即

$$\begin{aligned}\frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|}&\leqslant\frac{|a|+|b|+|c|}{1+|a|+|b|+|c|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|+|c|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|+|c|}\\&\quad+\frac{|c|}{1+|a|+|b|+|c|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}+\frac{|c|}{1+|c|},\end{aligned}$$

故结论成立.

5. 取 $x=2$，$y=z=1$，有 $a\geqslant\frac{6}{5}$. 因此，当 $a\geqslant\frac{6}{5}$ 时，原不等式有整根 $(2,1,1)$，但 (x,y,z) 不能组成一个三角形，因此有 $a<\frac{6}{5}$.

又由于当 $a<1$ 时，$x^2+y^2+z^2\leqslant a(xy+yz+zx)<xy+yz+zx$，矛盾！

故 $a\geqslant1$. 下证：当 $1\leqslant a<\frac{6}{5}$ 时，原不等式的所有正整数根皆能组成三角形的三边长.

首先，$(1,1,1)$ 是原不等式的解，且它们能组成一个三角形. 如果不等式有整根 (x_1,y_1,z_1)，且不能组成三角形的三边长，那么，将原方程变形为：(不妨设 $x_1\geqslant y_1+z_1$) $x^2-a(y+z)x+y^2+z^2-ayz\leqslant0$.

考察函数 $f(x)=x^2-a(y_1+z_1)x+y_1^2+z_1^2-ay_1z_1$，其对称轴 $x=\frac{a}{2}(y_1+z_1)<\frac{3}{5}(y_1+z_1)<y_1+z_1\leqslant x_1$，故有 (y_1+z_1,y_1,z_1) 也是原不等式的解.

因此 $a\geqslant\frac{(y_1+z_1)^2+y_1^2+z_1^2}{(y_1+z_1)y_1+(y_1+z_1)z_1+y_1z_1}=u$，则 $(u-2)y_1^2+(3u-2)y_1z_1+(u-2)z_1^2=0$.

显然 $u\neq2$，故 $\Delta=(3u-2)^2-4(u-2)^2\geqslant0$，于是 $u\geqslant\frac{6}{5}$，那么 $a\geqslant u\geqslant\frac{6}{5}$，矛盾！

6. 不妨设 $\frac{b_1}{a_1}\geqslant\frac{b_2}{a_2}\geqslant\frac{b_3}{a_3}$. 考虑方程：$(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x^2-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_2+a_2b_3+a_3b_1+a_1b_3)x+(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)=(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)+(a_2x-b_2)(a_3x-b_3)+(a_3x-b_3)(a_1x-b_1)$.

由于当 $x=\frac{b_2}{a_2}$ 时，上式右端 $=\left(\frac{a_3b_2}{a_2}-b_3\right)\left(\frac{a_1b_2}{a_2}-b_1\right)\leqslant0$，因此这个关

于 x 的实系数二次三项式必有实根，于是 $\Delta\geqslant 0$，故原不等式成立.

当不等式取等号时，$\Delta=0$，则上述关于 x 的一元二次多项式必有等根 $\dfrac{b_2}{a_2}$.

于是，$\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}$ 与 $\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}$ 中至少有一个成立. 不妨设 $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\lambda$. 有

$f(x)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\left(x-\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2$.

故 $(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(x-\lambda)^2=(a_1x-a_1\lambda)(a_2x-a_2\lambda)+(a_2x-a_2\lambda)(a_3x-b_3)+(a_3x-b_3)(a_1x-a_1\lambda)$.

由此不难验证 $b_3=a_3\lambda$，因此结论成立.

7. 令 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{5}$，则当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增. 令 $g(x)=f(x)-x=(x-r_1)(x-r_2)$. 其中 $r_1=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$，$r_2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$，$0<r_1<r_2<1$，则

$$\begin{cases}f(x)<x, 若\ x\in(r_1,\ r_2),\\ f(x)\geqslant x, 其他.\end{cases}$$

固定 $n\geqslant 5$，记 $a=|a_{n-5}|$，只要证明：$a_{n+5}\geqslant a_{n-5}^4$.

(1) $a\leqslant r_1$，则 $a<1$，$a_{n+5}\geqslant a>a^4=a_{n-5}^4$.

其中利用了 $a\leqslant f(a)\leqslant f^{(2)}(a)\leqslant\cdots\leqslant f^{(10)}(a)=a_{n+5}$.

(2) $a\in[r_2,\ 1]$，也有 $a_{n+5}=f^{(10)}(a)>f^{(9)}(a)>\cdots>a>a^4=a_{n-5}^4$.

(3) $a\in(r_1,\ r_2)$，$r_1=f(r_1)<f(r_2)=r_2$. $a_{n+5}=f^{(10)}(a)>r_1$，故只须证 $r_1>r_2^4$（容易验证）.

故 $a_{n+5}>r_1>r_2^4>a^4=a_{n-5}^4$.

(4) $a>1$，则 $a_{n+5}=f^{(10)}(a)>f^{(9)}(a)>\cdots>f^{(2)}(a)=\left(a^2+\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}>a^4=a_{n-5}^2$，因此结论也成立.

注：下面再给出两种证法.

证法 2：对于任何非负整数 k，因为 $\left(a_k-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，故有

$$a_{k+1}+\frac{1}{20}\geqslant a_k^2+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=a_k^2+\frac{1}{4}\geqslant a_k.$$

因此 $a_{k+1}+\dfrac{1}{20}\geqslant a_k$.

对 $k=n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$，求和得 $a_{n+5}+\dfrac{1}{5}\geqslant a_{n+1}\geqslant a_n^2+\dfrac{1}{5}$.

类似地，我们有 $a_n \geqslant a_{n-5}^2$. 于是 $a_{n+5} \geqslant a_n^2 \geqslant a_{n-5}^4$，结论成立.

证法 3：只要证明 $a_{n+5} \geqslant a_n^2 (n \geqslant 5)$.

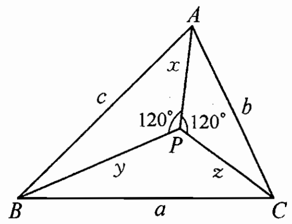
因为 $a_{n+5} \geqslant a_{n+4}^2 + \frac{1}{5}$；…；$a_{n+1} \geqslant a_n^2 + \frac{1}{5}$，相加，得

$$\begin{aligned} a_{n+5} &\geqslant \sum_{i=1}^{4}(a_{n+i}^2 - a_{n+i}) + 1 + a_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{4}\left(a_{n+i} - \frac{1}{2}\right)^2 + a_n^2 \geqslant a_n^2. \end{aligned}$$

因此结论成立.

8. 建立平面直角坐标系 xOy，取三点 $A(x,\ 0)$、$B\left(-\frac{y}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$、$C\left(-\frac{z}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$，则原不等式转化为：$|AB| + |AC| \geqslant |BC|$，这是显然的.

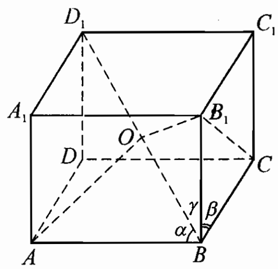
9. 由条件，可构造如图，在 $\triangle ABC$（内有一点 P，满足条件 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. 设 $PA = x,\ PB = y,\ PC = z$，则 $AB = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$，$BC = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$，$CA = \sqrt{z^2 + zx + x^2}$. 由三角形两边之和大于第三边，有 $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \leqslant 2(x + y + z)$）.



（第 9 题）

又由 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}s$，$ab + bc + ca \geqslant 4\sqrt{3}s$，得 $(a + b + c)^2 \geqslant 12\sqrt{3}s$，故 $a + b + c \geqslant 2\sqrt{3\sqrt{3}s} = 3\sqrt{xy + yz + zx}$.

10. 由条件，作一个长、宽、高分别为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 的长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$. 如图所示，$AB = \cos\alpha$，$BC = \cos\beta$，$BB_1 = \cos\gamma$. 则此长方体对角线长恰为 1. 同时，易见 $\angle ABD_1 = \alpha$，$\angle CBB_1 = \beta$，$\angle B_1BD_1 = \gamma$.



（第 10 题）

在三面角 B-AD_1C 中，有 $\angle ABD_1 + \angle D_1BC > \angle ABC = \frac{\pi}{2}$，故 $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$，同理，$\beta + \gamma > \frac{\pi}{2}$，$\gamma + \alpha > \frac{\pi}{2}$，则 $\alpha + \beta + \gamma > \frac{3\pi}{4}$.

取 BD_1 的中点 O，则 $\angle AOD_1 = 2\alpha$，$\angle COD_1 = 2\beta$，$\angle BB_1D_1 = 2\gamma$. 易证 $\angle COB_1 = \angle AOD_1 = 2\alpha$，考虑三面角 O-CB_1D_1，有 $\angle COB_1 + \angle B_1OD_1 + \angle COD_1 < 2\pi$，于是即得 $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

11. 原不等式即 $\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$（$0\leqslant x\leqslant 1$）.

分别以点 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 及 $B\left(0,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 为圆心，半径为 1 作圆 A 和圆 B，则它们的两个端点分别为 $\left(0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$、$\left(1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 及 $\left(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(1,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

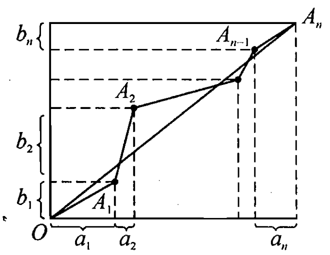
记圆 A 在第一象限内的弧为 l_1，圆 B 在第一、四象限内的弧为 l_2，于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，直线 $y=px+q$ 位于 l_1 和 l_2 之间.

由于连接 l_1 两个端点的直线恰与圆 B 相切，从而与 l_2 相切. 因此，直线 $y=px+q$ 必过 l_1 两个端点，故 $p=-1$，$q=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

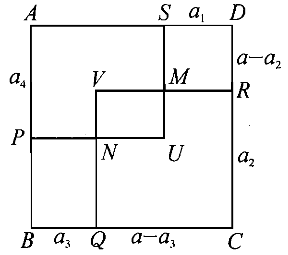
12. 把形如 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的项看作是一个直角三角形斜边的长，可构造图形如图所示.

于是，不等式左边 $=OA_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n$，不等式右边 $=OA_n$.

由于折线 $OA_1\cdots A_n$ 的长不小于直线段 OA_n 的长，故 $OA_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n\geqslant OA_n$，因此不等式成立.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. (1) 原不等式即 $a_1(a-a_2)+a_2(a-a_3)+a_3(a-a_4)+a_4(a-a_1)\leqslant 2a^2$，如图构造正方形 $ABCD$，边长为 a.

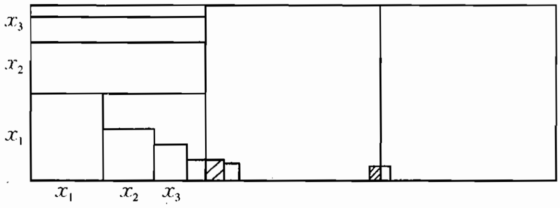
取 U, V 使 $SD=a_1$，$CR=a_2$，$BQ=a_3$，$AP=a_4$.

则 $SDRM$ 与 $CRVQ$ 互不重叠，$BPNQ$ 与 $APUS$ 互不重叠，因此它们至多将正方形 $ABCD$ 覆盖两次，故原不等式获证.

(2) 和(1)类似，6 个矩形至多将正方形（$a\times a$ 的）覆盖 3 次.

14. 不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{100}$，下面我们借助图形来说明，$x_1+x_2+$

$x_3>100$ 成立. 把 x_i^2 看作是边长为 x_i 的正方形的面积 $(1\leqslant i\leqslant 100)$.



（第 14 题）

由于 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}\leqslant 300$，这些正方形可以一个接一个地排起来，其总长 $\leqslant 300$，它们全落在一个长为 300，宽为 100 的矩形中. 这个矩形可分为 3 个边长为 100 的正方形，如图所示. 如果 $x_1+x_2+x_3\leqslant 100$，第一个边长为 100 的正方形中含有三个带形，互不重叠，宽分别为 x_1、x_2、x_3.

由于 x_i 递减，第 2 个边长为 100 的正方形中所含的小正方形（包括不完整的，如图中阴影部分所示）的边长 x_i 均 $\leqslant x_3$，它们可以移至上述宽为 x_2 的带形中. 同样，第 3 个边长为 100 的正方形中所含的小正方形可以移至上述宽为 x_3 的带形中，于是，面积之和 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2<100^2$，矛盾！

故 $x_1+x_2+x_3>100$.

注：下面给出第 2 种证法.

证法 2：不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{100}$. 记 $s=x_1+x_2+x_3$，$\lambda=x_3$，令 $\delta=x_2-x_3\geqslant 0$，由 $x_1\geqslant x_2$，易知 $(x_1+\delta)^2+(x_2-\delta)^2\geqslant x_1^2+x_2^2$. 所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant(s-2\lambda)^2+2\lambda^2$.

由 $\lambda\geqslant x_4\geqslant x_5\geqslant\cdots\geqslant x_{100}$ 和 $x_4+x_5+\cdots+x_{100}<300-s$ 可得

$$x_4^2+x_5^2+\cdots+x_{100}^2\leqslant\lambda(x_4+x_5+\cdots+x_{100})\leqslant(300-s)\lambda.$$

故 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2\leqslant 6\lambda^2+(300-5s)\lambda+s^2$.

记 $f(\lambda)=6\lambda^2+(300-5s)\lambda+s^2$. 则由于 $0<\lambda\leqslant\dfrac{s}{3}$，又由于 $f(0)=s^2$，$f\left(\dfrac{s}{3}\right)=100s$，有 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2\leqslant\max\{s^2,100s\}$. 再由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2>10\,000$，即可得 $s=x_1+x_2+x_3>100$.

15. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$.

则 $$A_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_2a_3-a_3a_1\geqslant 0.$$

$A_5=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)$.

由于 $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0$，而 A_5 前 2 项之和为 $(a_2-a_1)[(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_5-a_1)-(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)]\geqslant 0$，同理，$A_5$ 后 2 项之和也 $\geqslant 0$，故 $A_5\geqslant 0$.

当 $n\geqslant 7$ 时，构造反例如下：令 $a_1=a_2=a_3<a_4<a_5=a_6=a_7=\cdots=a_n$，则 $A_n=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)(a_4-a_6)\cdots(a_4-a_n)<0$.

因此结论成立.

16. 构造数列 $x_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$ $(n\geqslant 2)$，则 $x_{n+1}-x_n=a_{n+1}[(1+a_1)\cdots(1+a_n)-1]$.

若 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$，由上式易见 $x_{n+1}>x_n$；若 $-1<a_i<0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $0<1+a_i<1$，也有 $x_{n+1}>x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 是一个单调递增序列 $(n\geqslant 2)$. 由于 $x_2=(1+a_1)(1+a_2)-1-a_1-a_2=a_1a_2>0$，则对一切 $n\geqslant 2$，$x_n>0$，从而原不等式成立.

17. 构造数列 $x_n=2C_n-D_n$，$y_n=D_n-C_n$，$n\in\mathbf{N}_+$. 则

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=2(C_{n+1}-C_n)-(D_{n+1}-D_n)\\&=2(a_{n+1}-b_{n+1})^2-(a_{n+1}-b_{n+1})^2-n(b_{n+1}^2-b_n^2)\\&\quad+2(b_{n+1}-b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=(a_{n+1}-b_{n+1})^2-n(b_{n+1}^2-b_n^2)+2nb_n(b_{n+1}-b_n)\\&=[(n+1)b_{n+1}-nb_n-b_{n+1}]^2-n(b_{n+1}^2-b_n^2)+2n(b_nb_{n+1}-b_n^2)\\&=(n^2-n)(b_{n+1}-b_n)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

又由于 $x_1=2C_1-D_1=(a_1-b_1)^2=0$，故对一切 n，$x_n\geqslant 0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，同样，$y_{n+1}-y_n=n(b_{n+1}^2-b_n^2)-2(b_{n+1}-b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n(b_{n+1}-b_n)^2\geqslant 0$，又 $y_1=D_1-C_1=0$，故对一切 $n\in\mathbf{N}^+$，$y_n\geqslant 0$.

综上所述，$C_n\leqslant D_n\leqslant 2C_n$.

习 题 6

1. 不难证明：$\dfrac{1}{x_i}+\dfrac{1}{x_{i+1}}\geqslant\dfrac{4}{x_i+x_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,n,\ x_{n+1}=x_1)$，把 n 个式子相加即得原不等式成立.

2. 由于 $a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$，故 $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\dfrac{1}{ab(a+b+c)}$. 同理 $\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\leqslant\dfrac{1}{bc(a+b+c)}$；$\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\dfrac{1}{ca(a+b+c)}$. 三式相加即得原不等式成立.

3. 不难证明：$\dfrac{x}{1+y+zx}\leqslant\dfrac{1}{x+y+z}$，$\dfrac{y}{1+z+xy}\leqslant\dfrac{1}{x+y+z}$，

$\dfrac{z}{1+x+yz}\leqslant\dfrac{1}{x+y+z}$. 因此不等式等号成立，则易得 $x=y=z=1$.

注：本题也可以这样解：先证明 $\dfrac{x}{1+y+zx}\leqslant\dfrac{x}{x+y+z}$ 等，这样就可以得到 $x+y+z\geqslant 3$，因而 $x=y=z=1$.

4. 由于 $a^5+b^5-a^2b^2(a+b)=(a^2-b^2)(a^3-b^3)\geqslant 0$，故 $a^5+b^5\geqslant a^2b^2(a+b)$，于是

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}=\frac{ab\cdot abc}{a^5+b^5+ab\cdot abc}=\frac{a^2b^2c}{a^5+b^5+a^2b^2c}$$
$$\leqslant\frac{a^2b^2c}{a^2b^2(a+b)+a^2b^2c}=\frac{c}{a+b+c}.$$

同理，有 $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\dfrac{a}{a+b+c}$，$\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant\dfrac{b}{a+b+c}$.

三式相加即得不等式成立，且等号当 $a=b=c=1$ 时取到.

5. 首先，不难证明 $y^{2\alpha+3\beta}+z^{2\alpha+3\beta}\geqslant y^{\alpha+2\beta}z^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+\beta}z^{2\alpha+\beta}$.

又由于 $2004^{\alpha+\beta}+x^{\alpha}(y^{2\alpha+3\beta}+z^{2\alpha+3\beta})=x^{\alpha}[x^{\beta}y^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}+y^{2\alpha+3\beta}+z^{2\alpha+3\beta}]\geqslant x^{\alpha}[x^{\beta}y^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+2\beta}z^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+\beta}z^{\alpha+2\beta}]=x^{\alpha}y^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}(x^{\beta}+y^{\beta}+z^{\beta})$.

$$\text{因此，}u\leqslant\frac{x^{\beta}}{2004^{\alpha+\beta}(x^{\beta}+y^{\beta}+z^{\beta})}+\frac{y^{\beta}}{2004^{\alpha+\beta}(x^{\beta}+y^{\beta}+z^{\beta})}$$
$$+\frac{z^{\beta}}{2004^{\alpha+\beta}(x^{\beta}+y^{\beta}+z^{\beta})}=\frac{1}{2004^{\alpha+\beta}},$$

故 $u_{\max}=2004^{-(\alpha+\beta)}$.

6. 由平均不等式，$\dfrac{x_i^m}{a-x_i}+\dfrac{(a-x_i)a^{m-2}}{(n-1)^2n^{m-2}}+\underbrace{\dfrac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-1}}+\cdots+\dfrac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-1}}}_{m-2\text{个}}\geqslant m\cdot\dfrac{x_i\cdot a^{m-2}}{(n-1)n^{m-2}}$.

故 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{a-x_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{mx_ia^{m-2}}{(n-1)n^{m-2}}-\frac{(a-x_i)a^{m-2}}{(n-1)^2n^{m-2}}-\frac{(m-2)a^{m-1}}{(n-1)n^{m-1}}\right]=\frac{a^{m-1}}{(n-1)n^{m-2}}$.

注：本题也可利用 Cauchy 不等式及幂平均不等式加以解决.

7. (1) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}=\dfrac{a}{\sqrt[3]{a\cdot a\cdot(b+c)}}\geqslant\dfrac{3a}{2a+b+c}>\dfrac{3a}{2a+2b+2c}$，

同理，有 $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a+c}}>\dfrac{3b}{2a+2b+2c}$；$\sqrt[3]{\dfrac{c}{a+b}}>\dfrac{3c}{2a+2b+2c}$.

三式相加即得原不等式成立.

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{(b+c)^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot a}{\sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}}\geqslant\dfrac{3\sqrt[3]{2}a}{2a+2b+2c}$. 同理,有

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{(a+c)^2}}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{2}b}{2a+2b+2c};\ \sqrt[3]{\frac{c^2}{(a+b)^2}}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{2}c}{2a+2b+2c}.$$

三式相加,原不等式成立(注意等号是可以取到的).

8. 可以把条件推广为: $v_1+v_2+\cdots+v_n=1$, $v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant rv_1$.

下面证明: $v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2\leqslant\dfrac{(r+1)^2}{4rn}$, 其中 $r>1$, $r\in\mathbf{R}^+$.

对于任意 $j\in\mathbf{Z}^+$, $1\leqslant j\leqslant n$, 由条件,有 $(v_j-v_1)(rv_1-v_j)\geqslant0$, 故 $rv_1v_j-rv_1^2-v_j^2+v_1v_j\geqslant0$.

上式关于 j 从 1 到 n 求和,可得 $\sum\limits_{j=1}^{n}v_j^2\leqslant(r+1)v_1-rnv_1^2=-rn\left(v_1-\dfrac{r+1}{2rn}\right)^2+\dfrac{(r+1)^2}{4rn}\leqslant\dfrac{(r+1)^2}{4rn}$.

9. (1) 利用平均不等式,有

$\dfrac{a^5}{b^2-1}+\dfrac{25(5+\sqrt{15})}{12}(b-1)+\dfrac{25(5-\sqrt{15})}{12}(b+1)+\dfrac{25}{18}\sqrt{15}+\dfrac{25}{18}\sqrt{15}\geqslant\dfrac{125}{6}a$, 故 $\dfrac{a^5}{b^2-1}\geqslant\dfrac{125}{6}(a-b)+\dfrac{25}{18}\sqrt{15}$.

同理, $\dfrac{b^5}{c^2-1}\geqslant\dfrac{125}{6}(b-c)+\dfrac{25}{18}\sqrt{15}$; $\dfrac{c^5}{a^2-1}\geqslant\dfrac{125}{6}(c-a)+\dfrac{25}{18}\sqrt{15}$ 相加即得原不等式成立.

(2) 由于 $(b^3-1)(b^3-1)(b^3-1)\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{3^5\cdot b^{15}}{5^5}$, 故 $b^3-1\leqslant\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{20}\cdot b^5}{25}$, 则 $\dfrac{a^5}{b^3-1}\geqslant\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{50}\cdot a^5}{6b^5}$. 同理可得 $\dfrac{b^5}{c^3-1}\geqslant\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{50}\cdot b^5}{6c^5}$; $\dfrac{c^5}{a^3-1}\geqslant\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{50}\cdot c^5}{6a^5}$. 因此,不等式左端 $\geqslant\dfrac{5\sqrt[3]{50}}{6}\left(\dfrac{a^5}{b^5}+\dfrac{b^5}{c^5}+\dfrac{c^5}{a^5}\right)\geqslant\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt[3]{50}$.

注:第(1)小题也可以采用与第(2)小题类似的方法.

由于 $(b^2-1)(b^2-1)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\leqslant\left(\dfrac{2b^2}{5}\right)^5$, 有 $b^2-1\leqslant\dfrac{6\sqrt{3}b^5}{25\sqrt{5}}$, 则 $\dfrac{a^5}{b^2-1}\geqslant\dfrac{25\sqrt{5}a^5}{6\sqrt{3}b^5}$, 以此不难证得原不等式成立.

10. 由已知条件, $\dfrac{m_2}{M_1}\leqslant\dfrac{b_i}{a_i}\leqslant\dfrac{M_2}{m_1}$, $\dfrac{m_2}{M_1}a_i\leqslant b_i\leqslant\dfrac{M_2}{m_1}a_i$, 则

$\left(b_i-\dfrac{M_2}{m_1}a_i\right)\left(b_i-\dfrac{m_2}{M_1}a_i\right)\leqslant 0.$

因此 $b_i^2-\left(\dfrac{M_2}{m_1}+\dfrac{m_2}{M_1}\right)a_ib_i+\dfrac{M_2m_2}{M_1m_1}a_i^2\leqslant 0.$

由平均值不等式，$2\left(\sum b_i^2\cdot\dfrac{M_2m_2}{M_1m_1}\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum b_i^2+\dfrac{M_2m_2}{M_1m_1}\sum a_i^2$，于是 $2\left(\sum b_i^2\cdot\dfrac{M_2m_2}{M_1m_1}\cdot\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\dfrac{M_2}{m_1}+\dfrac{m_2}{M_1}\right)\sum a_ib_i$，故 $\dfrac{\sum a_i^2\sum b_i^2}{\left(\sum a_ib_i\right)^2}\leqslant\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\dfrac{M_2}{m_1}+\dfrac{m_2}{M_1}}{M_2m_2/M_1m_1}\right]^2=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2.$

11. 证明局部不等式：$x_i\cdot\sqrt{\dfrac{1-x_j}{x_j}}+x_j\cdot\sqrt{\dfrac{1-x_i}{x_i}}\geqslant(1-x_i)\sqrt{\dfrac{x_j}{1-x_j}}+(1-x_j)\sqrt{\dfrac{x_i}{1-x_i}}$. 进而易证原不等式成立.

12. 用反证法，若对任意 $i,j,t,l\in\{1,2,\cdots,n\}$（至少三个互不相同）均有 $x_i-x_t\neq x_l-x_j$. 下证：对任意 k，$1<k<n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i>\frac{1}{k+1}\cdot\left[k\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\,\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.

由假设，x_j-x_i 互不相等（$1\leqslant i<j\leqslant m$），而且 $x_i\geqslant 0$，因此，

$$\begin{aligned}M&=\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{m-2}(x_{i+2}-x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{m-k}(x_{i+k}-x_i)\\&\geqslant 0+1+2+3+\cdots+\left[\frac{(2m-1-k)k}{2}-1\right]\\&>\frac{1}{2}m^2k^2-\frac{1}{2}k[k(k+1)+1]m.\end{aligned}$$

又由于 $M=(x_m-x_1)+(x_m+x_{m-1}-x_2-x_1)+\cdots+(x_m+x_{m-1}+\cdots+x_{m-k+1}-x_k-x_{k-1}-\cdots-x_1)\leqslant kx_m+(k-1)x_{m-1}+\cdots+x_{m-k-1}\leqslant kx_m+(k-1)x_m+\cdots+x_m=\dfrac{k(k+1)}{2}x_m.$

由此即得 $x_m>\dfrac{k}{k+1}m^2-\dfrac{k(k+1)+1}{k+1}m\geqslant\dfrac{k}{k+1}m^2-(k+1)m$（$k<m\leqslant n$）.

当 $1\leqslant m\leqslant k$ 时，上式显然也成立.

于是，$\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{n} i^2-(k+1)\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{k+1}\cdot\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]$ 对一切 $1<k<n$ 成立.

习 题 7

1. 用数学归纳法去证明 $a_n>n$.

2. 设 $(k-1)(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})\geqslant k(a_2+a_4+\cdots+a_{2k-2})$，要证命题对 n 成立，只须证 $a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1}+ka_{2k+2}\geqslant a_2+a_4+\cdots+a_{2k-2}+(k+1)a_{2k}$，即 $k(a_{2k+1}-a_{2k})\geqslant(a_2-a_1)+\cdots+(a_{2k}-a_{2k-1})$，由条件 $a_{i+2}-a_{i+1}\geqslant a_{i+1}-a_i$，这是显然的.

3. 利用 $y=-x^2+x$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上的单调性即可完成从 k 到 $k+1$ 的过渡.

4. 由 $a_n>0$，$\operatorname{arccot} a_{n+1}+\operatorname{arccot} a_{n+2}\in(0,\pi)$，$\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数，故只须证明：$\cot(\operatorname{arccot} a_n)\geqslant\cot(\operatorname{arccot} a_{n+1}+\operatorname{arccot} a_{n+2})$，即证 $(a_{n+1}+a_{n+2})a_n\geqslant a_{n+1}\cdot a_{n+2}-1$.

而 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，故只要证明：$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2\geqslant-1$.

用数学归纳法，容易验证 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$. 因此原不等式成立，易见等号成立当且仅当 n 为偶数.

5. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，$a_1\geqslant a_1$，不等式显然成立.

假设当 $n=1,2,\cdots,k-1$ 时不等式成立，即有

$$\begin{cases} a_1\geqslant a_1, \\ a_1+\frac{a_2}{2}\geqslant a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k-1}\geqslant a_{k-1}. \end{cases}$$

相加得 $(k-1)a_1+(k-2)\frac{a_2}{2}+\cdots+(k-(k-1))\frac{a_{k-1}}{k-1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$，即 $k\left(a_1+\frac{a_n}{2}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k-1}\right)\geqslant2(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=(a_1+a_{k-1})+(a_2+a_{k-2})+\cdots+(a_{k-1}+a_1)\geqslant ka_k-a_k$.

故 $a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\geqslant a_k$，因此原不等式成立.

6. 若存在 x，使得 $a_n=[nx]$，则$\frac{a_n}{n}\leqslant x<\frac{a_n+1}{n}$，此不等式应对 $n=1$，2，…，2004 都成立，于是，x 应同时属于 2004 个区间：$\left[\frac{a_n}{n}，\frac{a_n+1}{n}\right)$. 如果 x 存在，x 可取为 $\max\left\{\frac{a_m}{m}\right\}$.

这样，只要证明对一切 $n\in\{1, 2, \cdots, 2004\}$，都有 $\frac{a_n+1}{n}>x\geqslant\frac{a_m}{m}$.

下面证明：若 m、n 是正整数，且 m、$n\leqslant 2004$，则有

$$ma_n+m>na_m. \tag{①}$$

当 $m=n$ 时，①式成立；又由于当 $m=1$，$n=2$ 和 $m=2$，$n=1$ 时，有 $a_2+1>2a_1$ 及 $2a_1+2>a_2$，由题设知①式成立.

假设当 m、n 都小于 k $(3\leqslant k\leqslant 2004)$ 时命题成立.

当 $m=k$ 时，设 $m=nq+r$，$q\in\mathbf{N}_+$，$0\leqslant r<n$. 则 $a_m=a_{nq+r}\leqslant a_{nq}+a_r+1\leqslant a_{(q-1)n}+a_n+a_r+2\leqslant\cdots\leqslant qa_n+a_r+q$. 故 $na_m\leqslant n(qa_n+a_r+q)=ma_n+m+(na_r-ra_n-r)$. 利用归纳假设，$ra_n+r>na_r$，故 $na_m<ma_n+m$.

当 $n=k$ 时，设 $n=mq+r$，$q\in\mathbf{N}_+$，$0\leqslant r<m$. 则 $a_n\geqslant a_{qm}+a_r\geqslant\cdots\geqslant qa_m+a_r$. $ma_n+m\geqslant mqa_m+ma_r+m=na_m+ma_r+m-ra_m$. 由归纳假设，$ma_r+m>ra_m$，故 $ma_n+m>na_m$，因此①式成立，故 $\frac{a_n+1}{n}>\frac{a_m}{m}$. 令 $x=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant 2004}\frac{a_m}{m}$，则$\frac{a_n+1}{n}>x$，故 $nx-1<a_n\leqslant nx$. 因此 $a_n=[nx]$.

7. 令 $y_n=x_n-\sqrt{2}$，下面用数学归纳法证明 $|y_n|<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\geqslant 3$.

假设 $|y_n|<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，由题设，$y_{n+1}+\sqrt{2}=1+y_n+\sqrt{2}-\frac{1}{2}(y_n+\sqrt{2})^2$，故 $|y_{n+1}|=\left|\frac{1}{2}y_n(2-2\sqrt{2}-y_n)\right|=\frac{1}{2}|y_n|\cdot|y_n+2\sqrt{2}-2|<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sqrt{2}-2\right|<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. 因此结论成立.

8. 我们用归纳法来证：当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，

$$\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{ka}. \tag{①}$$

当 $k=n$ 时，上式显然成立. 设 $\sqrt{(k+1)a+\sqrt{(k+2)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{(k+1)a}$，则 $\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<\sqrt{ka+1+\sqrt{(k+1)a}}<$

$\sqrt{ka+1+2\sqrt{ka}}=1+\sqrt{ka}$.

因此，①对一切 k ($1\leqslant k\leqslant n$)成立.特别地，当 $k=1$ 时有原不等式成立.

9. 当 $n=1$ 时，$a_1=1$，结论成立.设当 $n=k$ 时结论成立.当 $n=k+1$ 时，$a_1a_2\cdots a_{k+1}=1$，由归纳假设，有

$a_{k+1}\cdot a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant k$；$a_{k+1}\cdot a_2+a_1+a_3+\cdots+a_k\geqslant k$；…，$a_{k+1}\cdot a_k+a_1+\cdots+a_{k-1}\geqslant k$.

全部相加，得
$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(a_{k+1}+k-1)\geqslant k^2.$$

故
$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i=\sum_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}\geqslant\frac{k^2}{a_{k+1}+k-1}+a_{k+1}\geqslant k+1.$$

因此结论成立.

10. 设 $b_k=\frac{a_k}{2^k}$，则 $b_{k+2}=\frac{1}{2}b_{k+1}+\frac{1}{4}b_k$，$b_1=\frac{1}{2}$，$b_2=\frac{1}{4}$，故

$b_{k+1}=\frac{1}{2}b_k+\frac{1}{4}b_{k-1}$，$b_k=\frac{1}{2}b_{k-1}+\frac{1}{4}b_{k-2}$，…，$b_3=\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{4}b_1$，

相加，得 $S_{k+2}-b_1-b_2=\frac{1}{2}S_{k+1}-\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{4}S_k$，$S_{k+2}=\frac{1}{2}S_{k+1}+\frac{1}{4}S_k+\frac{1}{2}$，接着用数学归纳法即可证明 $S_n<2$.

11. 当 $n=1$ 时，不等式显然成立.下面用归纳法证明当 $n=2^k$ 时，不等式成立.

当 $k=1$ 时，有
$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}-\frac{2}{\sqrt{r_1r_2}+1}=\frac{(\sqrt{r_1r_2}-1)(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2})^2}{(r_1+1)(r_2+1)(\sqrt{r_1r_2}+1)}\geqslant 0.$$

若当 $k=m$ 时，不等式成立，考虑 $k=m+1$ 的情况.即要证明：
若对 n 个数原不等式成立，则对 $2n$ 个数不等式也成立.
如果 r_1，r_2，…，r_{2n} 均大于1，则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{r_i+1}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i+1}+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{r_i+1}\\&\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}+\frac{n}{\sqrt[n]{r_{n+1}\cdots r_{2n}}+1}\\&\geqslant\frac{2n}{\sqrt[2n]{r_1r_2\cdots r_{2n}}+1}.\end{aligned}$$

故当 $n=2^k$ ($k=1,2,\cdots$) 时，原不等式成立.
对任意自然数 n，存在正整数 k，满足 $m=2^k>n$.

设 $r_{n+1}=r_{n+2}=\cdots=r_m=\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}$，那么

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}+\frac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}\geqslant\frac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1},$$

因此原不等式成立.

12. 由已知条件可得 $\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{f(n)-1}-\dfrac{1}{f(n+1)-1}$,

故 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{f(1)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1}=1-\frac{1}{f(n+1)-1}.$$

下面证明：$2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^n}$，进而结论成立.

当 $n=1$ 时，$f(2)=3$，则 $2<f(2)<4$.

设当 $n=m$ 时，有 $2^{2^{m-1}}<f(m+1)-1<2^{2^m}$ 成立. 考虑当 $n=m+1$ 时的情况，此时，$f(m+2)=f(m+1)(f(m+1)-1)+1$，则

$$(2^{2^{m-1}}+2)(2^{2^{m-1}}+1)+1\leqslant f(m+2)\leqslant 2^{2^m}(2^{2^m}-1)+1.$$

因此 $2^{2^m}<f(m+2)-1<2^{2^{m+1}}$.

13. 先估计 $\{f(n)\}$ 的上界，由于 f 的单调性，只须对其序列 $\{f(2^k)\}$ 进行估计. 根据条件，对 $k\in\mathbf{N}_+$，有

$$\begin{aligned}f(2^{k+1})&\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)f(2^k)\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)f(2^{k-1})\\&\leqslant\cdots\leqslant 2\lambda_k,\end{aligned}$$

其中 $\lambda_k=(1+1)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

通过计算，猜测 $\lambda_k<5$. 事实上，可用数学归纳法证明更强的命题：$\lambda_k\leqslant 5\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$. 于是 $\lambda_k<5$. 对任何 $f\in S$ 及任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 必存在正整数 k，使 $n<2^{k+1}$，则 $f(n)\leqslant f(2^{k+1})\leqslant 2\lambda_k<10$.

下面构造一个符合条件的函数 f_0，使该函数在某处的值 >9，注意到 $2\lambda_5>9$，定义函数 $f_0:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R}$ 如下：

$$f_0(1)=2,$$
$$f_0(n)=2\lambda_k(2^k<n\leqslant 2^{k+1}),$$
$$k\in\{0,1,2,\cdots\},$$

对任何正整数 n，易见 $f_0(n+1)\geqslant f_0(n)$. 下面验证：$f_0(n)\geqslant\dfrac{n}{n+1}f_0(2n)$.

设 $k\in\mathbf{N}$，使得 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$，则 $2^{k+1}<2n\leqslant 2^{k+2}$.

于是，$$f_0(2n)=2\lambda_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot 2\lambda_k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f_0(n).$$

又由于 $f_0(2^6)=2\lambda_5>9$. 故问题解决，$M=10$.

14. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时，由于原不等式关于 a_1、a_2、a_3 轮换对称，不妨设 a_1 为最大者，若 $a_2<a_3$，则 $a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_1-(a_1a_2^3+a_2a_3^3+a_3a_1^3)=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_1-a_3)(a_1+a_2+a_3)<0$.

因此，只须就 $a_2\geqslant a_3$ 的情况加以说明. 下面设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$. 则有 $a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_1\leqslant a_1^3a_2+2a_1^2a_2a_3\leqslant a_1^3a_2+3a_1^2a_2a_3=a_1^2a_2(a_1+3a_3)=\frac{1}{2}a_1\cdot a_1\cdot 3a_2\cdot(a_1+3a_3)\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a_1+a_1+3a_2+a_1+3a_3}{4}\right)^4=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3(a_1+a_2+a_3)}{4}\right]^4=27$. 等号当 $a_1=3$，$a_2=1$，$a_3=0$ 时取到.

设当 $n=k$ $(k\geqslant 3)$ 时，原不等式成立.

当 $n=k+1$ 时，仍设 a_1 为最大者，则

$$\begin{aligned}&a_1^3a_2+a_2^3a_3+\cdots+a_k^3a_{k+1}+a_{k+1}^3a_1\\ \leqslant&a_1^3a_2+a_1^3a_3+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3a_1\\ =&a_1^3(a_2+a_3)+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3a_1.\end{aligned}$$

从而，k 个变量 a_1，a_2+a_3，a_4，…，a_{k+1} 满足条件：

$$a_1+(a_2+a_3)+\cdots+a_{k+1}=4.$$

由归纳假设，$a_1^3(a_2+a_3)+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3a_1\leqslant 27$，故当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立.

15. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设当 $n=s$ 时，有 $\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{x^{k^2}}{k}\geqslant x^{\frac{1}{2}s(s+1)}$. 考虑 $n=s+1$ 的情况.

$$\sum_{k=1}^{s+1}\frac{x^{k^2}}{k}=\sum_{k=1}^{s}\frac{x^{k^2}}{k}+\frac{x^{(s+1)^2}}{s+1}\geqslant x^{\frac{1}{2}s(s+1)}+\frac{x(s+1)^2}{s+1},$$

问题转化为去证明：$x^{\frac{1}{2}s(s+1)}+\frac{x^{(s+1)^2}}{s+1}\geqslant x^{\frac{1}{2}(s+1)(s+2)}$，即

$$1+\frac{x^{\frac{1}{2}(s+1)(s+2)}}{s+1}\geqslant x^{s+1}.\qquad ①$$

令 $y=x^{\frac{1}{2}(s+1)}$，$y>0$，则①等价于

$$1+\frac{y^{s+2}}{s+1}\geqslant y^2. \quad ②$$

令 $f(y)=1+y^2\left(\frac{y^s}{s+1}-1\right)$，这里 $y>0$.

如果 $y\geqslant(s+1)^{\frac{1}{s}}$，则 $f(y)\geqslant 1>0$，②显然成立.

当 $y\in(0,1]$时，②也自然成立.

现在考虑$(1,(s+1)^{\frac{1}{s}})$中的 y，要证明 $f(y)>0$.

而当 $y\in(1,(s+1)^{\frac{1}{s}})$ 时，$\frac{y^s}{s+1}<1$，故 $f(y)=1-y^2\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)$

取 A 为待定系数，于是

$$A^2\left[y^2\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)\right]^s=(Ay^s)(Ay^s)\overbrace{\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)\cdots\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)}^{s个}$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{s+2}\left[2Ay^s+s\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)\right]\right\}^{s+2}.$$

取 $A=\frac{s}{2(s+1)}$，有$\left(\frac{s}{2(s+1)}\right)^2\cdot\left[y^2\left(1-\frac{y^s}{1+s}\right)\right]^s\leqslant\left(\frac{s}{s+2}\right)^{s+2}$.

所以 $y^2\left(1-\frac{y^s}{s+1}\right)\leqslant\frac{s}{s+2}\left[\frac{2(s+1)}{s+2}\right]^{\frac{2}{s}}$.

当 $s=1$ 时，从上式有 $y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)\leqslant\frac{16}{27}<1$，此时 $f(y)>0$.

下面证明：当正整数 $s\geqslant 2$ 时，$\left[\frac{2(s+1)}{s+2}\right]^{\frac{2}{s}}<\frac{s+2}{s}$，如果上式成立，则 $f(y)>0$.

上面不等式等价于 $\frac{2(s+1)}{s+2}<\left(1+\frac{2}{s}\right)^{\frac{s}{2}}$. 如果能证明 $\left(1+\frac{2}{s}\right)^{\frac{s}{2}}\geqslant 2$，则问题解决.

事实上，$\left(1+\frac{2}{s}\right)^s=1+s\cdot\frac{2}{s}+\mathrm{C}_s^2\cdot\left(\frac{2}{s}\right)^2+\cdots\geqslant 1+2+\frac{2(s-1)}{s}\geqslant 4$. 故结论成立.

16. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 设原不等式对 $n-1$ 成立. 即有 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|s_j-z_i|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n-1}((n-k)|z_k|+(k-2)|s_k|)$，而 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|s_j-z_i|=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|s_j-z_i|+\sum\limits_{k=1}^{n}|s_n-z_k|$，且$\sum\limits_{k=1}^{n}((n+1-k)|z_k|+(k-2)|s_k|)=$

$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)\mid z_k\mid+(k-2)\mid s_k\mid]+\sum_{k=1}^{n}\mid z_k\mid+(n-2)\mid s_n\mid.$

为了证明不等式对 n 也成立，只要证明

$$\sum_{k=1}^{n}\mid s_n-z_k\mid\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mid z_k\mid+(n-2)\mid s_n\mid. \qquad ①$$

当 $n=1$、2 时，①式显然成立. 下证①对 $n=3$ 成立.

即证明 $$\mid z_1+z_2\mid+\mid z_2+z_3\mid+\mid z_1+z_3\mid$$
$$\leqslant\mid z_1\mid+\mid z_2\mid+\mid z_3\mid+\mid z_1+z_2+z_3\mid.$$

对 $\sum_{k=1}^{3}\mid s_3-z_k\mid\leqslant\sum_{k=1}^{3}\mid z_k\mid+\mid s_3\mid$，考虑其两边平方

$$\mid s_3\mid^2=\sum_{k=1}^{3}\mid z_k\mid^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(z_i\bar{z}_j+\bar{z}_iz_j).$$

而 $\sum_{k=1}^{3}\mid s_3-z_k\mid^2=\mid s_3\mid^2+\sum_{k=1}^{3}\mid z_k\mid^2$，故

右端^2－左端^2

$$=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mid z_iz_j\mid+2\sum_{i=1}^{3}\mid s_3z_i\mid-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mid s_3^2-s_3z_i-s_3z_j+z_iz_j\mid$$
$$\geqslant 2\sum_{i=1}^{3}\mid s_3z_i\mid-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mid s_3^2-s_3z_i-s_3z_j\mid$$
$$=2\sum_{i=1}^{3}\mid s_3z_i\mid-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mid s_3(s_3-z_i-z_j)\mid=0.$$

假设当 $n\leqslant k$ 时①成立，那么，当 $n=k+1$ 时，把 $\sum_{i=1}^{k-1}z_i$ 看作 1 个数，利用 $n=3$ 时的结果，有

$$\mid s_{k+1}-z_{k+1}\mid+\mid s_{k+1}-z_k\mid+\left|s_{k+1}-\sum_{i=1}^{k-1}z_i\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{k-1}z_i\right|+\mid z_k\mid+\mid z_{k+1}\mid+\mid s_{k+1}\mid. \qquad ②$$

再把 z_k+z_{k+1} 看作一个数，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mid s_{k+1}-z_i\mid+\left|\sum_{i=1}^{k-1}z_i\right|$$
$$\leqslant\mid z_k+z_{k+1}\mid+\sum_{i=1}^{k-1}\mid z_i\mid+(k-2)\mid s_{k+1}\mid. \qquad ③$$

由②+③，有 $\sum_{i=1}^{k+1}|s_{k+1}-z_i|\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}|z_i|+(k+1-2)|s_{k+1}|$. 这说明当 $n=k+1$ 时结论成立. 故原不等式得证.

习 题 8

1. 固定 z 的值，先求 $2x^2+y$ 的最大、最小值，然后让 z 变动，求出整体最大值 $S_{\max}=3$，最小值 $S_{\min}=\frac{57}{72}$.

2. 不妨设 C 为锐角，由 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 2$，得 $0<\frac{1}{2}(\lambda_1A+\lambda_2B)<\pi$，$0<\frac{1}{6}(\lambda_1A+\lambda_2B+4\lambda_3C)<\pi$，$0<\frac{1}{3}(\lambda_1A+\lambda_2B+\lambda_3C)<\pi$，故 $\sin\frac{1}{2}(\lambda_1A+\lambda_2B)>0$，$\sin\frac{1}{6}(\lambda_1A+\lambda_2B+4\lambda_3C)>0$，$\sin\frac{1}{3}(\lambda_1A+\lambda_2B+\lambda_3C)>0$.

于是
$$\begin{aligned}&\sin\lambda_1A+\sin\lambda_2B+\sin\lambda_3C+\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B+\lambda_3C}{3}\\=&2\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B}{2}\cdot\cos\frac{\lambda_1A-\lambda_2B}{2}\\&+2\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B+4\lambda_3C}{6}\cdot\cos\frac{2\lambda_3C-\lambda_1A-\lambda_2B}{6}\\\leqslant&2\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B}{2}+2\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B+4\lambda_3C}{6}\\=&4\sin\frac{4\lambda_1A+4\lambda_2B+4\lambda_3C}{12}\cos\frac{2\lambda_1A+2\lambda_2B-4\lambda_3C}{12}\\\leqslant&4\sin\frac{\lambda_1A+\lambda_2B+\lambda_3C}{3},\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\lambda_1A=\lambda_2B=\lambda_3C$.

3. 先考虑当 $\theta_1+\theta_2$ 不变时，有 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2-2\sin\theta_1\sin\theta_2=4\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)=2\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1\right)+1+\cos(\theta_1+\theta_2)$，因此，当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$，$\theta_1$ 与 θ_2 中有一个角为 0 时，上式取最大值，当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ 时，两角差的绝对值越小，上式的值就越大.

当 $n\geqslant 4$ 时，总有两角之和 $\leqslant\frac{\pi}{2}$，可以将这两个角调整成一个为 0，另一个为原来两角之和而使正弦平方和不减，这样一来，所求 n 个正弦平方和化为三

个角的情形.

当 $n=3$ 时，若 θ_1、θ_2、θ_3 中有两个角为 $\frac{\pi}{2}$，一个角为 0，可以将三者改为 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{4}$. 设 $\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\theta_3$，$\theta_1<\theta_3$. 则 $\theta_1+\theta_3>\frac{\pi}{2}$，$\theta_1<\frac{\pi}{3}<\theta_3$.

令 $\theta'_1=\frac{\pi}{3}$，$\theta'_2=\theta_2$，$\theta'_3=\theta_1+\theta_3-\theta'_1$，则 $\theta'_1+\theta'_3=\theta_1+\theta_3$，$|\theta'_1-\theta'_3|<|\theta_1-\theta_3|$，由前面讨论知 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3<\sin^2\theta'_1+\sin^2\theta'_2+\sin^2\theta'_3$. 因为 $\theta'_2+\theta'_3=\frac{2\pi}{3}$，又可得 $\sin^2\theta'_2+\sin^2\theta'_3\leqslant 2\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$，故 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3\leqslant\frac{9}{4}$，等号成立当且仅当 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{\pi}{3}$ 时，因此当 $n\geqslant 3$ 时所求最大值为 $\frac{9}{4}$.

当 $n=2$ 时，$\theta_1+\theta_2=\pi$，故 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=2\sin^2\theta_1\leqslant 2$. 即最大值为 2.

4. 当 a、b、c、d 中有 1 个为 0 时，不妨设 $d=0$，则只须证明：$abc\leqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$. 由于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a+b+c\geqslant 6$，有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2$，故上式成立.

若 a、b、c、d 均不为 0，则只须证：$f=\sum\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{ab}\leqslant 1$.

不妨设 $a\leqslant 1\leqslant b$，则令 $a'=1$，$b'=a+b-1$，有 $a'b'\geqslant ab$，于是

$$\begin{aligned}&f(a,b,c,d)-f(a',b',c',d')\\&=(a+b)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{a'b'}\right)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\right]\\&\leqslant(a+b)\frac{a'b'-ab}{a'b'ab}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{4}\right)\leqslant 0.\end{aligned}$$

故 $f(a,b,c,d)\leqslant f(a',b',c',d')=f(1,a+b-1,c,d)$.

再经过上述两次磨光变换，得

$$\begin{aligned}f(1,a+b-1,c,d)&\leqslant f(1,1,a+b+c-2,d)\\&\leqslant f(1,1,1,a+b+c+d-3)\\&=f(1,1,1,1)=1.\end{aligned}$$

5. $S=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^3-6\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k=3x_1^2(1-x_1)+3x_2^2(1-x_2)+3x_3^2(1-x_3)+3x_4^2(1-x_4)$.

故 $S\geqslant 0$，等号当 $x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 中有 1 个为 1，另 3 个为 0 时取到.

又 $\frac{1}{3}S=x_1^2(1-x_1)+x_2^2(1-x_2)+x_3^2(1-x_3)+x_4^2(1-x_4)$.

在 x_1+x_2 与 x_3+x_4 中必有一项 $\leqslant\frac{2}{3}$，不妨设 $x_1+x_2\leqslant\frac{2}{3}$.

将 $S=S(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 调整为 $S'=S(x_1+x_2, 0, x_3, x_4)$.

不难证明：$S'\geqslant S$，记 $S'=S(x_1', x_2', x_3', 0)$. 则 $x_1'+x_2'+x_3'=1$. 故 x_1', x_2', x_3' 中必有一个 $\geqslant\frac{1}{3}$，不妨设 $x_3'\geqslant\frac{1}{3}$，于是 $x_1'+x_2'\leqslant\frac{2}{3}$.

将 $S'=S(x_1', x_2', x_3', 0)$ 调整为 $S''=S(x_1'+x_2', x_3', 0, 0)$. 同样易证 $S''\geqslant S'$，其中 $S''=S(a, b, 0, 0)$，且 $a+b=1$.

故 $S''=a^2(1-a)+b^2(1-b)=ab\leqslant\frac{1}{4}$，因此 $S\leqslant 3S''\leqslant\frac{3}{4}$，等号成立，当 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=x_3=0$, $x_4=\frac{1}{2}$. 故 $S\in\left[0, \frac{3}{4}\right]$.

6. 令 $y_i=\sum\limits_{j=i}^{n}x_j$，则 $y_1=n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=2n-2$，故 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(y_k-y_{k+1})+n^2y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)y_k$.

由于 $y_1=n$, $y_2\geqslant y_3\geqslant\cdots\geqslant y_n$，若存在 $i\in\{2, 3, \cdots, n-1\}$，使得 $y_i>y_n$（记 i 为使 $y_i>y_n$ 成立的最大下标). 因为

$$\begin{aligned}&(2i-1)y_i+(2i+1+\cdots+2n-1)y_n\\&<(2i-1+\cdots+2n-1)\cdot\frac{y_i+(n-i)y_n}{n-i+1}\text{（上式等价于 }y_i>y_n\text{）}.\end{aligned}$$

故在保持 $y_i+y_{i+1}+\cdots+y_n$ 不变的前提下，用它们的平均值来代替它们，S 将增大.

所以，当 $y_2=y_3=\cdots=y_n$ 时，$S_{\max}=n^2-2$.

7. 当 $n=1$ 时，$\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)=0$.

当 $n=2$ 时，$\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)=(x_1^4+x_2^4)-(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+x_2^4)=x_1^3x_2-x_1^2x_2^2+x_1x_2^3=x_1x_2(1-3x_1x_2)$.

又由于 $x_1x_2\leqslant\frac{1}{4}$，故可知所求最大值为 $\frac{1}{12}$.

当 $n\geqslant 3$ 时，则

$$\begin{aligned}&-(x^4+y^4-x^5-y^5)+[(x+y)^4-(x+y)^5]\\&=[(x+y)^4-x^4-y^4]-[(x+y)^5-x^5-y^5]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= xy(4x^2+4y^2+6xy)-xy(5x^3+5y^3+10xy^2+10x^2y)\\
&\geqslant xy(4x^2+4y^2+6xy)-5xy(x+y)^3\\
&= xy\left(\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2+\frac{x^2+y^2}{2}+6xy\right)-5xy(x+y)^3\\
&\geqslant xy\left(\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2+7xy\right)-5xy(x+y)^3>0,
\end{aligned}
$$

等价于 $\frac{7}{2}xy(x+y)^2\cdot[7-10(x+y)]>0$，即 $x+y<\frac{7}{10}$.

而当 $n\geqslant 3$ 时，总有 2 个数之和 $<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$，不断用 $x+y$ 替换 x、y，最终必可化为 $n=2$ 时的情形.

综上，$\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 的最大值为 $\frac{1}{12}$.

8. 记 $f(a_1,a_2,a_3)=(a_1+a_2+a_3+3\sqrt[3]{a_1a_2a_3})-2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1})$，不失一般性，可设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，现在作如下调整：令

$$a_1'=a_1,\ a_2'=a_3'=\sqrt{a_2a_3}=A,$$

则 $f(a'_1,a'_2,a'_3)=(a_1+2A+3a_1^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}})-2[A+2(a_1A)^{\frac{1}{2}}]=a_1+3a_1^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}}-4(a_1A)^{\frac{1}{2}}\geqslant 4\sqrt[4]{a_1(a_1^{\frac{1}{3}})^3(A^{\frac{2}{3}})^3}-4(a_1A)^{\frac{1}{2}}=0$.

下面证明：$f(a_1,a_2,a_3)\geqslant f(a_1',a_2',a_3')$.

事实上，$f(a_1,a_2,a_3)-f(a_1',a_2',a_3')=a_2+a_3+4\sqrt{a_1A}-2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1})=a_2+a_3-2a_1^{\frac{1}{2}}(a_2^{\frac{1}{2}}+a_3^{\frac{1}{2}}-2A^{\frac{1}{2}})-2A$.

注意到 $a_1\leqslant A$，$a_2^{\frac{1}{2}}+a_3^{\frac{1}{2}}\geqslant 2\sqrt[4]{a_2a_3}=2A^{\frac{1}{2}}$.

故 $f(a_1,a_2,a_3)-f(a_1',a_2',a_3')\geqslant a_2+a_3-2\sqrt{A}(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}-2\sqrt{A})-2A=(\sqrt{a_2}-\sqrt{A})^2+(\sqrt{a_3}-\sqrt{A})^2\geqslant 0$，故原不等式成立.

注：利用完全一样的方法，不难证明如下的 Kouber 不等式：

若 $a_i\geqslant 0$，$n\geqslant 2$，序列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中的数互不相等，则

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_i+n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}}\geqslant 0.$$

9. 此题解答分两步进行：

(1) 先考虑当 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 确定后，应该如何排列使相应和式最小. 先观察简单情形，即 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=55$，$\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}=\{1,2,\cdots,10\}$ 的情况，将 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 依次排在圆周上，我们证明：10 的两边必为 1 和 2.

若 1 与 10 不相邻，则将 a_i，a_{i+1}，…，1 这一段整体翻转，记 $S=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_1$，$S'$为翻转后相应的和式. 那么，

$$S'-S=10\cdot1+a_i\cdot a_j-(10\cdot a_i+a_j\cdot1)\leqslant0,$$

故调整后和式不增，同理可证 10 的另一边必为 2.

用完全相同的方法，可证 1 的另一边必为 9.

依次类推，使 S 最小的排法只能为 10，1，9，3，7，5，6，4，8，2(圆周排列)，此时 $S_{\min}=224$.

(2) 下面考虑 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2002$ 的情况.

设当 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n$ 时，$\min S(n)=g(n)$，则 $g(55)=224$.

下面证明：$g(n+1)\geqslant g(n)+3$.

对 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n+1$ 的任意一个排列 a_1，a_2，…，a_{10}(圆周上).

若 a_1，a_2，…，a_{10}是连着的 10 个正整数，设 $a_1>1$(若 $a_1=1$，则 $n=55$)，则 a_1-1 不在原来 10 个数中，将 a_1 换成 a_1-1，和至少减少了 $a_1(1+2)-(a_1-1)(1+2)=3$.

而若 a_1，a_2，…，a_{10}不是相连的正整数，则必有 1 个 a_i，使得 a_i-1 不在原来的 10 个数中，将 a_i 换成 a_i-1，和也至少减少了 3. 因此，对 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n+1$ 的每一种排法 $S(n+1)$，可找到 a_1，a_2，…，a_i-1，…，a_{10} 的一个排法，使 $S(n+1)\geqslant S(n)+3\geqslant g(n)+3$，故 $\min S(n+1)\geqslant g(n)+3$，即 $g(n+1)\geqslant g(n)+3$，因而 $g(2002)\geqslant6065$，并且等号可以取到：$a_1=1$，$a_2=9$，$a_3=3$，$a_4=7$，$a_5=5$，$a_6=6$，$a_7=4$，$a_8=8$，$a_9=2$，$a_{10}=1957$.

10. 记 $f(a,b,c)=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，我们先证明：$f(0,a+b,c')\leqslant f(a,b,c)$. 这里 $c'=\dfrac{1}{a+b}$，$ab+bc+ca=1$. 事实上，$f(0,a+b,c')\leqslant f(a,b,c)$ 等价于

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c'}+\frac{1}{c'}\leqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

由于 $c'=\dfrac{1}{a+b}$，$\dfrac{1-ab}{a+b}=c$，不难化简得上式等价于

$$(a+b)^2ab\leqslant2(1-ab).$$

注意到 $2(1-ab)=2c(a+b)\geqslant\dfrac{2(a+b)^2}{2}\geqslant(a+b)^2ab$，故结论成立.

因此，$f(a,b,c)\geqslant\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+b+\dfrac{1}{a+b}}+a+b.$

不难验证在 $a=0$，$b=c=1$ 时，f 取得最小值 $\frac{5}{2}$.

注：也可用累次求极值法来解：

显然，当 a，b，c 均大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，有 $ab+bc+ca>1$，不符题意，则 a、b、c 中必有一个不大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，不妨设 $b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，则

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\\&=\frac{a+2b+c}{1+b^2}+\frac{1}{c+a}\\&=\frac{2b}{1+b^2}+\frac{a+c}{1+b^2}+\frac{1}{a+c}.\end{aligned}$$

下面先固定 b，求出 $\frac{a+c}{1+b^2}+\frac{1}{a+c}$ 的最小值.

令 $x=a+c$，则 $f(x)=\frac{x}{1+b^2}+\frac{1}{x}$ 在 $x\geqslant\sqrt{1+b^2}$ 时单调递增，而 $1-b(a+c)=ac\leqslant\frac{(a+c)^2}{4}$，故 $\frac{x^2}{4}\geqslant1-bx$，则 $x\geqslant2\sqrt{b^2+1}-2b$. 又 $b^2+1\geqslant4b^2$，故 $x\geqslant\sqrt{b^2+1}$，从而 $f(x)\geqslant f(2\sqrt{b^2+1}-2b)$.

综上可知，$S\geqslant\frac{2b}{1+b^2}+f(2\sqrt{b^2+1}-2b)=\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{\sqrt{b^2+1}+b}{2}$，

令 $y=\sqrt{b^2+1}-b>0$，则 $b=\frac{1-y^2}{2y}$.

于是，$S\geqslant\frac{2}{y+b}+\frac{1}{2y}=\frac{9y^2+1}{2y(1+y^2)}=\frac{5}{2}+\frac{(1-y)\left(5\left(y-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\right)}{2y(1+y^2)}\geqslant\frac{5}{2}$（注意 $\sqrt{b^2+1}-b\leqslant1$）.

等号当 $b=0$ 时取到，此时 $a=c=1$，故所求最小值为 $\frac{5}{2}$.

11. 下面先计算 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{2001})=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{2000}a_{2001}+a_{2001}a_1$ 的最大值.

引理：存在一个 $i\in\{1,2,\cdots,2001\}$，使 $a_i>a_{i+4}$（记 $a_{2001+i}=a_i$）.

证明：若不然，有 $a_1\leqslant a_5\leqslant a_9\leqslant\cdots\leqslant a_{2001}\leqslant a_4\leqslant a_8\leqslant\cdots\leqslant a_{2000}\leqslant a_3\leqslant a_7\leqslant\cdots\leqslant a_{1999}\leqslant a_2\leqslant a_6\leqslant\cdots\leqslant a_{1998}\leqslant a_1$.

于是，有 $a_1=a_2=\cdots=a_{2001}=\dfrac{2}{2001}$，不合题目条件，引理证毕.

不妨设 $a_{1998}>a_1$. 对于给定的 $a_1,a_2,\cdots,a_{1998},a_{2000}$，令 $a_1'=a_1$，$a_2'=a_2$，$\cdots$，$a_{1998}'=a_{1998}$，$a_{2000}'=a_{2000}$，$a_{2001}'=0$，$a_{1999}'=a_{1999}+a_{2001}$，则 $\sum\limits_i a_i'=2$.

$f(a_1',a_2',\cdots,a_{2001}')=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{1997}a_{1998}+a_{1998}(a_{1999}+a_{2001})+(a_{1999}+a_{2001})\cdot a_{2000}>f(a_1,a_2,\cdots,a_{2001})$.

接着，令 $a_1''=a_1'$，$\cdots$，$a_{1998}''=a_{1998}'+a_{2000}'$，$a_{1999}''=a_{1999}'$，$a_{2000}'=0$，则易证 $f(a_1'',a_2'',\cdots,a_{2000}'',0)>f(a_1',a_2',\cdots,a_{2000}',0)$.

即每次将末尾一个非零的 a_i 变为 0，将 a_i 与 a_{i-2} 的和变为新的 a_{i-2}，f 值增大，直至只剩下 3 个数时，$a_1+a_2+a_3=2$，$f(a_1,a_2,a_3,0,\cdots,0)=a_1a_2+a_2a_3=a_2(2-a_2)\leqslant 1$，即 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{2001})$ 的最大值为 1，当且仅当 $a_4=a_5=\cdots=a_{2001}=0$，$a_2=1$ 时取到.

因此，$S=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1+a_1^2+a_3^2\geqslant 1+\dfrac{(a_1+a_3)^2}{2}=\dfrac{3}{2}$.

且 $S=2(a_1-1)^2+\dfrac{3}{2}\leqslant 2(0\leqslant a_1\leqslant 1)$. 故 $S_{\max}=2$，$S_{\min}=\dfrac{3}{2}$.

12. $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_jx_i(x_j+x_i)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}x_ix_j(x_i+x_j)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}x_i^2x_j+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}x_ix_j^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(1-x_i)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2(1-x_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_j^3$.

当 $n=1$ 时，$x_1=1$，上式右端为 0.

当 $n=2$ 时，上式右端 $=(x_1^2+x_2^2)-(x_1^3+x_2^3)$.

$x_1x_2\leqslant\dfrac{1}{4}(x_1+x_2)^2=\dfrac{1}{4}$，当 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立.

当 $n\geqslant 3$ 时，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{n-1}\geqslant x_n$.

记 $v=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1\}$.

令 $F(v)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3$.

取 $w=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}+x_n,0)\}$，则

$$F(w)-F(v)=x_{n-1}x_n[2-3(x_{n-1}+x_n)].$$

又由于 $\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)\leqslant\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，故 $x_{n-1}+x_n\leqslant\dfrac{2}{n}\leqslant\dfrac{2}{3}$，于是 $F(w)\geqslant F(v)$.

然后，将 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}+x_n$ 从大到小排为 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}$，有 $F(v) \leqslant F(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}, 0)$.

利用上述结论，又有 $F(v) \leqslant F(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}, 0) \leqslant F(x''_1, x''_2, \cdots, x''_{n-2}, 0, 0)$，且 $\sum\limits_{k=1}^{n-2} x''_k = 1$.

最后得到 $F(v) \leqslant f(a, b, 0, \cdots, 0) = a^2+b^2-a^3-b^3 \leqslant \frac{1}{4}$（这里 $a+b=1$，$a, b \in [0, 1]$.），等号当 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$，$x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ 时取到.

13. 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$，设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最后一个非零数为 $x_{k+1}(k \geqslant 2)$. 将 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0$（$n-k-1$ 个 0）调整为 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k+x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0$（$n-k$ 个 0）. 和仍为 1.

记 $F(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2)$，则调整后

$F(x_1, x_2, \cdots, x_k+x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0) - F(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0) = x_k x_{k+1} \cdot [(x_k+x_{k+1})(3-4(x_k+x_{k+1}))+2x_k x_{k+1}]$.

由于 $k \geqslant 2$，$1 \geqslant x_1+x_k+x_{k+1}$，因为 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k \geqslant x_{k+1}$，有 $x_1 \geqslant \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$，故 $1 \geqslant \frac{3}{2}(x_k+x_{k+1})$，即 $x_k+x_{k+1} \leqslant \frac{2}{3}$，于是 $4(x_k+x_{k+1}) \leqslant \frac{8}{3} < 3$.

因此，$F(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k+x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0) \geqslant F(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0)$.

经过若干步调整，有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant F(a, b, 0, 0, \cdots, 0) = ab(1-2ab) \leqslant \frac{1}{8}$（这里 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，且 $a+b=1$）.

故所求 $c = \frac{1}{8}$，等号成立的充要条件是 x_i 中 2 个正数相等，其余全为 0.

注：下面再给出一种较简洁的证明.

证法 2：令 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$，其余 $x_i(3 \leqslant i \leqslant n)$ 为 0，有 $c \geqslant \frac{1}{8}$.

下证：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^4 \geqslant 8 \sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2)$.

事实上，$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} x_i x_j\right)^2 \geqslant 4\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2\sum\limits_{i<j} x_i x_j = 8\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n}\left(x_i x_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant 8\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2)$，

故结论成立.

14. 设 $l=1997x$，$m=1997y$，$n=1997z$，则 l，m，$n\in\{0,1,2,\cdots,1996\}$，且 $l^2+m^2-n^2=1997^2$.

下面先来求 $l+m+n$ 的最小值.

固定 l，有 $(m-n)(m+n)=(1997-l)(1997+l)$. 为使 $m+n$ 尽可能地小，应使 $m+n$ 与 $m-n$ 尽可能接近，但总有 $m+n\geqslant\sqrt{(1997+l)(1997-l)}$. 设 $l_1=1997-l$，则 $l+m+n\geqslant 1997-l_1+\sqrt{l_1(3994-l_1)}$.

不妨设 $l\geqslant m$，则 $l>1400$，故 $1\leqslant l_1\leqslant 60$.

注意到 $1997-l_1$ 随 l_1 增大每次小 1，但 $\sqrt{l_1(3994-l_1)}$ 上升很快，猜测最小值必在 l_1 较小时取到.

(1) $l_1=1$，$(m+n)(m-n)=3993$，$m+n\geqslant 121$.

即当 $l=1996$ 时，$m+n+l\geqslant 1996+121=2117$.

(2) 当 $200\leqslant l_1\leqslant 600$ 时，$l+m+n\geqslant 1997-600+\sqrt{200\times 3794}>2117$.

(3) 当 $50\leqslant l_1\leqslant 200$ 时，也易见 $l+m+n\geqslant 1997-200+\sqrt{50\times 3994}>2117$.

(4) 当 $10\leqslant l_1\leqslant 50$ 时，$l+m+n\geqslant 1997-50+\sqrt{10\times 3984}>2117$.

(5) 当 $5\leqslant l_1\leqslant 10$ 时，$l+m+n\geqslant 1997-10+\sqrt{5\times 3989}>2117$.

(6) $l_1=4$，$l+m+n\geqslant 1997-4+2\times 63>2117$.

(7) $l_1=3$，$(m-n)(m+n)=3\times 3991$，有 $(m+n)_{\min}=307$，则 $l+m+n=1997-3+307=2301$.

(8) $l_1=2$，$(m-n)(m+n)=998$，则 $l+m+n\geqslant 1997-2+998>2117$.

综上所述，$(l+m+n)_{\min}=2117$，等号当 $l=1996$，$m=77$，$n=44$ 时取到.

再来求 $l+m+n$ 的最大值.

我们有 $(m-n)(m+n)=l_1(3994-l_1)$，故 $l_1<m-n\leqslant m+n<3994-l_1$，且 l_1，$m-n$，$m+n$，$3994-l_1$ 这 4 个数同奇偶（令 $l_1=2$，就可注意到这点）. 所以 $m-n\geqslant l_1+2$，则 $m+n\leqslant\dfrac{(3994-l_1)l_1}{l_1+2}$，猜测等号成立时取到最大值.

若等号成立，则 (i) l_1 为奇数，只须 $l_1+2\mid(3994-l_1)l_1$ 即可；

(ii) l_1 为偶数，则不但要整除，且商必须也为偶数.

记 $l'=l_1+2$，则 $\dfrac{(3994-l_1)l_1}{l_1+2}=3998-\left(l'+\dfrac{2\times 3996}{l'}\right)$.

等号成立的条件，当 l' 为奇时，只须 $l'\mid 2\times 3996$；当 l' 为偶时，而须

$\frac{2\times 3996}{l'}$为偶，故只须 $l' \mid 3996$.

于是，
$$l+m+n\leqslant 5997-2\left(l'+\frac{3996}{l'}\right),$$
在 $l'=54$ 或 74 时，$l+m+n\leqslant 5741$，下证 5741 即为最大值.

首先，当 l'在$[54, 74]$外时，已无须验证.

当 $l'\in[54, 74]$ 时，等号不能成立.

故 $l+m+n\leqslant 1997-l_1+\frac{l_1(3994-l_1)}{l_1+4}\leqslant 1997-l_1+\frac{71}{75}(3994-l_1)=$
$1997-l_1+(3994-l_1)-\frac{4}{75}(3994-l_1)\leqslant 6000-100-\frac{4}{75}\times 3750<5741$,

故$(l+m+n)_{\max}=5741$，等号当 $l=1945$，$m=1925$，$n=1871$ 时成立.

习 题 9

1. 证法 1：取定一个参量 t，$a_i\leqslant t$ 的至多有 t 个，下面估计大于 t 的那些 a_i 的个数.

首先，对任意两个 a_i，a_j，有 $[a_i, a_j]\leqslant n$，即
$$\frac{a_ia_j}{(a_i, a_j)}\leqslant n. \quad ①$$
而 $(a_i, a_j)\mid a_i-a_j(\neq 0)$，故 $|a_i-a_j|\geqslant(a_i, a_j)$.

由①，$\frac{(a_i, a_j)}{a_ia_j}\geqslant\frac{1}{n}$，故$\frac{|a_i-a_j|}{a_ia_j}\geqslant\frac{1}{n}$，即
$$\left|\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j}\right|\geqslant\frac{1}{n}. \quad ②$$
对于 $a_1>a_2>\cdots>a_l>t$，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{a_1}<\cdots<\frac{1}{a_l}<\frac{1}{t}$.

结合②知 $l\leqslant\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{n}\right)\cdot n$.

综上所述，$k\leqslant t+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{n}\right)\cdot n=\frac{n}{t}+t-1$.

取 $t=[\sqrt{n}]$，即有 $k\leqslant 2\sqrt{n}+1$.

证法 2：我们来估计每一项有些什么性质：

由 $[a_1, a_2]=\frac{a_1\cdot a_2}{(a_1, a_2)}\leqslant n$，故 $a_2\cdot\left[\frac{a_1}{(a_1, a_2)}\right]\leqslant n$.

由于 $a_1>a_2$，易证$\frac{a_1}{(a_1, a_2)}\geqslant 2$，故 $2a_2\leqslant n$.

于是，我们已有 $a_1 \leqslant n$，$2a_2 \leqslant n$，猜测对所有 $i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$，都有

$$ia_i \leqslant n. \tag{③}$$

假设③是正确的，那么

$$\begin{aligned} k &= \text{不超过 } a_t \text{ 的数的个数} + \text{大于 } a_t \text{ 的数的个数} \\ &\leqslant \text{不超过 } a_t \text{ 的数的个数} + t \\ &\leqslant a_t + t \leqslant \frac{n}{t} + t. \end{aligned}$$

取 $t = [\sqrt{n}] + 1$，亦有 $k \leqslant 2\sqrt{n} + 1$. 可见③可能是正确的.

用数学归纳法. 设 $(i-1)a_{i-1} \leqslant n$，要证 $ia_i \leqslant n$.

事实上，$[a_i,\ a_{i-1}] = Aa_i = Ba_{i-1}$，并且$[a_i,\ a_{i-1}] \leqslant n$.

(1) 如果 $A \geqslant i$，则 $ia_i \leqslant n$ 成立.

(2) 如果 $A < i$，由于 $a_i < a_{i-1}$，则 $B<A$.

$$ia_i = \frac{iB}{A}a_{i-1} = \frac{(i-1)iBa_{i-1}}{A(i-1)} \leqslant n\frac{iB}{(i-1)}A,$$

又由于 $A \geqslant B+1$，故 $n \cdot \dfrac{iB}{(i-1)A} \leqslant n\dfrac{i(A-1)}{(i-1)A} < n\dfrac{i}{i-1} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{i}\right) = n$.

因此③成立，证毕.

2. (1) 记不等式左端和式为 $f(x)$，易见当 $x=0$ 或者 π 时，不等式成立. 又由于 $|f(x)|$ 是偶函数，且以 π 为周期，故只须就 $x \in (0,\ \pi)$ 证明即可.

对任何固定的 $x \in (0,\ \pi)$，取 $m \in \mathbf{N}$，使得 $m \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{x} < m+1$，又有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right|.$$

这里约定，当 $m=0$ 时，上式右边第一个和式为 0；当 $m \geqslant n$ 时，第二个和式为 0，且第一个和式的 k 取 1 到 n.

因为 $|\sin x| \leqslant |x|$，故 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{kx}{k} = mx \leqslant \sqrt{\pi}$. 又记 $s_i = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{i} \sin kx\ (i = m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n)$，则

$$\begin{aligned} s_i \cdot \sin\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{i}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)x\right], \end{aligned}$$

故 $|s_i| \leqslant \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$ $(i=m+1, m+2, \cdots, n)$.

从而 $m=\max s_i \leqslant \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$，$m_0=\min s_i \geqslant -\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

令 $a_k=\sin kx$，$b_k=\dfrac{1}{k}$ $(k=m+1, m+2, \cdots, n)$，有

$$b_{m+1} \geqslant b_{m+2} \geqslant \cdots \geqslant b_n.$$

于是，由 Abel 不等式，$m_0 b_{m+1} \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k} \leqslant m b_{m+1}$，即

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

由于当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$，故 $x \in (0, \pi)$ 时，$\sin\dfrac{x}{2} > \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{\pi}$.

于是，$\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{x} \cdot \dfrac{1}{m+1} \leqslant \dfrac{\pi}{x} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$.

所以，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$.

注：利用此法可以证明下述命题：

设 $\{a_n\}$ 为非增的正数数列，求证：若对 $n \geqslant 2001$，$na_n \leqslant 1$，则对任意自然数 $m \geqslant 2001$，$x \in \mathbf{R}$，有 $\left|\sum\limits_{k=2001}^{m} a_k \sin kx\right| \leqslant 1+\pi$.

证明如下：

令 $f_{m,n}(x)=\sum\limits_{k=n}^{m} a_k \sin kx$ $(n=2001)$，则 $f_{m,n}(x)$ 为奇函数，且为周期函数，故只要在 $[0, \pi]$ 上考虑即可.

(i) $x \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right]$，则

$$|\sin nx+\cdots+\sin mx| = \left|\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x}.$$

因此，$|f_{m,n}(x)| \leqslant a_n \cdot \frac{\pi}{x} \leqslant na_n \leqslant 1$.

(ii) $x \in \left[0, \frac{\pi}{m}\right)$，则 $|f_{m,n}(x)| \leqslant a_n nx + \cdots + a_m mx \leqslant (m-n)x \leqslant \pi$.

(iii) $x \in \left[\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right]$，则 $n \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant m$，记 $k = \left[\frac{\pi}{x}\right]$.

因此，$|f_{m,n}(x)| \leqslant |a_n \sin nx + \cdots + a_k \sin kx| + |a_{k+1}\sin(k+1)x + \cdots + a_m \sin mx|$.

由 $0 < x \leqslant \frac{\pi}{k}$ 及(ii)知 $|a_n \sin nx + \cdots + a_k \sin kx| \leqslant \pi$.

由 $\frac{\pi}{k+1} \leqslant x \leqslant \pi$ 及(i)知 $|f_{m,k+1}(x)| \leqslant 1$，于是 $|f_{m,n}(x)| \leqslant |f_{k,n}(x)| + |f_{m,k+1}(x)| \leqslant 1 + \pi$.

(2) 用第 2 章习题第 13 题的结论即可证明.

3. 令 $y_i = \frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2}$ $(i = 1, 2, \cdots, n, x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2)$，则原不等式等价于

$$\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} + \cdots + \frac{1}{1+y_n} \leqslant n - 1. \quad ①$$

由 y_i 的定义知，$y_1 y_2 \cdots y_n = 1$.

如果①中有两项$\leqslant \frac{1}{2}$，由于 $\frac{1}{1+y_i} < 1$，结论已成立.

如果仅有 $\frac{1}{1+y_1} \leqslant \frac{1}{2}$，即 $y_1 \geqslant 1$，$y_2 \leqslant 1$，$y_3 \leqslant 1$，$\cdots$，$y_n \leqslant 1$，那么

$$\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} \leqslant \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2 y_3 \cdots y_n} = \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{y_1}} = 1.$$

故①左边前两项之和$\leqslant 1$，其余 $n-2$ 项均<1，所以①成立.

4. (1) $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i x_j)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(2x_i x_j - (x_i x_j)^2) \leqslant \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = n^2$，故 $\sum_{i=1}^n x_i \leqslant n$，等号在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时取到.

(2) 当 $n=1$ 时，$x_1=1$，满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$.

当 $n=2$ 时，由条件知 $x_1^2+x_2^2+(x_1x_2)^2=3$，于是 $x_1x_2\leqslant\sqrt{3}$，所以

$$(x_1+x_2)^2=3-x_1^2x_2^2+2x_1x_2=3+x_1x_2(2-x_1x_2)\geqslant 3,$$

故 $x_1+x_2\geqslant\sqrt{3}$，等号在 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=0$ 时取到.

当 $n=3$ 时，由题设，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=6$.

若 $\max\{x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_1\}\leqslant 2$，则

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=6+x_1x_2(2-x_1x_2)+x_2x_3(2-x_2x_3)+x_3x_1(2-x_3x_1)\\&\geqslant 6.\end{aligned}$$

若 $\max\{x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_1\}>2$，不妨设 $x_1x_2>2$，则

$$x_1+x_2+x_3\geqslant x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}>2\sqrt{2}>\sqrt{6}.$$

当 $n\geqslant 4$ 时，令 $x_1=x_2=x$，$x_3=x_4=\cdots=x_n=0$.

则 $2x^2+x^4=\frac{n(n+1)}{2}$，故 $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2n(n+1)+4}-2}{2}}$（负的舍去）.

此时，$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sqrt{2\sqrt{2n(n+1)+4}-4}<\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}$.

综上所述，所求的正整数 $n=1$，2 或 3.

5. (1) 当 $a\geqslant 1\geqslant b\geqslant c$ 时，$\theta=2+abc-ab-bc-ca$.

因为 $\frac{a}{c}+ac+\frac{b}{a}+ab+\frac{c}{b}+bc\geqslant 2a+2b+2c=6$，又 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，$abc\leqslant 1$，故左边 $\geqslant 6+abc-1-ab-bc-ac=3+\theta$.

(2) 当 $a\geqslant b\geqslant 1\geqslant c$ 时，$\theta=ab+bc+ca-2-abc\geqslant 0$，故 $ab+bc+ca\geqslant 2+abc$.

又由于 $\frac{a}{c}+ab^2c\geqslant 2ab$，$\frac{b}{a}+abc^2\geqslant 2bc$，$\frac{c}{b}+a^2bc\geqslant 2ac$，故左边 $\geqslant 2(ab+bc+ca)-3abc\geqslant ab+bc+ca+2-2abc\geqslant ab+bc+ca+1-abc=3+\theta$.

注：我们可以证明更强的结论：$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geqslant 3+4\theta$.

证明：由于 $\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=\frac{(a-b)(b-c)}{bc}+\frac{(b-c)(b-a)}{ab}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\geqslant 0$，

故 $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-3\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-3=$

$\dfrac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{2abc}$，以下分两种情况：

(i) $a\geqslant 1\geqslant b\geqslant c$，设 $1-b=\alpha$，$1-c=\beta$，$\alpha\beta\geqslant 0$，则 $a-1=\alpha+\beta$，$\alpha+\beta\leqslant 2$. 那么

$$\begin{aligned}&\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{2abc}\\=&\frac{a(\alpha-\beta)^2+b(\alpha+2\beta)^2+c(\beta+2\alpha)^2}{2abc}\\\geqslant&\frac{b(\alpha+2\beta)^2+c(\beta+2\alpha)^2}{2abc}\\\geqslant&\frac{2\sqrt{bc}\cdot(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}{2abc}\\=&\frac{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}{a\sqrt{bc}}\geqslant\frac{9\alpha\beta}{a\sqrt{bc}}=\frac{9\alpha\beta}{\sqrt{4\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2bc}}\\\geqslant&\frac{9\alpha\beta}{\sqrt{4\cdot\left[\dfrac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b+c}{4}\right]^4}}=\frac{9\alpha\beta}{\frac{9}{8}}\\=&8\alpha\beta\geqslant 4(\alpha+\beta)\alpha\beta=4\theta.\end{aligned}$$

(ii) $a\geqslant b\geqslant 1\geqslant c$，设 $1+\alpha=a$，$1+\beta=b$，$c=1-\alpha-\beta$，则 $\alpha+\beta\leqslant 1$，$\alpha-\beta\geqslant 0$. 此时

$$\begin{aligned}&\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{2abc}\\=&\frac{a(2\beta+\alpha)^2+b(2\alpha+\beta)^2+c(\alpha-\beta)^2}{2abc}\\\geqslant&\frac{a(2\beta+\alpha)^2+b(2\alpha+\beta)^2}{2abc}\\\geqslant&\frac{2\sqrt{ab}(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}{2abc}\\\geqslant&9\alpha\beta\geqslant 9(\alpha+\beta)\alpha\beta=9\theta.\end{aligned}$$

综上，$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geqslant 3+4\theta$.

6. (1) 当 $a\leqslant 1$，$b\leqslant 1$，$c\leqslant 1$ 时，我们来证左式 $\geqslant 3\geqslant a+b+c+\theta$. 这等价于 $ab+bc+ca\leqslant 2+abc$.

利用 $(1-a)(1-b)\geqslant 0$，得 $2-a-b\geqslant 1-ab\geqslant c(1-ab)$，故

$$2+abc\geqslant a+b+c\geqslant ab+bc+ca.$$

(2) 当 $a\geqslant 1,b\leqslant 1,c\leqslant 1$ 时，由 $\theta\geqslant 0$，有

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca+1-abc.$$

而左式 $+ac+ab+bc\geqslant 2(a+b+c)$，则

$$\text{左式}\geqslant 2\sum a-\sum ac+abc-1=a+b+c+\theta.$$

(3) 当 $a\geqslant 1,b\geqslant 1,c\leqslant 1$ 时，易证 $a+b+c\geqslant a+1+bc\geqslant 2+abc$.
又由 $\theta\geqslant 0$，得 $ab+bc+ca\geqslant a+b+c+abc-1$.

$$\sum a^2b+\sum b\geqslant 2\sum ab\geqslant \sum ab+\sum a+abc-1,$$

故 $$\sum a^2b\geqslant \sum ab+abc-1\geqslant abc\left(\sum ab+1-abc\right),$$

因此 $$\text{左端}\geqslant \sum ab+1-abc=a+b+c+\theta.$$

对 $a\geqslant 1,c\geqslant 1,b\leqslant 1$ 的情况也可类似证明.

综上所述，原不等式成立.

7. (1) 下面证明：依次按半径为 1、3、5、6、4、2 或 2、4、6、5、3、1 的顺序排列 6 个圆时，首尾两圆外公切线为最长.

设六个圆依次为 $O_1,O_2,\cdots,O_6$，O_i 半径为 r_i，且与 l 相切于 $T_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，对于 $1\leqslant i\leqslant 5$，由勾股定理易知：$T_iT_{i+1}^2=4r_ir_{i+1}$.

因此，$T_1T_6=2(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_4}+\sqrt{r_5r_6})$.

由于 $r_1,r_2,\cdots,r_6$ 是 $1,2,\cdots,6$ 的一个排列，故 T_1T_6 的表达式可写为

$$T_1T_6=2(\sqrt{1r_1'}+\sqrt{2r_2'}+\sqrt{3r_3'}+\sqrt{4r_4'}+\sqrt{5r_5'}).$$

由上式及排序原理易知，在 $r_1'\leqslant r_2'\leqslant r_3'\leqslant r_4'\leqslant r_5'$ 且每个数尽可能大时，T_1T_6 值最大，于是试着取 $r_5'=r_4'=6$.

另一方面，r_1'、r_2'、r_3' 只能是 1、2、3、4、5 中的某三个，且互不相等，所以取 $r_1'=3,r_2'=4,r_3'=5$，按前面所说的，这样选取的 $r_1',r_2',\cdots,r_6'$ 将使 T_1T_6 值最大.

由于此时 $\sum\limits_{i=1}^{5}\sqrt{ir_i'}=\sqrt{1\times 3}+\sqrt{2\times 4}+\sqrt{3\times 5}+\sqrt{4\times 6}+\sqrt{5\times 6}=\sqrt{1\times 3}+\sqrt{3\times 5}+\sqrt{5\times 6}+\sqrt{6\times 4}+\sqrt{4\times 2}=\sqrt{2\times 4}+\sqrt{4\times 6}+\sqrt{6\times 5}+\sqrt{5\times 3}+\sqrt{3\times 1}$，故上述取法是符合要求的.

(2) 下面证明：依次按半径为 6、1、4、3、2、5 或 5、2、3、4、1、6 的顺序排时，将使 $M=T_1T_6$ 的值最小.

求 $T_1T_6=2(\sum\limits_{i=1}^{6}\sqrt{r_ir_{i+1}}-\sqrt{r_nr_{n+1}})$（$r_1\sim r_6$ 的圆周排列断开）时，由于 $1\times6\leqslant2\times3$，易见 1 不能在两端. 由对称性知需研究 1 在第 2、第 3 个位置中的最小者即可.

当 $\{r_2, r_3, \cdots, r_6\}=\{2, 3, \cdots, 6\}$ 时，排法 $r_2, r_3, 1, r_4, r_5, r_6$ 的 $T_1T_6=\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3}+\sqrt{r_4}+\sqrt{r_4r_5}+\sqrt{r_5r_6}$，设 $\{a, b\}\subset\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 且 $a<b$.

(i) 当 r_4、r_5、r_6 固定时，易知 $r_2>r_3$ 时 T_1T_6 较小；

(ii) 当 r_2、r_3、r_6 固定时，设 $\{r_4, r_5\}=\{a, b\}$，相应 T_1T_6 值之差为 $\sqrt{a}+\sqrt{br_6}-\sqrt{b}-\sqrt{ar_6}=(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{r_6}-1)>0$，从而 $r_4>r_5$ 时 T_1T_6 值较小. 这时，设 $\{r_4, r_5, r_6\}=\{a, b, c\}$，且 $a<b<c$.

由于 $\sqrt{c}+\sqrt{cb}+\sqrt{ba}>\sqrt{c}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}>\sqrt{b}+\sqrt{ba}+\sqrt{ac}$，故 $r_6>r_4>r_5$ 时，T_1T_6 值较小.

(iii) 当 r_3、r_4、r_5 固定时，设 $\{r_2, r_6\}=\{a, b\}$，相应 T_1T_6 值之差为 $\sqrt{ar_3}+\sqrt{r_5b}-\sqrt{br_3}-\sqrt{r_5a}=(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{r_5}-\sqrt{r_3})$.

由此知当 $r_5>r_3$ 且 $r_2>r_6$，或 $r_5<r_3$ 且 $r_2<r_6$ 时，T_1T_6 值较小.

综上所述，当 $r_2>r_6>r_4>r_5>r_3$ 或 $r_6>r_4>r_5$，$r_6>r_2>r_3>r_5$ 时，T_1T_6 值较小，它们分别对应如下排法：

(a) 6，2，1，4，3，5；(b) 4，3，1，5，2，6；(c) 5，3，1，4，2，6；(d) 5，4，1，3，2，6.

对应 T_1T_6 的值分别为 $M_1=4\sqrt{3}+\sqrt{2}+2+\sqrt{15}$，$M_2=5\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{10}$，$M_3=\sqrt{15}+3\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}$，$M_4=2\sqrt{5}+2+\sqrt{6}+3\sqrt{3}$.

此时 M_3 最小，即以排法 5，3，1，4，2，6 时 T_1T_6 值最小.

下面再研究排法 $r_2, 1, r_3, r_4, r_5, r_6$ 的 T_1T_6 值. 此时，

$$T_1T_6=\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}+\sqrt{r_3r_4}+\sqrt{r_4r_5}+\sqrt{r_5r_6}.$$

用同样的方法可得在 $r_2>r_6>r_3>r_4>r_5$ 或 $r_2>r_3>r_6>r_5>r_4$ 时 T_1T_6 值较小，相应排法为：

(a) 6，1，4，3，2，5；(b) 6，1，5，2，3，4.

对应 T_1T_6 值分别为 $M_1=2\sqrt{6}+2+2\sqrt{3}+\sqrt{10}<M_2=2\sqrt{6}+\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{10}$.

综合上述所讨论的不同情况，最后有排法为6，1，4，3，2，5(或5，2，3，4，1，6)为使首尾两圆外公切线最短者.

8. 设这5个数为 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$.

首先 $x_4 < \frac{1}{2}$，否则 $x_4 \geqslant \frac{1}{2}$，$x_5 \geqslant \frac{1}{2}$，得 $x_4 + x_5 \geqslant 1$，矛盾！故 $x_5 = \frac{1}{2}$.

取 x_1、x_2，存在 $x_i(3 \leqslant i \leqslant 5)$，使 $x_2 + x_1 + x_i = 1$.

取 x_4、x_5，存在 $x_j(1 \leqslant j \leqslant 3)$，使 $x_4 + x_5 + x_j = 1$.

则 $1 = x_1 + x_2 + x_i \leqslant x_1 + x_3 + x_i \leqslant x_1 + x_4 + x_i \leqslant x_1 + x_4 + x_5 \leqslant x_j + x_4 + x_5 = 1$.

故 $x_1 + x_2 + x_i = x_1 + x_3 + x_i = x_1 + x_4 + x_i$，于是 $x_2 = x_3 = x_4 = x$.

所以 $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} + x = 1, \\ x_1 + x + x = 1. \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} + x = 1, \\ 2x + x = 1. \end{cases}$ ②

或 $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} + x = 1, \\ 2x + \frac{1}{2} = 1. \end{cases}$ ③

①无解，由②得 $x = \frac{1}{3}$，$x_1 = \frac{1}{6}$，由③得 $x = \frac{1}{4}$，$x_1 = \frac{1}{4}$.

故 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

9. 不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$，于是

$$\begin{aligned} & x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2z^2 \\ = & x^2 \cdot [(1-x)^2 - 2yz] + y^2z^2 + x^2y^2z^2 \\ = & x^2(1-x)^2 - 2x^2yz + y^2z^2 + x^2y^2z^2 \\ \leqslant & \frac{1}{16} - (x^2yz - y^2z^2) - (x^2yz - x^2y^2z^2) \\ \leqslant & \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

当 $x = y = \frac{1}{2}$，$z = 0$ 时等号成立.

10. 首先 $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant 0$，当 $x = 1$，$y = z = 0$ 时等号成立，故最小值为0. 不妨设 $x = \max\{x, y, z\}$，那么

(1) 当 $x \geqslant y \geqslant z$ 时，有 $x^2y + y^2z + z^2x \leqslant x^2y + y^2z + z^2x + z[xy +$

$(x-y)(y-z)]=(x+z)^2y=(1-y)^2y\leqslant\frac{4}{27}$.

(2) 当 $x\geqslant z\geqslant y$ 时，由 $(x-y)(y-z)(z-x)=(xy^2+yz^2+zx^2)-(x^2y+y^2z+z^2x)$ 知 $x^2y+y^2z+z^2x\leqslant x^2y+y^2z+z^2x+(x-y)(y-z)(z-x)=x^2z+z^2y+y^2x\leqslant\frac{4}{27}$. 因此最大值即为 $\frac{4}{27}$，且当 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=0$ 时取到.

11. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，令 $b=c+x$，$a=b+y=c+x+y$，由 $a<b+c$ 知 $y<c$. 若 $xy=0$ 命题显然成立. 下设 $xy\neq 0$，则 $x>0$，$y>0$.

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\frac{yx(x+y)}{(2x+y+2c)(x+2c)(x+y+2c)}\\&<\frac{x^2y+y^2x}{(2x+3y)(x+2y)(x+3y)}\\&=\frac{x^2y+y^2x}{2x^3+13x^2y+27xy^2+18y^3}.\end{aligned}$$

令 $x=ky$，$k>0$，则

$$\begin{aligned}&2x^3+13x^2y+27xy^2+18y^3\\&=2x^2\cdot ky+13x^2y+22xy^2+\frac{5}{k}x^2y+\frac{18}{k^2}x^2y\\&=\left(2k+\frac{5}{k}+\frac{18}{k^2}\right)x^2y+13x^2y+22xy^2\\&\geqslant 5\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}k\right)^3\cdot\frac{5}{k}\cdot\frac{18}{k^2}}\cdot x^2y+13x^2y+22xy^2\\&>22(x^2y+y^2x),\end{aligned}$$

故原不等式成立.

12. 取 $a=b=2c$，有 $k\leqslant 100$. 又由于

$$\begin{aligned}&\frac{a+b+c}{abc}\cdot[(a+b)^2+(a+b+4c)^2]\\&\geqslant\frac{a+b+c}{abc}\cdot[(a+b)^2+(a+2c+b+2c)^2]\\&\geqslant\frac{a+b+c}{abc}\cdot[4ab+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2]\\&=\frac{a+b+c}{abc}\cdot(4ab+8ac+8bc+16\sqrt{ac}\cdot c)\\&=(a+b+c)\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{a}+\frac{8}{b}+\frac{16}{\sqrt{ab}}\right)\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c\right)\cdot\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{\sqrt{ab}}+\frac{8}{\sqrt{ab}}\right)$$
$$\geqslant\left(5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}}\right)\cdot\left(5\sqrt[5]{\frac{2^{14}}{a^2b^2c}}\right)=100.$$

故 $k_{\max}=100$.

13. (1) $p^2+q^2+1>p(q+1)$ 等价于 $\left(q-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}-1\right)^2+\frac{p^2}{2}>0$，显然成立.

(2) 令 $p=\sqrt{2}$，$q=1$，则 $b\leqslant\sqrt{2}$，下证不等式 $p^2+q^2+1\geqslant\sqrt{2}p(q+1)$ 对所有实数 p、q 都成立.

事实上，由 $\left[\frac{p}{\sqrt{2}}-q\right]^2+\left[\frac{p}{\sqrt{2}}-1\right]^2\geqslant 0$，即得此不等式成立，因而 $b_{\max}=\sqrt{2}$.

(3) 令 $p=q=1$，有 $c\leqslant\frac{3}{2}$. 下证不等式 $p^2+q^2+1\geqslant\frac{3}{2}p(q+1)$ 对所有整数 p、q 都成立.

上式等价于 $(3p-4q)^2+(7p^2-24p+16)\geqslant 0$.

由于 $p\geqslant 3$ 或 $p\leqslant 0$ 时，$7p^2-24p+16\geqslant 0$，故结论成立.

当 $p=1$，2 时，也不难验证结论成立，故 $c_{\max}=\frac{3}{2}$.

14. (1) 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $a+b>c$. 原不等式等价于

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<(a+b+c)+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c).$$

由于 $\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c)>\sqrt[n]{2}\cdot c=\sqrt[n]{c^n+c^n}\geqslant\sqrt{b^n+c^n}$，

又不难证明 $\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant\frac{a}{2}+b$ 及 $\sqrt[n]{c^n+a^n}\leqslant\frac{a}{2}+c$，相加即得原不等式成立.

(2) 令 $a=b$，$c\to 0$，有左边 $\to\frac{2+\sqrt[3]{2}}{4}$，故 $k\geqslant\frac{2+\sqrt[3]{2}}{4}$.

下证：不等式左端 $<\frac{2+\sqrt[3]{2}}{4}$.

首先注意到，若 a、b、c 为三角形三边长，则 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 也为三角形的三边长. 不妨设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$，且 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，$z=\sqrt{c}$，则 $x+y+z=2$，x，y，$z\in(0,1)$.

下证：　$\sqrt[3]{x^6+y^6}+\sqrt[3]{y^6+z^6}+\sqrt[3]{z^6+x^6}<2+\sqrt[3]{2}.$　①

由于 $x, y, z<1$，故①左边 $<\sqrt[3]{x^3+y^3}+\sqrt[3]{y^3+z^3}+\sqrt[3]{z^3+x^3}$，而当 $x\geqslant y>0$ 时，不难证明：$x^3+y^3\leqslant[x+(\sqrt[3]{2}-1)y]^3$.

现在设 $x\geqslant y\geqslant z$，则①式

$$\begin{aligned}
\text{左边}&\leqslant x+(\sqrt[3]{2}-1)y+y+(\sqrt[3]{2}-1)z+x+(\sqrt[3]{2}-1)z\\
&=2x+\sqrt[3]{2}y+2(\sqrt[3]{2}-1)z\ (\text{希望 } x,\ y\to 1,\ z\to 0)\\
&=2x+\sqrt[3]{2}y+(2\sqrt[3]{2}-2)(2-x-y)\\
&=4\sqrt[3]{2}-4+(4-2\sqrt[3]{2})x+(2-\sqrt[3]{2})y\\
&\leqslant 4\sqrt[3]{2}-4+4-2\sqrt[3]{2}+2-\sqrt[3]{2}\\
&=2+\sqrt[3]{2},
\end{aligned}$$

因此①成立.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 不等式的解题方法与技巧 / 苏勇，熊斌编著. —2版. —上海：华东师范大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5617-9182-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①苏…②熊…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第265792号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷

不等式的解题方法与技巧(第二版)

编　　著　苏　勇　熊　斌
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　胡红梅
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话　021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　昆山市亭林彩印厂有限公司
开　　本　720×1092　16开
插　　页　1
印　　张　12.5
字　　数　225千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年6月第二次
印　　数　13 001–18 100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9182-0/G·5486
定　　价　24.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系）