数学奥林匹克小丛书 第二版

高中卷 6

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

数列与数学归纳法

冯志刚 著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第二版）编委会

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 0，1，2，…组成的集合
$\mathbf{N}^*$	正整数 1，2，…组成的集合
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$a\mid b$	整数 a 能整除整数 b
$a\nmid b$	整数 a 不能整除整数 b
max	最大值
min	最小值
$[x]$，$\lfloor x\rfloor$	不超过实数 x 的最大整数，即 x 的整数部分
$\lceil x\rceil$	不小于实数 x 的最小整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$
$\sum$	求和
$\prod$	求积
$\equiv$	同余

目 录

第一部分 知识与方法

1 第一数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 成立与否时经常用到的方法. 它是下面的归纳公理的一个直接推论.

归纳公理 设 S 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的一个子集，满足条件：

(1) $1 \in S$；

(2) 若 $n \in S$，则 $n+1 \in S$.

那么 $S = \mathbf{N}^*$.

归纳公理是由皮亚诺(G. Peano，1858—1932)提出的关于正整数的五条公理中的一条，它是数学归纳法的基础.

第一数学归纳法是最常用的一种形式，它就是我们高中课本中所提及的数学归纳法.

第一数学归纳法 设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n=1$ 时，$P(n)$成立；

(2) 由 $P(n)$成立可以推出 $P(n+1)$成立.

那么，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$都成立.

证明 记 $S=\{n \mid n \in \mathbf{N}^*$，且 $P(n)$成立$\}$，则 S 为 $\mathbf{N}^*$ 的子集. 由(1)知 $1 \in S$；由(2)知，若 $n \in S$，则 $n+1 \in S$. 这样由归纳公理可知 $S=\mathbf{N}^*$，也就是说，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$都成立.

说明 事实上，第一数学归纳法与归纳公理是等价的，因此，我们又称之为数学归纳法原理，并把第一数学归纳法简称为数学归纳法.

对中学生而言，要接受数学归纳法的含义和正确性并不难，但是要正确地用好数学归纳法却不是一件容易的事.

数学归纳法中的两步缺一不可. 验证 $P(1)$成立是奠基，利用归纳假设结合已知的有关数学知识证出 $P(n+1)$成立是递推的根据. 这两步对证明命题

相辅相成，构成数学归纳法证明过程的逻辑结构．尤为重要的是在证明过程中必须用到归纳假设，这是检验是否用对了数学归纳法的一把尺．

例1 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \qquad ①$$

证明 当 $n=1$ 时，① 式左边 $=\frac{1}{2}$，① 式右边 $=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，故 $n=1$ 时，① 式成立．

现设①式对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形．

利用 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \qquad ②\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

所以，①式对 $n+1$ 成立．

综上所述，由数学归纳法原理知，①式对一切正整数 n 成立．

说明 这是一个错误的证明，其错误在于证明①式对 $n+1$ 成立时，并没有用到归纳假设．

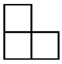
正确的过程如下：

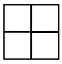
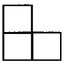
由归纳假设知

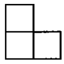
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

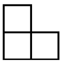
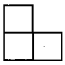
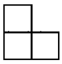
所以，①式对 $n+1$ 成立．

事实上，②式的得到是正确的，但这是对①式的一个直接证明，不应该套上数学归纳法这顶帽子．这一点也是中学生经常犯的一个错误，应认真改正，否则难以形成一个正确的逻辑推导的思维结构．

例 2　设 $n\in\mathbf{N}^*$. 证明：去掉 $2^n\times2^n$ 的方格表的任何一个方格后，剩余的部分都可以用“”形状的 L 型无重叠地完全覆盖.

证明　当 $n=1$ 时，由于一个“”字型去掉任何一个方格后都是一个“”型，故命题对 $n=1$ 成立.

现设 $n=k$ 时，命题成立，即去掉一个 $2^k\times2^k$ 的方格表的任何一个方格后，剩余部分都可用“”型覆盖，我们考虑 $n=k+1$ 的情形.

如图 1 所示，将 $2^{k+1}\times2^{k+1}$ 的方格表依中心所在的两条方格线把表格分割为 4 个 $2^k\times2^k$ 的方格表，则题设中要求去掉的那个小方格必落在某个 $2^k\times2^k$ 的方格表中. 在剩余的部分先绕中心摆一个“”型，去掉图 1 中所示的 4 个阴影方格后，每个 $2^k\times2^k$ 的子表格都去掉了一个方格，而由归纳假设可知，它们都可以用“”型覆盖，再补上绕中心所摆的那个“”型就得出命题对 $n=k+1$ 成立.

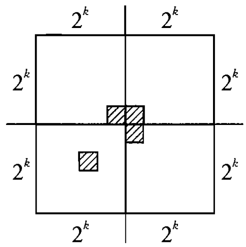


图 1

综上可知，命题对一切正整数 n 成立.

说明　本题采用的是数学归纳法证题时的常用表述方式. 当然了，表达方式可依个人的表达风格而定，但都需要在归纳假设和结论之间进行正确地过渡，它是完成数学归纳法证题时的关键步骤.

例 3　设 x、y 是实数，使得 $x+y$、x^2+y^2、x^3+y^3、x^4+y^4 都是整数. 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 x^n+y^n 都为整数.

证明　此题要用到第一数学归纳法的一种变形：设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题（或性质），如果

(1) 当 $n=1$, 2 时，$P(n)$ 成立；

(2) 由 $P(n)$、$P(n+1)$ 成立可以推出 $P(n+2)$ 成立.

那么，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

事实上，这种变形只是调整了归纳过程中的跨度，这样的例子在后面的讨论中会频繁出现.

回到原题，由条件 $x+y$ 与 x^2+y^2 都是整数可知，命题对 $n=1$, 2 成立.

设命题对 n, $n+1$ 成立，即 x^n+y^n 与 $x^{n+1}+y^{n+1}$ 都是整数，考虑 $n+2$ 的情形. 此时

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x+y)(x^{n+1}+y^{n+1})-xy(x^n+y^n).$$

因此，为证 $x^{n+2}+y^{n+2}\in\mathbf{Z}$，结合归纳假设及条件中的 $x+y\in\mathbf{Z}$，我们只需证明 $xy\in\mathbf{Z}$.

注意到 $x+y$、$x^2+y^2\in\mathbf{Z}$，故 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)\in\mathbf{Z}$. 若 $xy\notin\mathbf{Z}$，则可设 $xy=\frac{m}{2}$，m 为奇数，再由 x^2+y^2、$x^4+y^4\in\mathbf{Z}$，知 $2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)\in\mathbf{Z}$，即 $2\times\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2}\in\mathbf{Z}$. 但 m 为奇数，这是一个矛盾. 所以 $xy\in\mathbf{Z}$. 进而，命题对 $n+2$ 成立.

综上所述，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 $x^n+y^n\in\mathbf{Z}$.

例 4　设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$n$ 是大于 1 的正整数. 证明：

$$\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)\geqslant 2^n-2^{\frac{n}{2}+1}+1. \qquad ①$$

证明　当 $n=2$ 时，①式左右两边相等，故 $n=2$ 时命题成立.

假设命题对 $n(\geqslant 2)$ 成立，则

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)\\&=\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta)(1-\cos^{n+1}\theta)\\&=\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta-\cos^{n+1}\theta)+1\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin^n\theta\cos^n\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^n\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^n\theta}\right)+1\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)+\frac{1-\cos\theta}{\sin^n\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos^n\theta}-1\right]+1\\&\geqslant\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\right]+1, \qquad ②\end{aligned}$$

这里②由归纳假设和均值不等式得到.

注意到 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\leqslant\frac{1}{2}$，而

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)},$$

其中　$(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$

$$=1+t+\frac{t^2-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(t+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2.$$

（这里用到 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$）.

所以$\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\geqslant\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}+1}=2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$. 从而，由②可得

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)\geqslant 2[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2(2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}})]+1$$

$$=2(2^n-2^{\frac{n+1}{2}})+1=2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}+1}+1.$$

即命题对 $n+1$ 成立.

综上所述，命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ $(n\geqslant 2)$ 成立.

说明 上面的几个例子涉及多方面的知识内容，覆盖代数、数论、组合等多个分支，表现了数学归纳法应用的广泛性.

例 5 数列$\{a_n\}$定义如下：

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{[\frac{n}{2}]},\ n=2,\ 3,\ \cdots.$$

证明：该数列中有无穷多项是 7 的倍数.

证明 直接由递推式计算，可得 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=7$.

现设 $a_n(n\geqslant 5)$ 是 7 的倍数，我们寻找下标 $m>n$，使得 $7\mid a_m$.

由 $a_n\equiv 0(\bmod 7)$，知 $a_{2n}=a_{2n-1}+a_n\equiv a_{2n-1}(\bmod 7)$, $a_{2n+1}=a_{2n}+a_n\equiv a_{2n}(\bmod 7)$，故 $a_{2n-1}\equiv a_{2n}\equiv a_{2n+1}(\bmod 7)$. 记 a_{2n-1}除以 7 所得余数为 r. 如果 $r=0$，那么取 $m=2n-1$ 即可；如果 $r\neq 0$，考虑下面的 7 个数：

$$a_{4n-3},\ a_{4n-2},\ \cdots,\ a_{4n+3}. \qquad ①$$

注意到 $a_{4n-2}=a_{4n-3}+a_{2n-1}\equiv a_{4n-3}+r(\bmod 7)$, $a_{4n-1}=a_{4n-2}+a_{2n-1}\equiv a_{4n-2}+r(\bmod 7)\equiv a_{4n-3}+2r(\bmod 7)$, $a_{4n}=a_{4n-1}+a_{2n}\equiv a_{4n-1}+r\equiv a_{4n-3}+3r$, $\cdots$, $a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_{2n+1}\equiv a_{4n+2}+r\equiv a_{4n-3}+6r(\bmod 7)$. 因此，$a_{4n-3}$, a_{4n-2}, $\cdots$, a_{4n+3}构成模 7 的一个完全剩余系. 故存在 $m\in\{4n-3,4n-2,\cdots,4n+3\}$，使得 $a_m\equiv 0(\bmod 7)$.

这样，我们从 a_5 出发结合上面的推导可知，$\{a_n\}$中有无穷多项是 7 的倍数.

例 6 (1) 证明：对任意正整数 $n(\geqslant 2)$，存在 n 个不同的正整数 a_1, $\cdots$, a_n，使得对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，都有$(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)$.

(2) 是否存在一个由正整数组成的无穷集$\{a_1, a_2, \cdots\}$,使得对任意 $i \neq j$,都有$(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$?

证明 (1) 当 $n = 2$ 时,取数 1, 2 即可.

设命题对 n 成立,即存在正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,满足:对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$,都有$(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$,现在考虑下面的 $n+1$ 个数:

$$A,\ A + a_1,\ A + a_2,\ \cdots,\ A + a_n. \qquad ①$$

这里 $A = a_n!$,其中 $a_n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times a_n$.

从①中任取两个数 $x < y$,若 $x = A$, $y = A + a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,则 $y - x = a_i$,而 $x + y = 2A + a_i$,结合 $a_i \leqslant a_n$,知 $a_i \mid A$,故$(y - x) \mid (y + x)$;若 $x = A + a_i$, $y = A + a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$,则 $y - x = a_j - a_i$, $y + x = 2A + (a_i + a_j)$,由归纳假设$(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$,又 $a_j - a_i < a_n$,故$(a_j - a_i) \mid A$,所以$(y - x) \mid (y + x)$. 从而,命题对 $n+1$ 成立.

综上所述,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$,存在满足条件的 n 个正整数.

(2) 若存在无穷多个正整数 $a_1 < a_2 < \cdots$,使得对任意 $1 \leqslant i < j$,都有$(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$,则对任意 $j > 1$,有$(a_j - a_1) \mid (a_j + a_1)$,故$(a_j - a_1) \mid 2a_1$. 而由 $a_1 < a_2 < \cdots$,知 $2a_1$ 可以被无穷多个正整数整除,这是一个矛盾. 所以,不存在满足条件的无穷多个正整数.

说明 数学归纳法证明的是:对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$成立,也就是说它处理的是关于任意有限的正整数 n 的命题,并不能断定 $P(\infty)$成立,这里部分地体现了有限与无穷的本质区别. 从此例中(1)与(2)的对比可看出这一点.

当然,用数学归纳法处理存在性问题也能处理与无穷有关的一些结论,例如例 5 的处理. 对比例 5 与例 6 中的递推结构的构造,可发现两者有本质不同,前者把前面的结果"包容下来",而后者却把前面的数都"扬弃"了.

2 第二数学归纳法

第二数学归纳法 设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n = 1$ 时, $P(n)$成立;

(2) 由"对一切小于 n 的正整数 k, $P(k)$都成立"可以推出 $P(n)$成立.

那么,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$都成立.

证明 考虑命题 $Q(n)$:"对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbf{N}^*$, $P(k)$都成立". 则由 $Q(n)$成立,可知 $P(n)$成立.

当 $n = 1$ 时,由(1)知 $Q(n)$成立.

现设 $Q(n-1)(n\geqslant 2)$ 成立,即对所有 $1\leqslant k\leqslant n-1$, $P(k)$都成立,则由(2)知,$P(n)$成立.所以,对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, $P(k)$都成立,从而,$Q(n)$成立.

于是,由第一数学归纳法可知,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $Q(n)$都成立,进而,$P(n)$成立.第二数学归纳法获证.

第二数学归纳法是第一数学归纳法的推论,在作归纳假设时,我们假设了 $P(1)$, …, $P(n-1)$都成立,并在此前提下证出 $P(n)$成立,这是区别于第一数学归纳法的地方,有时会给证明带来很大的方便.

例1　实数数列 a_1, a_2, …满足:对任意 i、$j\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_{i+j}\leqslant a_i+a_j$. 证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geqslant a_n. \qquad ①$$

证明　当 $n=1$ 时,命题显然成立.

现设①式对所有小于 n 的正整数都成立,即对 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 都有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\geqslant a_k.$$

我们记 $b_k=a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}$, $k=1$, 2, …, $n-1$, 则由上述假设知 $\sum_{k=1}^{n-1}b_k\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}a_k$, 即

$$(n-1)a_1+\frac{n-2}{2}a_2+\cdots+\frac{n-(n-1)}{n-1}a_{n-1}\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}a_k.$$

上式两边都加上 $\sum_{k=1}^{n-1}a_k$, 可得

$$n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)\geqslant 2\sum_{k=1}^{n-1}a_k.$$

于是

$$n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)\geqslant a_n+2\sum_{k=1}^{n-1}a_k. \qquad ②$$

由条件知 $a_1+a_{n-1}\geqslant a_n$, $a_2+a_{n-2}\geqslant a_n$, …, $a_{n-1}+a_1\geqslant a_n$, 所以 $2\sum_{k=1}^{n-1}a_k\geqslant(n-1)a_n$. 这样,由②可得①对 n 成立.

所以,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式①成立.

例2　正整数数列 c_1, c_2, …满足下述条件:

对任意正整数 m、n，若 $1 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$，则存在正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$m = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}.$$

问：对每个给定的 $i \in \mathbf{N}^*$，c_i 的最大值为多少？

解 我们证明：c_1 的最大值为 2，而当 $i \geqslant 2$ 时，c_i 的最大值为 $4 \times 3^{i-2}$.

为此先证：

$$c_1 \leqslant 2,\text{而当 } i \geqslant 2 \text{ 时}, c_i \leqslant 4 \times 3^{i-2}. \qquad ①$$

事实上，若 $c_1 > 1$，取 $(m, n) = (c_1 - 1, 1)$，知存在 $a_1 \in \mathbf{N}^*$，使得 $c_1 - 1 = \frac{c_1}{a_1}$，即 $a_1 = \frac{c_1}{c_1 - 1} = 1 + \frac{1}{c_1 - 1}$，仅当 $c_1 = 2$ 时，a_1 为整数，故 $c_1 \leqslant 2$.

现设①对 $i = 1, 2, \cdots, k-1\ (k \geqslant 2)$ 都成立，取 $(m, n) = (c_k, k)$，则存在 $a_1, \cdots, a_k \in \mathbf{N}^*$，使得 $c_k = \frac{c_1}{a_1} + \cdots + \frac{c_k}{a_k}$. 这要求 $a_k \geqslant 2$，否则 $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{a_i} = 0$ 与 a_i、c_i 为正整数矛盾. 从而 $c_k \leqslant \frac{c_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i$，即 $c_k \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k-1} c_i$. 所以 $c_k \leqslant 2(2 + 4 + 4 \times 3 + \cdots + 4 \times 3^{k-3}) = 4 \times 3^{k-2}$. 因此，由第二数学归纳法知，结论①成立.

再证：

当 $c_1 = 2$，$c_i = 4 \times 3^{i-2}\ (i \geqslant 2)$ 时，数列 $\{c_i\}$ 具有题给的性质. ②

对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时，$m \leqslant c_1 = 2$，故 $m = 1$ 或 2. 若 $m = 1$，取 $a_1 = 2$ 即可，若 $m = 2$，取 $a_1 = 1$ 即可.

假设当 $1, 2, \cdots, n-1$ 时，题给性质满足. 考虑 n 的情形，此时 $1 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$.

若 $m = 1$，取 $a_i = nc_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 即可；

若 $2 \leqslant m \leqslant \frac{c_n}{2} + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right) + 1$，令 $a_n = c_n$，并对 $m - \frac{c_n}{a_n} = m - 1$ 用归纳假设，可知②成立；

若 $\frac{1}{2} c_n + 1 < m \leqslant c_n$，取 $a_n = 2$，并对 $m - \frac{c_n}{2}$ 用归纳假设即可；

若 $c_n < m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$，取 $a_n = 1$，并对 $m - c_n$ 用归纳假设即可.

所以，结论②成立.

综上可知，c_1 的最大值为 2，而当 $i \geqslant 2$ 时，c_i 的最大值是 $4 \times 3^{i-2}$.

说明 对比两个例子可发现，用第二数学归纳法证题时，一个思路是整体处理：例 1 中对归纳假设中的 $n-1$ 个不等式求和；另一个思路是将 n 的情形归入 $1, 2, \cdots, n-1$ 中的某一种情形，这在例 2 的后半部分有明显的体现.

例 3 设 $p(x)$ 是一个 n 次实系数多项式，a 是一个不小于 3 的实数. 证明：下面的 $n+2$ 个数中至少有一个数不小于 1.

$$|a^0 - p(0)|, |a^1 - p(1)|, \cdots, |a^{n+1} - p(n+1)|.$$

证明 对 $p(x)$ 的次数 n 进行归纳.

当 $n = 0$ 时，$p(x)$ 是常数多项式，设 $p(x) = c$，此时，由 $|1-c| + |a-c| \geqslant |a-1| \geqslant 2$，可知 $\max\{|1-c|, |a-c|\} \geqslant 1$，即命题对 $n=0$ 成立.

假设命题对所有次数小于 n 的多项式都成立，考虑次数为 n 的多项式 $p(x)$.

令 $f(x) = \dfrac{1}{a-1}[p(x+1) - p(x)]$，则 $f(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$. 由归纳假设知，存在 $m \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$，使得 $|a^m - f(m)| \geqslant 1$，即 $\left|a^m - \dfrac{1}{a-1}[p(m+1) - p(m)]\right| \geqslant 1$. 故

$$|a^{m+1} - p(m+1) + p(m) - a^m| \geqslant a - 1 \geqslant 2,$$

从而 $\max\{|a^{m+1} - p(m+1)|, |a^m - p(m)|\} \geqslant 1$，即存在 $r \in \{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$，使得 $|a^r - p(r)| \geqslant 1$，命题对 n 成立.

综上可知，对任意次数为 n 的多项式 $p(x)$，命题都成立.

说明 在对多项式的次数用数学归纳法时，常采用第二数学归纳法的形式，因为首项系数相同的两个 n 次多项式之差的次数不一定是 $n-1$ 次，但一定是一个次数小于 n 的多项式. 运用第二数学归纳法处理时就避开了讨论.

例 4 证明：任意一个凸 n 边形都可以被它的三条边张成的三角形或它的四条边张成的平行四边形所覆盖.

证明 对 n 归纳.

当 $n = 3$ 时，结论是显然的；当 $n = 4$ 时，如果该四边形是平行四边形则已完成，如果它不是平行四边形，则有一组对边不平行，将它们延长相交后，总可以用另两条边中的一条合成一个三角形，它覆盖这个四边形（如图 2 所示）.

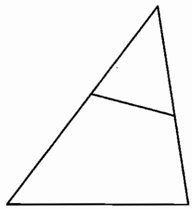


图 2

现假设对任一凸 m 边形结论成立，这里 $m < n$（$n \geqslant 5$）. 取凸 n 边形 M 的任意一条边 AB，除去 AB 及与 AB 相邻的边外，M 还有至少 $n-3 \geqslant 5-3=2$ 条边. 这两条边中必有一条与 AB 不平行（因为至多只能有一条与 AB 平行），设为 CD. 延长 BA 和 CD（不妨设为如图 3 所示的图形），设它们相交于点 U. 现在用折线 BUC 代替被 $\angle BUC$ 覆盖的折线 AD 及边 BA 和 CD，便得到一个边数少于 n 并将 M 覆盖的凸多边形 M_1，对 M_1 用归纳假设，可知命题对 n 成立.

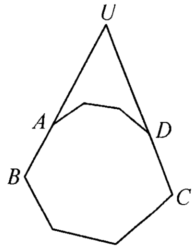


图 3

综上可知，命题成立.

说明 数学归纳法在平面几何中也有广泛的应用. 此题的结论可进一步加强为：若凸 n 边形不是平行四边形，则它可被由其三条边张成的三角形所覆盖.

例 5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一个倒三角形的第 1 行，其中 $a_i \in \{0, 1\}$，$i=1, 2, \cdots, n$. 数 $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 为这个倒三角形的第 2 行，使得若 $a_k = a_{k+1}$，则 $b_k = 0$；若 $a_k \neq a_{k+1}$，则 $b_k = 1$，$k=1, 2, \cdots, n-1$. 类似定义该倒三角形的其余各行，直到第 n 行为止. 求该三角形中 1 的个数的最大值.

解 我们设该三角形中 1 的个数的最大值为 f_n. 容易得到 $f_1 = 1$，$f_2 = 2$，$f_3 = 4$. 例子为

$$1,\quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{0} \end{array},\quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ & 0 \;\; 1 & \\ & 1 & \end{array}.$$

得到上述值可以从表中第一行内 0 的个数出发，但是随着 n 变大时，难以从第一行出发来处理. 试着做 $n=5$，6 时的情形，可以发现下面的表中 1 的个数比较多.

$$\begin{array}{c} 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad \cdots \\ 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad \cdots \\ 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad \cdots \\ 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad \cdots \\ \cdots \end{array}$$

上表中有一个特点，即每三行重复出现（只是"规模"小一些）. 于是，引导我们利用数学归纳法来求 f_n 的值.

先证明一个引理.

引理 当 $n \geqslant 3$ 时，考虑该倒三角形最上面的 3 行

$$\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n \\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1} \\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-2} \end{array}$$

则此 3 行中至少出现 $n-1$ 个 0.

证明　对 n 归纳予以证明.

初始情况的验证留给读者，我们来看如何实现归纳过渡. 注意到，在 mod 2的意义下，前 3 行为

$$\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_n \\ a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ \cdots,\ a_{n-1}+a_n \\ a_1+a_3,\ a_2+a_4,\ \cdots,\ a_{n-2}+a_n \end{array}$$

如果 a_1，a_1+a_2，a_1+a_3 不全为 1，那么去掉这 3 个数，归为 $n-1$ 的情形，利用归纳假设可知，结论成立.

如果 $a_1=a_1+a_2=a_1+a_3=1$，那么 $a_1=1$，$a_2=a_3=0$，此时，表格的前三行前面部分为

$$\begin{array}{lll} 1,\ 0,\ 0, & & a_4,\ a_5,\ \cdots \\ \quad 1,\ 0,\ a_4, & & \quad a_4+a_5,\ \cdots \\ \qquad 1,\ a_4,\ a_5, & & \qquad \cdots \end{array}$$

其中被平行四边形框住的 9 个数（前面的 3 个斜行）中至少有 3 个 0，于是，去掉这 9 个数后，利用归纳假设可知，引理成立.

由上述引理可知 $f_n \leqslant 2(n-1)+f_{n-3}$，$n \geqslant 4$. 结合 $f_1=1$，$f_2=2$，$f_3=4$，可知 $f_n \leqslant \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$，这里$\lceil x \rceil$表示不小于 x 的最小整数. 利用前面的例子，可知 $f_n=\left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$.

所以，该倒三角形中，1 的个数的最大值为$\left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$.

说明　此题找到取最大值的例子是一个关键，但经一定的尝试后不难得到. 解答难在对每三行作为一个整体来进行处理不易想到，它是从例子中得到启发后形成的思路.

例 6　设 $n \in \mathbf{N}^*$，函数 $f:\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^{n-1}\} \to \mathbf{N}^*$ 满足：对 $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}$，都有 $1 \leqslant f(i) \leqslant i$. 证明：存在一个正整数数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，使得 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant 2^{n-1}$，且 $f(a_1) \leqslant \cdots \leqslant f(a_n)$.

证明　对 n 运用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，命题显然成立.

现设命题对 $1, 2, \cdots, n-1$ 都成立，考察 n 的情形.

对 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$，我们用 $t(i)$ 表示满足下述条件的最大正整数 m：存在正整数数列 $i=a_1<a_2<\cdots<a_m\leqslant 2^{n-1}$，使得

$$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_m).$$

如果命题对 n 不成立，那么由 $t(1)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}} t(i)$ 可知，对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$ 都有 $t(i)\leqslant n-1$. 记 $A_j=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}, t(i)=j\}$，$j=1, 2, \cdots, n-1$，则任意两个 A_j 不交，且 $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}A_j=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n-1}\}$，所以 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}|A_j|=2^{n-1}$.

下面先证明：对任意 $1\leqslant j\leqslant n-1$，都有 $|A_j|\leqslant 2^{n-j-1}$.

事实上，若存在 j，使得 $|A_j|>2^{n-j-1}$，则存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant 2^{n-1}$，使得 $t(i_1)=t(i_2)=\cdots=t(i_r)=j$，这里 $r=2^{n-j-1}+1$. 这时，对任意 $1\leqslant p<q\leqslant r$，都应有 $f(i_p)>f(i_q)$（否则，若 $f(i_p)\leqslant f(i_q)$，则在从 i_q 出发的递增 f 数列的前面加入 $f(i_p)$，将导致 $t(i_p)\geqslant t(i_q)+1$，矛盾），故 $f(i_1)>f(i_2)>\cdots>f(i_r)$，进而 $f(i_1)\geqslant r=2^{n-j-1}+1$，结合 $1\leqslant f(i_1)\leqslant i_1$，得 $i_1\geqslant 2^{n-j-1}+1$.

现在，由 $t(i_1)$ 的定义知，存在 $i_1=a_1<\cdots<a_j\leqslant 2^{n-1}$，使得 $f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_j)$，而由归纳假设可知，在 $\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n-j-1}\}$ 中存在 $1\leqslant b_1<\cdots<b_{n-j}\leqslant 2^{n-1-j}<i_1=a_1$，使得 $f(b_1)\leqslant\cdots\leqslant f(b_{n-j})$，再结合 $f(b_{n-j})\leqslant b_{n-j}\leqslant 2^{n-1-j}<r\leqslant f(i_1)=f(a_1)$，可知 $1\leqslant b_1<\cdots<b_{n-j}<a_1<a_2<\cdots<a_j\leqslant 2^{n-1}$，并且 $f(b_1)\leqslant\cdots\leqslant f(b_{n-j})\leqslant f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_j)$，这与 n 时命题不成立的假设矛盾. 所以 $|A_j|\leqslant 2^{n-j-1}$.

但这时，将导致

$$2^{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}|A_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}2^{n-1-j}=1+2+\cdots+2^{n-2}=2^{n-1}-1.$$

矛盾. 所以，命题对 n 成立.

综上可知，命题获证.

说明　这里在证命题对 n 成立时，采用的是反证法，在运用数学归纳法证明问题时应充分地与其他证明方法结合.

3　最小数原理与无穷递降法

最小数原理在数学竞赛中经常被用到，其最基本的表达形式如下：

最小数原理　正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任何一个非空子集 T 必有最小元素，即存在正整数 $t_0 \in T$，使对任意的 $t \in T$，都有 $t_0 \leqslant t$.

证明　考虑集合 $S = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x \notin T\}$，即 $S = \mathbf{N}^* \setminus T$.

若 T 中没有最小元，我们证明：每一个正整数都属于 S，从而导致 $T = \varnothing$，矛盾.

首先，$1 \in S$，否则 $1 \in T$，则 1 是 T 中的最小元.

其次，设 $1, 2, \cdots, n \in S$，即 $1, 2, \cdots, n$ 都不是 T 的元素，这时，若 $n+1 \in T$，则 $n+1$ 为 T 的最小元，这与 T 中没有最小元矛盾. 所以 $n+1 \in S$.

从而，由第二数学归纳法知，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $n \in S$.

所以，最小数原理成立.

具体处理问题时，我们还会用到上述原理的一些其他形式或推论.

1. 最大数原理　设 M 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的非空子集，且 M 有上界，即存在 $a \in \mathbf{N}^*$，使得对任意 $x \in M$，都有 $x \leqslant a$. 则 M 有最大元.

2. 任意一个由实数组成的有限集中，必有最小元素，也必有最大元素.

3. 排序原理　由 n 个实数组成的集合 M 可以写为 $M = \{x_1, \cdots, x_n\}$，这里 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

最小数原理引导我们从极端（最小元或最大元）出发讨论问题，蕴含了“退”的思想，退到最简单而又不失去本质的地方去思考.

无穷递降源于不定方程的求解，Fermat 用此方法在约 400 年前就证明了：$x^4 + y^4 = z^4$ 没有正整数解. 其基本思想如下：

“如果关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 对 $n = n_0$ 成立，那么可以证出对某个 $n_1 \in \mathbf{N}^*$，$n_1 < n_0$，命题 $P(n_1)$ 也成立.”则对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都不成立.

它是最小数原理的一种表现形式，在处理数论问题，特别是不定方程时经常会用到.

例 1　给定平面上任意 n 个不同的点. 证明：存在一个过其中两个点的圆，使得其余 $n-2$ 个点都在此圆的外部.

证明　由于 n 个点中每两点之间的距离只有 C_n^2 个，故必有两点（设为 A、B），它们之间的距离最小（如果有多个这样的点对，从中任取一对即可）.

现考虑以线段 AB 为直径的圆 P，则对 P 内任意一点 C，$\triangle ABC$ 的最长边为 AB. 由 AB 的最小性，可知剩下的 $n-2$ 个点都在圆 P 外. 命题获证.

例 2　证明：不存在有理数 x、y、z，使得

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0 \qquad ①$$

成立.

证明　将①两边乘以 4 后配方，得

$$(2x+3)^2+(2y+3)^2+(2z+3)^2=7.$$

如果存在满足①的三个有理数 x、y、z，那么不定方程

$$a^2+b^2+c^2=7m^2 \qquad ②$$

有整数解 (a, b, c, m) 使得 $m>0$.

如果②有整数解 (a_0, b_0, c_0, m_0)，$m_0>0$，我们证明方程②有一组整数解 (a_1, b_1, c_1, m_1)，$m_1>0$，且 $m_1<m_0$. 这样，由无穷递降的思想，就会找到一个递减的正整数数列 $m_0>m_1>m_2>\cdots$，从而导致矛盾.

事实上，若 m_0 为奇数，则 $m_0^2\equiv1 \pmod 8$，即 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv7 \pmod 8$，但是一个数的完全平方数 $\equiv 0$，1 或 $4 \pmod 8$，从而 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv0$，1，2，3，4，5，$6 \pmod 8$，不会出现 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv7 \pmod 8$ 的情形，矛盾，故 m_0 为偶数. 这时 $a_0^2+b_0^2+c_0^2=7m_0^2\equiv0 \pmod 4$，又完全平方数 $\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$，故 a_0、b_0、c_0 都必须为偶数，这样令 $a_1=\frac{1}{2}a_0$，$b_1=\frac{1}{2}b_0$，$c_1=\frac{1}{2}c_0$，$m_1=\frac{1}{2}m_0$，就得到了一组满足 $0<m_1<m_0$ 的解 (a_1, b_1, c_1, m_1).

综上所述，①没有有理数解.

说明 从"最小的"出发（或者从某一个出发找到"更小的"）是这一节要介绍的重要思想，本质上而言它们都只是数学归纳法的特殊形式. 这从一个方面体现出掌握数学归纳法的困难与挑战，或许正是这些挑战吸引人们去学习数学.

例 3 设 P_1，P_2，…，P_n 是平面上不共线的 n 个点. 证明：至少有一条直线恰过其中的两个点.

证明 这是著名的 Sylvester 定理，有许多证明方法，其中较简洁的一个证明就是用最小数原理获得的.

考虑过 P_1，…，P_n 中至少两点的直线 P_iP_j，该直线外的点到它的距离大于 0，这样的距离只有有限个（因为直线的条数至多 C_n^2 条，而 P_1，…，P_n 在每条直线外的点也是有限个），从而这些距离中有一个最小值.

不妨设，在上面的距离中，点 P_1 到直线 P_2P_3 的距离最短. 我们证明直线 P_2P_3 上没有 P_1，…，P_n 中的其他点.

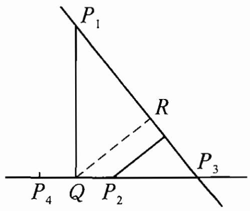


图 4

若直线 P_2P_3 上还有 P_1，…，P_n 中的点，不妨设 P_4 在直线 P_2P_3 上，设 P_1 到直线 P_2P_3 的射影为 Q，则 P_2，P_3，P_4 中必有两点在 Q 的同侧，不妨设 P_2，P_3 在 Q 的同侧，并设 $|QP_2|<|QP_3|$（如图 4 所示）. 则 P_2 到直线 P_1P_3 的距离不超过 Q 到直线 P_1P_3 的距离 QR，而 $QR<P_1Q$，这与 P_1Q 的最小性

矛盾. 从而 P_2P_3 上没有 P_1，…，P_n 中的其他点.

所以，命题成立.

例 4 证明：不定方程

$$x^4+y^4=z^4$$

没有正整数解.

证明 只需证方程

$$x^4+y^4=z^2 \tag{①}$$

没有正整数解.

若否，设①有正整数解 (x, y, z)，我们取使 z 最小的那组解. 这时，设 x、y 的最大公因数为 d，记为 $(x, y)=d$，则 $d^2 \mid (x^4+y^4)$，故 $d^2|z^2$，进而 $d|z$，所以 $d=1$（否则 $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ 也是①的解），因此，(x^2, y^2, z) 是不定方程

$$u^2+v^2=w^2 \tag{②}$$

的一组本原解，不妨设 y^2 为偶数，由②的通解，知存在 $a, b\in \mathbf{N}^*$，$(a, b)=1$，a、b 一奇一偶，使得

$$x^2=a^2-b^2,\ y^2=2ab,\ z=a^2+b^2.$$

由 y^2 为偶数，知 x 为奇数，进而，由 $x^2+b^2=a^2$，可知存在 m、$n\in \mathbf{N}^*$，$(m, n)=1$，m、n 一奇一偶，使得

$$x=m^2-n^2,\ b=2mn,\ a=m^2+n^2.$$

此时 $y^2=4mn(m^2+n^2)$，由 $(m, n)=1$，知 $(m, m^2+n^2)=(n, m^2+n^2)=1$，于是 m^2+n^2、m、n 都是完全平方数. 这样，可设 $m=r^2$，$n=s^2$，$m^2+n^2=z_1^2$，$r, s, z_1\in \mathbf{N}^*$，就有 $r^4+s^4=z_1^2$，其中 $z_1^2=a<z$，与 (x, y, z) 是①的正整数解中 z 最小那组矛盾.

所以，①没有正整数解，命题获证.

说明 这里用到无穷递降法的另一种表述："若命题 $P(n)$ 对某些 $n\in \mathbf{N}^*$ 成立，设 n_0 是使 $P(n)$ 成立的最小正整数（n_0 的存在性由最小数原理可知），则可以证明存在 $n_1\in \mathbf{N}^*$，$n_1<n_0$ 使得 $P(n_1)$ 成立."依此导出对任意 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $P(n)$ 不成立.

例 5 设 n 为给定的正整数. 问：是否存在一个元素个数大于 $2n$ 的由非零平面向量组成的满足如下条件的有限集合 M？

(1) 对 M 中任意 n 个向量，都可以在 M 中另选出 n 个向量，使得这 $2n$ 个

向量之和等于零；

(2) 对 M 中任意 n 个向量，都可以在 M 中另选出 $n-1$ 个向量，使得这 $2n-1$ 个向量之和等于零.

解 不存在这样的集合 M.

事实上，若有这样的 M，由于 M 为有限集，故从中取 n 个向量的方法数是有限种. 存在一种选取，使所得的 n 个向量之和的模长最大，设这 n 个向量是 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$，并记 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{s}$.

过原点作与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的直线 l，则 l 将平面分为两个部分，记 M 中与 $\boldsymbol{s}$ 在同一侧的向量组成的集合为 M_1，与 $-\boldsymbol{s}$ 在同一侧及在 l 上的向量组成的集合为 M_2，则 $M_1\cap M_2=\varnothing$, $M_1\cup M_2=M$.

由条件(2)知，M 中存在向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}$，使得 $\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}=-\boldsymbol{s}$.

下证：不存在向量 $\boldsymbol{v}$，使得 $\boldsymbol{v}\in M_2$，但 $\boldsymbol{v}\notin\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$.

若存在这样的 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}\leqslant 0$. 于是，

$$|\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}+\boldsymbol{v}|^2=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{s}|^2=|\boldsymbol{s}|^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}+|\boldsymbol{v}|^2>|\boldsymbol{s}|^2,$$

这与 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 的取法矛盾.

所以，$|M_2|\leqslant n-1$.

另一方面，由(1)知存在 $\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\in M$，使得

$$|\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n|=0,$$

即 $\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n=-\boldsymbol{s}$，由条件(2)知，$M$ 中存在向量 $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_{n-1}$，使得

$$\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n+\boldsymbol{v}'_1+\cdots+\boldsymbol{v}'_{n-1}=\boldsymbol{0}，即\ \boldsymbol{v}'_1+\cdots+\boldsymbol{v}'_{n-1}=\boldsymbol{s}.$$

用上面类似的方法证明：不存在向量 $\boldsymbol{v}'\in M_1$，但 $\boldsymbol{v}'\notin\{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_{n-1}\}$. 因此 $|M_1|\leqslant n-1$.

综上，将导致 $|M|\leqslant 2n-2$，矛盾. 所以，不存在符合条件的 M.

例 6 设 α 为给定的正整数，求最大的正整数 β，使得存在 $x, y\in\mathbf{N}^*$，满足

$$\beta=\frac{x^2+y^2+\alpha}{xy}. \qquad ①$$

解 注意到，当 $\beta=\alpha+2$ 时，取 $x=y=1$，就有①成立，所以 $\beta_{\max}\geqslant\alpha+2$.

另一方面，设 β 是一个满足条件的正整数，我们设 (x, y) 是所有满足①的正整数对中(这里视 β 为常数)，使得 $x+y$ 最小的那一对.

如果 $x=y$，那么 $\beta=\dfrac{2x^2+\alpha}{x^2}=2+\dfrac{\alpha}{x^2}\leqslant 2+\alpha$.

如果 $x \neq y$，不妨设 $x > y$，这时关于 x 的一元二次方程

$$x^2 - \beta y \cdot x + y^2 + \alpha = 0 \tag{②}$$

还有一个实数解 $\bar{x}$.

由韦达定理及②知 $\bar{x} = \beta y - x \in \mathbf{Z}$，又 $x \cdot \bar{x} = y^2 + \alpha$，即 $\bar{x} = \dfrac{y^2+\alpha}{x} > 0$，所以，$\bar{x}$ 为正整数. 此时，$(\bar{x},\ y)$ 也是满足①的正整数对，因此

$$\bar{x} + y = \frac{y^2+\alpha}{x} + y \geqslant x + y,$$

这里用到 $x+y$ 的最小性.

于是，我们有 $x^2 \leqslant y^2 + \alpha$，且 $x \geqslant y+1$. 进而

$$\beta = \frac{x^2+y^2+\alpha}{xy} \leqslant \frac{2(y^2+\alpha)}{xy} \leqslant \frac{2(y^2+\alpha)}{y(y+1)} = \frac{2y^2}{y^2+y} + \frac{2\alpha}{y(y+1)} < 2+\alpha.$$

这表明 $\beta_{\max} \leqslant 2+\alpha$.

综上可知，β 的最大值为 $\alpha+2$.

例7 求所有的整数 $n > 1$，使得它的任何大于 1 的因数可以表示为 $a^r + 1$ 的形式，这里 a、$r \in \mathbf{N}^*$，$r \geqslant 2$.

解 设 S 是所有满足条件的正整数组成的集合，则对任意 $n \in S$，$n > 1$，n 的每个大于 1 的因数都具有 $a^r + 1$ 的形式，这里 a、$r \in \mathbf{N}^*$，$r > 1$.

由上可知，对任意 $n \in S\ (n > 2)$，存在 a、$r \in \mathbf{N}^*$，a、$r > 1$，使得 $n = a^r + 1$. 我们设 n 的这种表示中 a 是最小的，即不存在 b、$t \in \mathbf{N}^*$，$t > 1$，使得 $a = b^t$. 这时，r 必为偶数(若否，设 r 为奇数，则 $(a+1) \mid n$，于是，$a+1$ 可表示为 $b^t + 1$ 的形式，导致 $a = b^t$，与 a 的最小矛盾). 所以，S 中的每个大于 1 的元素 n 都可表示为 $n = x^2 + 1$，$x \in \mathbf{N}^*$ 的形式.

下面来求 S 的每个元素 n.

如果 n 为素数，那么 n 是具有 $x^2 + 1$ 形式的素数.

如果 n 为合数，分两种情况讨论：

(1) 若 n 为奇合数，则存在奇素数 p、q，使得 p、q、$pq \in S$，此时，应存在 a、b、$c \in \mathbf{N}^*$，满足

$$p = 4a^2 + 1,\ q = 4b^2 + 1,\ pq = 4c^2 + 1.$$

这里还可设 $a \leqslant b < c$. 于是 $pq - q = 4(c^2 - b^2)$，故 $q \mid 4(c-b)(c+b)$，由 q 为奇素数，知 $q \mid c-b$ 或 $q \mid c+b$，总有 $q < 2c$，导致 $pq < 4c^2 < 4c^2 + 1 = pq$，矛盾.

(2) 若 n 为偶合数，注意到 $2^2 \notin S$，结合前面的讨论，可知 n 只能是 $2q$ 的

形式，这里 q 为奇素数. 此时 q、$2q\in S$，于是，存在 a、$b\in\mathbf{N}^*$，使得

$$q=4a^2+1,\ 2q=b^2+1.$$

得 $q=b^2-4a^2=(b-2a)(b+2a)$，所以 $b-2a=1$，$b+2a=q$. 进而 $q-1=4a$，又 $q-1=4a^2$，故 $4a=4a^2$，得 $a=1$，$b=3$，$q=5$，$n=10$. 即 S 中只有一个偶合数 10.

综上可知，任意 $n\in S$，n 是形如 x^2+1 的素数或 10，而这样的 n 具有题中的性质是显然的，所以 $S=\{x^2+1\mid x\in\mathbf{N}^*,\ x^2+1\text{ 为素数}\}\cup\{10\}$.

例 8　桌子上有两堆硬币，已知这两堆硬币的总重量相同，并且对任意正整数 k（这里 k 不超过每堆硬币的个数），第一堆硬币中最重的 k 枚硬币的重量之和不超过第二堆中最重的 k 枚硬币的重量之和. 证明：对任意正实数 x，若将两堆硬币中每一枚重量不小于 x 的硬币都用重量为 x 的硬币替换，则完成此操作后，第一堆的总重量不比第二堆轻.

证明　我们用排序原理来处理.

设第一堆硬币的重量依次为 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n$；第二堆硬币的重量依次为 $y_1\geqslant\cdots\geqslant y_m$. 则由条件知，对任意 $k\leqslant\min\{m,n\}$，都有 $x_1+\cdots+x_k\leqslant y_1+\cdots+y_k$.

对任意 $x\in\mathbf{R}$，设 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_s\geqslant x>x_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant\cdots\geqslant y_t\geqslant x>y_{t+1}\geqslant\cdots\geqslant y_m$. 要证明：

$$sx+x_{s+1}+\cdots+x_n\geqslant tx+y_{t+1}+\cdots+y_m. \qquad ①$$

显然，当 s 或 t 不存在时（注意，由条件知，若 t 不存在则 s 也不存在），不等式①可由 $x_1+\cdots+x_n=y_1+\cdots+y_m$ 得到. 下面考虑 s 与 t 都存在的情形.

记 $x_1+\cdots+x_n=y_1+\cdots+y_m=A$，则①等价于

$$\begin{aligned}&sx+(A-x_1-\cdots-x_s)\geqslant tx+(A-y_1-\cdots-y_t)\\ \Leftrightarrow\ &x_1+\cdots+x_s+(t-s)x\leqslant y_1+\cdots+y_t. \qquad ②\end{aligned}$$

如果 $t\geqslant s$，那么

$$\begin{aligned}x_1+\cdots+x_s+(t-s)x&=x_1+\cdots+x_s+\underbrace{x+\cdots+x}_{t-s\text{个}}\\&\leqslant y_1+\cdots+y_s+y_{s+1}+\cdots+y_t.\end{aligned}$$

不等式②获证.

如果 $t<s$，那么②等价于

$$x_1+\cdots+x_s\leqslant y_1+\cdots+y_t+\underbrace{x+\cdots+x}_{s-t\text{个}}. \qquad ③$$

由条件，我们有

$$\begin{aligned} x_1+\cdots+x_s &\leqslant y_1+\cdots+y_t+y_{t+1}+\cdots+y_s \\ &\leqslant y_1+\cdots+y_t+\underbrace{x+\cdots+x}_{s-t\text{个}}. \end{aligned}$$

所以，③成立.

综上可知，命题成立.

4 数列的通项与求和

按一定次序排列的一列数称为数列，其中的每一个数都叫这个数列的项，依次叫做该数列的第一项(或称为首项)，第二项，…，第 n 项，….

数列的一般形式可写为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

简记为 $\{a_n\}$. 如果 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 可以用 n 的代数式表示，那么这个公式就称为此数列的通项公式.

由数列的上述定义，可知数列在本质上是定义在正整数集上的一个函数. 相关的问题中，求数列的通项公式及前 n 项之和的公式是最基本、最常见的.

用 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和，那么它与通项之间有如下的关系

$$a_1=S_1;\ a_n=S_n-S_{n-1},\ n=2,\ 3,\ \cdots.$$

为表述与讨论方便，我们引入下面的一些概念：

如果一个数列的项数是有限的，那么称它为有穷数列，否则称它为无穷数列.

数列 $\{a_n\}$ 如果满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<a_{n+1}$ (或者 $a_n>a_{n+1}$)，那么称它为递增(或者递减)数列；如果只是 $a_n\leqslant a_{n+1}$ (或者 $a_n\geqslant a_{n+1}$)，那么称它为不减(或者不增)数列.

如果存在常数 M，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|a_n|\leqslant M$，那么实数数列 $\{a_n\}$ 称为有界数列.

例 1 数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意非负整数 m、$n(m\geqslant n)$，都有 $a_{m+n}+a_{m-n}=\dfrac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$，且 $a_1=1$. 求该数列的通项公式.

解 利用题给的条件可知，对任意 $m\in\mathbf{N}$，都有

$$\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2m})=a_{2m}+a_0=2(a_m+a_m),$$

可知 $a_0=0$，且 $a_{2m}=4a_m$.

结合 $a_1=1$，可发现当 $n\in\{0,1,2\}$ 时，都有 $a_n=n^2$，这是否就是数列的通项公式呢？

假设 $a_{m-1}=(m-1)^2$，$a_m=m^2$，那么由条件知

$$a_{m+1}+a_{m-1}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_2)=\frac{1}{2}(4a_m+4a_1),$$

故 $a_{m+1}=2a_m-a_{m-1}+2a_1=2m^2-(m-1)^2+2=m^2+2m+1=(m+1)^2$.
这样，由数学归纳法原理，可知对 $n\in\mathbf{N}$，都有 $a_n=n^2$.

综上所述，所求数列的通项公式为 $a_n=n^2$.

说明 利用已知条件求数列通项是与数列相关的问题中经常出现的，本质上，此题还是一个特殊的函数方程问题，这与数列是定义在正整数集的函数有关.

例 2 设 n 是给定的正整数，数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$，$a_k=a_{k-1}+\frac{a_{k-1}^2}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$. 证明：$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

证明 由条件，可知对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $a_{k-1}<a_k$，故对任意 $0\leqslant k\leqslant n$，都有 $a_k>0$.

现在对条件式作变形

$$\frac{1}{a_k}=\frac{n}{na_{k-1}+a_{k-1}^2}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k-1}+n},$$

将上式移项得

$$\frac{1}{a_{k-1}+n}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}. \qquad ①$$

对①将下标 k 从 1 到 n 求和，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}&=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)\\&=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=2-\frac{1}{a_n}.\end{aligned}$$

结合 $a_{k-1}>0$，可知

$$2-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1,$$

于是 $a_n<1$.

再由 $a_k>a_{k-1}$ 知 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n<1$，故

$$2-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+n}=\frac{n}{n+1},$$

得 $a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}$.

所以，命题成立.

说明 这里对条件式“取倒数”是基于“裂项”的思想，在数列求和中经常会先“裂项”，在求和时达到前后相消的效果.

例 3 对 $n\in\mathbf{N}^*$，设 $a_n=\frac{n}{(n-1)^{\frac{4}{3}}+n^{\frac{4}{3}}+(n+1)^{\frac{4}{3}}}$. 证明：$a_1+a_2+\cdots+a_{999}<50$.

证明 基本的想法是从局部往整体去处理，为此，对 a_n 作恰当放大，达到裂项相消的目的.

注意到 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$，令 $x=(n+1)^{\frac{2}{3}}$，$y=(n-1)^{\frac{2}{3}}$，则 $xy=(n^2-1)^{\frac{2}{3}}<n^{\frac{4}{3}}$. 故

$$\begin{aligned}a_n&<\frac{n}{x^2+xy+y^2}=\frac{n(x-y)}{x^3-y^3}\\&=\frac{n(x-y)}{(n+1)^2-(n-1)^2}=\frac{1}{4}(x-y)\\&=\frac{1}{4}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_1+\cdots+a_{999}&<\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{999}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}})\\&=\frac{1}{4}(\sum_{n=2}^{1000}n^{\frac{2}{3}}-\sum_{n=0}^{998}n^{\frac{2}{3}})\\&=\frac{1}{4}(1000^{\frac{2}{3}}+999^{\frac{2}{3}}-1)\\&<\frac{1}{2}\times1000^{\frac{2}{3}}=50.\end{aligned}$$

命题获证.

说明　“先放缩再求和”在处理与数列求和相关的不等式时是一个重要的方法.

例 4　设 $k\in\mathbf{N}^*$，且 $k\equiv 3\pmod 4$. 定义

$$S_n=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^2k+\mathrm{C}_n^4k^2-\mathrm{C}_n^6k^3+\cdots.$$

证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

证明　利用复数来处理.

由 S_n 的定义结合二项式定理，可知

$$S_n=\mathrm{Re}(1+\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n,$$

这里 i 为虚数单位，$\mathrm{Re}(z)$表示复数 z 的实部.

于是

$$S_n=\frac{1}{2}((1+\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n+(1-\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n),$$

进而，我们记 $x=1+\sqrt{k}\,\mathrm{i}$，$y=1-\sqrt{k}\,\mathrm{i}$，则

$$\begin{aligned}S_{n+2}&=\frac{1}{2}(x^{n+2}+y^{n+2})=\frac{1}{2}((x^{n+1}+y^{n+1})(x+y)-xy(x^n+y^n))\\&=(x+y)S_{n+1}-xyS_n\\&=2S_{n+1}-(1+k)S_n.\end{aligned}$$

并且 $S_1=1$，$S_2=1-k$.

下证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

利用 $k\equiv 3\pmod 4$，可知当 $n=1$，2 时，命题成立；现设命题对 n，$n+1$ 都成立，即 $2^{n-1}\mid S_n$ 且 $2^n\mid S_{n+1}$，则对 $n+2$ 的情形，由 $1+k\equiv 1+3\equiv 0\pmod 4$，及

$$S_{n+2}=2S_{n+1}-(1+k)S_n,$$

可知 $2^{n+1}\mid S_{n+2}$(因为 $2^{n+1}\mid 2S_{n+1}$，$2^{n+1}\mid(1+k)S_n$). 所以，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

说明　从条件出发，作出恰当转换，建立数列的递推关系，再结合数学归纳法处理. 这样的解题思路有“思路清晰、一气呵成”之感，把握起来也较方便.

例 5　一个由正整数组成的递增数列$\{a_n\}$的前面若干项为

$$1;\ 2,\ 4;\ 5,\ 7,\ 9;\ 10,\ 12,\ 14,\ 16;\ 17,\ \cdots.$$

其结构是：1 个奇数，2 个偶数，3 个奇数，4 个偶数，….

证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_n=2n-\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

证明 如果存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $n=1+2+\cdots+k$,那么称正整数 n 是一个三角形数.

现在定义数列 $\{b_n\}$:$b_1=1$,

$$b_{n+1}-b_n=\begin{cases}1, & 若 n 是一个三角形数,\\ 2, & 若 n 不是一个三角形数.\end{cases} \quad ①$$

则由数列$\{a_n\}$的结构结合数学归纳法可知 $a_n=b_n$.

进一步,由于满足①的数列$\{b_n\}$是存在而且唯一的,因此,为证命题成立,我们只需证明(注意:当 $n=1$ 时,$2n-\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]=1$):

$$c_n=\begin{cases}1, & 若 n 是一个三角形数,\\ 2, & 若 n 不是一个三角形数.\end{cases} \quad ②$$

这里 $c_n=2(n+1)-\left[\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\right]-\left(2n-\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]\right)$.

为此,先证明:

当且仅当 n 是一个三角形数时,$\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\in\mathbf{N}^*$. ③

事实上,若存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $n=1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$,则 $\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{4k(k+1)+1}}{2}=\dfrac{1+2k+1}{2}=k+1\in\mathbf{N}^*$;另一方面,若 n 不是三角形数,则存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $\dfrac{k(k+1)}{2}<n<\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$(即 n 介于两个相邻三角形数之间).同上计算,可知

$$k+1<\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}<k+2.$$

所以,③成立.

回证②成立,由于 $c_n=2+\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]-\left[\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\right]$,而当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有

$$0<\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}-\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-\sqrt{8n-7})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8n+1-(8n-7)}{\sqrt{8n+1}+\sqrt{8n-7}}=\frac{4}{\sqrt{8n+1}+\sqrt{8n-7}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{8+1}+\sqrt{8-7}}$$
$$=1.$$

故当且仅当 $\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\in\mathbf{N}^*$ 时，$c_n=2-1=1$；而对其他的 n，有 $c_n=2-0=2$.

利用结论③可知，②成立.

综上可知 $a_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

说明　这是一个分群数列求通项的问题，①反映的正是数列相邻两项的关系，这里的方法是先有结果只需证明时采用的特殊手法，如果要求自己去发现该数列的通项公式题目就困难了.

例 6　我们称一个有穷数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为 k 平衡的，如果

$$a_0+a_k+a_{2k}+\cdots=a_1+a_{k+1}+a_{2k+1}+\cdots=\cdots=a_{k-1}+a_{2k-1}+a_{3k-1}+\cdots$$

已知数列 $a_0, a_1, \cdots, a_{49}$ 对 $k=3, 5, 7, 11, 13, 17$ 而言，都是 k 平衡的. 证明：$a_0=a_1=\cdots=a_{49}=0$.

证明　考察多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{49}x^{49}. \qquad ①$$

我们的思路是去证 $f(x)$ 有 50 个不同的复根，从而导出 $f(x)$ 是一个零多项式，得到 $a_0=\cdots=a_{49}=0$.

对 $k\in\{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$，设 $\varepsilon(\neq 1)$ 是一个 k 次单位根，则当 $m\equiv n(\bmod k)$ 时，有 $\varepsilon^m=\varepsilon^n$，于是

$$\begin{aligned}f(\varepsilon)&=(a_0+a_k+a_{2k}+\cdots)+(a_1+a_{k+1}+\cdots)\varepsilon+\cdots\\&\quad+(a_{k-1}+a_{2k-1}+\cdots)\varepsilon^{k-1}\\&=(a_0+a_k+a_{2k}+\cdots)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{k-1})\\&=0,\end{aligned}$$

这里已用到条件式及 ε 是多项式 $1+x+\cdots+x^{k-1}$ 的根.

因此，对 $k\in\{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 及 $\varepsilon=e^{i\frac{2m\pi}{k}}(1\leqslant m\leqslant k-1)$，可知 ε 都是①的复根，而 k 取不同的素数，故所得复根互不相同. 这表明，$f(x)$ 有 $(3-1)+(5-1)+\cdots+(17-1)=50$ 个不同复根，它只能是零多项式.

命题获证.

说明 ①所列出的多项式称为数列$\{a_m\}$的母函数，它在求数列通项中经常被用到，在第7讲中还会提到.

5 等差数列与等比数列

等差数列与等比数列是两类最简单的数列，它们是其他数列化归的对象.

如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差(比)等于同一个常数，那么称它为等差(比)数列.这个常数叫做等差(比)数列的公差(比)，通常用d表示公差，q表示公比.注意，由于零不能做分母，因此，q不能等于零.

相应于等差(比)数列的通项与求和有下面的相关公式：

1. 记等差数列$\{a_n\}$的前n项之和为S_n，则$a_n=a_1+(n-1)d$，$S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$.

2. 记等比数列$\{a_n\}$的前n项之和为S_n，则$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，而

$$S_n=\begin{cases}na_1, & 若 q=1,\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & 若 q\neq 1.\end{cases}$$

3. 如果等比数列$\{a_n\}$是一个无穷数列，其公比q满足$|q|<1$，那么称它为无穷递缩等比数列，其所有项之和$S=\frac{a_1}{1-q}$.

例1 将$n^2(n\geqslant 4)$个正实数排成n行n列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有的公比相等.已知$a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$.求$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$的值.

解 设每一列数所成等比数列的公比都为q，则$a_{44}=a_{24}\cdot q^2=q^2$.

由于表中的第4行成等差数列，于是a_{42}，a_{43}，a_{44}也成等差，故$a_{42}+a_{44}=2a_{43}$，得

$$\frac{1}{8}+q^2=\frac{6}{16},$$

知 $q^2=\frac{1}{4}$，结合表中每个数都为正实数得 $q=\frac{1}{2}$.

利用第 4 行中的数成等差数列及 $a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，知该等差数列的公差为 $\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$，故首项 $a_{41}=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$. 于是，对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $a_{4k}=\frac{k}{16}$.

现在由第 k 列是以$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，知 $a_{1k}=a_{4k}\cdot q^{-3}=\frac{k}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{k}{2}$，于是，对任意 $1\leqslant m\leqslant n$，都有 $a_{mk}=a_{1k}\cdot q^{m-1}=\frac{k}{2^m}$. 进而 $a_{mm}=\frac{m}{2^m}$.

记 $S=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{m}$，则 $S=\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{m}{2^m}$，故 $\frac{S}{2}=\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{m}{2^{m+1}}$，两式相减，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S&=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2^m}-\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2^{m+1}}\\
&=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2^m}-\sum_{m=2}^{n+1}\frac{m-1}{2^m}\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{m}{2^m}-\frac{m-1}{2^m}\right)-\frac{n}{2^{n+1}}.\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2^m}-\frac{n}{2^{n+1}}\\
&=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2^m}-\frac{n}{2^{n+1}}\\
&=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}\\
&=1-\frac{(n+2)}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

所以 $S=2-\frac{n+2}{2^n}$.

例 2　已知关于 x 的方程

$$(2a-1)\sin x+(2-a)\sin 2x=\sin 3x$$

的非负实数解从小到大构成一个无穷等差数列. 求实数 a 的取值范围.

解　方程变形为

$$\begin{aligned}&2a\sin x - a\sin 2x + 2\sin 2x - \sin x - \sin 3x = 0\\ \Leftrightarrow\ &2a\sin x(1-\cos x) + 2\sin 2x - 2\sin 2x\cos x = 0\\ \Leftrightarrow\ &(2a\sin x - 2\sin 2x)(1-\cos x) = 0.\end{aligned}$$

于是 $1-\cos x=0$ 或者 $\sin 2x = a\sin x$.

前者的所有非负实数解为 $x=2k_1\pi$, $k_1\in\mathbf{N}$；对于后者，方程化为 $\sin x=0$ 或 $\cos x=\frac{a}{2}$，其中 $\sin x=0$ 的非负实数解为 $x=k_2\pi$, $k_2\in\mathbf{N}$，而 $\cos x=\frac{a}{2}$ 仅当 $|a|\leqslant 2$ 时有解，此时非负实数解为 $x=2k_3\pi+\arccos\frac{a}{2}$ 或 $x=2k_4\pi+\pi+\arccos\frac{a}{2}$, k_3、$k_4\in\mathbf{N}$.

综上可知，当 $|a|\geqslant 2$ 时，方程的非负实数解为 $x=k\pi$, $k\in\mathbf{N}$，它们成等差数列；当 $|a|<2$ 时，方程的非负实数解为 $x=k\pi$, $k\in\mathbf{N}$，或者 $x=2k_3\pi+\arccos\frac{a}{2}$ 或 $x=2k_4\pi+\pi+\arccos\frac{a}{2}$，当且仅当 $\arccos\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $a=0$ 时，方程的所有非负实数解从小到大构成等差数列.

所以，满足条件的 $a\in(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$.

例 3 两个由正整数组成的无穷数列满足：一个是以 $d(>0)$ 为公差的等差数列，一个是以 $q(>1)$ 为公比的等比数列；这里 d、q 互素. 证明：如果这两个数列有一项相同，那么存在无穷多项相同.

证明 可设所给的两个数列分别为 $\{a+nd\}$, $n=0, 1, 2, \cdots$；$\{bq^m\}$, $m=0, 1, 2, \cdots$. 这里 a、b、d、q 都是正整数，且 $q>1$.

如果它们有一项相同，不妨设两个数列的第一项相同，否则去掉各数列中的前面的有限项后再讨论，即 $a=b$. 此时，为证两个数列有无穷多项相同，只需证明：存在无穷多个 $m\in\mathbf{N}^*$，使得

$$aq^m\equiv a \pmod d,$$

这只需 $q^m\equiv 1\pmod d$.

注意到 $1, q, q^2, \cdots, q^d$ 除以 d 所得余数只有 d 种不同取值，由抽屉原则可知，存在 $0\leqslant i<j\leqslant d$，使得 $q^j\equiv q^i\pmod d$，结合 $(d, q)=1$，得 $q^{j-i}\equiv 1\pmod d$，进而，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，令 $m=(j-i)n$，就有 $q^m=(q^{j-i})^n\equiv 1^n=1\pmod d$.

所以，命题成立.

说明 熟悉 Euler 定理的同学还可利用当 $(d, q)=1$ 时，$q^{\varphi(d)}\equiv 1\pmod d$ 来构造符合要求的 m.

例 4　数列$\{a_n\}$定义如下

$$a_1=1000\,000,\ a_{n+1}=n\left[\frac{a_n}{n}\right]+n,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明:此数列中有一个无穷子数列(由数列中的项组成的数列称为该数列的子数列)构成一个等差数列.

证明　记 $x_n=\frac{a_{n+1}}{n}$,则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $x_n=\left[\frac{a_n}{n}\right]+1\in\mathbf{N}^*$,即$\{x_n\}$是一个由正整数组成的数列.

进一步,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,有

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\left[\frac{a_{n+1}}{n+1}\right]+1=\left[\frac{nx_n}{n+1}\right]+1\\&=x_n+\left[-\frac{x_n}{n+1}\right]+1\\&\leqslant x_n+(-1)+1=x_n.\end{aligned}$$

这表明$\{x_n\}$是一个不增数列,所以,从某一项起$\{x_n\}$变为一个常数(这是由于 x_n 都为正整数).记这个常数为 k,那么从该项起有 $a_n=kn$,因而,$\{a_n\}$从该项起构成一个等差数列.

命题获证.

说明　本题的结论不依赖于初始值(只要 $a_1\geqslant 0$ 即可),解决过程中用到一个显然的结论:任意一个由正整数组成的不增无穷数列从某项起将变为常数.

例 5　对任意给定的正整数 $n\geqslant 3$,证明:存在由正整数组成的等差数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 和等比数列 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$,使得

$$b_1<a_1<b_2<a_2<\cdots<b_n<a_n. \qquad ①$$

证明　注意到,指数增长的速度大于线性增长,因此,不存在由正整数组成的递增的无穷等差数列$\{a_m\}$和等比数列$\{b_m\}$,使得对任意 $m\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_m>b_m$,当然更不能满足①,本题讨论的是有穷数列,其构造思路是让$\{b_m\}$的公比尽量靠近 1,但在相邻两项之间又有足够的空间.

考察由下面方式定义的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$:

$$b_1=x^n,\ b_2=x^{n-1}(1+x),\ \cdots,\ b_n=x(1+x)^{n-1};$$
$$a_m=x^{n-1}(1+x)-1+(m-1)x^{n-1},\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

其中 x 为待定的正整数.则$\{a_m\}$是以 x^{n-1} 为公差的等差数列,$\{b_m\}$是以 $1+\frac{1}{x}$

为公比的等比数列. 故只需证明:存在正整数 x,使得①成立.

一方面,对 $1\leqslant m\leqslant n$,由于 $a_m=x^n+x^{n-1}-1+(m-1)x^{n-1}$,故当 $x>1$ 时,都有 $a_m>x^n$. 因此

$$a_{m+1}=a_m+x^{n-1}<a_m+\frac{a_m}{x}=a_m\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

结合 $a_1=b_2-1<b_2$ 及 $\{b_n\}$ 是以 $1+\frac{1}{x}$ 为公比的等比数列,可知对任意 $1\leqslant m\leqslant n-1$,都有 $a_m<b_{m+1}$.

另一方面,我们证明:存在 $x\in\mathbf{N}^*$ $(x>1)$,使得对任意 $1\leqslant m\leqslant n$,都有 $b_m<a_m$.

事实上,

$$\begin{aligned}b_m<a_m&\Leftrightarrow x^{n-m+1}(1+x)^{m-1}<x^n+mx^{n-1}-1\\&\Leftrightarrow x^n+\mathrm{C}_{m-1}^{m-2}x^{n-1}+\mathrm{C}_{m-1}^{m-3}x^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{m-1}^{0}x^{n-m+1}\\&\quad<x^n+mx^{n-1}-1\\&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{m-1}^{m-3}x^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{m-1}^{0}x^{n-m+1}<x^{n-1}-1\\&\Leftrightarrow x(\mathrm{C}_{m-1}^{m-3}x^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_{m-1}^{0}x^{n-m})<x^{n-1}-1.\end{aligned}\qquad②$$

利用 $n\geqslant m$,可知 $\mathrm{C}_{n-1}^{n-3}x^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}x^{n-m}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}x+\mathrm{C}_{n-1}^{0}\geqslant\mathrm{C}_{m-1}^{m-3}x^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_{m-1}^{m-1}x^{n-m}$,因此,如果

$$x(\mathrm{C}_{n-1}^{n-3}x^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{1}x+\mathrm{C}_{n-1}^{0})<x^{n-1}-1\qquad③$$

成立,那么②成立.

③式左边是关于 x 的 $n-2$ 次多项式,而右边是 x 的 $n-1$ 次多项式,所以,当 x 充分大时,③式成立.

综上可知,满足条件的数列存在.

例 6 设 $k(\geqslant2)$ 为给定的正整数,对任意 $1\leqslant i\leqslant k$,数 a_i、d_i 都是正整数,等差数列 $\{a_i+nd_i\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 对应的集合为 $A_i=\{a_i+nd_i\mid n=0,1,2,\cdots\}$,$1\leqslant i\leqslant k$. 已知 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 构成 $\mathbf{N}^*$ 的一个 k-分划(即 $A_1,\cdots,A_k$ 两两的交为空集,且 $A_1\cup\cdots\cup A_k=\mathbf{N}^*$). 证明下述结论:

(1) $\frac{1}{d_1}+\cdots+\frac{1}{d_k}=1$;

(2) $\frac{a_1}{d_1}+\cdots+\frac{a_k}{d_k}=\frac{k+1}{2}$.

证明 利用母函数方法来处理,依题中条件可知,对 $|x|<1$,有

$$\sum_{m=1}^{+\infty} x^m = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{a_i + nd_i} \right).$$

利用无穷递缩等比数列求和公式，知

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x^{a_i}}{1-x^{d_i}}.$$

于是，有

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{x^{a_i}}{1+x+\cdots+x^{d_i-1}}. \qquad ①$$

上式两边让 x 从左边趋向于 1，取极限即有 $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i} = 1$，从而(1)成立.

现在对①式两边关于 x 求导数，得

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x^{a_i-1}(1+x+\cdots+x^{d_i-1}) - x^{a_i}(0+1+2x+\cdots+(d_i-1)x^{d_i-2})}{(1+x+\cdots+x^{d_i-1})^2},$$

再在上式两边让 x 从左边趋向于 1，取极限得

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i d_i - (1+2+\cdots+(d_i-1))}{d_i^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{d_i} &= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(d_i-1)d_i}{2d_i^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(k-1) = \frac{k+1}{2}.\end{aligned}$$

这里用到结论(1).

所以，命题成立.

说明 对比上一节例 6，这里用到了无穷级数的理论，它是母函数方法处理中的重要技巧，在第 7 节中会详细说明何谓母函数、如何运用等问题.

6 高阶等差数列与差分方法

对一个给定的数列$\{a_n\}$的相邻两项作差，得到一个新数列

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \cdots,\ a_{n+1} - a_n,\ \cdots,$$

这个数列称为$\{a_n\}$的一阶差数列. 如果记该数列为$\{b_n\}$，其中$b_n=a_{n+1}-a_n$，那么再求$\{b_n\}$的相邻两项之差，所得数列

$$b_2-b_1,\ b_3-b_2,\ \cdots,\ b_{n+1}-b_n,\ \cdots$$

称为原数列$\{a_n\}$的二阶差数列.

依此类推，对任意$p\in\mathbf{N}^*$，可以定义数列$\{a_n\}$的p阶差数列.

如果$\{a_n\}$的p阶差数列是一个非零常数数列，那么称它为p阶等差数列. 特别地，一阶等差数列就是我们通常说的等差数列，二阶及二阶以上的等差数列统称为高阶等差数列.

注意到，数列是定义在$\mathbf{N}^*$上的函数，将上述作差思想予以推广就得到了差分的概念.

设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，令$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，则$\Delta f(x)$也是定义在$\mathbf{R}$上的函数，它称为$f(x)$的一阶差分，与上类似，我们可以递推地定义$f(x)$的二阶，三阶，……，p阶差分

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x)&=\Delta(\Delta f(x))=\Delta(f(x+1)-f(x))\\&=(f(x+2)-f(x+1))-(f(x+1)-f(x))\\&=f(x+2)-2f(x+1)+f(x),\\&\cdots\cdots,\\\Delta^p f(x)&=\Delta(\Delta^{p-1}f(x)).\end{aligned}$$

利用数学归纳法易证下面的定理：

定理 1　设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，则

$$\begin{aligned}\Delta^p f(x)&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}C_p^i f(x+i)\\&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}C_p^i f(x+p-i)\end{aligned}$$

如果函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$是关于x的p次多项式，那么$\Delta f(x)$是关于x的$p-1$次多项式，$\Delta^2 f(x)$是关于x的$p-2$次多项式，…，$\Delta^p f(x)$是关于x的零次多项式，且$\Delta^p f(x)=p!a_p$(这里a_p是$f(x)$的首项系数)，而当$m>p$，$m\in\mathbf{N}^*$时，$\Delta^m f(x)\equiv 0$.

反过来，对函数$f(x)(x\in\mathbf{R})$，如果$\Delta^{p+1}f(x)\equiv 0$，那么$f(x)$是关于x的一个次数不超过p的多项式.

将这些结论应用于高阶等差数列，我们有

定理 2　数列$\{a_n\}$是一个p阶等差数列的充要条件是数列的通项a_n为n的一个p次多项式.

例 1　设数列$\{a_n\}$是一个三阶等差数列，其前面的若干项为 1，2，8，22，47，86，….求$\{a_n\}$的通项公式.

解法一　计算$\{a_n\}$的各阶差分数列，得

$$\{b_n\}:1,\ 6,\ 14,\ 25,\ 39,\cdots;$$
$$\{c_n\}:5,\ 8,\ 11,\ 14,\cdots;$$
$$\{d_n\}:3,\ 3,\cdots.$$

由$\{a_n\}$为三阶等差数列，知$\{d_n\}$是一个常数数列，进而$c_n=c_1+3(n-1)=3n+2$，于是

$$b_{n+1}-b_n=3n+2,\ n=1,\ 2,\cdots$$

从而$b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+\cdots+(b_2-b_1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(3k+2)=\frac{3n(n-1)}{2}+2(n-1)=\frac{(3n+4)(n-1)}{2}$，所以$b_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$.

同上可得

$$\begin{aligned}a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k-1\right)\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{4}+\frac{n(n-1)}{4}-(n-1).\end{aligned}$$

解得$a_n=\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n^2-n+2$.

说明　这里用到裂项求和的方法及求和公式$\sum\limits_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$，$\sum\limits_{k=1}^{m}k^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

解法二　由定理 2 的结论，可设$a_n=An^3+Bn^2+Cn+D$，其中A、B、C、D待定.

利用初始条件，知

$$\begin{cases}A+B+C+D=1,\\8A+4B+2C+D=2,\\27A+9B+3C+D=8,\\64A+16B+4C+D=22.\end{cases}$$

解得$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-1$，$D=2$.

所以 $a_n=\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n^2-n+2$.

说明　利用待定系数的方法求解高阶等差数列的通项公式也经常用到.

例 2　如果对任意 $x\in\mathbf{Z}$,多项式 $f(x)$ 的值都为整数,那么称 $f(x)$ 为整值多项式. 证明:对任意一个 n 次的整值多项式 $f(x)$,都存在整数 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0,使得

$$f(x)=a_n\binom{x}{n}+a_{n-1}\binom{x}{n-1}+\cdots+a_1\binom{x}{1}+a_0.$$

这里 $\binom{x}{k}=\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1)$,它被称为 k 次差分多项式,其中 $\binom{x}{0}=1$.

证明　对 n 次多项式 $f(x)$,如果其首项系数为 c_n,那么令 $b_n=n!\cdot c_n$,可知 $f(x)-b_n\binom{x}{n}$ 是一个次数 $\leqslant n-1$ 的多项式,如此下去,可知存在 b_n, b_{n-1}, $\cdots$, $b_0\in\mathbf{C}$, 使得

$$f(x)=b_n\binom{x}{n}+b_{n-1}\binom{x}{n-1}+\cdots+b_1\binom{x}{1}+b_0. \qquad ①$$

为证命题成立,我们只需证明:b_n, $\cdots$, b_0 都为整数.

注意到,对 $k\in\mathbf{N}^*$,都有 $\Delta\binom{x}{k}=\binom{x+1}{k}-\binom{x}{k}=\frac{1}{k!}((x+1)\cdots(x-k+2)-x(x-1)\cdots(x-k+1))=\frac{1}{(k-1)!}x(x-1)\cdots(x-k+2)=\binom{x}{k-1}$. 现在由 ① 知 $b_0=f(0)\in\mathbf{Z}$(因为 $f(x)$ 为整值多项式),对①的两边作差分,得

$$\Delta f(x)=b_n\binom{x}{n-1}+\cdots+b_2\binom{x}{1}+b_1.$$

再令 $x=0$,知 $b_1\in\mathbf{Z}$,依此递推,即可证得 b_0, b_1, $\cdots$, b_n 都为整数.

命题获证.

说明　如果用 $\Delta^k f(0)$ 表示 $\Delta^k f(x)$ 在 $x=0$ 的函数值,那么由此题证 b_k 都为整数的过程可知,对任意 n 次多项式 $f(x)$,都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)\binom{x}{k}.$$

其中 $\Delta^0 f(0)=f(0)$.

例 3　设数列 $\{a_n\}$ 是一个 p 阶等差数列,其通项公式为 $a_n=f(n)$, 这里

$f(x)$是一个 p 次多项式. 证明：

$$\sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} \Delta^k f(0). \qquad ①$$

并依此给出 $\sum\limits_{m=1}^{n} m^3$ 的公式.

证明　利用上例的说明可知

$$a_m = f(m) = \sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) \binom{m}{k},$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} a_m &= \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) \binom{m}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) (\mathrm{C}_k^k + \cdots + \mathrm{C}_n^k) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) (\mathrm{C}_{k+1}^{k+1} + \mathrm{C}_{k+1}^{k} + \cdots + \mathrm{C}_n^k) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \Delta^k f(0) (\mathrm{C}_{k+2}^{k+1} + \mathrm{C}_{k+2}^{k} + \cdots + \mathrm{C}_n^k) \\
&= \cdots = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} \Delta^k f(0).
\end{aligned}$$

所以，①成立.

当 $f(x) = x^3$ 时，$\Delta f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$，$\Delta^2 f(x) = 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$，$\Delta^3 f(x) = 6(x+1) + 6 - (6x+6) = 6$. 故 $\Delta f(0) = 1$，$\Delta^2 f(0) = 6$，$\Delta^3 f(0) = 6$. 这样利用①可知

$$\sum_{m=1}^{n} m^3 = 6\mathrm{C}_{n+1}^4 + 6\mathrm{C}_{n+1}^3 + \mathrm{C}_{n+1}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

说明　这里给出了 p 阶等差数列前 n 项和的求和公式(在已知通项公式的前提下)，依此可方便地给出 $\sum\limits_{m=1}^{n} m^p$ $(p = 1, 2, \cdots)$ 的求和公式.

例 4　多项式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$，其中 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. 证明：在数 $|f(1)|, |f(2)|, \cdots, |f(n+1)|$ 中必有一个数不小于$\frac{n!}{2^n}$.

证明 由定理 1 的结论,可知

$$\Delta^n f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathrm{C}_n^i f(x+n-i). \quad ①$$

又由 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 可知 $\Delta^n f(x)=n!$，在①式中令 $x=1$，得

$$n!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathrm{C}_n^i f(n+1-i). \quad ②$$

如果命题不成立,那么对 $0\leqslant i\leqslant n$，都有 $|f(n+1-i)|<\frac{n!}{2^n}$，结合②将有

$$n!\leqslant\sum_{i=0}^{n}|(-1)^i\mathrm{C}_n^i f(n+1-i)|<\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\cdot\frac{n!}{2^n}=n!,$$

矛盾.

所以,命题成立.

说明 此题亦可利用 Lagrange 插值公式去处理.

例 5 对非负整数 N,用 $u(N)$表示 N 在二进制表示下数码 1 出现的次数(例如 $u(10)=2$，因为在二进制表示下 $10=(1010)_2$). 用 $\deg p(x)$表示多项式 $p(x)$的次数. 证明:对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，都有

$$\sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}p(i)=\begin{cases}0, & \text{若 } \deg p(x)<k;\\ (-1)^k\alpha\cdot k!\cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}}, & \text{若 } \deg p(x)=k.\end{cases}$$

这里 α 为 $p(x)$的首项系数.

证明 利用差分方法处理.

对 $t\in\mathbf{N}^*$，记 $\Delta_t(p(x))=p(x)-p(x+t)$，则

$$q_k(x)=\Delta_1(\Delta_2(\Delta_4\cdots(\Delta_{2^{k-1}}(p(x)))\cdots)),$$

也是关于 x 的多项式.

我们对 k 归纳来证明:

$$\sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}p(i)=q_k(0). \quad ①$$

当 $k=1$ 时,①式左边$=p(0)-p(1)$，右边为 $q_1(0)=p(0)-p(1)$. 所以,①对 $k=1$ 成立.

现设①对 k 成立,考虑 $k+1$ 的情形,此时

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}(-1)^{u(i)}p(i) &= \sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}p(i)+\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}(-1)^{u(i)}p(i)\\ &= \sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}p(i)-\sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}p(2^k+i)\\ &= \sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}(p(i)-p(2^k+i))\\ &= \sum_{i=0}^{2^k-1}(-1)^{u(i)}\Delta_{2^k}(p(i)).\end{aligned}$$

现在用 $\Delta_{2^k}(p(x))$代替 $p(x)$，对它用归纳假设，可知

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}(-1)^{u(i)}p(i)=q_k(\Delta_{2^k}(p(0)))=q_{k+1}(0).$$

所以，对 $k\in\mathbf{N}^*$，①都成立.

注意到，当 $\deg(p(x))\leqslant k$ 时，对 $p(x)$每作一次差分，其次数就减少 1，故当 $\deg p(x)<k$ 时，有 $q_k(x)=0$. 而当 $\deg p(x)=k$ 时，由于对 $t\in\mathbf{N}^*$，有

$$\begin{aligned}\Delta_t(p(x)) &= p(x)-p(x+t)\\ &= \alpha(x^k-(x+t)^k)+\beta(x^{k-1}-(x+t)^{k-1})+\cdots,\end{aligned}$$

利用二项式定理，知 $\Delta_t(p(x))$是一个首项系数为$-\alpha tk$ 的 $k-1$ 次多项式. 从而，$q_k(x)$是常数多项式，且

$$\begin{aligned}q_k(x) &= \left(\prod_{j=0}^{k-1}(-(j+1)\cdot 2^j)\right)\cdot\alpha\\ &= (-1)^k\cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot k!\cdot\alpha.\end{aligned}$$

从而，命题成立.

说明　这里取 $p(x)$为不同的 k 次多项式，可得到不同的恒等式.

例 6　设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是两个数列，证明下面的二项式反演公式：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k b_k$ 的充要条件是对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k a_k$.

证明　对 $m\in\mathbf{N}^*$，设 $f(x)$是一个 m 次多项式，且对 $0\leqslant k\leqslant m$，都有 $f(k)=a_k$.

利用例 2 中的差分多项式，可知

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\Delta^k f(0)\binom{x}{k}.$$

令 $g(x)=\sum_{k=0}^{m}b_k\binom{x}{k}$，则 $g(x)$ 也是一个 m 次多项式.

如果对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k b_k$，那么对任意 $0\leqslant n\leqslant m$，都有 $g(n)=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_n^k b_k=a_n=f(n)$，这表明 $f(x)-g(x)$ 有 $m+1$ 个不同的根（$x=0,1,2,\cdots,m$），从而它是一个零多项式，所以 $b_n=\Delta^n f(0)$. 结合定理 1 的结论，就有

$$\begin{aligned}b_n=\Delta^n f(0)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k f(k)\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k a_k.\end{aligned}$$

反过来，如果对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k a_k$，那么 $b_n=\Delta^n f(0)$，因而有 $g(x)=f(x)$，所以 $a_n=f(n)=g(n)=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_n^k b_k=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k b_k$（注意，这时要取 $m\geqslant n$）.

综上可知，二项式反演公式成立.

说明　这一节给出了一些与差分方法相关的公式，它们在证明一些恒等式时会有用武之地，在推导一些高阶等差数列的通项与求和问题中也会经常用到.

7　递推数列

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 由它的前面若干项所确定，那么该数列就是一个递推数列. 事实上，等差数列与等比数列都是递推数列，它们满足的递推关系式分别是 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ 和 $a_n=a_{n-1}\cdot q$.

一般地，如果

$$a_{n+k}=F(a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+k-1}),\qquad ①$$

即 a_{n+k} 是 $a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+k-1}$ 的函数，并且初始值 $a_1,\cdots,a_k$ 是确定的，那么称数列 $\{a_n\}$ 是一个 k 阶递推数列，①称为 $\{a_n\}$ 的递推公式.

与递推数列相关的问题有两大类：一类是已知递推公式求数列的通项（或其他性质）；另一类是利用递推思想，先建立递推公式再去讨论问题的

本质.

下面先讨论一些工具性结果.

称满足下述递推公式的数列$\{a_n\}$为常系数齐次线性递推数列

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\cdots+c_ka_n, \qquad ②$$

其中 c_1, c_2, $\cdots$, c_k 为常数.

注意到,如果 λ 是方程

$$\lambda^k=c_1\lambda^{k-1}+c_2\lambda^{k-2}+\cdots+c_k \qquad ③$$

的根,那么数列 $\{\lambda^n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 满足递推式②,进一步,如果③的根两两不同,设为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_k,那么数列 $\{A_1\lambda_1^n+A_2\lambda_2^n+\cdots+A_k\lambda_k^n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是满足②的数列,并且可以通过初始条件 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 确定其中的系数 A_1, A_2, $\cdots$, A_k(解一个线性方程组),这样我们就得到了满足②及给定初始值 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 的数列的通项.

上述求解线性递推数列的方法称为“特征根法”,其中③称为②的特征方程. 在③出现重根时结论相对复杂些,我们会在例子中予以阐述.

与之相对的,还可以利用母函数方法来处理,一般地,对数列 $\{a_n\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$,我们称下面的形式级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

为数列$\{a_n\}$的母函数.

例如:常数数列 $a_n=1$, $n=0, 1, 2, \cdots$ 的母函数为 $f(x)=1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$,它就是无穷递缩等比数列的求和公式.

由于母函数方法中涉及级数收敛等高等数列方面的知识,这里我们不加证明的给出下面的形式级数公式,并且通过例子来说明使用的方法.

对 $\alpha\in\mathbf{R}$,定义 $\dbinom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n\in\mathbf{N}$(它是组合数的一个推广,在上一节的差分多项式中已经涉及,这里还规定 $\dbinom{\alpha}{0}=1$). 则

$$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots \qquad ④$$

特别地,当 $\alpha\in\mathbf{N}^*$ 时,④即为二项式定理.

对于其他形式的递推数列没有统一的处理方法,常见的处理方法还有不动点方法等.

例 1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1}$，$n=1,2,\cdots$. 求此数列的通项.

解 对递推式作变形，得

$$(a_{n+1}-5a_n)^2=24a_n^2+1,$$

即有

$$a_{n+1}^2-10a_na_{n+1}+a_n^2=1. \qquad ①$$

上式中下标用$n+1$代替n，得

$$a_{n+2}^2-10a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2=1. \qquad ②$$

对比①与②可知，a_n与a_{n+2}都是方程

$$x^2-10a_{n+1}x+a_{n+1}^2-1=0 \qquad ③$$

的根，而由递推式可知$\{a_n\}$是递增数列，故a_n与a_{n+2}不同，从而对③用韦达定理，得

$$a_{n+2}+a_n=10a_{n+1},$$

即$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$，$n=1,2,\cdots$.

此题本质上是一个二阶齐次线性递推数列，下面我们用两种方法来求数列的通项.

方法一 其特征方程为

$$\lambda^2=10\lambda-1,$$

它的两个根为$\lambda_{1,2}=5\pm2\sqrt{6}$. 于是，可设

$$a_n=A\cdot(5+2\sqrt{6})^n+B\cdot(5-2\sqrt{6})^n.$$

由初始条件$a_1=0$知$a_2=1$，

$$\begin{cases}(5+2\sqrt{6})A+(5-2\sqrt{6})B=0,\\(5+2\sqrt{6})^2A+(5-2\sqrt{6})^2B=1.\end{cases}$$

解得$A=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}$，$B=\dfrac{-5-2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}$. 所以

$$a_n=\frac{1}{4\sqrt{6}}\cdot((5+2\sqrt{6})^{n-1}-(5-2\sqrt{6})^{n-1}).$$

方法二 利用母函数方法，为方便起见，利用$a_1=0$，$a_2=1$及递推式补

充定义 $a_0=-1$. 则 $\{a_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 的母函数 $f(x)$满足

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=-1+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n\\&=-1+10\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n\\&=-1+10x\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n-x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=-1+10x(f(x)+1)-x^2f(x).\end{aligned}$$

解得 $f(x)=\dfrac{10x-1}{x^2-10x+1}$.

下面设 $f(x)=\dfrac{A}{1-(5+2\sqrt{6})x}+\dfrac{B}{1-(5-2\sqrt{6})x}$(即将 $f(x)$ 写成部分分式的形式),则应有

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})A+(5+2\sqrt{6})B=-10,\\A+B=-1.\end{cases}$$

解得 $B=\dfrac{1}{4\sqrt{6}}(-5-2\sqrt{6})$, $A=\dfrac{1}{4\sqrt{6}}(5-2\sqrt{6})$.

现在将 $f(x)$展开成形式级数,知

$$\begin{aligned}f(x)&=A\sum_{n=0}^{+\infty}(5+2\sqrt{6})^nx^n+B\sum_{n=0}^{+\infty}(5-2\sqrt{6})^nx^n.\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(A(5+2\sqrt{6})^n+B(5-2\sqrt{6})^n)x^n.\end{aligned}$$

所以 $a_n=A(5+2\sqrt{6})^n+B(5-2\sqrt{6})^n=\dfrac{1}{4\sqrt{6}}((5+2\sqrt{6})^{n-1}-(5-2\sqrt{6})^{n-1})$.

说明 此例展示了利用母函数方法求数列通项的基本步骤:利用递推关系求出母函数 $f(x)$,然后将 $f(x)$展开成级数形式,由对应项系数相等得出通项公式.

例 2 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$,对 $n=1,2,\cdots$ 有

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}. \qquad ①$$

求该数列的通项公式.

解 这里介绍不动点处理的方法(它源于函数迭代的思想),先求方程

$$\lambda=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda} \qquad ②$$

的解，得 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

注意到 $a_1=2$，结合①可知，$\{a_n\}$的每一项都是正有理数，现在用①－②，可知对 $\lambda=\pm\sqrt{2}$ 都有

$$a_{n+1}-\lambda=\frac{a_n-\lambda}{2}+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\lambda}\right),$$

变形为

$$\frac{a_{n+1}-\lambda}{a_n-\lambda}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda a_n}=\frac{\lambda a_n-2}{2\lambda a_n}. \qquad ③$$

在③中分别取 $\lambda=\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$ 所得两式作商，得

$$\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}=\left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}&=\left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{a_{n-1}+\sqrt{2}}\right)^{2^2}\\&=\cdots=\left(\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}=(3-2\sqrt{2})^{2^n}\\&=(\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)^{2^n}$，解得 $a_n=\dfrac{\sqrt{2}\left(1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right)}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}$.

例3　设 m、$n\in\mathbf{N}^*$，且 mn 是一个三角形数(即存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $mn=1+2+\cdots+t$). 证明：存在正整数 k，使得由下面的递推关系确定的数列$\{a_n\}$：

$$a_1=m,\ a_2=n,\ a_j=6a_{j-1}-a_{j-2}+k,\ j=3,\ 4,\ \cdots$$

满足：对任意下标 j，数 a_ja_{j+1} 都是三角形数.

证明　注意到，

x 为三角形数 $\Leftrightarrow$ 存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $x=1+2+\cdots+t$

$\Leftrightarrow$ 存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $x=\dfrac{t(t+1)}{2}$

$\Leftrightarrow$ 存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $8x+1=(2t+1)^2$.

因此，我们只需证明：存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $j\in\mathbf{N}^*$，数 $8a_ja_{j+1}+1$ 都是完全

平方数.

从完全平方式出发，看看是否存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $j\in\mathbf{N}^*$，都有 $8a_ja_{j+1}+1=(a_j+a_{j+1}+l)^2$，这里 l 是只与 k 相关的常数.

猜想中取 $j=1$，可知 $l=\sqrt{8mn+1}-m-n$（注意 mn 为三角形数，故 $\sqrt{8mn+1}\in\mathbf{N}^*$）.

进一步，如果对任意 $j\in\mathbf{N}^*$，都有

$$8a_ja_{j+1}+1=(a_j+a_{j+1}+l)^2, \quad ①$$

那么在①中用 $j+1$ 代替 j，应有

$$8a_{j+1}a_{j+2}+1=(a_{j+1}+a_{j+2}+l)^2. \quad ②$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}&8(a_{j+2}-a_j)a_{j+1}=(a_{j+2}-a_j)(a_{j+2}+2a_{j+1}+a_j+2l)\\ \Leftrightarrow\ &8a_{j+1}=a_{j+2}+2a_{j+1}+a_j+2l\\ \Leftrightarrow\ &a_{j+2}=6a_{j+1}-a_j-2l, \quad ③\end{aligned}$$

并且由①、③可推出②成立.

利用上述分析，如果令 $k=-2l=2(m+n)-2\sqrt{8mn+1}$，那么由题给递推式定义的数列 $\{a_n\}$ 符合要求（这一点利用数学归纳法可证）.

综上可知，命题成立.

说明 这里采用的是先猜后证的思想，这不是数列问题中独有的，而是整个数学学习中都有的，它是一种数学灵感的体现.

例 4 数列 0，1，3，0，4，9，3，10，…定义如下：

$a_0=0$，对 $n=1, 2, \cdots$ 都有

$$a_n=\begin{cases}a_{n-1}-n，若\ a_{n-1}\geqslant n,\\ a_{n-1}+n，其他情形.\end{cases}$$

问：是否每一个非负整数都在该数列中出现？证明你的结论.

解 每个非负整数都在该数列中出现.

注意到，由定义可知 $\{a_n\}$ 是一个整数数列，我们先确定 $\{a_n\}$ 中每一项的取值范围，对 n 归纳来证：$0\leqslant a_n\leqslant 2n-1\ (n\geqslant 1)$. ①

当 $n=1$ 时，由条件知 $a_1=1$，故①成立. 设 $a_{n-1}(n\geqslant 2)$ 满足①. 当 $n\leqslant a_{n-1}\leqslant 2n-3$ 时，$a_n=a_{n-1}-n\in[0, n-3]$（注意，$n\leqslant 2n-3$ 知 $n\geqslant 3$），符合①；当 $0\leqslant a_{n-1}\leqslant n-1$ 时，$a_n=a_{n-1}+n\in[n, 2n-1]$，亦符合①. 故①对 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

再改写 a_n 的递推式：当 $a_{n-1}=0$ 时，有 $a_n=n$，$a_{n+1}=2n+1$；当 $a_{n-1}\in[1,\ n-1]$ 时，有 $a_n=n+a_{n-1}\in[n+1,\ 2n-1]$，此时 $a_{n+1}=a_n-(n+1)=a_{n-1}-1$；当 $a_{n-1}\in[n,\ 2n-3]$ 时，$a_n=a_{n-1}-n\in[0,\ n-3]$，此时 $a_{n+1}=a_n+(n+1)=a_{n-1}+1$. 所以，当 $n\geqslant 3$ 时，我们有

$$a_{n+1}=\begin{cases}2n+1, & 若\ a_{n-1}=0,\\ a_{n-1}-1, & 若\ a_{n-1}\in[1,\ n-1],\\ a_{n-1}+1, & 若\ a_{n-1}\in[n,\ 2n-3].\end{cases} \tag{②}$$

回到原题，若存在非负整数不在 $\{a_n\}$ 中出现，取其中最小的，设为 M，则 $M>1$，此时 $M-1$ 在数列中出现，可设 $a_{n-1}=M-1$. 若 $a_{n-1}\in[n,\ 2n-3]$，则 $M=a_{n-1}+1=a_{n+1}$，矛盾. 因此 $a_{n-1}\leqslant n-1$，结合 $M>1$，知 $a_{n-1}\in[1,\ n-1]$，此时有 $a_{n+1}=a_{n-1}-1\in[0,\ n-2]$，进而 $a_{n+3}=a_{n+1}-1$（除非 $a_{n+1}=0$），依次下去，可得一个子数列 $a_{n-1}>a_{n+1}>a_{n+3}>\cdots>a_{s-1}=0$，这里 $s\geqslant n+2$.

结合 $a_{n-1}\leqslant n-1$ 知 $M\leqslant n$，而 $a_{s-1}=0$，由②知 $a_{s+1}=2s+1>s+2$，进而，有 $a_{s+2}=a_{s+1}-(s+2)=s-1\in[0,\ s+1]$，同上可知 $a_{s+1}\in\{0,\ a_{s+2}-1\}$，… 因此，必有一个下标 t，使得 $a_t=M$（因为 $s-1\geqslant n+1\geqslant M$），从而 M 亦为 $\{a_n\}$ 中的项，矛盾.

综上可知，每一个非负整数都在 $\{a_n\}$ 中出现.

说明 本题的关键在于对题给的递推式作出恰当改写，变为②的形式，从而出现隔一个数加上 1 或者减去 1 的特点，为证明数列遍经每一个非负整数打下坚实的基础.

例 5 用 A_n 表示一些由 a、b、c 组成的字长为 n 的词组成的集合，其中每一个词中都没有连续两个字同时为 a 或者同时为 b；B_n 表示一些由 a、b、c 组成的字长为 n 的词组成的集合，其中每一个词中都没有连续的三个字是两两不同的. 证明：对任意正整数 n，都有 $|B_{n+1}|=3|A_n|$.

证明 我们采用递推的方法来处理.

用 c_n 表示集合 A_n 中以 c 开头的词的个数，d_n 表示以 a 或 b 开头的词的个数.

对于 A_{n+1} 中的词，依第 1 个字分类，如果为 c，那么去掉它后所得的词仍属于 A_n；如果为 a，那么第 2 个字为 c 或 b；如果为 b，那么第 2 个字为 c 或 a. 所以，成立如下递推关系式

$$\begin{cases}c_{n+1}=|A_n|=c_n+d_n,\\ d_{n+1}=2c_n+d_n.\end{cases} \tag{①}$$

再用 c'_n 表示 B_n 中最前面的两个字相同的词的个数，d'_n 表示 B_n 中最前面的两个字不同的词的个数.

对于 B_{n+1} 中的词，我们依最前面的两个字是否相同分类. 如果相同，那么第 3 个字可以任取，此时，去掉第 1 个字后，所得词属于 B_n；如果不同，那么第 3 个字与前面两个字中的某一个相同，在与第 1 个字相同时，去掉第 1 个字后，共有 d'_n 个词. 在与第 2 个字相同时，去掉第 1 个字后，共有 $2c'_n$ 个词（这里系数为 2 是因为 $abb\cdots$ 与 $cbb\cdots$ 去掉第 1 个字后所得的词相同），所以，它们之间的递推关系式为

$$\begin{cases} c'_{n+1}=|B_n|=c'_n+d'_n; \\ d'_{n+1}=2c'_n+d'_n. \end{cases} \quad ②$$

注意到，递推关系式①与②完全相同，不同的只是它们的初始条件. 直接枚举可知 $c_1=1$，$d_1=2$；$c'_2=3$，$d'_2=6$. 因此 $c'_2=3c_1$，$d'_2=3d_1$，从而由递推关系式，可知 $c'_{n+1}=3c_n$，$d'_{n+1}=3d_n$. 结合 $|A_n|=c_{n+1}$ 及 $|B_n|=c'_{n+1}$，可得 $|B_{n+1}|=3|A_n|$.

命题获证.

说明　利用递推思想处理组合计数问题是一个重要的方法. 这里建立的递推式可化为常系数齐次线性递推关系，可求解出 $|A_n|$ 的具体数值.

例 6　实数数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意不同的正整数 i、j，都有 $|a_i-a_j|\geqslant\frac{1}{i+j}$，且存在正实数 c，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $0\leqslant a_n\leqslant c$.

求证：$c\leqslant 1$.

证明　此题不是以等式形式给出的数列各项之间的关系，它只是用一个不等式刻画了项与项之间的差距. 整个解决过程有一定的分析味道，基于裂项求和的思想.

对 $n\geqslant 2$，设 $\pi(1)$，…，$\pi(n)$ 是 1，2，…，n 的一个排列，使得

$$0\leqslant a_{\pi(1)}<a_{\pi(2)}<\cdots<a_{\pi(n)}\leqslant c. \quad ①$$

注意，由条件可知 $\{a_n\}$ 中任意两项不同，而①只是将 a_1，…，a_n 从小到大作了一个排列.

利用①及条件，可知

$$\begin{aligned} c &\geqslant a_{\pi(n)}-a_{\pi(1)}=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{\pi(k+1)}-a_{\pi(k)}) \\ &\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi(k+1)+\pi(k)}. \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式，知

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi(k+1)+\pi(k)}\geqslant\frac{(n-1)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\pi(k+1)+\pi(k))}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n}\pi(k)-\pi(1)-\pi(n)}=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-\pi(1)-\pi(n)}$$

$$\geqslant\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-1-2}>\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-2}=\frac{n-1}{n+2}=1-\frac{3}{n+2}.$$

所以，我们有

$$c\geqslant 1-\frac{3}{n+2}.$$

令 $n\to+\infty$，即可得 $c\geqslant 1$.

命题获证.

例 7　由实数组成的无穷数列 $\{a_n\}$ 定义如下：a_0、a_1 是两个不同的正实数，且 $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$，$n=0, 1, 2, \cdots$. 问：该数列是否可能是一个有界数列？证明你的结论.

解　此数列一定是一个无界数列. 证明的基本思想是从 $\{a_n\}$ 中取出一个递增的无界数列.

事实上，如果存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n=a_{n+1}$，则由递推关系式，知 $a_{n-1}=0$，进而 $a_{n-2}=a_{n-3}$（注意，这里用到 $\{a_n\}$ 的每一项都是非负实数），这样依次倒推，可知 $a_1=a_2$ 或者 a_1、a_2 中有一个等于零，但这与 a_1、a_2 是两个不同的正实数矛盾. 因此，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\neq a_{n+1}$（即 $\{a_n\}$ 中没有相邻两项是相等的），从而结合递推式知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$.

现在我们来从 $\{a_n\}$ 中挑出一个递增的子数列 $\{b_m\}$.

由条件，知 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 或 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$. 若为前者，则 $a_{n+2}>a_{n+1}$；若为后者，则 $a_{n+2}<a_{n+1}$，此时，由 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 知，必有 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}$（否则 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}<0$，矛盾），这表明 $a_{n+3}>a_{n+1}$. 这一段讨论表明：要么 $a_{n+2}>a_{n+1}$，要么 $a_{n+2}<a_{n+1}<a_{n+3}$.

利用上述结论，我们从数列 $\{a_n\}$ 去掉所有满足 $a_{n+1}<a_n$ 且 $a_{n+1}<a_{n+2}$（注意，当 $n\geqslant 2$ 时，将有 $a_{n+2}>a_n$）的项 a_{n+1}，当然，如果 $a_1>a_2$，那么去掉 a_1 保留 a_2 后再做去项操作. 这样留下的项依次记为 b_1，b_2，$\cdots$ 所得数列 $\{b_m\}$ 是一个递增数列.

最后，我们证明：$\{b_m\}$ 必为无界数列.

只需证明：对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，$b_{m+2}-b_{m+1}\geqslant b_{m+1}-b_m$（因为这时，利用裂项求和可得 $b_{m+2}-b_2\geqslant m(b_2-b_1)$，让 $m\to+\infty$，即可知 $\{b_m\}$ 为无界数列）.

由$\{b_m\}$的定义，可设$b_{m+2}=a_{n+2}$（注意n不一定为m），则由于a_{n+2}是未被去掉的项，故$a_{n+2}>a_{n+1}$，如果$a_{n+1}>a_n$，那么$b_{m+1}=a_{n+1}$，而$b_m=a_n$或者a_{n-1}（若为前者，则$a_n>a_{n-1}$），于是，总有$b_m\geqslant a_{n-1}$，得

$$b_{m+2}-b_{m+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_n=a_{n+1}-a_{n-1}\geqslant b_{m+1}-b_m.$$

如果$a_{n+1}<a_n$，那么$b_{m+1}=a_n$，而$b_m=a_{n-1}$或者a_{n-2}（若为后者，则$a_{n-2}>a_{n-1}$，否则a_{n-1}不是去掉的项），所以

$$b_{m+2}-b_{m+1}=a_{n+2}-a_n=a_{n+1}=a_n-a_{n-1}\geqslant b_{m+1}-b_m.$$

命题获证.

说明 建议读者在阅读解答时，手边写一个具体数列，便于对比$\{a_n\}$与$\{b_m\}$之间的关系. 与上题类似，它也不是一个由确定性关系式定义的递推数列. 处理上都涉及不等式估计，它正是一种分析能力的体现.

例 8 数列$\{a_n\}$满足递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2-1}{n+1},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

问：是否存在正实数a，使得下面的结论都成立？

(1) 若$a_0\geqslant a$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在；

(2) 若$0<a_0<a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

解 存在满足条件的正实数a，这个$a=2$. 题目的解答过程中会不断用到数学归纳法，其中的详细推导请读者自己完成.

(1) 当$a_0\geqslant 2$时，利用数学归纳法可证：对$n\geqslant 0$，都有$a_n\geqslant n+2$，故此时$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

(2) 对$0<a_0<2$，我们分两种情形处理：

情形一 $0<a_0\leqslant 1$，此时利用数学归纳法可证：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$|a_n|\leqslant\frac{1}{n}$；故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

情形二 $1<a_0<2$，如果存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$a_{m+1}\leqslant 0$，那么取最小的m，则$0<a_m\leqslant 1$，此时$|a_{m+1}|=\frac{1-a_m^2}{m+1}\leqslant\frac{1}{m+1}$，依此结合数学归纳法可证：当$n\geqslant m+1$时，都有$|a_n|\leqslant\frac{1}{n}$，从而$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

最后，若对任意$m\in\mathbf{N}^*$，都有$a_m>0$，结合$1<a_0<2$可知，对$n\geqslant 0$都有$a_n>1$. 现在设$a_0=2-\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，利用递推式及数学归纳法可证：对

任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<n+2-n\varepsilon$. 因此，取$m=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$，则有$a_m<m+2-m\varepsilon\leqslant m+1$，然后，再用数学归纳法可证：对任意$n>m$，都有$a_n\leqslant\frac{(m+1)^2-1}{n-1}$，这在$n$充分大时，导致$a_n\leqslant 1$，矛盾. 因此，必存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$a_n\leqslant 0$，归入前面的情形.

综上可知，$a=2$符合要求.

8　周期数列

对一个数列$\{a_n\}$，如果存在正整数T及n_0，使得对任意$n\geqslant n_0$，都有$a_n=a_{n+T}$，那么称$\{a_n\}$是一个周期数列. 进一步，若$n_0=1$，则称$\{a_n\}$是一个纯周期数列. 这里T称为$\{a_n\}$的一个周期.

由周期数列的定义可知，如果T为$\{a_n\}$的一个周期，那么对任意$m\in\mathbf{N}^*$，数mT也是$\{a_n\}$的一个周期. 利用这个性质结合数论中著名的Bezout定理可得下面的定理：

定理1　如果T_1、T_2都是周期数列$\{a_n\}$的周期，那么$(T_1、T_2)$（指T_1、T_2的最大公因数）也是$\{a_n\}$的一个周期.

由此定理可知，如果$\{a_n\}$是一个周期数列，那么$\{a_n\}$有最小正周期. 这与周期函数不一定有最小正周期形成鲜明的对比.

对于一个整数数列$\{a_n\}$而言，它本身可能不是一个周期数列，但是对某些正整数m，在模m的意义下是一个周期数列，这就是模周期数列的概念. 此时，存在T、$n_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意$n\geqslant n_0$，都有$a_{n+T}\equiv a_n \pmod m$.

定理2　整数数列$\{a_n\}$如果是一个常系数递推数列，那么对任意$m\in\mathbf{N}^*$，数列$\{a_n\}$都是模m下的一个周期数列.

事实上，如果$\{a_n\}$是一个常系数k阶递推数列，考察下面的数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_k),(a_2,a_3,\cdots,a_{k+1}),\cdots \quad ①$$

由于在模m的意义下，数组$(x_1,\cdots,x_k)$中每个x_i只取$0,1,2,\cdots,m-1$，故①中的数组在模m的意义下至多只有m^k种不同的情形. 所以，存在r、$t\in\mathbf{N}^*(r<t)$，使得

$$(a_r,a_{r+1},\cdots,a_{r+k})\equiv(a_t,a_{t+1},\cdots,a_{t+k}) \pmod m.$$

记$T=t-r$，结合$\{a_n\}$为常系数k阶递推数列，可知对任意$n\geqslant r$，都有$a_{n+T}\equiv a_n \pmod m$.

因此，定理2成立.

例 1 设 x_0、x_1 是两个给定的正实数,数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2}=\dfrac{4\max\{x_{n+1},4\}}{x_n}$, $n=0,1,2,\cdots$. 求 x_{2011} 的值.

解 为计算方便,令 $x_n=4y_n$, 则

$$y_{n+2}=\frac{\max\{y_{n+1},1\}}{y_n},\ n=0,1,2,\cdots.$$

直接计算可得下表:

	$y_0\leqslant 1,\ y_1\leqslant 1$	$y_0\leqslant 1,\ y_1>1$	$y_0>1,\ y_1\leqslant 1$	$y_0>1,\ y_1>1$
$y_2=$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{y_1}{y_0}$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{y_1}{y_0}$
$y_3=$	$\frac{1}{y_0y_1}$	$\frac{1}{y_0}$	$\frac{1}{y_1}$	$\max\left\{\frac{1}{y_0},\frac{1}{y_1}\right\}$
$y_4=$	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{y_0}{y_1}$	$\frac{y_0}{y_1}$
$y_5=$	y_0	y_0	y_0	y_0
$y_6=$	y_1	y_1	y_1	y_1

所以,$\{y_n\}$是一个以 5 为周期的纯周期数列,对应地,$\{x_n\}$也是. 故 $x_{2011}=x_1$.

说明 题中所给递推关系式是一种特殊形式的 Lyness 方程,这里通过直接计算来确定周期的方法对付分式递推(具有周期性的)数列是直接而有效的手段.

例 2 已知 $0\leqslant x_0<1$, 数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n-1, & \text{若}\ \frac{1}{2}\leqslant x_n<1,\\ 2x_n, & \text{若}\ 0\leqslant x_n<\frac{1}{2}.\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

并且 $x_5=x_0$. 问:满足条件的数列有多少个?

解 注意到,当 x_0 确定后,数列$\{x_n\}$是唯一确定的,故问题可转为求 x_0 的不同取值情况的个数.

利用二进制来处理,将 x_n 用二进制表示,设 $x_n=(0.b_1b_2\cdots)_2$, 如果 $b_1=1$,那么$\frac{1}{2}\leqslant x_n<1$,此时 $x_{n+1}=2x_n-1=(0.b_2b_3\cdots)_2$;如果 $b_1=0$,那么 $0\leqslant x_n<\frac{1}{2}$,此时 $x_{n+1}=2x_n=(0.b_2b_3\cdots)_2$. 这表明:当 $x_n=(0.b_1b_2\cdots)_2$ 时,总有 $x_{n+1}=(0.b_2b_3\cdots)_2$(相当于将二进制表示下 x_n 的小数点后第一位

"吃掉了").

现在,设 $x_0=(0.a_1a_2\cdots)_2$,那么由上述讨论可知 $x_5=(0.a_6a_7\cdots)_2$,结合 $x_5=x_0$ 得 x_0 是一个二进制下的循环小数,即 $x_0=(0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_5)_2=\dfrac{(a_1\cdots a_5)_2}{2^5-1}$,其中$(a_1\cdots a_5)_2$ 是二进制表示下的一个非负整数(注意 a_1, …, a_5 不全为 1).

综上可知,x_0 共有 $2^5-1=31$ 种不同的可能取值(a_1, …, a_5 每个数均可取 0 或 1,但不能全部取 1),相应的不同数列共 31 个.

说明 这里利用二进制表示将递推式变为规律性更强的式子,然后结合数列的周期性掌控数列的结构.本质上而言是做了一个对应.

例 3 设 $f(x)$是一个整系数多项式,数列$\{a_n\}$依如下方式定义

$$a_0=0,\ a_{n+1}=f(a_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

证明:若$\{a_n\}$是一个纯周期数列,则其最小正周期不大于 2.

证明 问题可转化为证明:若存在 $m\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_m=0$,则 a_1 或 a_2 中有一个等于 0.

利用因式定理,由于 $f(x)$为整系数多项式,可知对 m、$n\in\mathbf{Z}$ $(m\neq n)$,都有 $m-n\mid f(m)-f(n)$.

现令 $b_n=a_{n+1}-a_n$, $n=0$, 1, 2, …,由上述结论及数列$\{a_n\}$的定义可知 $b_n\mid b_{n+1}$(注意,这里若 $b_n=0$,则有 $b_{n+1}=f(a_{n+1})-f(a_n)=0$).

因为 $a_m=a_0=0$,故 $a_{m+1}=f(a_0)=a_1$,所以 $b_m=b_0$.

如果 $b_0=0$,那么 $a_0=a_1=\cdots=a_m$,命题已成立;否则 $|b_0|=|b_m|\neq 0$,结合 $b_0\mid b_1$, $b_1\mid b_2$, …, $b_{m-1}\mid b_m$,可得 $|b_0|=|b_1|=\cdots=|b_m|$.

注意到

$$b_0+b_1+\cdots+b_{m-1}=a_m-a_0=0,$$

因此,b_0, b_1, …, b_{m-1} 中有一半为正整数,另一半为负整数,从而,存在 $k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m-2\}$,使得 $b_{k-1}=-b_k$,得 $a_{k-1}=a_{k+1}$,依$\{a_n\}$的定义知,对 $n\geqslant k-1$,都有 $a_{n+2}=a_n$.取 $n=m$,就有

$$\begin{aligned}a_0&=a_m=a_{m+2}=f(a_{m+1})=f(f(a_m))\\&=f(f(a_0))=a_2.\end{aligned}$$

即有 $a_2=0$.

所以,命题成立.

例 4 设 m 是一个给定的大于 1 的正整数,数列$\{x_n\}$定义如下 $x_1=1$,

$x_2=2,\cdots,x_m=m$,而

$$x_{n+m}=x_{n+m-1}+x_n,\ n=1,2,\cdots. \quad ①$$

证明:数列$\{x_n\}$中存在连续的 $m-1$ 项,它们都是 m 的倍数.

证明 考察数列$\{x_k(\bmod m)\}$,这里 $x_k(\bmod m)$表示 x_k 除以m 所得的余数,将它记为 y_k.转为证明:数列$\{y_k\}$中有连续 $m-1$ 个零.

利用定理 2,由①可知,存在 n_0 及 $T\in\mathbf{N}^*$,使得对任意 $k\geqslant n_0$,都有 $y_{k+T}=y_k$.特别地,有

$$y_{n_0+m-1}=y_{n_0+m-1+T},\ y_{n_0+m-2}=y_{n_0+m-2+T}.$$

两式相减,结合①及 y_k 的定义可知 $y_{n_0-1}=y_{n_0-1+T}$,依此倒推可知,对任意 $k\geqslant 1$,都有 $y_k=y_{k+T}$.

为得到我们的结论及计算上的方便,我们将数列$\{x_n\}$的下标依①确定的递推关系向负整数延拓,结合上面的讨论,可知对任意 $k\in\mathbf{Z}$,都有 $y_k=y_{k+T}$.

现在由 $x_n=x_{n+m}-x_{n+m-1}$ 可知 $x_0=x_{-1}=\cdots=x_{-(m-2)}=1$(这里用到初始条件:对任意 $1\leqslant j\leqslant m$,都有 $x_j=j$),进而,有 $x_{-(m-1)}=x_{-m}=\cdots=x_{-(2m-3)}=0$.结合 $y_k=y_{k+T}$,可知

$$\begin{aligned}&(y_{-(2m-3)+T},\cdots,y_{-(m-1)+T})\\=&(y_{-(2m-3)},\cdots,y_{-(m-1)})=(0,\cdots,0).\end{aligned}$$

而 $y_{-(m-2)}=\cdots=y_0=1$,故 $-(2m-3)+T\geqslant 1$,这表明:数列$\{y_k\}$中存在下标为正整数的连续 $m-1$ 项都等于零.

所以,命题成立.

例 5 设 m 为给定的正整数,对任意正整数 n,用 $S_m(n)$表示 n 在十进制表示下各数码的 m 次方之和.例如 $S_3(172)=1^3+7^3+2^3=352$.考虑数列:n_0 为正整数,$n_k=S_m(n_{k-1})$, $k=1,2,\cdots$.

(1) 证明:对任意正整数 n_0,数列$\{n_k\}$都是一个周期数列;

(2) 证明:当 n_0 变化时,(1)中数列的最小正周期构成的集合为有限集.

证明 注意到,对正整数 $n\geqslant 10^{m+1}$,存在 $p\in\mathbf{N}^*$, $p\geqslant m+1$,使得 $10^p\leqslant n<10^{p+1}$,此时 n 为十进制中的 $p+1$ 位数,故

$$\begin{aligned}S_m(n)&\leqslant(p+1)\cdot 9^m<(p+1)\cdot 9^{p-1}\\&<9^p+\mathrm{C}_p^1\cdot 9^{p-1}>(9+1)^p=10^p\leqslant n.\end{aligned}$$

这表明数列$\{n_k\}$中的项满足:若 $n_k\geqslant 10^{m+1}$,则 $n_{k+1}=S_m(n_k)<n_k$.

另一方面,若正整数 $n<10^{m+1}$,则

$$S_m(n) \leqslant (m+1) \cdot 9^m < (9+1)^{m+1} = 10^{m+1}.$$

即可得：如果 $n_k < 10^{m+1}$，那么 $n_{k+1} = S_m(n_k)$ 亦小于 10^{m+1}.

上述讨论表明：当下标 k 充分大时，必有 $n_k < 10^{m+1}$. 于是，数列 $\{n_k\}$ 从某一项开始，每一项都为集合 $\{1, 2, \cdots, 10^{m+1}-1\}$ 中的数，即存在 $k_0 \in \mathbf{N}^*$，使得对任意 $k \geqslant k_0$，都有 $1 \leqslant n_k \leqslant 10^{m+1}-1$. 结合抽屉原理可知，存在 r、$s \in \mathbf{N}^*$，$r > s \geqslant k_0$，使得 $n_r = n_s$. 利用 $\{n_k\}$ 的定义知，对 $k \geqslant s$，都有 $n_k = n_{k+T}$，这里 $T = r - s$，并可使得 $T \leqslant 10^{m+1} - 1$.

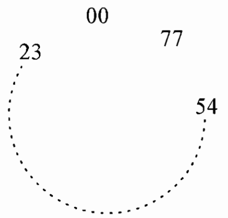
所以，对任意 $n_0 \in \mathbf{N}^*$，数列 $\{n_k\}$ 都为周期数列，其最小正周期 $\leqslant 10^{m+1} - 1$.

从而，(1)与(2)都成立.

例 6 任意选定一个正整数 a_0，再任取 $a_1 \in \{a_0 + 54, a_0 + 77\}$，如此下去，当 a_k 确定后，再选取 $a_{k+1} \in \{a_k + 54, a_k + 77\}$ 得到无穷数列 $\{a_n\}$. 证明：该数列中总有一项，其末两位数字相同.

证明 在模 100 的意义下讨论. 我们用 b_n 表示 a_n 除以 100 所得的余数，这里将 b_n 都理解为两位数，即 b_n 是 00, 01, …, 99 中数.

依数列 $\{a_n\}$ 的定义可知，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $b_{n+1} \equiv b_n + 77$ 或 $b_n + 2 \times 77 \pmod{100}$.



注意到 $(77, 100) = 1$，故当 j 跑遍模 100 的完系时，$77j$ 也跑遍模 100 的完系，对 $j = 0, 1, 2, \cdots, 99$，我们将 $77j$ 除以 100 所得的余数排成右边所示的圆圈. 那么，由 $\{b_n\}$ 的结构可知，b_n 与 b_{n+1} 是圆圈上相邻的数或者中间隔一个数. 因此，圆圈上任意相邻的两个数中必有一个是 $\{b_n\}$ 中的项. 而圆圈上 00 与 77 相邻，故存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $b_n = 00$ 或 77，也就是 a_n 的末两位数字是 00 或 77.

所以，命题成立.

说明 尽管数列 $\{a_n\}$ 的每一项都有两种选择，在模 100 的意义下也不是周期变化的，但跳跃性有限，组合方法的引入使问题迎刃而解.

习 题 一

1 证明：对任意非空有限集，都可以将它的所有子集排成一列，使得任意两个相邻的子集的元素个数相差 1.

2 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = 0$, $a_n + a_{n-2} \geqslant 2a_{n-1}$, $n = 2, 3, \cdots$.

证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 及 $k \in \mathbf{Z}$，只要 $0 \leqslant k \leqslant n$，就有 $na_k \leqslant ka_n$.

3 一个由正实数组成的数列$\{a_n\}$满足$a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}$，$n=1, 2, \cdots$.

证明：对任意$n \in \mathbf{N}^*$，都有$a_n < \dfrac{1}{n}$.

4 设实数$a_1, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$满足$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 证明：

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_na_1^4 \geqslant a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4.$$

5 设$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_{n-1}}$，$n = 2, 3, \cdots$.

证明：对任意正整数$n \geqslant 3$，都有$a_n > \sqrt{2n}$.

6 设a为正实数. 证明：对任意$n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}.$$

7 证明：对任意$n \in \mathbf{N}^*$，$n \geqslant 2$，都有

$$\lg(n!) > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

8 正实数数列$\{a_n\}$满足：对任意正整数n，都有$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)^2$.

证明：对任意$n \in \mathbf{N}^*$，都有$a_n = n$.

9 设$a_1, \cdots, a_n$是n个不同的正整数.

证明：$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \dfrac{2n+1}{3}(a_1 + \cdots + a_n)$.

10 实数数列$a_1, a_2, \cdots$满足：

(1) $a_1 = 2$，$a_2 = 500$，$a_3 = 2000$；

(2) $\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n-1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$，$n = 2, 3, \cdots$.

证明：数列$\{a_n\}$的每一项都是整数，并且对任意正整数n，都有$2^n \mid a_n$.

11 设k为给定的正整数，数列$\{a_n\}$满足

$$a_1 = k+1,\ a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k,\ n = 1, 2, \cdots.$$

证明：对任意不同的正整数m、n，数a_m与a_n互素.

12 数列$\{a_n\}$满足$a_0 = 1$，$a_n = a_{n+1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明：对任意不大于13的素数$p$，数列$\{a_n\}$中有无穷多项是$p$的倍数.

13 用$\{x\}$表示实数x的小数部分. 证明：对任意$n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}.$$

14 设 m、$n\in\mathbf{N}^*$，记 $S_m(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}[\sqrt[k^2]{k^m}]$. 证明：

$$S_m(n)\leqslant n+m(\sqrt[4]{2^m}-1).$$

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

15 设 k 为给定的正整数，考虑数列$\{a_n\}$：

$$a_0=1,\ a_{n+1}=a_n+[\sqrt[k]{a_n}],\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

对每个 k，求数列$\{\sqrt[k]{a_n}\}$中所有是整数的项组成的集合.

16 数列$\{x_n\}$定义如下 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_n=\dfrac{2n-3}{2n}x_{n-1}$，$n=2,\ 3,\ \cdots$. 证明：对任意正整数 n，都有 $x_1+x_2+\cdots+x_n<1$.

17 数列$\{f(n)\}$满足

$$f(1)=2,\ f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

证明：对任意整数 $n>1$，都有 $1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}<\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(n)}<1-\dfrac{1}{2^{2^n}}$.

18 两个实数数列：$x_1,\ x_2,\ \cdots$和 $y_1,\ y_2,\ \cdots$，满足 $x_1=y_1=\sqrt{3}$，

$$x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ n\geqslant 1.$$

证明：当 $n>1$ 时，都有 $2<x_ny_n<3$.

19 数列$\{a_n\}$定义如下 $a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}$，$n\geqslant 0$；而数列$\{c_n\}$满足 $c_0=4$，$c_{n+1}=c_n^2-2c_n+2$，$n\geqslant 0$.

证明：对任意 $n\geqslant 1$，都有 $a_n=\dfrac{2c_0c_1\cdots c_{n-1}}{c_n}$.

20 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{n}{a_n}$，$n\geqslant 1$. 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 4$，都有$[a_n^2]=n$.

21 设 a 为无理数，n 为大于 1 的整数. 证明：$(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}+(a-\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$ 为无理数.

22 设$\{a_n\}$为一个实数数列，定义如下：$a_1=t$，$a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$. 问：有多少个不同的实数 t，使得 $a_{2011}=0$?

23 实数数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2011}$ 满足：对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2010$，都有 $|x_i-$

$x_{i+1}\mid\leqslant 1$. 求代数式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\mid x_i\mid-\mid\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\mid$ 的最大可能值.

24 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是一个由正实数组成的无穷数列. 证明:存在无穷多个正整数 n,使得 $1+a_n>\sqrt[n]{2}a_{n-1}$.

25 函数 $F: \mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$,具有下述性质:对任意 $n\in\mathbf{N}$,都有

(1) $F(4n)=F(2n)+F(n)$;

(2) $F(4n+2)=F(4n)+1$;

(3) $F(2n+1)=F(2n)+1$.

证明:对任意正整数 m,满足 $0\leqslant n\leqslant 2^m$,且 $F(4n)=F(3n)$ 的整数 n 的个数为 $F(2^{m+1})$.

26 函数 $f: \mathbf{N}^*\rightarrow\mathbf{N}^*$ 定义如下 $f(1)=1$,且对任意正整数 n,都有

$$f(n+1)=\begin{cases}f(n)+2, \text{若 } n=f(f(n)-n+1),\\ f(n)+1, \text{其他 } n.\end{cases}$$

(1) 证明:对任意正整数 n,都有 $f(f(n)-n+1)\in\{n, n+1\}$;

(2) 求 $f(n)$的表达式.

27 数列$\{a_n\}$定义如下 $a_1=0$, $a_n=a_{\left[\frac{n}{2}\right]}+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n=2, 3, \cdots$. 对每个非负整数 k,求满足 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,且 $a_n=0$ 的下标 n 的个数.

28 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$, $x_{n+1}=\begin{cases}x_n-2, \text{若 } x_n-2>0, \text{且 } x_n-2\notin\{x_1, \cdots, x_n\},\\ x_n+3, \text{其他情形},\end{cases}$ 证明:对任意大于 1 的正整数 k,存在下标 n,使得 $x_{n+1}=x_n+3=k^2$.

29 设 n 是一个正奇数,θ 是一个实数,满足:$\frac{\pi}{\theta}$ 是一个无理数. 记 $a_k=\tan\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$, $k=1, 2, \cdots, n$. 证明:$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 是一个整数,并确定其值.

30 证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,存在一个首项系数为 1 的 n 次整系数多项式 $P(x)$,使得 $2\cos n\varphi=P(2\cos\varphi)$,这里 φ 为任意实数.

31 设 α 为有理数,$\cos\alpha\pi$ 也是有理数. 求 $\cos\alpha\pi$ 的所有可能值.

32 单位圆上是否存在无穷多个点,使得其中任意两点之间的距离都是有理数?

33 设 n 为不小于 2 的正整数. 求所有的实系数多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \ (a_n\neq 0),$$

使得 $P(x)$ 恰有 n 个不大于 -1 的实根，并且

$$a_0^2+a_1a_n=a_n^2+a_0a_{n-1}.$$

34 设 $P(x)$ 是一个整系数多项式，满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $P(n)>n$. 并且对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，数列

$$P(1),\ P(P(1)),\ P(P(P(1))),\ \cdots$$

中都有一项是 m 的倍数. 证明：$P(x)=x+1$.

35 设 $P(x)$ 是一个奇次实系数多项式，满足：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$P(x^2-1)=P(x)^2-1.$$

证明：$P(x)=x$.

36 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足下述条件：

(1) 对任意实数 x、y，都有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$；

(2) 存在正整数 k 使得 $f^{(k)}(0)=0$，这里 $f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$，$n=1,2,\cdots$.

证明：$f(0)=0$ 或者 $f(f(0))=0$.

37 数列 $\{p_n\}$ 满足 $p_1=2$，$p_2=5$，$p_{n+2}=2p_{n+1}+p_n$，$n=1,2,\cdots$. 证明：对任意正整数 n，都有

$$p_n=\sum\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}.$$

这里求和对满足 $i+j+2k=n$ 的所有非负整数组 (i,j,k) 进行.

38 记 $A_n=\left\{1+\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{(\sqrt{2})^n}\right\}\,|\,\alpha_i=1$ 或 -1，这里 $i=1,2,\cdots,n$.

(1) 对每个正整数 n，求集合 A_n 中不同元素的个数；

(2) 对每个正整数 n，求集合 A_n 中任意两个不同元素之积的和.

39 数列 $\{x_n\}$ 定义如下

$$x_0=4,\ x_1=x_2=0,\ x_3=3,\ x_{n+4}=x_n+x_{n+1},\ n=0,1,2,\cdots.$$

证明：对任意素数 p，都有 $p\mid x_p$.

40 求所有的正整数数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，使得

(1) $\dfrac{a_0}{a_1}+\dfrac{a_1}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{99}{100}$；

(2) $a_0=1$，且 $(a_{k+1}-1)a_{k-1}\geqslant a_k^2(a_k-1)$，$k=1,2,\cdots,n-1$.

41 数列 $\{y_n\}$ 定义如下 $y_2=y_3=1$，且

$$(n+1)(n-2)y_{n+1}=n(n^2-n-1)y_n-(n-1)^3y_{n-1},\ n=3,4,\cdots.$$

证明：y_n 为整数的充要条件是 n 为素数.

42 给定素数 $p>3$，令 $q=p^3$. 定义数列 a_n 如下

$$a_n=\begin{cases}n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ p-1,\\ a_{n-1}+a_{n-p},\ n>p-1.\end{cases}$$

求 a_q 除以 p 所得的余数.

43 设 n 为不小于 2 的正整数，$2\leqslant b_0\leqslant 2n-1$，$b_0$ 为整数，考虑由递推式

$$b_{i+1}=\begin{cases}2b_i-1,若\ b_i\leqslant n,\\ 2b_i-2n,若\ b_i>n\end{cases}$$

定义的数列$\{b_i\}$. 用 $p(b_0,\ n)$表示满足 $b_p=b_0$ 的最小下标 p.

(1) 设 k 为给定的正整数，求 $p(2,\ 2^k)$和 $p(2,\ 2^k+1)$的值；

(2) 证明：对任意 n 和 b_0 都有 $p(b_0,\ n)\mid p(2,\ n)$.

44 在坐标平面上任给一条起点为(0, 0)，终点为(1, 0)的折线. 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，在该折线上存在两点，它们的纵坐标相同，而横坐标相差$\dfrac{1}{n}$.

45 有一个黑盒和标号为 1, 2, …, n 的 n 个白盒，在 n 个白盒中共放了 n 个白球，允许进行如下操作：若标号为 k 的白盒中恰有 k 个白球，则从中取出这 k 个球，分别在黑盒和标号为 1, 2, …, $k-1$ 的白盒中各放入一个球. 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，存在唯一的一种放置方式，使得n个球最初全在白盒中，但经有限次操作后，n 个球全部在黑盒中.

46 设 R_0 是一个 n 元数组，其中每个数都属于$\{A,\ B,\ C\}$. 定义序列 R_0，R_1，R_2，…如下：如果 $R_j=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，那么 $R_{j+1}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，这里

$$y_i=\begin{cases}x_i,若\ x_i=x_{i+1},\\ \{A,\ B,\ C\}\backslash\{x_i,\ x_{i+1}\},若\ x_i\neq x_{i+1}.\end{cases}$$

其中 $x_{n+1}=x_1$. 例如：若 $R_0=(A,\ A,\ B,\ C)$，则 $R_1=(A,\ C,\ A,\ B)$，$R_2=(B,\ B,\ C,\ C)$，….

(1) 求所有的 $n\in\mathbf{N}^*$，使得存在 $m\in\mathbf{N}^*$，满足：对任意 R_0 都有 $R_m=R_0$.

(2) 对 $n=3^k(k\in\mathbf{N}^*)$，求满足(1)的最小正整数 m.

第二部分　专题选讲

9　斐波那契(Fibonaccia)数列

斐波那契(Fibonaccia)数列$\{F_n\}$定义如下

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} = F_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

它是一个非常著名的数列，围绕它展开的讨论层出不穷，有许多有趣而又深刻的结论.我们以例题的形式展示其中的一些.

例 1　证明：对任意 $m,\ n \in \mathbf{N}^*$，都有 $(F_m,\ F_n) = F_{(m,\ n)}$. 即针对 Fibonaccia 数列的项求最大公因数可以转化到下标上去.

证明　当 $m = n$ 时显然成立.考虑 $m \neq n$ 的情形，不妨设 $m > n$.

利用 Fibonaccia 数列的递推式，可知

$$\begin{aligned} F_m &= F_{m-1} + F_{m-2} = F_2F_{m-1} + F_1F_{m-2} \\ &= F_2(F_{m-2} + F_{m-3}) + F_1F_{m-2} \\ &= (F_2 + F_1)F_{m-2} + F_2F_{m-3} \\ &= F_3F_{m-2} + F_2F_{m-3} \\ &\cdots \\ &= F_nF_{m-n+1} + F_{n-1}F_{m-n}. \end{aligned}$$

于是 $(F_m,\ F_n) = (F_{n-1}F_{m-n},\ F_n) = (F_{m-n},\ F_n)$（这里用到 $(F_{n-1},\ F_n) = 1$，它可以通过对 n 用数学归纳法证得，具体过程留给读者）.

在上面的结论中，用 $(m-n,\ n)$ 代替 $(m,\ n)$ 继续讨论，表明求 F_m 与 F_n 的最大公因数的过程实质上是对下标 m、n 作辗转相除. 所以 $(F_m,\ F_n) = F_{(m,\ n)}$.

说明　利用本题的结论可证出下述命题：如果 F_n 为素数，那么 $n = 4$ 或者 n 为素数.

事实上，如果 $n \neq 4$ 且 n 不是素数，那么可写 $n = pq$，$2 \leqslant p \leqslant q$，并且

$q \geqslant 3$. 此时$(F_n, F_q) = F_{(n,q)} = F_q$，而$F_q \geqslant 2$，$F_n > F_q$，由此导出$F_n$为合数.

例 2　证明：每一个正整数 m，都可以唯一地表示为如下形式

$$\begin{aligned} m &= (a_n a_{n-1} \cdots a_2)_F \\ &= a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \cdots + a_2 F_2. \end{aligned} \qquad ①$$

这里 $a_i = 0$ 或 1，$a_n = 1$，并且不存在下标 $2 \leqslant i \leqslant n-1$，使得 $a_i = a_{i+1} = 1$，其中 F_i 为 Fibonaccia 数列中的第 i 项.

证明　形如①的正整数表示可称为 m 的F-表示，它类似于二进制，此结论是著名的 Zerkendorf 定理.

对 m 归纳来予以证明.

当 $m=1$ 时，$m = F_2$，命题成立. 现设对所有小于m的正整数k命题都成立.

由于存在唯一的 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $F_n \leqslant m < F_{n+1}$，如果 $m - F_n = 0$，那么 m 已表为①的形式，如果 $m - F_n > 0$，那么由归纳假设，$m - F_n$ 有形如①的表示，设

$$m - F_n = (a_l a_{l-1} \cdots a_2)_F = a_l F_l + \cdots + a_2 F_2,$$

其中 $a_l = 1$，则 $m = F_n + a_l F_l + \cdots + a_2 F_2$. 现在若 $l \geqslant n-1$，则 $m \geqslant F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$，矛盾，所以 $l \leqslant n-2$，从而 m 有满足①的表示.

下证 m 的形如①的表示是唯一的.

事实上，若

$$m = (a_n \cdots a_2)_F = (b_l \cdots b_2)_F, \qquad ②$$

这里 $a_n = b_l = 1$，且 $n \geqslant l$.

若 $n > l$，则由于不存在下标 $1 \leqslant i \leqslant l-1$，使得 $b_i = b_{i+1} = 1$，结合$\{F_n\}$的定义，可知

$$\begin{aligned} (b_l \cdots b_2)_F &\leqslant \begin{cases} F_l + F_{l-2} + \cdots + F_3, & m\text{ 为偶数}, \\ F_l + F_{l-2} + \cdots + F_4 + F_2, & m\text{ 为奇数}, \end{cases} \\ &< \begin{cases} F_l + F_{l-2} + \cdots + F_3 + F_2 = F_{l+1}, & m\text{ 为偶数}, \\ F_l + F_{l-2} + \cdots + F_4 + F_2 + F_1 = F_{l+1}, & m\text{ 为奇数}. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $(b_l \cdots b_2)_F < F_{l+1} \leqslant F_n$，故②不能都取等式.

所以 $n = l$，进而 $m - F_n$ 有两种表示，这与归纳假设不符. 所以，m 的表示唯一.

综上所述，由第二数学归纳法知，命题成立.

例 3　熟知任意连续 n 个整数之积是前 n 个正整数之积（即 $n!$）的倍数. Fibonaccia 数列也具有类似的性质. 请证明：对任意 $k \in \mathbf{N}^*$，数列$\{F_n\}$中任意连续 k 项之积都是前 k 项之积的倍数.

证明　引入记号 $[n]! = F_1 F_2 \cdots F_n$，$n = 1, 2, \cdots$，并规定$[0]! = 1$. 并写

$$R(m, n)=\frac{[m+n]!}{[m]!\cdot[n]!},\ m、n\in\mathbf{N}.$$

为证命题成立，只需证明：对任意 $m、n\in\mathbf{N}$，都有 $R(m, n)\in\mathbf{N}^*$.

利用例 1 中类似的推导过程，知

$$F_{m+n}=F_2F_{m+n-1}+F_1F_{m+n-2}=\cdots=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n,$$

所以，我们有

$$\begin{aligned}R(m, n)&=\frac{F_{m+n}\cdot[m+n-1]!}{[m]!\cdot[n]!}=\frac{F_{m+n}\cdot[m+n-1]!}{F_m\cdot F_n\cdot[m-1]!\cdot[n-1]!}\\&=F_{n+1}\cdot\frac{[m+n-1]!}{[m-1]!\cdot[n]!}+F_{m-1}\cdot\frac{[m+n-1]!}{[m]!\cdot[n-1]!}\\&=F_{n+1}\cdot R(m-1, n)+F_{m-1}\cdot R(m, n-1).\end{aligned}$$

上式对 $m、n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，结合初始情形 $R(0, n)=R(m, 0)=1$（对 $m、n\in\mathbf{N}$ 都成立）及数学归纳法，即可证明 $R(m, n)$ 都是正整数.

所以，命题成立.

例 4 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $(x>0)$. 证明：

（1）对任意正整数 n，都有 $g_n(x)=x+f(x)+f(f(x))+\cdots+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{个}f}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的递增函数；

（2）$g_n(1)=\dfrac{F_1}{F_2}+\dfrac{F_2}{F_3}+\cdots+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，这里 $\{F_n\}$ 是 Fibonacci 数列.

证明 为表述方便，我们记 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{个}f}$，从局部出发来讨论这个函数迭代问题.

（1）熟知函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，因此，函数 $h(x)=x+f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}=(1+x)+\dfrac{1}{1+x}-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

注意到，$f(f(x))=\dfrac{1}{1+f(x)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1+x}{2+x}=1-\dfrac{1}{2+x}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，依此可知，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，函数 $f^{(2k)}(x)$ 都是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，结合 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，可知 $f^{(2k)}(x)+f^{(2k+1)}(x)$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的增函数.

利用上述结论可知，

当 n 为奇数时，

$$g_n(x)=(x+f(x))+(f^{(2)}(x)+f^{(3)}(x))+\cdots+(f^{(n-1)}(x)+f^{(n)}(x))$$

是 $\frac{n+1}{2}$ 个$(0,+\infty)$上的增函数之和.

当 n 为偶数时，$f^{(n)}(x)$与 $g_n(x)-f^{(n)}(x)$都是$(0,+\infty)$上的增函数，因此，$g_n(x)$也是$(0,+\infty)$上的增函数.

所以，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$g_n(x)$ 都是$(0,+\infty)$上的增函数.

(2) 由 $g_n(x)$的定义可知，我们只需证明：对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f^{(n)}(1)=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$(这里 $f^{(0)}(x)=x$).

利用 $1=\frac{F_1}{F_2}$，$f(1)=\frac{1}{2}=\frac{F_2}{F_3}$ 可知当 $n=0$、1 时命题成立. 现设 $f^{(n)}(1)=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$(即命题对 n 成立)，则由 $f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{1+f^{(n)}(x)}$ 可知 $f^{(n+1)}(1)=\frac{1}{1+f^{(n)}(1)}$，故

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{1+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}=\frac{F_{n+2}}{F_{n+2}+F_{n+1}}=\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}.$$

所以，(2)成立.

例 5　考虑数列 $\{x_n\}$：$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$，$n=1$，2，3，…，这里 a、b 为实数. 若存在正整数 k、m，$k\neq m$，使得 $x_k=x_m=c$，则称实数 c 为“双重值”. 证明：存在实数 a、b，使得至少存在 2000 个不同的“双重值”. 进一步，证明：不存在 a、b，使得存在无穷多个“双重值”.

证明　我们利用 Fibonaccia 数列来构造一个具有 2000 个不同的“双重值”的数列.

想法是将$\{F_n\}$依现有的递推式向负整数下标延拓，可得

$$\begin{aligned}&F_0=F_2-F_1=0,\\&F_{-1}=F_1-F_0=1=F_1,\\&F_{-2}=F_0-F_{-1}=-1=-F_2,\\&F_{-3}=F_{-1}-F_{-2}=2=F_3,\end{aligned}$$

依此下去，可知 $F_{-2m}=-F_{2m}$，$F_{-(2m+1)}=F_{2m+1}$，$m=1$，2，….

于是，对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，令 $a=F_{2m+1}$，$b=-F_{2m}$，那么，数列$\{x_n\}$为

$$F_{2m+1},\ -F_{2m},\ F_{2m-1},\ -F_{2m-2},\ \cdots,\ -F_2,\ F_1,\ F_0,\ F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_{2m-1},\ F_{2m},\ F_{2m+1},\ \cdots.$$

数 F_1，F_3，…，F_{2m+1}都是$\{x_n\}$的“双重值”. 特别地，取 $m=1999$ 即可找到符合要求的$\{x_n\}$.

另一方面，若存在 a、b，使得$\{x_n\}$有无穷多个不同的“双重值”，则$\{x_n\}$中任意相邻两项不同号(否则，数列从这相邻两项的下一项起变为一个严格递增(或严格递减)的数列，不能出现无穷多个不同的“双重值”).

注意到，$\{x_n\}$的特征方程(也就是 Fibonaccia 数列的特征方程)为 $\lambda^2=\lambda+1$，有两个不同的实根，因而可设

$$x_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

由于 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$，而$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$，如果 $A>0$，那么 n 充分大时，都有 $x_n>0$，从而会出现都为正数的相邻两项；同样地，若 $A<0$，则$\{x_n\}$中会出现同为负数的相邻两项. 均导致矛盾. 所以$A=0$，进而 $x_n=B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，结合 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$ 知，数列$\{|x_n|\}$是一个单调递减的数列，在 $B\neq0$ 时不出现“双重数”，而 $B=0$ 时，只有一个“双重数”.

综上可知，命题成立.

说明 利用 Fibonaccia 数列的特征方程及初始条件可求得通项公式为 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$. 然而，在实际问题的解决中递推式比通项公式用得更多.

例 6 将 Fibonacci 数列的项依次排列 1，1，2，3，5，8，…；将所有的孪生素数(若 p 与 $p+2$ 都是素数，则称 p 与 $p+2$ 为孪生素数)从小到大排列 3，5，7，11，13，17，19，29，31，…. 求在这两个数列中都出现的正整数.

解 对比两个数列的前面若干项，可发现只有 3、5 和 13 在两个数列中出现，猜测这是所有要求的正整数.

鉴于孪生素数组成的数列的规律性难以把握，要证上述猜测，应从 Fibonacci 数列的性质着手，如果 n 比较大时，要么 F_n 为合数，要么 $F_n\pm2$ 都是合数，那么 F_n 不在孪生素数数列中出现. 依此想法着手，先要猜出 Fibonacci 数列的一些性质.

将 Fibonacci 数列的前面一些项列出

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	…

发现 F_{2n}（$n\geqslant 3$ 时）都是合数，而 $F_{2n+1}\pm 2$（$n\geqslant 4$ 时）也都是合数，并且有如下的一些关系式

(1) $F_{2n}=F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$，这里 $F_0=0$；

(2) $F_{4n+1}+2=F_{2n-1}(F_{2n+1}+F_{2n+3})$；

(3) $F_{4n+1}-2=F_{2n+2}(F_{2n-2}+F_{2n})$；

(4) $F_{4n+3}+2=F_{2n+3}(F_{2n+1}+F_{2n-1})$；

(5) $F_{4n+3}-2=F_{2n}(F_{2n+2}+F_{2n+4})$.

注意到，如果上述 5 个关系式成立，那么在两个数列中出现的数只有 3、5 和 13.

现在用数学归纳法证明(1)—(5)都成立.

当 $n=1$ 时，利用前表中所列数据可知(1)—(5)都成立. 现设(1)—(5)对不超过 n 的情形都成立，则由 Fibonacci 数列的递推式，对 $n+1$ 的情形，有

$$\begin{aligned}F_{4n+2}&=F_{4n+1}+F_{4n}=F_{4n+1}+F_{4n-1}+F_{4n-2}\\&=(F_{4n+1}+2)+(F_{4n-1}-2)+F_{4n-2}\\&=F_{2n-1}(F_{2n+1}+F_{2n+3})+F_{2n-2}(F_{2n}+F_{2n+2})+F_{2n-1}(F_{2n-2}+F_{2n})\\&=F_{2n+1}F_{2n-1}+F_{2n-1}F_{2n+3}+F_{2n-2}(F_{2n}+F_{2n-1})+(F_{2n-2}F_{2n+2}+F_{2n-1}F_{2n})\\&=F_{2n+1}F_{2n-1}+F_{2n-2}F_{2n+1}+F_{2n-1}(F_{2n+3}+F_{2n})+F_{2n-2}F_{2n+2}\\&=F_{2n+1}F_{2n}+2F_{2n-1}F_{2n+2}+(F_{2n}-F_{2n-1})F_{2n+2}\\&=F_{2n+1}F_{2n}+F_{2n+2}(F_{2n-1}+F_{2n})\\&=F_{2n+1}(F_{2n}+F_{2n+2}),\end{aligned}$$

即 $$F_{2(2n+1)}=F_{2n+1}(F_{2n+1-1}+F_{2n+1+1}).\qquad ①$$

同理可证 $$F_{4n+4}=F_{2n+2}(F_{2n+1}+F_{2n+3}),$$

即 $$F_{2(2n+2)}=F_{2n+2}(F_{2n+2-1}+F_{2n+2+1}).\qquad ②$$

故由①②可知，(1)对 $2n+1$、$2n+2$ 成立，因此，对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

$$\begin{aligned}F_{4n+5}+2&=F_{4n+4}+(F_{4n+3}+2)\\&=F_{2n+2}(F_{2n+1}+F_{2n+3})+F_{2n+3}(F_{2n+1}+F_{2n-1})\\&=F_{2n+1}(F_{2n+2}+F_{2n+3})+F_{2n+3}(F_{2n+2}+F_{2n-1})\\&=F_{2n+1}F_{2n+4}+2F_{2n+3}F_{2n+1}\\&=F_{2n+1}(F_{2n+3}+F_{2n+5}),\end{aligned}$$

即(2)对 $n+1$ 成立. 类似地可证(3)、(4)、(5)对 $n+1$ 成立(具体验证过程请读者完成).

综上可知，(1)—(5)对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立. 所以，只有 3、5 和 13 在两个数列中同时出现.

说明 利用例1的说明可得出当$n\geqslant 3$时，F_{2n}为合数，这里的结论更强一些.

10 平均值不等式的几个证明

从这一节起都是讨论数学归纳法运用的一些其他表现形式与方法技巧.

平均值不等式 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个正实数. 则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \qquad ①$$

其中$\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$称为$a_1, \cdots, a_n$的算术平均值，而$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$称为$a_1, \cdots, a_n$的几何平均值.

证明一 当$n=1$时，①显然成立；当$n=2$时，①等价于$a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}$，即$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$，故①成立.

现设①对$n\ (\geqslant 2)$成立，考虑$n+1$的情形.

记$A=\frac{1}{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})$，则由归纳假设知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})\\
&=\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_n)+\frac{1}{2n}(a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})\\
&\geqslant\frac{1}{2}\Big(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\sqrt[n]{a_{n+1}\underbrace{A\cdots A}_{n-1\text{个}A}}\Big)\\
&\geqslant\sqrt{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot A^{n-1}}}\\
&=\sqrt[2n]{a_1\cdots a_{n+1}A^{n-1}}.
\end{aligned}$$

注意到$a_1+\cdots+a_{n+1}=(n+1)A$，故$\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})=\frac{1}{2n}((n+1)A+(n-1)A)=A$，所以

$$A\geqslant\sqrt[2n]{a_1\cdots a_{n+1}A^{n-1}},$$

进而$A^{n+1}\geqslant a_1\cdots a_{n+1}$，即可得

$$\frac{1}{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})\geqslant\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}.$$

故①对 $n+1$ 成立.

所以,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,不等式①成立.

说明 这是用第一数学归纳法的形式给出的①的一个归纳证明,技巧性是比较强的.

证明二 利用①对 $n=2$ 成立(证明同上),由数学归纳法易证:①对 $n=2^k(k\in\mathbf{N}^*)$ 都成立.

事实上,若①对 2^k 成立,则 $n=2^{k+1}$ 时,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{k+1}}(a_1+\cdots+a_{2^{k+1}})&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}(a_1+\cdots+a_{2^k})+\frac{1}{2^k}(a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}})\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right)\\&\geqslant\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}\\&=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^{k+1}}}.\end{aligned}$$

即①对 $n=2^k$, $k=1,2,\cdots$ 都成立.

下面来讨论 n 的情形:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,取 $k\in\mathbf{N}$,使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,并记 $A=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$,则由前面的结论,可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^{k+1}}(a_1+\cdots+a_n+\underbrace{A+\cdots+A}_{2^{k+1}-n\text{个}A})\\\geqslant&\sqrt[2^{k+1}]{a_1\cdots a_n\underbrace{A\cdots A}_{2^{k+1}-n\text{个}A}}.\end{aligned}$$

结合 $a_1+\cdots+a_n=nA$,可得

$$A\geqslant\sqrt[2^{k+1}]{a_1\cdots a_nA^{2^{k+1}-n}}.$$

进而,有 $A^n\geqslant a_1\cdots a_n$,从而可知,①对 n 成立.

说明 这个证明思路比较自然,与前一个证明对比,都需要"凑项".

证明三 由前面的证明知,①对 $n=2^k$ 都成立,这表明存在无穷多个正整数 n,使得①成立.

现设①对 $n+1$ 成立,则对 n 的情形,记 $A=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$,有

$$\frac{1}{n+1}(a_1+\cdots+a_n+A)\geqslant\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_n\cdot A},$$

结合 $a_1+\cdots+a_n=nA$,就有 $A\geqslant\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_n\cdot A}$,依此可推出 $A\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$,

即 ① 对 n 成立.

所以,①对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立.

说明　这里用到了“补漏洞”的思想,它是反向数学归纳法的基本应用.

反向归纳法又称为倒推归纳法.其基本结构如下:

设关于正整数 n 的命题(或性质)$P(n)$满足:

(1) 对无穷多个正整数 n, $P(n)$成立;

(2) 由 $P(n+1)$ 成立可推出 $P(n)$ 成立.

则对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明　用反证法处理.

若存在 $m \in \mathbf{N}^*$,使得 $P(m)$ 不成立,我们用数学归纳法证明:对任意 $n \geqslant m$, $P(n)$ 都不成立(从而导出至多只有有限个 $n \in \mathbf{N}^*$,使得 $P(n)$ 成立,与条件(1) 矛盾).

事实上,由反证法假设知,$P(m)$ 不成立.

现设 $P(n)$ $(n \geqslant m)$ 不成立,则由(2) 知,$P(n+1)$ 不成立(利用(2) 的逆否命题).

所以,由数学归纳法原理知,对任意 $n \geqslant m$, $P(n)$ 都不成立,矛盾.从而,反向归纳法是正确的.

对比平均值不等式的后两个证明,它们都先证明了命题对无穷多个 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立,然后在此基础上证明命题对每个 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.这个想法在许多场合都会用到.

平均值不等式可能是数学中证明方法最多的定理,这里只是给出了利用数学归纳法证明中最常见的方法,并将这些证明的思想与方法应用于求解其他问题.

例 1　设函数 f: $\mathbf{N}^* \to [1, +\infty)$ 满足:

(1) $f(2) = 2$;

(2) 对任意 m, $n \in \mathbf{N}^*$,有 $f(mn) = f(m)f(n)$;

(3) 当 $m < n$ 时,有 $f(m) < f(n)$.

证明:对任意正整数 n,都有 $f(n) = n$.

证明　由条件(1)、(2)可知 $f(1) = 1$,现设 $f(2^k) = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$,则 $f(2^{k+1}) = f(2^k)f(2) = 2^k \times 2 = 2^{k+1}$.于是,对任意 $k \in \mathbf{N}$,都有 $f(2^k) = 2^k$.

现在来讨论 $f(n)$ 的值.设 $f(n) = l$,则由(2) 及数学归纳法,可知对任意 $m \in \mathbf{N}^*$,都有 $f(n^m) = l^m$.

设 $2^k \leqslant n^m < 2^{k+1}$,则由(3) 知 $f(2^k) \leqslant f(n^m) < f(2^{k+1})$,于是,由前面的结论知 $2^k \leqslant l^m < 2^{k+1}$,对比 $2^k \leqslant n^m < 2^{k+1}$,可知

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{n}{l}\right)^m < 2. \qquad ①$$

上式对任意 $m\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

若 $n>l$,我们取 $m>\frac{l}{n-l}$,就有

$$\left(\frac{n}{l}\right)^m=\left(1+\frac{n-l}{l}\right)^m\geqslant 1+m\cdot\frac{n-l}{l}>2,$$

与①矛盾. 同样地,若 $n<l$,取 $m>\frac{n}{l-n}$,就有 $\left(\frac{l}{n}\right)^m>2$,即 $\left(\frac{n}{l}\right)^m<\frac{1}{2}$,也与 ① 矛盾. 所以,只能是 $n=l$.

综上可知,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $f(n)=n$.

说明 如果函数 f 是 $\mathbf{N}^*$ 到 $\mathbf{N}^*$ 的映射,那么问题要简单得多,请读者给出证明.

类似地,用此方法还可证明著名的 Jenson 不等式.

例 2 求所有的函数 f: $\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$,使得对任意 m、$n\in\mathbf{N}^*$,都有

$$f(m)^2+f(n)\mid(m^2+n)^2. \qquad ①$$

解 设 f 是一个满足条件的函数,在①中令 $m=n=1$,就有 $(f(1)^2+f(1))\mid 4$,即 $f(1)(f(1)+1)\mid 4$,由于 $f(1)\geqslant 2$ 导致 $f(1)(f(1)+1)\geqslant 6$,故只能是 $f(1)=1$.

下面我们先证明:对任意素数 p,都有 $f(p-1)=p-1$. ②

事实上,对任意素数 p,在 ① 中令 $m=1$, $n=p-1$,则 $(f(1)+f(p-1))\mid p^2$,即 $(1+f(p-1))\mid p^2$,从而 $f(p-1)+1=p$ 或 p^2,若为前者,则 ② 已成立;若为后者,即 $f(p-1)=p^2-1$,此时,在 ① 中令 $m=p-1$, $n=1$,就有 $(f(p-1)^2+f(1))\mid((p-1)^2+1)^2$,即 $((p^2-1)^2+1)\mid((p-1)^2+1)^2$,但是 $((p-1)^2+1)^2\leqslant((p-1)^2+(p-1))^2=p^2(p-1)^2<(p+1)^2(p-1)^2+1=(p^2-1)^2+1$,矛盾. 所以,② 成立.

再证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $f(n)=n$.

事实上,对任意正整数 n,取 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $k+1$ 为素数(这样的 k 有无穷多个),在 ① 中令 $m=k$,结合 ② 就有

$$(k^2+f(n))\mid(k^2+n)^2. \qquad ③$$

注意到 $(k^2+n)^2=(k^2+f(n)+n-f(n))^2=A(k^2+f(n))+(n-f(n))^2$,这里 A 是某个整数. 这样,由③知

$$(k^2+f(n))\mid(n-f(n))^2.$$

上式表明,数 $(n-f(n))^2$ 可以被无穷多个正整数整除(因为 k 有无穷多

种取法)，所以$(n-f(n))^2=0$，即 $f(n)=n$.

综上可知，只有一个函数满足条件，即 $f(n)=n$.

说明 此题本质上只需证出对无穷多个 $k\in\mathbf{N}^*$，有 $f(k)=k$，然后将其余的漏洞补上，选择②作为突破口是希望让被除数的因数个数尽量少，这个技巧在整除理论中经常用到.

例 3 求所有的函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 及素数 p，都有

$$f(n)^p\equiv n\ (\bmod f(p)). \qquad ①$$

解 对任意素数 p，在①中取 $n=p$，可知

$$p\equiv f(p)^p\equiv 0\ (\bmod f(p)).$$

故 $f(p)\mid p$，从而 $f(p)=1$ 或者 p.

现在记 $S=\{p\mid p$ 为素数，$f(p)=p\}$，依下面的三种情形讨论：

情形一 S 是一个无限集. 我们利用上例的方法证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)=n$.

事实上，此时存在无穷多个素数 p，使得 $f(p)=p$，因此，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都存在无穷多个素数 p，使得 $n\equiv f(n)^p(\bmod p)$. 利用费马(Fermat)小定理，有 $f(n)^p\equiv f(n)\ (\bmod p)$. 所以 $f(n)\equiv n\ (\bmod p)$，这表明 $f(n)-n$ 是无穷多个素数的倍数，故 $f(n)=n$.

情形二 S 为空集. 则对任意素数 p，都有 $f(p)=1$. 此时，对其余的正整数 n，$f(n)$ 可取任意正整数(① 式都满足).

情形三 S 是一个非空有限集.

设 p 为 S 中最大的素数，若 $p\geqslant 3$，我们证明这将导致矛盾，从而，得到 $S=\{2\}$.

由 p 的最大性，知对任意素数 $q>p$，都有 $f(q)=1$，由 ① 得，$q\equiv f(q)^p\equiv 1\ (\bmod p)$，即 $q\equiv 1\ (\bmod p)$.

现在记 Q 为所有不超过 p 的奇素数之积，则 $Q+2$ 的每一个素因子都大于 p(注意，这里用到 $p\geqslant 3$)，这样，结合上面得出的结论知 $Q+2\equiv 1\ (\bmod p)$，导致 $p\mid Q+1$，与 $p\mid Q$ 矛盾.

上述讨论表明 $S=\{2\}$，知 $f(2)=2$，而对奇素数 p，都有 $f(p)=1$. 由①知，只需 $f(n)^2\equiv n\ (\bmod 2)$. 因此，对其余的正整数 n，$f(n)$ 只需取与 n 同奇偶的正整数即可.

直接验证，可知每一种情形所得的函数都符合要求，它们即为所求.

说明 求 $\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 上的函数，本质上是讨论正整数数列$\{f(n)\}$ 相关的问题，这里都采用了素因数分析的方法，它属于数论方法的迁移，同样，求解

函数方程的一些思路也可用来讨论这类问题.

例 4 设 k 为给定的正整数，求所有的函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，使得对任意 m、$n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$(f(m)+f(n))\mid(m+n)^k. \qquad ①$$

解 显然，函数 $f(n)=n$ 符合条件，它是否为满足条件的唯一函数呢？下证明之.

先证一个结论：f 是一个单射.

事实上，若存在 a、$b\in\mathbf{N}^*$，使得 $a\neq b$，但是 $f(a)=f(b)$，则由①知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$(f(a)+f(n))\mid(a+n)^k,\ (f(b)+f(n))\mid(b+n)^k.$$

因此，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 $f(a)+f(n)$ 都是 $(a+n)^k$ 与 $(b+n)^k$ 的公因数.

现在取一个素数 $p>\max\{a,\ |b-a|\}$，然后令 $n=p-a$. 由于 $(a+n,\ b+n)=(a+n,\ b-a)=(p,\ b-a)=1$，故 $((a+n)^k,\ (b+n)^k)=1$，导致 $f(a)+f(n)=1$，与 $f(a)$、$f(n)$ 都为正整数矛盾. 所以，f 是一个单射.

再证明：对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，有 $|f(m+1)-f(m)|=1$.

在①中分别用 $(m,\ n)$ 和 $(m+1,\ n)$ 的结论，有

$$(f(m)+f(n))\mid(m+n)^k,\ (f(m+1)+f(n))\mid(m+1+n)^k.$$

而 $(m+n,\ m+1+n)=1$，故 $(f(m)+f(n),\ f(m+1)+f(n))=1$，进而，当 m 固定时，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$(f(n)+f(m),\ f(m+1)-f(m))=1. \qquad ②$$

如果 $|f(m+1)-f(m)|\neq1$，那么存在素数 p，使得 $p\mid|f(m+1)-f(m)|$. 现在取 $\alpha\in\mathbf{N}^*$，使得 $n=p^\alpha-m$ 为正整数，则由①知 $f(n)+f(m)\mid p^{\alpha k}$，从而 $f(n)+f(m)=p^l$，这里 l 为某个正整数，导致

$$(f(n)+f(m),\ f(m+1)-f(m))=(p^l,\ f(m+1)-f(m))\geqslant p.$$

与②式矛盾.

最后，我们证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)=n$.

由前面的结论知，对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(m+1)-f(m)=1$ 或者 $f(m+1)-f(m)=-1$. 如果这两种情形在同一个符合要求的函数 f 中都出现，那么存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $(f(m+1)-f(m),\ f(m+2)-f(m+1))=(1,\ -1)$ 或者 $(-1,\ 1)$，都导致 $f(m+2)=f(m)$，与 f 为单射矛盾. 所以，要么对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(m+1)-f(m)=1$，要么对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有

$f(m+1)-f(m)=-1$.

注意到，f 是 $\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 上的函数，知只能是：对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(m+1)-f(m)=1$. 依此可知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)=n+c$（这里 $c=f(1)-1\geqslant 0$）.

如果 $c>0$，我们取一个素数 $p>2c$，利用①知 $f(1)+f(p-1)\mid p^k$，得 $p+2c\mid p^k$，这要求 $p+2c$ 为 p 的幂次，从而 $p\mid p+2c$，导致 $p\mid 2c$，矛盾. 所以 $c=0$.

综上可知，只有函数 $f(n)=n$ 符合要求.

11 选择适当的跨度

从本讲起，下面的四讲都是一些运用数学归纳法证题时的常见技巧的介绍.

逻辑结构 设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的命题（或性质），k 为一个给定的正整数，如果

(1) $P(1)$，$P(2)$，$\cdots$，$P(k)$ 成立；

(2) 由 $P(n)$ 成立可推出 $P(n+k)$ 成立.

那么，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

这里 k 是一个跨度，当 $k=1$ 时，就是第一数学归纳法. 有时在处理问题时，利用大跨度要方便得多.

例 1 证明：对任意正整数 $n\geqslant 3$，都存在一个完全立方数，它可以表示为 n 个正整数的立方和.

证明 对比不定方程 $x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解的结论，可了解问题的背景.

当 $n=3$ 时，由 $3^3+4^3+5^3=6^3$ 可知命题对 $n=3$ 成立；

当 $n=4$ 时，由 $5^3+7^3+9^3+10^3=13^3$（这个等式是 Euler 最早发现的），可知命题对 $n=4$ 成立.

现设命题对 $n\ (\geqslant 3)$ 成立，即存在正整数 $x_1<x_2<\cdots<x_n<y$，使得

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^3,$$

则利用 $6^3=3^3+4^3+5^3$，可知

$$\begin{aligned}(6y)^3&=(6x_n)^3+\cdots+(6x_2)^3+(6x_1)^3\\&=(6x_n)^3+\cdots+(6x_2)^3+(5x_1)^3+(4x_1)^3+(3x_1)^3.\end{aligned}$$

这表明命题对 $n+2$ 成立.

所以，对任意 $n \geqslant 3$，命题都成立.

例 2　设 n 为不小于 3 的正整数. 证明：可以将一个正三角形剖分为 n 个等腰三角形.

证明　当 $n=3$ 时，设 O 为正三角形 ABC 的外心，则 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COA$ 都是等腰三角形，故命题对 $n=3$ 成立.

当 $n=4$ 时，设 D、E、F 分别是正三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 的中点，则 $\triangle AEF$、$\triangle FBD$、$\triangle DCE$ 和 $\triangle DEF$ 都是等腰三角形，故命题对 $n=4$ 成立.

当 $n=5$ 时，如图 5 所示，设 O 为正三角形 ABC 的外心，D、E 分别是 BC、CA 的中点，F 为 BO 的中点. 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可知 $\triangle ABO$、$\triangle BFD$、$\triangle FOD$、$\triangle DEC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形. 故命题对 $n=5$ 成立.

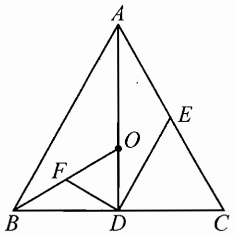


图 5

现设每一个正三角形都能剖分为 $n(\geqslant 3)$ 个等腰三角形（即命题对 n 成立），则对正三角形 ABC，设 D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点，并将正三角形 AEF 依归纳假设剖分为 n 个等腰三角形，将这 n 个三角形与 $\triangle BDF$、$\triangle CDE$、$\triangle DEF$ 合并，即构成正三角形 ABC 的一个个数为 $n+3$ 的等腰三角形剖分. 故命题对 $n+3$ 成立.

综上所述，对任意 $n \geqslant 3$，命题成立.

例 3　证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，不定方程

$$x^2+y^2=z^n \qquad ①$$

有无穷多组正整数解.

证明　当 $n=1$ 时，对任意 x、$y \in \mathbf{N}^*$，$(x,\ y,\ x^2+y^2)$ 都是 ① 的正整数解；当 $n=2$ 时，取 $m>n\geqslant 1$，m、$n \in \mathbf{N}^*$，令 $x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$，就有 $x^2+y^2=z^2$，故命题对 $n=1$、2 成立.

现设命题对 n 成立，对正整数 x、y、z，若 $x^2+y^2=z^n$，则 $(xz)^2+(yz)^2=z^{n+2}$，因此不定方程 $x^2+y^2=z^{n+2}$ 有无穷多组正整数解. 结合命题对 $n=1$，2 成立，可知命题对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

说明　此题还可依下述方法处理：令 $z=a+b\mathrm{i}$，其中 a、$b \in \mathbf{N}^*$ 且 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$（这样的 a、b 对有无穷多对使得 a^2+b^2 的值彼此不同），则由二项式定理，可写 $z^n=(a+b\mathrm{i})^n=x+y\mathrm{i}$，$x$，$y \in \mathbf{Z}$，且 $xy \neq 0$（这是因为 $\arg z^n \in (0,\ \pi)$），两边取模，可知 $(\sqrt{a^2+b^2})^n=\sqrt{x^2+y^2}$，即有 $x^2+y^2=(a^2+b^2)^n$，故 $(|x|,\ |y|,\ a^2+b^2)$ 是 $x^2+y^2=z^n$ 的正整数解.

例 4　求所有的函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，使得

(1) 对任意 m、$n\in\mathbf{N}$，都有 $f(m^2+n^2)=f(m)^2+f(n)^2$；

(2) $f(1)>0$.

解　在(1)中令 $m=n=0$，得 $f(0)=2f(0)^2$，故 $f(0)=0$ 或 $\frac{1}{2}$，但 $f(0)\in\mathbf{N}$，故 $f(0)=0$. 于是，由(1)知，对任意 $m\in\mathbf{N}$，都有 $f(m^2)=f(m)^2$.

现在先计算 $n\in\{1,2,\cdots,10\}$ 时，$f(n)$ 的值.

由条件及前面推出的结论知 $f(1)=f(1^2)=f(1)^2$，而 $f(1)>0$，故 $f(1)=1$. 进而，依次有

$$\begin{aligned}f(2)&=f(1^2+1^2)=f(1)^2+f(1)^2=1+1=2;\\f(4)&=f(2^2)=f(2)^2=4;\\f(5)&=f(2^2+1^2)=f(2)^2+f(1)^2=5;\\f(8)&=f(2^2+2^2)=f(2)^2+f(2)^2=8.\end{aligned}$$

又由

$$25=f(5)^2=f(5^2)=f(3^2+4^2)=f(3)^2+f(4)^2=f(3)^2+16,$$

结合 $f(3)\in\mathbf{N}$，知 $f(3)=3$. 进而 $f(9)=f(3)^2=9$，$f(10)=f(3^2+1^2)=f(3)^2+f(1)^2=10$.

利用 $7^2+1^2=5^2+5^2$ 及条件(1)可算出 $f(7)=7$，再由 $10^2=6^2+8^2$，知 $f(10)^2=f(6)^2+f(8)^2$，解得 $f(6)=6$.

所以，对任意 $0\leqslant n\leqslant 10$，都有 $f(n)=n$.

下面选用跨度为 5 的方法来证明：对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n)=n$.

为此需要用到下面的一些等式

$$\begin{aligned}(5k+1)^2+2^2&=(4k+2)^2+(3k-1)^2;\\(5k+2)^2+1^2&=(4k+1)^2+(3k+2)^2;\\(5k+3)^2+1^2&=(4k+3)^2+(3k+1)^2;\\(5k+4)^2+2^2&=(4k+2)^2+(3k+4)^2;\\(5k+5)^2&=(4k+4)^2+(3k+3)^2.\end{aligned}$$

这些等式中右边的每一项在 $k\geqslant 2$ 时都小于左边的第一项，因此，利用条件(1)及归纳假设，我们每次可以确定这些等式左边第一项的函数值. 即每次归纳向后推 5 个数都成立.

所以，对每个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n)=n$.

说明　从上面的例子可以发现，所谓用跨度为 k 的方法去证 $P(n)$ 成立，本质上是将 $\{P(n)\}$ 分划为 k 组命题再分别予以证明，当然，如果将此想法与

第二数学归纳法结合，各组命题之间还可以相互利用，本例中就体现了这个思想.

12 选择恰当的归纳对象

与正整数有关的命题中有时会出现多个变量，这时采用数学归纳法处理时，首先应选择好归纳的对象.

例 1 设 $m, n \in \mathbf{N}^*$. 证明：对任意正实数 $x_1, \cdots, x_n$; $y_1, \cdots, y_n$. 若 $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$(1 - x_1 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m)\cdots(1 - y_n^m) \geqslant 1. \qquad ①$$

证明 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时，由条件知

$$(1 - x_1)^m + (1 - y_1^m) = y_1^m + (1 - y_1^m) = 1.$$

故①对 $n = 1$ 成立.

现设①对 $n - 1$ $(n \geqslant 2)$ 成立，考虑 n 的情形.

$$\begin{aligned}&(1 - x_1 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m)\cdots(1 - y_n^m)\\ =&(1 - x_1 \cdots x_{n-1}(1 - y_n))^m + (1 - y_1^m)\cdots(1 - y_n^m)\\ \geqslant&(1 - x_1 \cdots x_{n-1} + x_1 \cdots x_{n-1} y_n)^m + (1 - (1 - x_1 \cdots x_{n-1})^m)(1 - y_n^m).\end{aligned}$$

记 $a = 1 - x_1 \cdots x_{n-1}$, $b = y_n$, 由上式知为证 ① 对 n 成立，只需证明：

$$(a + b - ab)^m + (1 - a^m)(1 - b^m) \geqslant 1$$

对任意 $a, b \in (0, 1)$ 都成立. 即证

$$(a + b - ab)^m \geqslant a^m + b^m - a^m b^m. \qquad ②$$

对②处理时，我们通过对 m 归纳来进行.

当 $m = 1$ 时，② 显然成立；现设 ② 对 $m - 1$ $(m \geqslant 2)$ 成立，则

$$\begin{aligned}&(a + b - ab)^m - a^m - b^m + a^m b^m\\ \geqslant&(a^{m-1} + b^{m-1} - a^{m-1} b^{m-1})(a + b - ab) - a^m - b^m + a^m b^m\\ =&2a^m b^m + ab^{m-1} + ba^{m-1} - a^m b^{m-1} - a^{m-1} b^m - a^m b - ab^m\\ =&(b^{m-1} - b^m)(a - a^m) + (a^{m-1} - a^m)(b - b^m).\end{aligned}$$

注意到 $a, b \in (0, 1)$，故 $b^{m-1} \geqslant b^m$, $a \geqslant a^m$, $a^{m-1} \geqslant a^m$, $b \geqslant b^m$，所以 $(a + b - ab)^m \geqslant a^m + b^m - a^m b^m$，即②对 m 成立.

综上可知，命题①成立.

说明 这个与两个正整数变量有关的问题，选择对 n 归纳(视 m 为常数)是容易想到的，因为这时①左边的第 2 个加项在作归纳过渡时显得容易处理些.

例 2 证明：对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$，数

$$S(m, n)=\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\left(\tan\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}\right)^{2m}$$

都为正整数.

证明 选择 n 作为归纳对象.

当 $n=1$ 时，$S(m, 1)=\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{2m}=1$，故命题对 $n=1$ 及 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立.

现设命题对 $n-1$ 及 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立，考虑 n 的情形.

由 $\cot 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{1}{2}(\cot\alpha-\tan\alpha)$ 可知

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}(\cot\alpha-\tan\alpha)^2=\frac{1}{4}(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2),$$

所以，利用首尾配对求和，知

$$\begin{aligned}
S(1, n)&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\left(\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}+\tan^2\frac{(2(2^{n-1}-1-i)+1)\pi}{2^{n+1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\left(\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\left(\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}+\cot^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\left(4\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}+2\right)\\
&=2\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}+2^{n-1}\\
&=2\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}\left(\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}+\tan^2\frac{(2(2^{n-1}-1-i)+1)\pi}{2^{n}}\right)+2^{n-1}\\
&=2\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}\left(\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}+\tan^2\left(\pi-\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}\right)\right)+2^{n-1}\\
&=4\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}\tan^2\frac{(2i+1)\pi}{2^{n}}+2^{n-1}=4S(1, n-1)+2^{n}.
\end{aligned}$$

从而 $S(1, n)\in\mathbf{N}^*$.

下面设 $S(1, n)$，$S(2, n)$，…，$S(m-1, n)$ 都为正整数，考虑 $S(m, n)$.

注意到，对 $k\in\mathbf{N}$，由二项式定理有

$$(x+x^{-1})^k=\mathrm{C}_k^0(x^k+x^{-k})+\mathrm{C}_k^1(x^{k-1}+x^{-(k-1)})+\cdots, \qquad ①$$

因此

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{4}(x+x^{-1}-2)\right)^m\\&=\frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k(x+x^{-1})^k\cdot(-2)^{m-k}\\&=\frac{1}{4^m}((x^m+x^{-m})+b_1(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+\cdots+b_{m-1}(x+x^{-1})+b_m),\end{aligned}$$

这里 b_1，…，$b_m\in\mathbf{Z}$，并用到①的结论.

在上式中令 $x=\tan^2\dfrac{(2i+1)\pi}{2^{n+1}}$，并对 $i=0, 1, 2, \cdots, 2^{n-2}-1$ 求和，利用 $S(1, n)$ 中类似的计算，可知

$$S(m, n-1)=\frac{1}{4^m}(S(m, n)+b_1S(m-1, n)+\cdots+b_{m-1}S(1, n)+b_m),$$

得

$$S(m, n)=4^m\cdot S(m, n-1)-b_1S(m-1, n)-\cdots-b_{m-1}S(1, n)-b_m.$$

从而 $S(m, n)\in\mathbf{Z}$，而 $S(m, n)$ 中每一项都大于零，故 $S(m, n)\in\mathbf{N}^*$.

综上可知，对任意 m、$n\in\mathbf{N}^*$，数 $S(m, n)$ 都为正整数，命题获证.

说明 本质上在从 $n-1$ 过渡到 n 的过程中，我们采用了对 m 再归纳的方法. 在双变量命题中，这种处理是利用数学归纳法处理时常见的方法.

例3 设 t 个非负整数 a_1，a_2，…，a_t 满足

$$a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1,$$

这里 $1\leqslant i, j\leqslant t$，$i+j\leqslant t$.

求证：存在 $x\in\mathbf{R}$，使得对任意 $n\in\{1, 2, \cdots, t\}$，都有 $a_n=[nx]$.

证明 记 $I_n=\left[\dfrac{a_n}{n}, \dfrac{a_n+1}{n}\right)$，$n=1, 2, \cdots, t$，要求证明存在实数

$$x\in\bigcap_{n=1}^{t}I_n. \qquad ①$$

现设 $L=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant t}\dfrac{a_n}{n}$，$U=\min\limits_{1\leqslant n\leqslant t}\dfrac{a_n+1}{n}$，若能证明：$L<U$，则 ① 成立（因为

$\bigcap\limits_{n=1}^{t} I_n = [L, U)$). 而为证 $L<U$,只需证明:对任意 m、$n\in\{1, 2, \cdots, t\}$,都有$\frac{a_n}{n}<\frac{a_m+1}{m}$, 即

$$ma_n < n(a_m+1). \qquad ②$$

下面通过对 $m+n$ 归纳来证明②成立.

当 $n+m=2$ 时,有 $m=n=1$,此时,② 显然成立. 设 ② 对所有满足 $n+m\leqslant k$ 的正整数对(m, n)成立,则当 $n+m=k+1$ 时,如果 $m=n$,那么 ② 显然成立;如果 $m>n$,那么由归纳假设知$(m-n)a_n<n(a_{m-n}+1)$,而由条件中 $a_i+a_j\leqslant a_{i+j}$ 知 $n(a_{m-n}+a_n)\leqslant na_m$,从而 $ma_n<n(a_m+1)$,即 ② 成立;如果 $m<n$,那么由归纳假设知 $ma_{n-m}<(n-m)(a_m+1)$,而由条件中 $a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1$ 知 $ma_n\leqslant m(a_m+a_{n-m}+1)$,所以 $ma_n<n(a_m+1)$,即 ② 成立.

综上可知,对任意 m、$n\in\{1, 2, \cdots, t\}$, ② 都成立.

说明 一般地,对任意 $x\in\mathbf{R}$ 及 i、$j\in\mathbf{N}^*$,都有$[ix]+[jx]\leqslant[(i+j)x]\leqslant[ix]+[jx]+1$. 这是关于取整函数的一个性质,反过来讨论就得到了本题的结论. 注意,此题的结论只是对任意有限项成立,并不能对具有题给性质的无穷数列 $a_1, a_2, \cdots$找到符合要求的 x.

从处理手法上来讲,这里采用对 $m+n$ 来归纳的策略是方便而且适当的.

例 4 设 m、n 为不同的正整数,一个由整数组成的数列满足:其任意连续 m 项之和为负数,而任意连续 n 项之和为正数. 问:这个整数数列最多有多少项?

解 设 $(m, n)=d$, $m=m_1d$, $n=n_1d$,则$(m_1, n_1)=1$. 并设数列 $a_1, \cdots, a_t$ 满足条件. 记 $A_i=a_{(i-1)d+1}+\cdots+a_{id}$, $i=1, 2, \cdots$.

一方面,若 $t\geqslant(m_1+n_1-1)d$, 我们考虑下述数表

$$\begin{array}{l}A_1, A_2, \cdots, A_{m_1};\\ A_2, A_3, \cdots, A_{m_1+1};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{n_1}, A_{n_1+1}, \cdots, A_{n_1+m_1-1}.\end{array}$$

由题设可知,上表中每行中各数之和为负数,每列之和为正数,这样整个表格中所有数之和,按行计算为负数,而按列计算又要为正数,矛盾. 所以,应有 $t\leqslant(m_1+n_1-1)d-1$,即 $t\leqslant m+n-(m, n)-1$.

另一方面,我们证明:存在一个长为 $m+n-(m, n)-1$ 的符合要求的整数数列. 为此,我们需要证明下述命题.

命题　设 $d\in\mathbf{N}^*$，s、t 为两个不同的正整数，$(s,t)=1$，则存在长为 $(s+t-1)d-1$ 项的有理数数列，它的任意连续 sd 项之和为负数，而任意 td 项之和为正数(注意:将此命题中的数列，每个数都乘以这个数列的所有数的公分母就可以得到符合题意的整数数列).

对 $\max\{s,t\}=r$ 运用数学归纳法.

当 $\max\{s,t\}=2$ 时，不妨设 $s=2$，$t=1$(否则，将所取数列每个数都乘以 -1 即可)，这时，任取 $2d-1$ 个正有理数，可得满足命题的数列.

设命题对 $\max\{s,t\}<r\ (r\geqslant 3)$ 成立，考虑 $\max\{s,t\}=r$ 的情形.

不妨设 $s>t$，注意到 $(s-t,t)=1$，于是，由归纳假设知，存在有理数数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{(s-1)d-1}$，使得其中任意连续 $(s-t)d$ 项之和为负数，连续 td 项之和为正数. 我们证明:存在有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_{td}$，使得下述不等式组成立.

$$\begin{cases}a_{d+1}+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(s-1)d-1}<0,\\ a_{d+2}+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(s-1)d-2}<0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{td}+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(s-t)d}<0.\end{cases}\qquad ①$$

而且

$$\begin{cases}a_{td}+\cdots+a_1>0,\\ a_{td-1}+\cdots+a_1+b_1>0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1+b_1+\cdots+b_{td-1}>0.\end{cases}\qquad ②$$

这样，数列 $a_{td},a_{td-1},\cdots,a_1,b_1,\cdots,b_{(s-1)d-1}$ 是一个满足命题的长为 $(s+t-1)d-1$ 的数列，从而命题获证.

事实上，要不等式组①、②同时成立，我们只需分别选取有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_d$，使得 $a_1>-(b_1+\cdots+b_{td-1})$，$a_2>-(a_1+b_1+\cdots+b_{td-2})$，$\cdots$，$a_d>-(a_{d-1}+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(t-1)d})$，再取 a_{d+1}，使得 a_{d+1} 为有理数，且

$$\begin{aligned}&-(a_d+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(t-1)d-1})\\ &<a_{d+1}<-(a_d+\cdots+a_1+b_1+\cdots+b_{(s-1)d-1}).\end{aligned}\qquad ③$$

注意③的右边减去左边 $=-(b_{(t-1)d}+\cdots+b_{(s-1)d-1})>0$ (这里用到归纳假设)，故满足条件的 a_{d+1} 存在. 依此类推，可知满足不等式组①与②的有理数 $a_1,\cdots,a_{td}$ 存在.

回到原题，满足条件的整数数列最多有 $m+n-(m,n)-1$ 项.

说明　此题中 $m=11$，$n=6$ 的情形曾作为竞赛题出现过，由于 $m=11$，

$n=6$ 时的例子容易得到，而对一般的 m、n 例子却非常难找到，因此当此例在 2000 年国家集训队的测验中出现时，做出的同学非常少.

13　对命题作恰当变化

利用数学归纳法证题时，有时需要作出：主动加强命题、借助辅助命题、将命题一般化等处理.

例 1　证明：对任意正整数 n，都有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n}}. \qquad ①$$

证明　如果直接处理，那么为实现归纳过渡，需要不等式 $\frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$ 成立，这要求 $(n+1)(2n+1)^2\leqslant n(2n+2)^2$，而这等价于 $(2n+1)^2\leqslant n(4n+3)$. 但此不等式不成立. 所以，直接用数学归纳法难以证出 ① 成立.

我们证明①的加强命题：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \qquad ②$$

当 $n=1$ 时，② 式左边 $=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{2}$，故 ② 对 $n=1$ 成立.

现设②对 n 成立，则 $n+1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

为证②对 $n+1$ 成立，只需证明

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

即证

$$(3n+4)(2n+1)^2\leqslant(3n+1)(2n+2)^2. \qquad ③$$

注意到，③等价于

$$\begin{aligned}3(2n+1)^2\leqslant(3n+1)((2n+2)^2-(2n+1)^2)&=(3n+1)(4n+3)\\ \Leftrightarrow 12n^2+12n+3&\leqslant 12n^2+13n+3\\ \Leftrightarrow n&\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以，③成立. 从而②对 $n+1$ 也成立，即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 ② 成立.

结合 $\sqrt{3n+1}>\sqrt{3n}$，可知 ① 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

说明 有些关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 直接用数学归纳法处理时难以实现 n 到 $n+1$ 的过渡，然而对比 $P(n)$ 更强的命题 $Q(n)$，在用数学归纳法证明时反而简单，因此需要对命题主动去加强. 当然，主动加强命题时通常需在把握问题本质的前提下恰当选择，目的是便于实现归纳过渡.

例 2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的任意一个 r-分划（即 $A_1, \cdots, A_r$ 中任两个的交集是空集，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i=\mathbf{N}^*$）. 证明：在 $A_1, \cdots, A_r$ 中有一个集合 A 具有下述性质：存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，在 A 中都可取出 k 个数 $a_1, \cdots, a_k$ 满足：对 $1\leqslant j\leqslant k-1$，都有 $1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant m$.

证明 设 $P\subseteq\mathbf{N}^*$，如果 P 中含有任意长的相继正整数段，那么称 P 为长子集.

我们将命题加强为：对任意长子集 P 的任何 r-分划 $A_1, A_2, \cdots, A_r$. 集合 $A_1, \cdots, A_r$ 中必有一个集合 A 具有题设的性质.

对 r 运用数学归纳法.

当 $r=1$ 时，由长子集的定义，取 $m=1$ 可知命题成立；

设命题对 $r=n$ 的情形成立，考虑 $r=n+1$ 的情形.

设 $P=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cup A_{n+1}$，$Q=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 如果 Q 为长子集，由归纳假设可知命题成立；如果 Q 不是长子集，则必存在 $l\in\mathbf{N}^*$，使 Q 中没有长为 l 的相继正整数段，由于 P 为长子集，故对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，P 中存在长为 kl 的相继正整数段，该正整数段中至少有 k 个数属于 A_{n+1}，现在将这个长为 kl 的相继正整数段中属于 A_{n+1} 的最小 k 个数取出，则相邻两数之差不超过 $2l$. 于是，取 $m=2l$，则集合 A_{n+1} 具有题给的性质.

综上可知，加强的命题获证. 由于 $\mathbf{N}^*$ 本身是一个长子集，所以，原命题成立.

说明 问题本质上要求证明：对 $\mathbf{N}^*$ 的每一个 r-分划而言，都存在集合 A 及 $m\in\mathbf{N}^*$，使得将 $\mathbf{N}^*$ 中的数分为长度为 $\frac{m}{2}$ 的相继整数段后，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，都有相邻的 k 个“相继整数段”，满足其中每个“相继整数段”内都有一个数属于 A. 因此如果其他子集的并集中不含有任意长度的相继整数段，那么 A 中就能找到满足条件的 k 个数，依此想到引入“长子集”的概念，进而得到问题的恰当加强.

例 3 证明：存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得

$$n\mid(2^n+2). \qquad ①$$

证明 $n=2$ 满足①，下一个满足①的正整数 $n=6$，两者之间的关系是 $6=2^2+2$. 这提示我们用下面的方法来处理.

设 $n(>1)$ 是具有性质①的正整数，如果能证明：$(2^n+2)\mid(2^{2^n+2}+2)$，那么依此递推，可知有无穷多个正整数 n 满足①.

注意到 $(2^{n-1}+1)\mid(2^{2^n+1}+1)$ 在 $(n-1)\mid(2^n+1)$ 条件下成立. 我们通过增加一个要求的方法来处理.

下证：存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*(n>1)$，使得 $n\mid(2^n+2)$，并且 $(n-1)\mid(2^n+1)$. ②

注意到，$n=2$ 具有上述性质. 现设 $n(\geqslant 2)$ 具有上面的性质，令 $m=2^n+2$，我们证明 m 也具有上述性质.

事实上，由于 $(n-1)\mid(2^n+1)$，而 2^n+1 为奇数，故可设 $2^n+1=(n-1)q$，q 为奇数，则

$$\begin{aligned}2^{m-1}+1&=2^{2^n+1}+1=(2^{n-1})^q+1\\&=(2^{n-1}+1)((2^{n-1})^{q-1}-(2^{n-1})^{q-2}+\cdots+1),\end{aligned}$$

故 $(2^{n-1}+1)\mid(2^{m-1}+1)$，从而 $(2^n+2)\mid(2^m+2)$，即 $m\mid(2^m+2)$.

另一方面，由 $(n-1)\mid(2^n+1)$，知 $n-1$ 为奇数，故 n 为偶数，这样，由 $n\mid(2^n+2)$，我们可设 $2^n+2=np$，这里 p 为奇数(这里用到 $4\nmid(2^n+2)$)，于是

$$2^m+1=(2^n)^p+1=(2^n+1)((2^n)^{p-1}-(2^n)^{p-2}+\cdots+1),$$

即有 $(2^n+1)\mid(2^m+1)$，也就是说 $(m-1)\mid(2^m+1)$.

综上可知，命题成立.

说明 如果问题是："证明：存在无穷多个正整数 $n(>1)$，使得 $n-1\mid 2^n+1$." 我们是否也需要将它加强为命题②呢？

例 4 求所有的函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，使得对任意 x、y、$z\in\mathbf{Z}$，都有

$$f(x^3+y^3+z^3)=f(x)^3+f(y)^3+f(z)^3.$$

解 容易看到下面的 3 个函数

$$f(x)=0,\ f(x)=x,\ f(x)=-x$$

满足题中的条件.

下证：它们是所有满足条件的函数.

取 $(x,y,z)=(0,0,0)$，得 $f(0)=3f(0)^3$，这个关于 $f(0)$ 的三次方程只有一个整数解，所以 $f(0)=0$. 再取 $(x,y,z)=(x,-x,0)$ 可得 $f(x)=-f(-x)$，故 $f(x)$ 为奇函数. 而令 $(x,y,z)=(1,0,0)$，得 $f(1)=f(1)^3$，于是 $f(1)\in\{-1,0,1\}$.

下面用数学归纳法证明：

对任意 $x\in\mathbf{Z}$，都有 $f(x)=f(1)x$（这样结合 $f(1)$ 的取值，就完成了本题的解答）. ①

对 $|x|$ 予以归纳，令 $(x, y, z)=(1, 1, 0)$，得 $f(2)=2f(1)^3=2f(1)$，令 $(x, y, z)=(1, 1, 1)$ 又有 $f(3)=3f(1)$. 这样，结合 $f(x)$ 为奇函数，可知结论①对 $|x|\leqslant 3$ 都成立.

现设对 $|x|<k\ (k\in\mathbf{N}^*, k>3)$，都有 $f(x)=f(1)x$. 讨论 $f(k)$ 与 $f(-k)$ 的情形，由 $f(x)$ 为奇函数，只要证明 $f(k)=f(1)k$.

为此，我们需要用到下面的辅助命题.

命题　对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 4$，数 k^3 都可以表示为 5 个立方数之和，并且 5 个加项中的每一项的绝对值都小于 k^3.

事实上，由

$$4^3=3^3+3^3+2^3+1^3+1^3,\ 5^3=4^3+4^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3,$$
$$6^3=5^3+4^3+3^3+0^3+0^3,\ 7^3=6^3+5^3+1^3+1^3+0^3.$$

及对不小于 9 的奇数 $2m+1\ (m\in\mathbf{N}^*, m\geqslant 4)$ 有

$$(2m+1)^3=(2m-1)^3+(m+4)^3+(4-m)^3+(-5)^3+(-1)^3. \quad ②$$

所以，命题对 $k=4$ 或 6 及 k 为不小于 3 的奇数成立.

注意到，对任意 $k>3$，$k\in\mathbf{N}^*$，都存在分解式 $k=my$，这里 $m\in\mathbf{N}^*$，$y=4$ 或 6 或大于 3 的奇数. 而由前所证，有表示 $y^3=y_1^3+\cdots+y_5^3$，其中 $|y_i|<y$，$1\leqslant i\leqslant 5$，于是 $k^3=(my_1)^3+\cdots+(my_5)^3$，且 $|my_i|<my=k$. 所以，辅助命题成立.

由上述命题，对任意 $k>3$，$k\in\mathbf{N}^*$，可写 $k^3=x_1^3+\cdots+x_5^3$，$|x_i|<k$，从而由条件知

$$f(k)^3+f(-x_4)^3+f(-x_5)^3=f(x_1)^3+f(x_2)^3+f(x_3)^3,$$

结合归纳假设，$f(x_i)=f(1)x_i$，$f(-x_i)=-f(1)x_i$ 得

$$f(k)^3=\sum_{i=1}^{5}f(x_i)^3=f(1)^3\sum_{i=1}^{5}x_i^3=k^3f(1)^3,$$

故 $f(k)=f(1)k$.

从而结论①获证，题目获解.

说明　此题本质上是从恒等式②出发来编拟的，证明过程中为实现归纳过渡引入辅助命题的思想并非是数学归纳法证题时所独有，再难的数学问题也都是由一些简单结论创造性地融合而成的.

例5　在某个罐里有黑、白两种颜色的球各一个，我们另外还有50个白球和50个黑球，下面进行50次操作：随机地取出一个球，然后放入罐中两个与取出的球同色的球作为一次操作. 最后在罐中有52个球. 问：罐中最有可能有几个白球？

解　我们证明：对任意 $1 \leqslant k \leqslant 51$，罐中出现 k 个白球的概率都是 $\frac{1}{51}$.

将问题一般化，记 n 次操作后，罐中有 k 个白球的概率为

$$P_n(k),\ 1 \leqslant k \leqslant n+1.$$

下证：$P_n(1) = P_n(2) = \cdots = P_n(n+1) = \frac{1}{n+1}$.

当 $n=1$ 时，上述命题显然成立. 设命题对 n 时成立，考虑 $n+1$ 的情形. 注意到有如下的递推式成立

$$P_{n+1}(k) = \frac{k-1}{n+2}P_n(k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P_n(k),$$

这里 $1 \leqslant k \leqslant n+1$，其中 $P_n(0)=0$（递推式是依第 $n+1$ 次操作前罐中白球数的个数为 $k-1$ 和 k 分类讨论得到的）.

于是，利用 $P_n(1) = P_n(2) = \cdots = P_n(n+1) = \frac{1}{n+1}$（归纳假设），可知 $P_{n+1}(1) = P_{n+1}(2) = \cdots = P_{n+1}(n+1) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$，再结合 $\sum_{k=1}^{n+2} P_{n+1}(k) = 1$，就可证得 $P_{n+1}(n+2) = \frac{1}{n+2}$.

所以，命题成立.

说明　将命题一般化只是形式，这里是为了利用递推的思想去处理才作出一般化的，思想与内涵决定表现的形式.

例6　证明：存在正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_{50}$，使得

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \cdots = n_{50} + S(n_{50}).$$

这里 $S(n)$ 表示自然数 n 在十进制表示下各数码之和.

证明　将命题一般化，用数学归纳法证明如下结论：

对任意 $k \in \mathbf{N}^*$，$k \geqslant 2$，存在正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，使得

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \cdots = n_k + S(n_k) \equiv 7 \pmod 9. \quad ①$$

当 $k=2$ 时，取 $n_1 = 107$，$n_2 = 98$，注意到 $107+8 = 98+17 = 115 \equiv 7 \pmod 9$，故命题对 $k=2$ 成立.

设命题对 $k(\geqslant 2)$ 成立，并设 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ 满足①式，考虑 $k+1$ 的情形.

令 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $9m-2=n_i+S(n_i)$，$1\leqslant i\leqslant k$. 取正整数 $n'_i=9\times 10^m+n_i$，$1\leqslant i\leqslant k$，$n'_{k+1}=8\underbrace{9\cdots9}_{m\text{个}9}$，则 $n'_i\ (1\leqslant i\leqslant k+1)$ 都是 $m+1$ 位正整数(注意，由 $k=2$ 的取法，显然对归纳假设中的 k，均有 $n_i<10^m$，故 n'_i 为 $m+1$ 位数，$1\leqslant i\leqslant k$)，并且对 $1\leqslant i\leqslant k$，均有

$$n'_i+S(n'_i)=9\times 10^m+n_i+(9+S(n_i))=9\times 10^m+9m+7;$$

而 $n'_{k+1}+S(n'_{k+1})=(9\times 10^m-1)+(8+9m)=9\times 10^m+9m+7$.

所以 $n'_1+S(n'_1)=\cdots=n'_{k+1}+S(n'_{k+1})\equiv 7\pmod 9$，又由归纳假设及我们的构造，可知 $n'_{k+1}<n'_1<n'_2<\cdots<n'_k$. 从而命题对 $k+1$ 也成立.

综上可知，命题成立.

说明　这里①式中要求 $n_i+S(n_i)\equiv 7\pmod 9$ 对归纳过渡中找到 n'_{k+1} 而言是非常重要的，它是在归纳构造的过程中发现的一个必要的加强.

14　先猜后证

先猜后证是数学发现的基本途径，如果所猜结论证不出来就变为了数学猜想. 借助较小的数考察一个关于正整数 n 的命题，利用类比、不完全归纳等手段猜出一般性结果，然后借助数学归纳法予以证明. 这样的过程在解决问题时经常会出现.

例 1　函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}$ 定义如下 $f(1)=0$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，都有

$$f(n)=\max\left\{f(j)+f(n-j)+j\mid j=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

求出(并予以证明) $f(2004)$ 的值.

解　试算 n 较小时 $f(n)$ 的值，分别有 $f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=4$，$f(5)=5$，…. 在计算这些值的过程中，可发现当 $1\leqslant j\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，$f(j)+f(n-j)+j$ 的最大值在 $j=\left[\frac{n}{2}\right]$ 时取到，因此，猜想

$$f(2n)=2f(n)+n,\ f(2n+1)=f(n)+f(n+1)+n. \qquad ①$$

下面用数学归纳法来证明①成立.

当 $n=1$ 时，由上面的讨论知①成立.

现设①对 $1,2,\cdots,n-1$ 都成立，考虑 n 的情形.

先求 $f(2n)$ 的值.

$$\begin{aligned}f(2n)&=\max\{f(j)+f(n-j)+j\mid 1\leqslant j\leqslant n\}\geqslant f(n)+f(2n-n)+n\\&=2f(n)+n.\end{aligned}$$

因此，只需证明：$f(2n)\leqslant 2f(n)+n$.

对 $1\leqslant j\leqslant n$ 中 j 的奇偶性分别讨论.

当 $j=2k$，$1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$时，由归纳假设有

$$\begin{aligned}f(j)+f(2n-j)+j&=f(2k)+f(2(n-k))+2k\\&=(2f(k)+k)+(2f(n-k)+n-k)+2k\\&=2(f(k)+f(n-k)+k)+n\leqslant 2f(n)+n.\end{aligned}$$

最后一个不等式由 $f(n)$ 的定义得到.

当 $j=2k-1$，$1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，由归纳假设知

$$\begin{aligned}&f(j)+f(2n-j)+j\\=&f(2k-1)+f(2(n-k)+1)+2k-1\\=&(f(k)+f(k-1)+k-1)+(f(n-k)+f(n-k+1)+n-k)+2k-1\\=&(f(k-1)+f(n-(k-1))+k-1)+(f(k)+f(n-k)+k)+n-1\\\leqslant&f(n)+f(n)+n=2f(n)+n.\end{aligned}$$

这里认定 $f(0)=0$，又当 n 为偶数时，$\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$；当 n 为奇数时，设 $n=2m+1$，则 $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，$f(k)+f(n-k)+k=f(m+1)+f(m)+m+1\leqslant f(n)+1$，所以上述不等式的推导是正确的. 从而 $f(2n)\leqslant 2f(n)+n$.

再求 $f(2n+1)$ 的值时，同上类似讨论，可知只需证明：

$$f(2n+1)\leqslant f(n)+f(n+1)+n.$$

仍对 $1\leqslant j\leqslant n$ 中 j 的奇偶性分别予以分析.

当 $j=2k$，$1\leqslant j\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$时，由归纳假设有

$$\begin{aligned}&f(j)+f(2n+1-j)+j\\=&f(2k)+f(2n+1-2k)+2k\\=&(2f(k)+k)+(f(n-k)+f(n-k+1)+n-k)+2k\\=&(f(k)+f(n-k)+k)+(f(k)+f(n+1-k)+k)+n\\\leqslant&f(n)+f(n+1)+n.\end{aligned}$$

当 $j=2k-1$，$1\leqslant j\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，有

$$
\begin{aligned}
& f(j)+f(2n+1-j)+j \\
= & f(2k-1)+f(2n-2k+2)+2k-1 \\
= & (f(k-1)+f(k)+k-1)+(2f(n-k-1)+n-k+1)+2k-1 \\
= & (f(k-1)+f(n-(k-1))+k-1)+(f(k)+f(n+1-k)+k)+n \\
\leqslant & f(n)+f(n+1)+n.
\end{aligned}
$$

从而 $f(2n+1)\leqslant f(n)+f(n+1)+n$.

综上可知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，① 都成立.

现在利用①依次递推计算得 $f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=4$，$f(7)=9$，$f(8)=12$，$f(15)=28$，$f(16)=32$，$f(31)=75$，$f(32)=80$，$f(62)=181$，$f(63)=186$，$f(125)=429$，$f(126)=435$，$f(250)=983$，$f(251)=989$，$f(501)=2222$，$f(1002)=4945$，$f(2004)=10\,892$.

所求的值 $f(2004)=10\,892$.

说明 猜测的时候可以粗糙一些，但推导证明时一定要认真仔细，否则很容易得出错误的结论，难以形成科学的态度和习惯.

例 2 对正整数 $k\geqslant 1$，设 $p(k)$为不能整除 k 的最小素数. 若 $p(k)>2$，记 $q(k)$为所有小于 $p(k)$的素数的乘积. 若 $p(k)=2$，则令 $q(k)=1$.

定义数列$\{x_n\}$如下 $x_0=1$，而

$$x_{n+1}=\frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

求所有的 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $x_n=111\,111$.

解 试算最初的一些 x_n 的值，列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
x_n	1	2	3	2×3	5	2×5	3×5	2×3×5	7	2×7	3×7	2×3×7	…

如果将 n 写为二进制数，那么由上面的数据，可知 n 在二进制表示中有几个1，那么 x_n 就是几个素数的乘积. 进一步，将素数从小到大排列，设依次为 $p_0<p_1<p_2<\cdots$. 对照表中的数据不难得到下面的猜想：

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，设二进制表示下：

$$n=2^{r_1}+2^{r_2}+\cdots+2^{r_k},\ r_1>r_2>\cdots>r_k\geqslant 0.$$

即 n 所对应的二进制数共(r_1+1)位，其中第 r_k+1，$r_{k-1}+1$，…，r_1+1 位上

的元素为1，其余位上的元素全为0. 则 $x_n = p_{r_1}p_{r_2}\cdots p_{r_k}$，其中 p_{r_i} 表示所有素数中第 r_i+1 大的素数. ①

我们通过对 n 归纳来证明上述结论.

当 $n=1$ 时，由 $x_1=2=p_0$，可知 ① 成立.

现设命题对 n 成立，即 $x_n=p_{r_1}p_{r_2}\cdots p_{r_k}$，考虑 $n+1$ 的情形.

如果 $r_k\geqslant 1$，即 n 对应的二进制数末位为0，那么 $n+1=2^{r_1}+2^{r_2}+\cdots+2^{r_k}+2^0$，此时 x_n 为奇数，故 $p(x_n)=2$，进而 $q(x_n)=1$，由归纳假设，可知

$$x_{n+1}=\frac{x_np(x_n)}{q(x_n)}=\frac{x_n\cdot p_0}{1}=p_{r_1}\cdots p_{r_k}p_0.$$

如果 $r_k=0$，设 i 是使得 $r_{i-1}\geqslant r_i+2$ 的最大的正整数，即 n 对应的二进制数从右端第二位起往左数，所有的二进制位中，只有第 (r_i+1) 位是第一个，其左边的二进制数位至少含有一个0. 即

$$n=\underset{\substack{\text{第}\\ r_1+1\\ \text{位}}}{1}\ 0\cdots0\ \underset{\substack{\text{第}\\ r_2+1\\ \text{位}}}{1}\ 0\cdots0\ \underset{\substack{\text{第}\\ r_{i-1}+1\\ \text{位}}}{1}\ 0\cdots0\ \underset{\substack{\text{第}\\ r_i+1\\ \text{位}}}{1}\ \underbrace{11\cdots11}_{r_i\text{个}}.$$

此时 $r_{k-j}=j$，其中 $0\leqslant j\leqslant k-i$. 那么

$$n+1=2^{r_1}+2^{r_2}+\cdots+2^{r_{i-1}}+2^{r_i+1}\text{(若 } i \text{ 不存在，则 } n+1=2^{r_1+1}\text{)}.$$

这时由归纳假设知 $p(x_n)=p_{r_i+1}$，从而 $q(x_n)=p_0p_1\cdots p_{r_i}=p_0p_1\cdots p_{k-i}=p_{r_k}p_{r_{k-1}}\cdots p_{r_i}$. 所以

$$x_{n+1}=\frac{x_n\cdot p(x_n)}{q(x_n)}=\frac{p_{r_1}\cdots p_{r_{i-1}}p_{r_i+1}p_{r_i}\cdots p_{r_k}}{p_{r_i}\cdots p_{r_k}}=p_{r_1}\cdots p_{r_{i-1}}p_{r_i+1}.$$

所以，①对 $n+1$ 成立，即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，①都成立.

现在由 $111\,111=3\times7\times11\times13\times37=p_1p_3p_4p_5p_{11}$，可得满足 $x_n=111\,111$ 的正整数 n 对应的二进制表示为 $n=2^{11}+2^5+2^4+2^3+2=2106$.

所以，所求的 $n=2106$.

例3 整数数列 $\{a_n\}$ 定义如下 $a_1=2$，$a_2=7$，

$$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2},\ n=2,3,\cdots.$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 题设所给的递推式难以确定 a_n，能否由条件得出我们熟悉的常系数线性递推式呢？大胆猜测 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$，p、q 为待定的常数.

试算该数列的前面几项，可知 $a_1=2$，$a_2=7$，$a_3=25$，$a_4=89$，…. 确

定猜测中的 p、q 的值，猜想 $a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$，$n\geqslant 2$.

下面用数学归纳法证明上述猜想.

当 $n=2$、3 时，上述猜想成立.

设对 $k\leqslant n$ 时，都有 $a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$ 成立. 则对 $k=n+1$ 的情形，我们有

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n}=\frac{a_{n+1}(3a_n+2a_{n-1})}{a_n}=3a_{n+1}+2a_n+2\left(\frac{a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2}{a_n}\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|2\left(\frac{a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2}{a_n}\right)\right| &= \left|\frac{2a_{n-1}}{a_n}\right|\left|a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{2a_{n-1}}{a_n}\right|.\end{aligned}$$

由归纳假设，可知 $a_n>2a_{n-1}$. 所以

$$\left|3a_{n+1}+2a_n-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|<\frac{1}{2}.$$

利用 a_{n+2} 为整数，且 $\left|a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，得

$$\begin{aligned}&|a_{n+2}-(3a_{n+1}+2a_n)| \\ =&\left|a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|+\left|\frac{a_{n+1}^2}{a_n}-(3a_{n+1}+2a_n)\right|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

所以 $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$. 于是猜想对 $k=n+1$ 的情形成立.

综上可知，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=7$，$a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$，$n=3$，4，…. 利用特征方程求解这个常系数齐次线性递推式，可得

$$a_n=\frac{17+5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\frac{17-5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

例 4　函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 定义如下 $f(1)=1$，对 $n\in\mathbf{N}^*$，数 $f(n+1)$ 是满足下述条件的最大正整数 m：存在一个由正整数组成的等差数列 a_1，a_2，…，a_m（这里项数小于 3 的数列也认为是等差数列），使得 $a_1<a_2<\cdots<a_m=n$，并且 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_m)$. 证明：对任意正整数 n，都有 $f(4n+8)=n+2$.

证明　题目并不要求确定每一个 n 的函数值，但从 f 的定义来看，只有每个 $f(n)$ 的值都确定后才能方便地求出下一个值.

利用 f 的定义作初始值的计算，可知

$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=1$，$f(5)=2$，$f(6)=2$，
$f(7)=2$，$f(8)=3$，$f(9)=1$，$f(10)=2$，$f(11)=2$，$f(12)=3$，
$f(13)=2$，$f(14)=3$，$f(15)=2$，$f(16)=4$，$f(17)=1$，$f(18)=3$，
$f(19)=2$，$f(20)=5$，$f(21)=1$，$f(22)=2$，$f(23)=2$，$f(24)=6$，
$f(25)=1$，$f(26)=4$，$f(27)=2$，$f(28)=7$，$f(29)=1$，$f(30)=4$，
$f(31)=2$，$f(32)=8$，$f(33)=1$，$f(34)=5$，$f(35)=2$，$f(36)=9$，
…….

这些数据的列出不仅说明了当 $1\leqslant n\leqslant 7$ 时，有 $f(4n+8)=n+2$，进一步，还促使我们猜测当 $n\geqslant 8$ 时，有

$$f(4n+1)=1;\ f(4n+2)=n-3;\ f(4n+3)=2;\ f(4n+4)=n+1. \quad ①$$

下面对 n 归纳来证：$n\geqslant 8$ 时，① 都成立.

当 $n=8$ 时，利用所列出的数据可知 ① 成立.

现设①对 $8,9,\cdots,n-1$ 都成立，考察 $n(\geqslant 9)$ 的情形.

利用所算得的 $f(1)$ 至 $f(36)$ 值结合归纳假设可知 $f(4n)=n$ 是 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(4n)$ 中最大的数，所以 $f(4n+1)=1$.

现在考察 $f(1)$ 至 $f(4n+1)$ 中等于 1 的项，可知 $f(17)=f(21)=\cdots=f(4n+1)=1$，结合 f 的定义得 $f(4n+2)\geqslant n-3$. 另一方面，对于以 $4n+1$ 为末项的等差数列 $a_1<a_2<\cdots<a_m(=4n+1)$，若 $f(a_1)=\cdots=f(a_m)=1$，则该数列的公差 $d\geqslant 4$（因为若 $d\leqslant 3$，则 $f(4n-2)$，$f(4n-1)$，$f(4n)$，$f(4n+1)$ 中应有至少两个等于 1，但由归纳假设，这 4 个数中只有 $f(4n+1)=1$），如果 $d>4$，那么由归纳假设及所列 $f(1)$ 至 $f(36)$ 的值可知 $d\geqslant 8$，此时 $m\leqslant 1+\dfrac{(4n+1)-1}{8}<n-3$. 因此 $f(4n+2)=n-3$.

再考察 $f(1)$ 到 $f(4n+2)$ 的值，仅有 $f(4n-12)=f(4n+2)=n-3$（这里用到 $n\geqslant 9$），从而 $f(4n+3)=2$.

最后，与讨论 $f(4n+2)$ 的值类似，可知 $f(4n+4)=n+1$.

所以，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$（$n\geqslant 8$），① 都成立. 进而，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(4n+8)=n+2$.

说明　要猜出规律性的结果，每个问题需要试算的初始值个数不尽相同，仔细与信心都很重要.

例 5　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，记 $\rho(n)$ 为满足 $2^k\mid n$ 且 $2^{k+1}\nmid n$ 的非负整数 k.

数列 $\{x_n\}$ 定义如下

$$x_0=0,\ \frac{1}{x_n}=1+2\rho(n)-x_{n-1},\ n=1,2,\cdots.$$

证明：每一个非负有理数恰好在数列 x_0，x_1，…中出现一次.

证明　如果写 $x_n=\dfrac{p_n}{q_n}$（p_n、$q_n\in\mathbf{N}^*$，$(p_n,q_n)=1$），那么条件式为

$$\frac{q_n}{p_n}=(1+2\rho(n))-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

去分母在 $p_n=q_{n-1}$ 时是最方便的. 这个猜测引出了下面的证明.

定义数列 $\{y_n\}$ 如下 $y_1=y_2=1$,

$$y_{n+2}=(1+2\rho(n))y_{n+1}-y_n,\ n=1,2,\cdots.$$

我们依次建立下述结论.

结论 1　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $x_n=\dfrac{y_n}{y_{n+1}}$.

对 n 归纳予以证明. 归纳过渡可依如下方式进行

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}}&=1+2\rho(n+1)-x_n=1+2\rho(n+1)-\frac{y_n}{y_{n+1}}\\&=\frac{1}{y_{n+1}}((1+2\rho(n+1))y_{n+1}-y_n)\\&=\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}},\end{aligned}$$

故 $x_{n+1}=\dfrac{y_{n+1}}{y_{n+2}}$.

结论 2　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$y_{2n+1}=y_{n+1}+y_n,\ y_{2n}=y_n.$$

对 n 归纳予以证明. 事实上，若结论 2 对 n 成立，那么

$$\begin{aligned}y_{2n+2}&=(1+2\rho(2n+1))y_{2n+1}-y_{2n}=y_{2n+1}-y_n=y_{n+1};\\y_{2n+3}&=(1+2\rho(2n+2))y_{2n+2}-y_{2n+1}\\&=(1+2(1+\rho(n+1)))y_{2n+2}-y_{2n+1}\\&=2y_{n+1}+(1+\rho(n+1))y_{n+1}-(y_{n+1}+y_n)\\&=y_{n+1}+(1+\rho(n+1))y_{n+1}-y_n\\&=y_{n+1}+y_{n+2}.\end{aligned}$$

依此结合初始情况成立就可知结论 2 正确.

由结论 2 结合数学归纳法易证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $(y_n,y_{n+1})=1$.

结论 3　对任意 p、$q\in\mathbf{N}^*$，$(p,q)=1$，存在唯一的 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $(p,$

$q)=(y_n,\ y_{n+1})$.

对 $p+q$ 归纳予以证明. 当 $p+q=2$ 时，$p=q=1$，此时 $(p,\ q)=(y_1,\ y_2)$，而由结论 2 知，当 $n\geqslant 2$ 时，y_n 与 y_{n+1} 中至少有一个大于 1，所以 $(y_n,\ y_{n+1})\neq(y_1,\ y_2)$，故结论 3 对 $p+q=2$ 成立.

现设结论 3 对所有满足 $p+q<m\ (m\geqslant 3,\ m\in\mathbf{N}^*)$ 且 $(p,\ q)=1$ 的正整数对 $(p,\ q)$ 成立. 考虑 $p+q=m$ 的情形，此时 $p\neq q$，分 $p<q$ 和 $p>q$ 两种情形讨论.

情形一　$p<q$，由 $(p,\ q)=1$，知 $(p,\ q-p)=1$，而 $(q-p)+p=q<m$，由归纳假设知，存在唯一的 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $(p,\ q-p)=(y_n,\ y_{n+1})$，这时 $(p,\ q)=(y_n,\ y_n+y_{n+1})=(y_{2n},\ y_{2n+1})$（这里用到结论 2）.

另一方面，若存在 $k<l$，k、$l\in\mathbf{N}^*$，使得 $(p,\ q)=(y_k,\ y_{k+1})=(y_l,\ y_{l+1})$，则 $y_k=y_l$，$y_{k+1}=y_{l+1}$. 这时如果 k 与 l 都为偶数，那么由结论 2 可知 $(p,\ q-p)$ 有两种不同的表示，与归纳假设矛盾. 但是 k 为奇数时，$y_k>y_{k+1}$，与 $p<q$ 矛盾，故 k 只是偶数，同理 l 为偶数. 从而，只有一个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $(p,\ q)=(y_n,\ y_{n+1})$.

情形二　$p>q$，同情形一类似讨论.

综上可知，结论 3 成立.

由结论 1、结论 3 及 $x_0=0$，可知命题成立.

15　数列中的存在性问题

存在性问题出现在数学的每一个分支中，前面的各节中都出现过. 这里专门用一节来讨论数列中的存在性问题是希望起到强调的作用，引起重视，并以例题的形式讨论一些处理此类问题的方法.

例 1　设 a、b 是两个大于 2 的整数. 证明：存在正整数 k 及由正整数组成的有穷数列 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$，使得 $n_1=a$，$n_k=b$，而对 $1\leqslant i\leqslant k-1$，都有

$$(n_i+n_{i+1})\mid n_in_{i+1}.$$

证明　我们用"$a\sim b$"表示正整数 a、b 可以用上述数列连接，那么"若 $a\sim b$ 成立，则 $b\sim a$ 亦成立".

一个自然的想法是证明：任意两个相邻正整数（都大于 2）之间是"可达"的. 利用下面的两个结论可达此目的.

结论 1　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，都有 $n\sim 2n$.

下面的数列表明结论 1 成立.

$$n,\ n(n-1),\ n(n-1)(n-2),\ n(n-2),\ 2n.$$

结论 2　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 4$，都有 $n\sim n-1$.

利用数列

$$n,\ n(n-1),\ n(n-1)(n-2),\ n(n-1)(n-2)(n-3),\ 2(n-1)(n-2).$$

结合结论 1 知 $2(n-1)(n-2)\sim(n-1)(n-2)$，而 $(n-1)(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$ 是 $(n-1)(n-2)\cdot(n-1)$ 的约数. 故结论 2 成立.

对大于 2 的整数 a、b，不妨设 $a\leqslant b$，如果 $a=b$，那么利用 $a\sim a+1\sim b(=a)$ 可知命题成立；如果 $a<b$，那么利用 $a\sim a+1\sim a+2\sim\cdots\sim b$ 可知命题亦成立.

说明　解决的关键是对结论 1 和结论 2 的直接构造，这是处理存在性问题的最自然的思路.

例 2　设 $m\in\mathbf{N}^*$. 问：是否存在一个 m 次的整系数多项式 $f(x)$，使得对任意 $n\in\mathbf{Z}$，由下述方式定义的数列 $\{a_k\}$ 中任意两项互素：$a_1=f(n)$，$a_{k+1}=f(a_k)$，$k=1,2,\cdots$？

解　当 $m=1$ 时，不存在这样的多项式.

事实上，如果存在 $f(x)=ax+b$ 符合要求，不妨设 $a>0$. 那么对 $n\in\mathbf{Z}$，有

$$a_k=a^k\cdot n+(a^{k-1}+\cdots+1)b. \qquad ①$$

此结论可通过对 k 归纳得到.

若 $b=0$，则对任意大于 1 的正整数 n，由①可知数列 $\{a_k\}$ 中每一项都是 n 的倍数，从而没有两项是互素的.

若 $b\neq 0$，由于 a 为正整数，知存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $|(a^{k-1}+\cdots+1)b|>1$，记 $c=(a^{k-1}+\cdots+1)b$，我们取 n 为 $|c|$ 的素因子，则对应于这个 n 的 a_k 是 n 的倍数，由 ① 知 $a_{2k}=a^{2k}\cdot n+(a^{2k-1}+\cdots+1)b=a^{2k}\cdot n+(a^k+1)\cdot(a^{k-1}+\cdots+1)b=a^{2k}\cdot n+(a^k+1)c$，故 n 也是 a_{2k} 的约数，导致 a_k 与 a_{2k} 不互素.

所以，在 $m=1$ 时，不存在符合要求的整系数多项式.

下证：当 $m\geqslant 2$ 时，都存在这样的多项式.

我们证明：当 $f(x)=x^{m-1}(x-1)+1$ 时，对任意 $n\in\mathbf{Z}$，相应的数列 $\{a_k\}$ 中任意两项都互素.

注意到，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，有

$$a_{k+1}=a_k^{m-1}(a_k-1)+1\equiv 1(\operatorname{mod} a_k),$$

而且

$$a_{k+2}=a_{k+1}^{m-1}(a_{k+1}-1)+1\equiv 1^{m-1}\cdot 0+1=1\ (\operatorname{mod} a_k).$$

依此结合数学归纳法可知，对任意正整数 $t>k$，都有 $a_t \equiv 1 \pmod{a_k}$. 所以，数列 $\{a_k\}$ 中任意两项都互素.

综上可知，当 $m=1$ 时，不存在；而 $m \geqslant 2$ 时，都存在.

说明 对 $m \geqslant 2$ 的情形，任取一个 $m-2$ 次的整系数多项式 $g(x)$，令 $f(x)=x(x-1)g(x)+1$，仿上可证：对 $n \in \mathbf{Z}$，相应的数列 $\{a_k\}$ 中任意两项互素.

例 3 设 q 为一个给定的实数，满足 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<q<2$. 数列 $\{p_n\}$ 定义如下：若正整数 n 的二进制表示是 $n=2^m+a_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0$，这里 $a_i \in \{0, 1\}$. 则 $p_n=q^m+a_{m-1}\cdot q^{m-1}+\cdots+a_1\cdot q+a_0$. 证明：存在无穷多个正整数 k，使得不存在正整数 l，满足 $p_{2k}<p_l<p_{2k+1}$.

证明 对 $m \in \mathbf{N}^*$，设二进制表示下 $2k=(\underbrace{10\cdots10}_{m个10})_2$，我们证明不存在 $l \in \mathbf{N}^*$，使得 $p_{2k}<p_l<p_{2k+1}$.

事实上，对这样的 $k \in \mathbf{N}^*$，有

$$p_{2k}=q^{2m-1}+q^{2m-3}+\cdots+q,\ p_{2k+1}=p_{2k}+1.$$

如果存在 $l \in \mathbf{N}^*$，使得 $p_{2k}<p_l<p_{2k+1}$，设 l 的二进制表示为 $l=\sum_{i=0}^{t} a_i\cdot 2^i$，$a_i \in \{0, 1\}$，$a_t=1$，则 $p_l=\sum_{i=0}^{t} a_i\cdot q^i$.

(1) 若 $m=1$，则 $q<p_l<q+1$，这时，如果 $t \geqslant 2$，那么 $p_l \geqslant q^2>q+1$（因为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<q<2$，有 $q+1<q^2$），矛盾. 如果 $t=1$，那么 $p_l=q$ 或 $q+1$，亦矛盾.

(2) 设 $m-1$ $(m \geqslant 2)$ 时，可以推出矛盾，考虑 m 的情形.

若 $t \geqslant 2m$，则 $p_l \geqslant q^{2m} \geqslant q^{2m-1}+q^{2m-2} \geqslant q^{2m-1}+q^{2m-3}+q^{2m-4} \geqslant \cdots \geqslant q^{2m-1}+\cdots+q+1=p_{2k+1}$，矛盾.

若 $t \leqslant 2m-2$，则 $p_l \leqslant q^{2m-2}+q^{2m-3}+\cdots+1=(q^{2m-2}+q^{2m-3})+(q^{2m-4}+q^{2m-5})+\cdots+(q^2+q)+1 \leqslant q^{2m-1}+q^{2m-3}+\cdots+q^3+1<q^{2m-1}+\cdots+q^3+q=p_{2k}$，矛盾.

上述推导中，都用到 $q^{i+2} \geqslant q^{i+1}+q^i$，$i=0, 1, 2, \cdots$.

所以 $t=2m-1$，这时，记 $l'=l-2^{2m-1}=\sum_{i=0}^{t-1} a_i\cdot 2^i$，进而，有 $p_{l'}=p_l-q^{2m-1}$，于是，由 $p_{2k}<p_l<p_{2k+1}$ 知

$$p_{2(k-1)}=q^{2m-3}+\cdots+q^3+q<p_{l'}<p_{2(k-1)}+1.$$

与归纳假设不符.

综上可知，命题成立.

例4　是否存在一个由正整数组成的数列$\{a_n\}$，使得每一个正整数都在该数列中恰好出现一次，并且对任意$k\in\mathbf{N}^*$，都有$k\mid(a_1+\cdots+a_k)$?

解　存在这样的数列.

我们采用递归方法来构造：取$a_1=1$，现设$a_1, a_2, \cdots, a_m$(两两不同)已取定，令t为不在$a_1, \cdots, a_m$中出现的最小正整数. 由于$(m+1, m+2)=1$，故利用中国剩余定理可知：存在无穷多个正整数r，使得(记$s=a_1+\cdots+a_m$)

$$\begin{cases} s+r\equiv 0 \pmod{m+1}, \\ s+r+t\equiv 0 \pmod{m+2}. \end{cases}$$

取这样的一个r，使得$r>\max\{a_1, \cdots, a_m, t\}$，令$a_{m+1}=r$，$a_{m+2}=t$. 依此定义的数列即符合要求.

说明　利用递推方法来处理存在性问题本质上还是一种直接构造的技巧. 本题中定义的数列依次写出可以是1，3，2，10，4，…，每次增加两项的做法可确保不重复地遍经所有正整数.

例5　一个由整数组成的数列$\{a_n\}$满足：对任意下标$k\geqslant 2$，都有$0\leqslant a_k\leqslant k-1$，并且$a_1+\cdots+a_k\equiv 0 \pmod k$. 证明：无论初始值$a_1$如何选取，都存在正整数$m$，使得该数列从第$m$项起变为常数.

证明　出发点是去证：对任意$a_1\in\mathbf{Z}$，存在下标k，使得$a_1+\cdots+a_k=dk$，其中$0\leqslant d<k$. ①

如果上述结论获证，那么$a_1+\cdots+a_k+d=d\cdot(k+1)$，而$a_{k+1}$是$\{0, 1, 2, \cdots, k\}$中满足$a_1+\cdots+a_{k+1}\equiv 0 \pmod{k+1}$的唯一整数，于是$a_{k+1}=d$. 依此递推，就可证出：当$n\geqslant k+1$时，都有$a_n=d$.

现在来证①成立. 若否，设存在a_1，使得满足①的下标k不存在. 由于当$a_1<0$时，如果数列$\{a_n\}$不是从某一项开始变为0，那么$\{a_n\}$中有无穷多项为正整数，因此，存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$a_1+\cdots+a_m\geqslant 0$，从而，可不妨设$a_1>0$(注意，若$a_1=0$，则可知对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=0$)，此时，对任意$m\in\mathbf{N}^*$，都有$a_1+a_2+\cdots+a_m>0$.

由条件$a_1+\cdots+a_m\equiv 0 \pmod m$，可设$a_1+\cdots+a_m=d_m\cdot m$，结合反设中没有下标$k$符合①，可知对任意$m\in\mathbf{N}^*$，都有$d_m\geqslant m$，故$a_1+\cdots+a_m\geqslant m^2$. 利用$m\geqslant 2$时，有$a_m\leqslant m-1$，得

$$m^2\leqslant a_1+\cdots+a_m\leqslant a_1+1+2+\cdots+(m-1)=a_1+\frac{m(m-1)}{2}.$$

导致$a_1\geqslant\dfrac{m(m+1)}{2}$，此式不能对所有$m\in\mathbf{N}^*$都成立，所得矛盾表明①成立.

综上可知，命题成立.

说明　利用反证法(或抽屉原则等)是间接得到存在性的基本方法，在处理不存在问题时就更常用了.

例 6　数列$\{a_n\}$定义如下：若正整数 n 在二进制表示下，数码 1 出现偶数次，则 $a_n=0$；否则 $a_n=1$. 证明：不存在正整数 k、m，使得对任意 $j\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，都有

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j}. \quad ①$$

证明　利用$\{a_n\}$的定义可知

$$\begin{cases}a_{2n}\equiv a_n \pmod 2,\\ a_{2n+1}\equiv a_{2n}+1\equiv a_n+1 \pmod 2).\end{cases} \quad ②$$

如果存在 k、$m\in\mathbf{N}^*$，使得对 $j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$都有①成立，那么由最小数原理，我们可设(k,m)是这样的正整数对中使 $k+m$ 最小的数对.

情形一　m 为偶数，设 $m=2t$，$t\in\mathbf{N}^*$.

若 k 为偶数，在①中取 $j=0,2,\cdots,2(t-1)$，则 $0\leqslant\frac{j}{2}\leqslant t-1$，且

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j},$$

由②得 $a_{\frac{k}{2}+\frac{j}{2}}=a_{\frac{k}{2}+t+\frac{j}{2}}=a_{\frac{k}{2}+2t+\frac{j}{2}}$，这表明$\left(\frac{k}{2},\frac{m}{2}\right)$也是使①对 $0\leqslant j\leqslant\frac{m}{2}-1$ 都成立的正整数对，与 $k+m$ 的最小性矛盾.

若 k 为奇数，在①中取 $j=1,3,\cdots,2t-1$，同上讨论可知

$$a_{\frac{k+1}{2}+\frac{j-1}{2}}=a_{\frac{k+1}{2}+t+\frac{j-1}{2}}=a_{\frac{k+1}{2}+2t+\frac{j-1}{2}},$$

表明$\left(\frac{k+1}{2},\frac{m}{2}\right)$也使①对 $0\leqslant j\leqslant\frac{m}{2}-1$ 都成立，与 $k+m$ 的最小性矛盾.

情形二　m 为奇数.

当 $m=1$ 时，要求 $a_k=a_{k+1}=a_{k+2}$，这时如果 k 为偶数，那么 $a_{2n}=a_{2n+1}\equiv a_{2n}+1 \pmod 2)$，矛盾；如果 k 为奇数，设 $k=2n+1$，那么 $a_{2n+2}=a_{2n+3}\equiv a_{2n+2}+1 \pmod 2)$，亦矛盾.

当 $m\geqslant 3$ 时，在①中令 $j=0,1,2$，可得

$$\begin{cases}a_k=a_{k+m}=a_{k+2m}, & ③\\ a_{k+1}=a_{k+m+1}=a_{k+2m+1}, & ④\\ a_{k+2}=a_{k+m+2}=a_{k+2m+2}. & ⑤\end{cases}$$

如果 k 为偶数，设 $k=2n$，$m=2t+1$，那么由②知 $a_{k+1}\neq a_k$，$a_{k+m+1}\neq$

a_{k+m+2}，这样结合 ③、④、⑤ 可知

$$a_k = a_{k+m+2} = a_{k+2}. \tag{⑥}$$

（注意，这里用到数列之中的每一项都为 0 或 1.）

现在，若 n 为偶数，设 $n=2t$，则 $a_{k+2}=a_{4t+2}=a_{2t+1}\equiv a_{2t}+1\equiv a_{4t}+1\equiv a_k+1 \pmod 2$，与 ⑥ 矛盾；若 n 为奇数，则由 m 为奇数可知 $k+2m\equiv 0 \pmod 4$，类似讨论可得 $a_{k+2m}\neq a_{k+2m+2}$，结合 ③、⑤、⑥ 亦得矛盾.

如果 k 为奇数，结合 m 为奇数，由②可知 $a_{k+m}\neq a_{k+m+1}$，$a_{k+1}\neq a_{k+2}$，利用 ③、④、⑤ 得

$$a_k = a_{k+m} = a_{k+2}. \tag{⑦}$$

现在，若 $k\equiv 1 \pmod 4$，则由⑦的 $a_k=a_{k+2}$ 可推出矛盾；若 $k\equiv 3 \pmod 4$，则由 m 为奇数可知 $k+2m\equiv 1 \pmod 4$，故 $a_{k+2m}\neq a_{k+2m+2}$，即 $a_k\neq a_{k+2}$ 与⑦矛盾.

综上可知，命题成立.

习　题　二

1 设 S 是一个 2011 元集合，N 为满足 $0\leqslant N\leqslant 2^{2011}$ 的整数.

证明：可以对 S 的每个子集进行黑白两色染色，使得

（1）任意两个白色子集的并集仍为白色的；

（2）任意两个黑色子集的并集仍为黑色的；

（3）恰有 N 个子集是白色的.

2 将 2048 个数排成一个圆，其中每个数都是 $+1$ 或 -1，现在同时将每个数都乘以它的右邻，用所得的乘积替换原来的数，这样便得到一圈新数.

求证：经有限次这样的操作后，圆周上的数都将变为 $+1$.

3 设 x_1，…，x_n 为任意实数. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_1^2+\cdots+x_i^2}<\sqrt{n}.$$

4 设 $n\in\mathbf{N}^*$，复数 z_1，…，z_n；ω_1，…，ω_n 满足：对任意数组 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$，$\varepsilon_i\in\{-1, 1\}$，$i=1, 2, \cdots, n$. 都有

$$|\varepsilon_1 z_1+\cdots+\varepsilon_n z_n|\leqslant|\varepsilon_1\omega_1+\cdots+\varepsilon_n\omega_n|.$$

证明：$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant|\omega_1|^2+\cdots+|\omega_n|^2$.

5 设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个有 n 个变元的多项式，我们用 $+1$ 或 -1 代替 P 中所有的变元，若其中 -1 的个数为偶数，则 P 的值为正；若其中 -1 的个数为奇数，则 P 的值为负. 证明：P 为一个至少 n 次的多项式(即 P 中存在一项，其所有变元的次数和不小于 n).

6 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是一个由非负实数(不全为零)组成的数列，定义

$$m_k=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{a_{k-i+1}+a_{k-i+2}+\cdots+a_k}{i},\ k=1, 2, \cdots, n.$$

证明：对任意正实数 μ，满足 $m_k>\mu$ 的下标 k 的个数小于 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mu}$.

7 (Jenson 不等式)设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数(即对任意 x、$y\in[a, b]$，都有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$).

证明：对任意 n 个数 $x_1, \cdots, x_n\in[a, b]$，都有

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

8 设正实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=1$，这里 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$. 证明：

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n-x_k}{1-x_k}\right).$$

9 斐波那契数列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. 证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F_i}{2^i}<2$.

10 求最小的正整数 k，使得至少存在两个由正整数组成的数列 $\{a_n\}$ 满足下述条件：

(1) 对任意正整数 n，都有 $a_n\leqslant a_{n+1}$；

(2) 对任意正整数 n，都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$；

(3) $a_9=k$.

11 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 定义如下：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n=1, 2, \cdots$. 求所有的正整数数对 (k, m)，$m>k$. 使得如下定义的数列 $\{x_n\}$：

$$x_1=\frac{F_k}{F_m},\ x_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{2x_n-1}{1-x_n}, & 若\ x_n\neq 1,\\ 1, & 若\ x_n=1\end{cases}(n=1, 2, \cdots)$$

包含等于 1 的项.

12 小张从 $\{1, 2, \cdots, 144\}$ 中任取一个数，小王希望有偿地知道小张所取的数. 小王每次可从 $\{1, 2, \cdots, 144\}$ 中取一个子集 M，然后问小张：“你取的

数是否属于 M?”如果答案是 Yes，则小王付给小张 2 元钱，答案是 No，则付 1 元.

问：小王至少需要支付多少元钱，才能保证可以知道小张所取的数?

13 Fibonaccia 数列$\{F_n\}$满足 $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n=1, 2, \cdots$.

证明：对任意正整数 m，存在下标 n，使得 $m\mid(F_n^4-F_n-2)$.

14 我们称一个由正整数组成的无穷数列为 F-数列，如果从第 3 项起，该数列的每一项都等于它前面两项之和. 问：能否将正整数集分划为

(1) 有限个；

(2) 无穷多个

F-数列的并?

15 设整数 k, a_1, $\cdots$, a_n 满足

$$0<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1\leqslant k,$$

且对任意 $1\leqslant i, j\leqslant n$，都有$[a_i, a_j]\leqslant k$.

证明：对任意 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$，都有 $ia_i\leqslant k$.

16 设 $a_0<a_1<\cdots<a_n$, a_0, $\cdots$, a_n 都是正整数. 证明：

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\cdots+\frac{1}{[a_{n-1}, a_n]}\leqslant 1-\frac{1}{2^n}.$$

17 定义数列 $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 如下：$u_0=0$, $u_1=1$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 u_{n+1} 是满足下述条件的最小正整数：

(1) 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $u_{n+1}>u_n$;

(2) 数 u_0, u_1, $\cdots$, u_{n+1}中没有 3 个数成等差数列.

求 u_{100}的值.

18 正整数 a、b、n $(b>1)$满足$(b^n-1)\mid a$.

证明：在 b 进制表示下，数 a 的表示中至少出现 n 个非零数码.

19 设 $n\in\mathbf{N}^*$, $n>1$，记 $h(n)$为 n 的最大素因数.

证明：存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得

$$h(n)<h(n+1)<h(n+2).$$

20 设 $n\in\mathbf{N}^*$, $n>1$，记 $w(n)$ 为 n 的不同素因数的个数.

证明：存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得

$$w(n)<w(n+1)<w(n+2).$$

21 用 a_n 表示前 n 个素数之和.

证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，区间$[a_n, a_{n+1}]$中至少有一个完全平方数.

22 证明:对任意正奇数,都可以找到一个正整数,使得它们的乘积在十进制表示下,各数码都是奇数.

23 记 $A=\{x \mid x\in \mathbf{N}^*$,$x$ 在十进制表示下各数码都不为零,且 $s(x)\mid x\}$,这里 $s(x)$ 表示 x 的各数码之和.

(1) 证明:A 中存在无穷多个数,其十进制表示中数码 1, 2, …, 9 出现的次数相同;

(2) 证明:对任意 $k\in\mathbf{N}^*$,A 中有一个恰好是 k 位的正整数.

24 是否存在一个由正整数组成的无穷数列?使得

(1) 每一项都不是另外任意一项的倍数;

(2) 该数列中任意两项都不互素,但没有一个大于 1 的正整数能够整除该数列的每一项.

25 设 p 为奇素数,a_1, a_2, …, a_{p-2} 是一个正整数数列,满足:对任意 $k\in\{1, 2, \cdots, p-2\}$ 都有 $p\nmid a_k(a_k^k-1)$. 证明:可以从 a_1, a_2, …, a_{p-2} 中取出若干个数,使得它们的乘积 $\equiv 2 \pmod p$.

26 设 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 是一个一一对应.

(1) 证明:存在正整数 a、d,使得 $f(a)<f(a+d)<f(a+2d)$;

(2) 对不小于 5 的正整数 m,是否也一定存在正整数 a、d,使得 $f(a)<f(a+d)<\cdots<f(a+md)$?

27 证明:对任意实数 $\alpha\in(1, 2]$,存在唯一的正整数数列 $\{n_k\}$,使得

$$n_k^2\leqslant n_{k+1}, \text{且 } \alpha=\lim_{m\to+\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n_k}\right).$$

28 设 m 为给定的正整数,数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是正整数,且对任意正整数 n,都有 $0<a_{n+1}-a_n\leqslant m$.

证明:存在无穷多对正整数 (p, q),使得 $p<q$,且 $a_p\mid a_q$.

29 设 S 是一个由非负整数组成的集合,用 $r_S(n)$ 表示满足下述条件的有序数对 (s_1, s_2) 的对数 s_1、$s_2\in S$, $s_1\neq s_2$,且 $s_1+s_2=n$.

问:能否将非负整数集分划为两个集合 A、B,使得对任意非负整数 n,都有 $r_A(n)=r_B(n)$?

30 证明:任何一个大于 1 的整数都可以表示为符合下述条件的有限个正整数的和的形式:

(1) 每个加项的素因数都是 2 或 3;

(2) 任意两个加项中没有一个是另一个的倍数.

31 函数 f、$g:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$,其中 f 是满射,而 g 是单射,并且对任意正整数 n,都有 $f(n)\geqslant g(n)$. 证明:对任意正整数 n,都有 $f(n)=g(n)$.

32 是否存在一个由整数组成的数列$\{a_n\}$？使得$0=a_0<a_1<a_2<\cdots$，并且符合下面的两个条件：

(1) 每一个正整数都可以表示为a_i+a_j（i，$j\geqslant 0$，可以相同）的形式；

(2) 对任意正整数n，都有$a_n>\dfrac{n^2}{16}$.

习题解答

习题一

1. 对该非空有限集的元素个数 n 归纳. 记该集合为 S_n，当 $n=1$ 时，其子集可排列为 $\varnothing$，S_1，符合要求. 设命题对 n 成立，即 S_n 的子集可排列为 A_1，A_2，…，A_{2^n}，使相邻两个集合元素个数相差 1. 考虑 $S_{n+1}=\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$，对其 n 元子集 $S_n=\{a_1, \cdots, a_n\}$，依归纳假设对 S 的子集有符合要求的排列 A_1，…，A_{2^n}；于是，下面的排列：

$$A_1, \cdots, A_{2^n}, A_{2^n}\cup\{a_{n+1}\}, \cdots, A_1\cup\{a_{n+1}\}.$$

是 S_{n+1} 所有子集的排列，它们符合要求.

说明　这里构造的集合列中相邻两个子集的不同元素都恰好只有一个，比要求的结论更强.

2. 当 $k=0$ 时，命题显然成立. 对 $k>0$ 的情形，要证的结论等价于 $\frac{a_k}{k}\leqslant\frac{a_n}{n}$，它是下述命题的推论：对 $k\geqslant 0$，都有

$$(k+1)a_k\leqslant ka_{k+1}. \quad ①$$

对 k 归纳来证明①成立：在 $k=0$ 时，由 $a_0=0$，知①成立；现设①对 k 成立，则由条件知

$$\begin{aligned}(k+2)a_{k+1}&=2(k+1)a_{k+1}-ka_{k+1}\leqslant 2(k+1)a_{k+1}-(k+1)a_k\\&=(k+1)(2a_{k+1}-a_k)\leqslant(k+1)a_{k+2}.\end{aligned}$$

所以，①对 $k+1$ 也成立. 命题获证.

3. 当 $n=1$ 时，$a_1^2\leqslant a_1-a_2<a_1$，故 $a_1<1$，同时 $a_2\leqslant a_1-a_1^2=\frac{1}{4}-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. 所以，命题对 $n=1, 2$ 成立. 现设命题对 $n(\geqslant 2)$ 成立，

则 $a_{n+1} \leqslant a_n - a_n^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a_n\right)^2$，注意到，由归纳假设知 $a_n < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2} - a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geqslant 0$，因此 $a_{n+1} < \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n+1}$. 即命题对 $n+1$ 成立，获证.

4. 当 $n=2$ 时，命题显然成立；设命题对 $n\ (\geqslant 2)$ 成立，考虑 $n+1$ 的情形. 由归纳假设知

$$\begin{aligned}&a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4\\ \geqslant\ & a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4 - a_na_1^4 + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4.\end{aligned}$$

为证命题对 $n+1$ 成立，只需证明：

$$a_1a_n^4 - a_na_1^4 + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4 \geqslant a_{n+1}a_n^4 + a_1a_{n+1}^4. \qquad ①$$

为方便起见，记 $a_1 = x$，$a_n = y$，$a_{n+1} = z$，则 $x < y < z$，① 转为证明：

$$xy^4 + yz^4 + zx^4 - yx^4 - zy^4 - xz^4 \geqslant 0. \qquad ②$$

注意到，

$$\begin{aligned}②\text{式左边} &= xy(y^3 - x^3) + yz(z^3 - y^3) - zx(z^3 - x^3)\\ &= (xy - zx)(y^3 - x^3) + (yz - zx)(z^3 - y^3)\\ &= -x(z-y)(y-x)(y^2 + xy + x^2) + z(y-x)(z-y)(z^2 + \\ &\quad zy + y^2)\\ &= (y-x)(z-y)(z^3 + z^2y + zy^2 - xy^2 - x^2y - x^3)\\ &= (y-x)(z-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2 + zy + xy + y^2)\\ &= \frac{1}{2}(y-x)(z-y)(z-x)((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2)\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以，②成立，进而，①成立，命题对 $n+1$ 成立，获证.

5. 由条件，知 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}}$，而结合初始条件及数学归纳法可知，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $a_n > 0$，从而 $n \geqslant 2$ 时，有 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}} > a_n$，结合 $a_1 < a_2$ 知，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $a_n < a_{n+1}$，所以，当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}} > a_n + \frac{1}{a_n}. \qquad ①$$

由 $a_3=\dfrac{a_2a_1+1}{a_1}=3$，知 $a_3>\sqrt{6}$，即 $n=3$ 时，有 $a_n>\sqrt{2n}$. 现设当 $n=m\ (\geqslant 3)$ 时，有 $a_m>\sqrt{2m}$，则由 ① 知 $a_{m+1}^2>\left(a_m+\dfrac{1}{a_m}\right)^2=a_m^2+2+\dfrac{1}{a_m^2}>a_m^2+2>2m+2$，故 $a_{m+1}>\sqrt{2(m+1)}$，即命题对 $m+1$ 成立. 获证.

6. 当 $n=1$ 时，由 $\dfrac{1+a^2}{a}=\dfrac{1}{a}+a\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot a}=2$ 知命题成立. 现设 n 时命题成立，即 $\dfrac{1+a^2+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}\geqslant\dfrac{n+1}{n}$，则 $\dfrac{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2n}}\leqslant\dfrac{n}{n+1}$.

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1+a^2+\cdots+a^{2n+2}}{a+a^3+\cdots+a^{2n+1}}+\frac{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2n}}\\
=&\frac{1+a^2+\cdots+a^{2n+2}}{a(1+a^2+\cdots+a^{2n})}+\frac{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2n}}\\
=&\frac{1+a^2+\cdots+a^{2n+2}+a(a+a^3+\cdots+a^{2n-1})}{a(1+a^2+\cdots+a^{2n})}\\
=&\frac{(1+a^2+\cdots+a^{2n})+a^2(1+a^2+\cdots+a^{2n})}{a(1+a^2+\cdots+a^{2n})}\\
=&\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}\geqslant 2.
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1+a^2+\cdots+a^{2n+2}}{a+a^3+\cdots+a^{2n+1}}\geqslant 2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}.$$

即命题对 $n+1$ 成立，获证.

7. 当 $n=2$ 时，由于 $2^{10}>1000$，故 $\lg 2>\dfrac{3}{10}$，命题成立. 现设命题对 $n\ (n\geqslant 2)$ 成立，由均值不等式知 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\times 2\times\cdots\times n}$，即 $n+1>2(n!)^{\frac{1}{n}}$，于是

$$\begin{aligned}
\lg((n+1)!)&>\lg((n!)\cdot 2(n!)^{\frac{1}{n}})\\
&=\lg 2+\frac{n+1}{n}\lg(n!)\\
&>\lg 2+\frac{n+1}{n}\times\frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&>\frac{3}{10}+\frac{3(n+1)}{10}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{3(n+1)}{10}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

所以，命题对 $n+1$ 成立，获证.

8. 当 $n=1$ 时，$a_1^3=a_1^2$，而 $a_1>0$，故 $a_1=1$，即命题对 $n=1$ 成立. 现设命题对 $1, 2, \cdots, n-1$ 都成立，即 $a_k=k, k=1, 2, \cdots, n-1$. 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right)+a_n^3=\sum_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\left(\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\right)+a_n\right)^2,$$

于是 $a_n^3=a_n^2+n(n-1)a_n$，解得 $a_n=0, -(n-1)$ 或 n，结合 $a_n>0$，知 $a_n=n$. 所以，命题对 n 成立，获证.

9. 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 当 $n=1$ 时，不等式 $a_1^2\geqslant\frac{2+1}{3}a_1$ 成立；假设不等式对 n 成立，即 $a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{2n+1}{3}(a_1+\cdots+a_n)$，考虑 $n+1$ 的情形，只需证明：$a_{n+1}^2\geqslant\frac{2}{3}(a_1+\cdots+a_n)+\frac{2n+3}{3}a_{n+1}$，这里 $a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}$，且 $a_i\in\mathbf{N}^*$.

注意到 $a_n\leqslant a_{n+1}-1, a_{n-1}\leqslant a_n-1\leqslant a_{n+1}-2, \cdots, a_1\leqslant a_{n+1}-n$，所以，只需证明：$a_{n+1}^2\geqslant\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}-k)+\frac{2n+3}{3}a_{n+1}$，这等价于 $a_{n+1}^2-\frac{4n+3}{3}a_{n+1}+\frac{n(n+1)}{3}\geqslant0$，即只需证明：$(a_{n+1}-(n+1))\left(a_{n+1}-\frac{n}{3}\right)\geqslant0$，这个不等式利用 $a_{n+1}\geqslant a_1+n\geqslant n+1$ 可得.

所以，原不等式对 $n+1$ 成立，获证.

10. 由递推式可知 $a_{n+1}^2=a_{n-1}a_{n+2}, n=2, 3, \cdots$，由初始条件结合数学归纳法得 $a_n\neq0$. 于是，上式可变形为

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_na_{n-1}}, n=2, 3, \cdots.$$

依此倒推，可知 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_na_{n-1}}=\cdots=\frac{a_3}{a_2a_1}=2$，即 $a_{n+2}=2a_{n+1}a_n, n=2, 3, \cdots$. 由此递推式及 $a_1, a_2, a_3\in\mathbf{Z}$ 知，a_n 都为整数，并且 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2a_n$（注意，此式对 $n=1$ 也成立），可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ 为偶数，这样，$a_n=\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\cdot a_1$ 是 n 个偶数之积，于是 $2^n\mid a_n$.

11. 由递推式，知 $a_{n+1}-k=a_n(a_n-k)$，于是 $a_n-k=a_{n-1}(a_{n-1}-k)=a_{n-1}a_{n-2}(a_{n-2}-k)=\cdots=a_{n-1}\cdots a_1(a_1-k)=a_{n-1}\cdots a_1$，即

$$a_n=a_{n-1}\cdots a_1+k. \qquad ①$$

对任意 m、$n\in\mathbf{N}^*$，$m\neq n$，我们不妨设 $m<n$，则由 ① 知

$$(a_n,\ a_m)=(a_{n-1}\cdots a_1+k,\ a_m)=(k,\ a_m).$$

下证：对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_m\equiv 1\pmod k$.

当 $m=1$ 时，由 $a_1=k+1$ 知结论成立. 现设 m 时成立，即 $a_m\equiv 1\pmod k$，则 $a_{m+1}=a_m^2-ka_m+k\equiv a_m^2\equiv 1^2\equiv 1\pmod k$. 所以，对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，有 $a_m\equiv 1\pmod k$.

利用上述结论知 $(a_m,\ k)=1$，进而$(a_n,\ a_m)=1$.

12. 对照第 1 节例 5. 试算$\{a_n\}$的最初 21 项，它们的值依次为 1，2，3，5，7，9，12，15，18，23，28，33，40，47，54，63，72，81，93，105，117，其中 a_1，a_2，a_3，a_4，a_{11}，a_{20}分别是 2，3，5，7，11，13 的倍数. 因此，对任意 $p\in\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$，都有一项 a_n 为 p 的倍数.

如果 $a_{3n-1}\equiv 0\pmod p$，那么我们从 a_n 出发找到了下个 p 的倍数. 如果 $a_{3n-1}\not\equiv 0\pmod p$，那么由递推式及 $a_n\equiv 0\pmod p$ 知 $a_{3n+2}\equiv a_{3n+1}\equiv a_{3n}\equiv a_{3n-1}\pmod p$，记它们除以 p 所得余数为 r，同例题一样讨论，下面的 13 个数

$$a_{9n-4},\ a_{9n-3},\ \cdots,\ a_{9n+8}$$

在 mod p 下分别与 a_{9n-4}，$a_{9n-4}+r$，$\cdots$，$a_{9n-4}+12r$ 同余，而 $p\leqslant 13$，故这 13 个数至少覆盖 mod p 的一个完系，这样，从 a_n 出发就可找到下一个 p 的倍数，命题获证.

13. 对 n 归纳，只需注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\}&=\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\}+\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\}\\&\leqslant\frac{1}{2}(n^2-1)+\sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{n^2+k}-n)\\&\leqslant\frac{1}{2}(n^2-1)+\sum_{k=1}^{2n}\left(\sqrt{\left(n+\frac{k}{2n}\right)^2}-n\right)\\&=\frac{1}{2}(n^2-1)+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}k\\&=\frac{1}{2}(n^2-1)+\frac{1}{2}(2n+1)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1).$$

即可实现归纳过渡.

14. 当 $n \leqslant m$ 时,通过对正整数 k 归纳,易证 $k^4 \leqslant 2^{k^2}$,于是 $\sqrt[k^2]{k^m} \leqslant \sqrt[4]{2^m}$,这时 $S_m(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{m}{k^2}} = n + \sum_{k=1}^{n}(k^{\frac{m}{k^2}} - 1) \leqslant n + \sum_{k=1}^{n}(k^{\frac{m}{k^2}} - 1) \leqslant n + m(2^{\frac{m}{4}} - 1)$,原不等式成立.

当 $n > m$ 时,注意到,对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, $k > m$,均有

$$1 < k^{\frac{m}{k^2}} < k^{\frac{1}{k}} < 2.$$

这里 $k^{\frac{1}{k}} < 2$ 等价于 $k < 2^k$,它可通过对 k 归纳予以证明. 于是 $S_m(n+1) = S_m(n)+1$,依此结合 $n \leqslant m$ 时不等式成立,及数学归纳法,可知对任意 m、$n \in \mathbf{N}^*$,均有 $S_m(n) \leqslant n + m(\sqrt[4]{2^m} - 1)$.

15. 用 A_k 表示数列 $\{\sqrt[k]{a_n}\}$ 中为整数的项组成的集合. 我们断言:对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, $A_k = \{2^m \mid m = 0, 1, 2, \cdots\}$(即 A_k 与 k 的具体值无关,它由所有 2 的幂组成).

由 $a_0 = 1$,知 $1 \in A_k$,下设 $x \in A_k$,我们证明:A_k 中比 x 大的数中最小的那个是 $2x$. 依此结论结合数学归纳法可知断言成立.

事实上,设 $x \in A_k$,即存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $a_n = x^k$,则对所有满足 $x^k \leqslant a_j < (x+1)^k$ 的下标 j,有 $a_{j+1} = a_j + x$,即 $a_{j+1} \equiv a_j \pmod{x}$. 从 a_n 出发,可知对这样的 j,有 $a_{j+1} \equiv a_j \equiv 0 \pmod{x}$,现在取上述条件中最大的 j,这时 $a_j < (x+1)^k$,而 $a_{j+1} \geqslant (x+1)^k$. 记 $a_{j+1} = (x+1)^k + m_1$,则由 $a_{j+1} = a_j + x$ 知 $0 \leqslant m_1 < x$,而 $a_{j+1} \equiv 0 \pmod{x}$,故 $m_1 + 1 \equiv 0 \pmod{x}$,所以 $m_1 = x - 1$,从而 $a_{j+1} = (x+1)^k + x - 1$.

重复上述讨论,通过每次加上 $x+1$,得到形如 $(x+2)^k + m_2$ 的项, $0 \leqslant m_2 < n+1$,并由 $x - 1 \equiv (x+2)^k + m_2 \equiv 1 + m_2 \pmod{x+1}$ 可确定 $m_2 = x - 2$,依次递推,一般地,利用同余式 $m_i \equiv (x+i+1)^k + m_{i+1} \pmod{x+i}$,可确定 $m_i = x - i$, $i = 1, 2, \cdots, x$. 从而数列 $\{a_n\}$ 中的下一个 k 次方数在 m_i 第一次取零时得到,这时 $i = x$,即下一个 k 次方数为 $(x+x)^k = (2x)^k$. 也就是说 A_k 中比 x 大的数中最小的那个是 $2x$.

问题获解.

16. 由递推关系可知,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $x_n > 0$. 进一步,由 $2nx_n = 2(n-1)x_{n-1} - x_{n-1}$,得 $x_{n-1} = 2(n-1)x_{n-1} - 2nx_n$. 求和,得

$$\begin{aligned} x_1+\cdots+x_n &= \sum_{k=2}^{n+1}(2(k-1)x_{k-1}-2kx_k) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(kx_k-(k+1)x_{k+1}) = 2(x_1-(n+1)x_{n+1}) \\ &= 1-2(n+1)x_{n+1}<1. \end{aligned}$$

命题获证.

17. 由条件可知 $f(n+1)=(f(n)-1)f(n)+1$，结合数学归纳法及 $a_1>1$，可得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)>1$，于是，取倒数就有

$$\frac{1}{f(n+1)-1}=\frac{1}{f(n)(f(n)-1)}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n)}.$$

即 $\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{f(n)-1}-\dfrac{1}{f(n+1)-1}$，裂项求和得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{f(1)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1}=1-\frac{1}{f(n+1)-1}.$$

回到递推关系式，知 $f(n+1)-1=f(n)(f(n)-1)>(f(n)-1)^2>(f(n-1)-1)^{2^2}>\cdots>(f(2)-1)^{2^{n-1}}=(2^2-2)^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}}$.

故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}>1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$.

另一方面，$f(n+1)=f(n)^2-(f(n)-1)<f(n)^2$，故

$$f(n+1)<f(n)^2<f(n-1)^{2^2}<\cdots<f(1)^{2^n}=2^{2^n},$$

更有 $f(n+1)-1<2^{2^n}$，进而，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}$. 命题获证.

18. 记 $x_1=\cot\alpha$，$y_1=\tan\beta$，这里 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$. 则

$$x_2=\cot\alpha+\csc\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2},$$

依此结合数学归纳法易证：$x_n=\cot\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$. 类似地，可证：$y_n=\tan\dfrac{\beta}{2^{n-1}}$. 从而当 $n>1$ 时，有

$$x_ny_n=\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}\tan\frac{\beta}{2^{n-1}}=\cot\frac{\pi}{2^n\times 3}\tan\frac{\pi}{2^{n-1}\times 3}$$

$$=\frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^n\times 3}}.$$

由于 $\tan^2\frac{\pi}{2^n\times 3}\in\left(0,\ \tan^2\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\tan^2\frac{\pi}{2^n\times 3}\in\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$，故 $2<x_ny_n<3$. 命题获证.

19. 由条件，可知 $c_n-1=(c_{n-1}-1)^2$，于是 $c_n-1=(c_{n-1}-1)^2=(c_{n-2}-1)^4=\cdots=(c_0-1)^{2^n}=3^{2^n}$，故 $c_n=3^{2^n}+1$.

另一方面，$1-a_{n+1}=\frac{(1-a_n)^2}{1+a_n^2}$，$1+a_{n+1}=\frac{(1+a_n)^2}{1+a_n^2}$，于是 $\frac{1-a_{n+1}}{a+a_{n+1}}=\left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^2$，进而 $\frac{1-a_n}{1+a_n}=\left(\frac{1-a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right)^2=\cdots=\left(\frac{1-a_0}{1+a_0}\right)^{2^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$，故 $a_n=\frac{3^{2^n}-1}{3^{2^n}+1}$.

注意到 $2c_0c_1\cdot\cdots\cdot c_{n-1}=(3-1)(3+1)(3^2+1)\cdot\cdots\cdot(3^{2^{n-1}}+1)=(3^2-1)(3^2+1)\cdot\cdots\cdot(3^{2^{n-1}}+1)=\cdots=3^{2^n}-1$. 所以，命题成立.

20. 记 $f(x)=\frac{x}{n}+\frac{n}{x}$，则由 $f(a)-f(b)=\frac{(a-b)(ab-n^2)}{abn}$，可知函数 $f(x)$ 是区间 $(0,\ n]$ 上的减函数.

下面我们对 n 运用数学归纳法，先证明：$\sqrt{n}<a_n<\frac{n}{\sqrt{n-1}}$，$n\geqslant 3$.

注意到 $a_1=1$，可知 $a_2=2$，$a_3=2$，于是 $n=3$ 时，上述不等式成立. 进一步，设 $\sqrt{n}<a_n<\frac{n}{\sqrt{n-1}}$，$n\geqslant 3$，由单调性可知 $f(a_n)<f(\sqrt{n})=\frac{n+1}{\sqrt{n}}$，即 $a_{n+1}<\frac{n+1}{\sqrt{n}}$，并且 $a_{n+1}=f(a_n)>f\left(\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)=\frac{n}{\sqrt{n-1}}>\sqrt{n+1}$. 故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，均有 $\sqrt{n}<a_n<\frac{n}{\sqrt{n-1}}$.

下面再证当 $n\geqslant 4$ 时，$a_n<\sqrt{n+1}$.

事实上，由于当 $n\geqslant 3$ 时，$a_{n+1}=f(a_n)>f\left(\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)=\frac{n}{\sqrt{n-1}}$，故当 $n\geqslant 4$ 时，有 $a_n>\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}$. 进而，当 $n\geqslant 4$ 时，有

$$a_{n+1}=f(a_n)<f\left(\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}\right)=\frac{(n-1)^2+n^2(n-2)}{(n-1)n\sqrt{n-2}}<\sqrt{n+2}.$$

（最后一个不等式等价于 $2n^2(n-3)+4n-1>0$），而 $a_4=\frac{13}{6}<\sqrt{6}$ 是显然的.

于是，当 $n\geqslant 4$ 时，均有 $\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n+1}$，从而，此时有 $[a_n^2]=n$.

21. 如果存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}+(a-\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$ 为有理数，记 $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$，$y=(a-\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$，那么 $x+y$ 为有理数，而 $x^n+y^n=2a$ 为无理数.

下面对 m 归纳来证：若 $x+y\in\mathbf{Q}$，则对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $x^m+y^m\in\mathbf{Q}$. ①

注意到 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-2$，结合 $x+y\in\mathbf{Q}$，可知当 $m=1, 2$ 时，① 都成立. 现设 x^m+y^m，$x^{m+1}+y^{m+1}\in\mathbf{Q}$，则由 $x^{m+2}+y^{m+2}=(x+y)(x^{m+1}+y^{m+1})-xy(x^m+y^m)$，结合 $x+y$，$xy(=1)$ 为有理数可知 $x^{m+2}+y^{m+2}\in\mathbf{Q}$. 从而 ① 成立.

利用①可知 $x^n+y^n\in\mathbf{Q}$，这是一个矛盾. 所以，命题成立.

22. 若 $t>1$，则 $a_2<0$，依此结合数学归纳法，可知当 $n\geqslant 2$ 时，都有 $a_n<0$，从而 $a_{2011}\neq 0$；若 $t<0$，同上可得 $n\geqslant 1$ 时，都有 $a_n<0$，也不会有 $a_{2011}=0$. 因此，使 $a_{2011}=0$ 的 $t\in[0, 1]$.

现可设 $t=\sin^2\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $a_1=\sin^2\alpha$. 若 $a_n=\sin^2(2^{n-1}\alpha)$，则 $a_{n+1}=4\sin^2(2^{n-1}\alpha)\cos^2(2^{n-1}\alpha)=\sin^2(2^n\alpha)$. 于是，由数学归纳法原理知对任意 n，有 $a_n=\sin^2(2^{n-1}\alpha)$. 因此，由 $a_{2011}=0$，得 $\sin^2(2^{2010}\alpha)=0$，从而 $2^{2010}\alpha=k\pi$，即 $\alpha=\frac{k\pi}{2^{2010}}$，$k\in\mathbf{Z}$. 结合 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，知 $0\leqslant k\leqslant 2^{2009}$，利用正弦函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是非负的，且是单调递增的，可得有 $2^{2009}+1$ 个不同的实数 t，使得 $a_{2011}=0$.

23. 所求的最大值为 $(1+2+\cdots+1005)\times 2=1\,011\,030$，在 $x_1=1005$，$x_2=1004$，$\cdots$，$x_{1005}=1$，$x_{1006}=0$，$x_{1007}=-1$，$\cdots$，$x_{2011}=-1005$ 时，可以取到.

下面证明：对满足条件的数列，有

$$\sum_{i=1}^{2011}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{2011}x_i\right|\leqslant 2(1+2+\cdots+1005). \quad ①$$

注意到，将 x_1，$\cdots$，x_{2011} 从大到小排列为 y_1，y_2，$\cdots$，y_{2011} 后，对 $1\leqslant i\leqslant 2010$，设 $y_i=x_m$，$y_{i+1}=x_n$. 我们总可以找到一个下标 j，使得 $x_j\in\{y_1, \cdots, y_i\}$，$x_{j+1}\in\{y_{i+1}, \cdots, y_{2011}\}$ 或者 $x_j\in\{y_{i+1}, \cdots, y_{2011}\}$，$x_{j+1}\in\{y_1, \cdots, y_i\}$（这个结论可从 $x_1\in\{y_1, \cdots, y_i\}$ 和 $x_1\in\{y_{i+1}, \cdots, y_{2011}\}$ 两种情形结合反证法推出）. 不妨设为前者，并设 $x_j=y_r$，$x_{j+1}=y_t$，则 $r\leqslant i$，$t\geqslant i+1$，此时 $1\geqslant|x_j-x_{j+1}|=|y_r-y_t|=|(y_r-y_{r+1})+(y_{r+1}-y_{r+2})+\cdots+(y_i-$

$y_{i+1})+\cdots+(y_{t-1}-y_t)|=|y_r-y_{r+1}|+|y_{r+1}-y_{r+2}|+\cdots+|y_i-y_{i+1}|+\cdots+|y_{t-1}-y_t|\geqslant|y_i-y_{i+1}|$（这里用到 $y_1,\cdots,y_{2011}$ 递减排列），因此，仍有 $|y_i-y_{i+1}|\leqslant 1$.

进一步，我们不妨设 $\sum_{i=1}^{2011}x_i\leqslant 0$（若 $\sum_{i=1}^{2011}x_i>0$，则用 $-x_i$ 代替 x_i 后讨论），排序后，设 $y_1\geqslant\cdots\geqslant y_k\geqslant 0\geqslant y_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant y_{2011}$. 那么

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{2011}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{2011}x_i\right|\\&=(y_1+\cdots+y_k)-(y_{k+1}+\cdots+y_{2011})+(y_1+\cdots+y_{2011})\\&=2(y_1+\cdots+y_k).\end{aligned}$$

为证明①成立，我们只需证明：

$$y_1+\cdots+y_k\leqslant 1+2+\cdots+1005. \qquad ②$$

分两种情形来处理.

情形一： 若 $k\geqslant 1006$，则由 $y_1+\cdots+y_{2011}\leqslant 0$，知

$$y_1+\cdots+y_k\leqslant-(y_{k+1}+\cdots+y_{2011}),$$

结合 $y_{k+1}\geqslant y_k-1,\cdots,y_{2011}\geqslant y_k-(2011-k)$ 可知

$$\begin{aligned}&y_1+\cdots+y_k\leqslant-((y_k-1)+\cdots+(y_k-(2011-k)))\\&=-(2011-k)y_k+1+2+\cdots+(2011-k)\\&\leqslant 1+2+\cdots+(2011-k)\leqslant 1+2+\cdots+1005.\end{aligned}$$

此时，②成立.

情形二： 若 $k\leqslant 1005$，则同上可知

$$\begin{aligned}y_1+\cdots+y_k&\leqslant(y_{k+1}+k)+(y_{k+1}+(k-1))+\cdots+(y_{k+1}+1)\\&=ky_{k+1}+1+\cdots+k\leqslant 1+2+\cdots+k\leqslant 1+2+\cdots+1005.\end{aligned}$$

②亦成立.

综上可知，所求的最大值为 1 011 030.

24. 采用反证法处理，如果命题不成立，那么，存在正整数 N，使得对任意 $n\geqslant N$，都有

$$1+a_n\leqslant\sqrt[n]{2}\cdot a_{n-1}. \qquad ①$$

现在定义一个正实数数列 $\{c_n\}$：$c_0=1$，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+a_n}c_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$.

则由 ① 可知，对 $n \geqslant N$，都有 $c_n \geqslant 2^{-\frac{1}{n}} \cdot c_{n-1}$.　　②

注意到，对 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $c_n(1+a_n) = a_{n-1}c_{n-1}$，即 $c_n = a_{n-1}c_{n-1} - a_n c_n$，裂项求和，得

$$c_1 + \cdots + c_n = a_0 - a_n c_n < a_0.$$

这表明和数列 $\{s_n\}$ 是一个有界数列，这里 $s_n = c_1 + \cdots + c_n$.

另一方面，由②可知，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned} c_n &\geqslant c_{n-1} \cdot 2^{-\frac{1}{n}} \geqslant c_{n-2} \cdot 2^{-\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)} \geqslant \cdots \geqslant c_N \cdot 2^{-\left(\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \\ &= C \cdot 2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

这里 $C = c_N \cdot 2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)}$ 为常数.

对任意 $k \in \mathbf{N}^*$，若 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$，则

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} &\leqslant 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right) \\ &\leqslant 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right) = k. \end{aligned}$$

所以，此时有 $c_n \geqslant C \cdot 2^{-k} (2^{k-1} \leqslant n < 2^k)$.

现在设 $2^{r-1} \leqslant N < 2^r$，$r \in \mathbf{N}^*$，那么对任意 $m > r$，有

$$\begin{aligned} c_{2^r} + c_{2^r+1} + \cdots + c_{2^m-1} &= (c_{2^r} + \cdots + c_{2^{r+1}-1}) + \cdots + (c_{2^{m-1}} + \cdots + c_{2^m-1}) \\ &\geqslant (C \cdot 2^{-(r+1)}) \cdot 2^r + \cdots + (C \cdot 2^{-(m+1)}) \cdot 2^m \\ &= \frac{C(m-r)}{2}. \end{aligned}$$

这表明 $s_{2^m-1} > \dfrac{C(m-r)}{2}$，当 $m \to +\infty$ 时，有 $s_{2^m-1} \to +\infty$，与 $\{s_n\}$ 为有界数列矛盾.

所以，命题成立.

25. 在条件(1)中令 $n=0$，可知 $F(0)=0$. 对 $n \in \mathbf{N}^*$，设 n 的二进制表示为 $n = (n_k n_{k-1} \cdots n_0) = n_k \cdot 2^k + \cdots + n_0 \cdot 2^0$，这里 $n_k = 1$，而对 $0 \leqslant i \leqslant k-1$，有 $n_i \in \{0, 1\}$.

我们对 k 归纳来证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$F(n) = n_k F_k + n_{k-1} F_{k-1} + \cdots + n_0 F_0,\qquad ①$$

这里数列$\{F_m\}$定义为$F_0=F_1=1$，$F_{m+2}=F_{m+1}+F_m$，$m=0, 1, 2, \cdots$(它是本书中Fibonacci数列下标向前平移一项所得).

事实上，由$F(0)=0$及条件(3)可知$F(1)=1$，进而可得$F(2)=1$，$F(3)=F(2)+1=F_0+F_1$，$F(4)=F(2)+F(1)=2=F_2$. 所以，命题对$k=0, 1$成立. 现设①对k和$k+1$成立，考虑$k+2$的情形，此时可设$n=(n_{k+2}n_{k+1}\cdots n_0)_2$. 如果$(n_1, n_0)=(0, 0)$，那么由(1)知$F(n)=F((n_{k+2}n_{k+1}\cdots n_1)_2)+F((n_{k+2}\cdots n_2)_2)=n_{k+2}F_{k+1}+\cdots+n_1F_0+n_{k+2}F_k+\cdots+n_2F_0=n_{k+2}(F_{k+1}+F_k)+\cdots+n_2(F_1+F_0)+n_1F_0=n_{k+2}F_{k+2}+\cdots+n_2F_2+n_1F_1+n_0F_0$(这里用到$n_1=n_0=0$)，①对$k+2$成立；如果$(n_1, n_0)=(1, 0)$，那么由(2)知$F(n)=F((n_{k+2}n_{k+1}\cdots n_2n'_1n'_0)_2)+1$，这里$n'_1=n'_0=0$，于是，$F(n)=n_{k+2}F_{k+2}+\cdots+n_2F_2+1=n_{k+2}F_{k+2}+\cdots+n_2F_2+n_1F_1+n_0F_0$，①也成立；如果$(n_1, n_0)=(0, 1)$，那么$F(n)=F((n_{k+2}\cdots n_2n'_1n'_0)_2)+1$，这里$n'_1=n'_0=0$，利用条件(1)及前面的结论可知①成立；如果$(n_1, n_0)=(1, 1)$，那么$F(n)=F((n_{k+2}\cdots n_1n'_0))+1$，这里$n'_0=0$，利用条件(2)及前面的结论可知①成立. 所以，①对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

利用①可知$F(4n)=F(3n)$的充要条件是n的二进制表示$(n_kn_{k-1}\cdots n_0)_2$中没有相邻的两个数都等于1(这里还用到数列$\{F_m\}$的定义). 在$0\leqslant n<2^m$中，记二进制表示中没有相邻的两个1的数的个数为f_m，则$f_0=1$，$f_1=2$，而去掉n的末位数字n_0后，依$n_0=0$、1分类，分别有f_{m-1}和f_{m-2}(因为$n_0=1$时，必有$n_1=0$)，故$f_m=f_{m-1}+f_{m-2}$. 这表明，在$0\leqslant n<2^m$中，有$F_{m+1}(=F(2^{m+1}))$个数n满足$F(4n)=F(3n)$，从而命题成立.

26. 由递推式，可知$f(n)\leqslant f(n-1)+2\leqslant\cdots\leqslant f(1)+2(n-1)=2n-1$. 故$f(n)-n+1\leqslant n$. 因此，如果$f(1), \cdots, f(n)$的值确定了，那么$f(n+1)$的值唯一确定. 从而，存在唯一的函数$f$满足条件.

现在，令$g(n)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$，记$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则$g(1)=1$，且对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$g(n+1)-g(n)=[\alpha(n+1)]-[\alpha n]=[\alpha+\varepsilon],$$

这里$\varepsilon=\{\alpha n\}=\alpha n-[\alpha n]$.

另一方面，$g(g(n)-n+1)=[\alpha(g(n)-n+1)]=[\alpha(\alpha n-\varepsilon-n+1)]=[(\alpha^2-\alpha)n+\alpha(1-\varepsilon)]=n+[\alpha(1-\varepsilon)]$，这里用到$\alpha^2-\alpha-1=0$.

注意到$\varepsilon\neq 2-\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$(否则$1=\frac{[\alpha n]+\varepsilon}{\alpha}=\frac{[\alpha n]+2}{\alpha}-1$，导致$\alpha$为有理数，矛盾)，利用上述结论，若$0\leqslant\varepsilon<2-\alpha$，则$\alpha(1-\varepsilon)>\alpha(\alpha-1)=$

1，从而 $g(g(n)-n+1)=n+1$，此时 $1<\alpha+\varepsilon<\alpha+2-\alpha=2$，即有 $g(n+1)-g(n)=1$；若 $2-\alpha<\varepsilon<1$，则 $\alpha(1-\varepsilon)<\alpha(\alpha-1)=1$，从而 $g(g(n)-n+1)=n$，这时 $2<\alpha+\varepsilon<3$，即 $g(n+1)-g(n)=2$.

上述讨论表明：$g:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 满足 f 所满足的所有条件，从而对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $f(n)=g(n)$，这给出了(2)要求的答案.

结合①知(1)成立.

问题获解.

27. 对每个 $n\in\mathbf{N}^*$，设 n 在二进制表示下，相邻数对中 00 与 11 出现的次数和为 x_n，相邻数对中 01 与 10 出现的次数和为 y_n. 我们证明：$a_n=x_n-y_n$. ①

事实上，当 $n=1$ 时，$x_1=y_1=0$，故①对 $n=1$ 成立.

现设①对下标 $1,2,\cdots,n-1\ (n\geqslant 2)$ 都成立，考虑 n 的情形.

如果二进制表示下，n 的末两位为 00 或 11，则 $n\equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$，这时，$a_n=a_{\left[\frac{n}{2}\right]}+1$，而此时，$x_n=x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+1$，$y_n=y_{\left[\frac{n}{2}\right]}$. 所以，①对 n 成立.

如果二进制表示下，n 的末两位为 01 或 10，则 $n\equiv 1$ 或 $2 \pmod 4$；这时 $a_n=a_{\left[\frac{n}{2}\right]}-1$，此时 $x_n=x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$，$y_n=y_{\left[\frac{n}{2}\right]}+1$，所以，①对 n 成立. 综上，①对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

现在需要计算 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 中，在二进制表示下使得 x_n 与 y_n 相等的 n 的个数.

这时 n 在二进制表示下是一个 $k+1$ 位数，设为 B_n，当 $k\geqslant 1$ 时，将 B_n 的从左到右每一位减去它的下一位数，然后取绝对值，可得一个 k 元的 0、1 数组 C_n（例如：若 $B_n=(1101)_2$，则 $C_n=(011)_2$），注意到，B_n 每一个相邻数对 00 与 11 变为 C_n 中的一个 0，而 01 与 10 变为 C_n 中的一个 1. 所以，若 $x_n=y_n$，则 C_n 中 1 的个数与 0 的个数相同. 反过来，对一个由 0、1 组成的 k 元数组 $C_n=(C_1C_2\cdots C_k)$，则在 mod 2 意义下求下面的和 $b_1=1+c_1$，$b_2=b_1+c_2$，$\cdots$，$b_k=b_{k-1}+b_k$，这里 $b_0=1$，那么，$B_n=(b_0b_1\cdots b_k)_2$ 是一个满足 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 的数 n 的二进制表示. 这表明 B_n 与 C_n 之间是一个一一对应.

所以，原题中所求答案等于 k 元 0、1 数组中 0 与 1 的个数相等的数组的个数. 因此，

当 k 为奇数时，答案为 0；当 k 为偶数时，答案为 $C_k^{\frac{k}{2}}$（注意，这里认为 $C_0^0=1$）.

28. 我们证明：对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有

$$x_{5n+1}=5n+1,\ x_{5n+2}=5n+4,\ x_{5n+3}=5n+2,$$
$$x_{5n+4}=5n+5,\ x_{5n+5}=5n+3. \qquad ①$$

（利用此结果及 $k^2\equiv 0$，1 或 $4 \pmod 5$），即可知命题成立）.

事实上，当 $n=0$ 时，由 $a_1=1$ 知 $a_2=4$，$a_3=2$，$a_4=5$，$a_5=3$，故 ① 对 $n=0$ 成立.

现设①对 $n=0,1,2,\cdots,m-1$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 都成立，考虑 $n=m$ 的情形，由 ① 的结构($a_{5n+1},\cdots,a_{5n+5}$ 是 $5n+1,\cdots,5n+5$ 的一个排列）可知 a_1，$a_2,\cdots,a_{5m}$ 是 $1,2,\cdots,5m$ 的一个排列，利用递推关系式可知 $a_{5m+1}=a_{5m}-2=5m+1$，$a_{5m+2}=a_{5m+1}+3=5m+4$，$a_{5m+3}=a_{5m+2}-2=5m+2$，$a_{5m+4}=a_{5m+3}+3=5m+5$，$a_{5m+5}=a_{5m+4}-2=5m+2$. 所以，结论 ① 对 m 也成立.

29. 利用$\frac{\pi}{\theta}$为无理数，可知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个两两不同的实数. 为确定所求代数式的值，我们去寻找一个以 $a_1,\cdots,a_n$ 为根的 n 次多项式.

注意到 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，于是，有 $\sec\theta e^{i\theta}=1+i\tan\theta$，$\sec\theta\cdot e^{-i\theta}=1-i\tan\theta$，所以

$$1+i\tan\theta=e^{2i\theta}(1-i\tan\theta). \qquad ①$$

令 $\omega=e^{2in\theta}$，则多项式 $Q_n(x)=(1+ix)^n-\omega(1-ix)^n$ 有 n 个根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.（这一点由 ① 可知，因为 ω 的 n 次方根为 $e^{2i\left(\theta+\frac{k}{n}\pi\right)}$，$k=1,2,\cdots,n$)，而 $Q_n(x)$ 是一个 n 次多项式，所以，$a_1,\cdots,a_n$ 是 $Q_n(x)$ 的所有根.

记 $Q_n(x)=c_nx^n+\cdots+c_0$，则由韦达定理知 $a_1+\cdots+a_n=-\frac{c_{n-1}}{c_n}$，$a_1\cdots a_n=(-1)^n\cdot\frac{c_0}{c_n}$，所以$\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1\cdots a_n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_0}$.

对 $Q_n(x)$用二项式定理，知 $c_{n-1}=n\cdot i^{n-1}-\omega n(-i)^{n-1}=ni^{n-1}(1-\omega)$，$c_0=1-\omega$，从而$\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1\cdots a_n}=n\cdot(-i)^{n-1}$，结合 n 为奇数，可得

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1\cdots a_n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n.$$

问题获解.

30. 当 $n=1$ 时，取 $P(x)=x$ 即可；当 $n=2$ 时，$2\cos 2\varphi=(2\cos\varphi)^2-2$，命题也成立.

假设命题对 $n=k$ 和 $k+1$ 成立，即存在首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$和 $g(x)$，使得

$$2\cos k\varphi=f(2\cos\varphi),\ 2\cos(k+1)\varphi=g(2\cos\varphi).$$

其中 f、g 的次数分别为 k 和 $k+1$.

下面考虑 $n=k+2$ 的情形. 注意到

$$2\cos(k+2)\varphi=2\cos[(k+1)\varphi+\varphi]$$

$$= 2\cos(k+1)\varphi\cos\varphi - 2\sin(k+1)\varphi\sin\varphi. \qquad ①$$

$$\begin{aligned} 2\cos k\varphi &= 2\cos[(k+1)\varphi - \varphi] \\ &= 2\cos(k+1)\varphi\cos\varphi + 2\sin(k+1)\varphi\cos\varphi. \qquad ② \end{aligned}$$

将①与②相加，得

$$2\cos(k+2)\varphi + 2\cos k\varphi = 4\cos(k+1)\varphi\cos\varphi.$$

利用归纳假设，可知

$$2\cos(k+2)\varphi = (2\cos\varphi)g(2\cos\varphi) - f(2\cos\varphi).$$

故令 $h(x) = xg(x) - f(x)$（易知 $h(x)$ 是一个首项系数为 1 的整系数多项式），就有

$$2\cos(k+2)\varphi = h(2\cos\varphi).$$

命题对 $k+2$ 成立.

所以，命题成立.

31. 记 $\theta = \alpha\pi$，由 α 为有理数，知存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n\theta = 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$，即 $\cos n\theta = 1$. 由上题的结论知存在整系数多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，使得 $2\cos n\theta = f(2\cos\theta)$，从而有

$$(2\cos\theta)^n + a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1} + \cdots + a_1(2\cos\theta) + a_0 - 2 = 0,$$

这表明 $2\cos\theta$（注意 $\cos\alpha\pi \in \mathbf{Q}$）是方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 - 2 = 0 \qquad ①$$

的有理根. 然而①左边是一个首项系数为 1 的多项式，故①的有理根都是整数根. 所以 $2\cos\theta$ 为整数，结合 $|\cos\theta| \leqslant 1$，知 $2\cos\theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，于是 $\cos\alpha\pi \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$（集合中的每个值都存在 α 取到是显然的）.

32. 不妨设所给单位圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$，现取 $\theta = \arccos\frac{3}{5}$，则 $\cos\theta = \frac{3}{5}$，$\sin\theta = \frac{4}{5}$. 考虑由 $P_n(\cos 2n\theta, \sin 2n\theta)$ 组成的点集 M，$n = 1, 2, \cdots$.

对任意 i、$j \in \mathbf{N}^*$，我们有

$$\begin{aligned} |P_iP_j|^2 &= (\cos 2i\theta - \cos 2j\theta)^2 + (\sin 2i\theta - \sin 2j\theta)^2 \\ &= 2 - 2\cos 2(i-j)\theta \\ &= 4\sin^2(i-j)\theta \end{aligned}$$

所以，$|P_iP_j| = 2|\sin(i-j)\theta|$.

注意到，$\cos\theta$、$\sin\theta\in\mathbf{Q}$，由 $\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$ 及 $\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$ 结合数学归纳法易证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $\sin n\theta$、$\cos n\theta\in\mathbf{Q}$. 因此，$M$ 中任意两点之间的距离都是有理数.

现在还需要证明：M 是一个无穷点集.

若否，设 M 是一个有限集，则存在 m、$n\in\mathbf{N}^*$，$m\neq n$，使得 $2m\theta=2n\theta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，这表明 $\theta=\alpha\pi$，$\alpha\in\mathbf{Q}$. 又 $\cos\theta=\frac{3}{5}\in\mathbf{Q}$，由上题的结论，知 $\cos\alpha\pi\in\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}$，但 $\cos\theta=\frac{3}{5}\notin\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}$，矛盾. 所以，$M$ 是一个无限集.

综上，存在满足条件的无穷多个点.

33. 由条件，可设

$$P(x)=a_n(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n).$$

这里 $\beta_i\geqslant1$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $a_n\neq0$.

利用 $a_0^2+a_1a_n=a_n^2+a_0a_{n-1}$ 可知

$$a_n^2\Big(\prod_{i=1}^n\beta_i\Big)^2+a_n^2\Big(\prod_{i=1}^n\beta_i\Big)\sum_{i=1}^n\frac{1}{\beta_i}=a_n^2+\Big(\prod_{i=1}^n\beta_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n\beta_i\Big)a_n^2.$$

于是

$$\prod_{i=1}^n\beta_i-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n\beta_i}=\sum_{i=1}^n\beta_i-\sum_{i=1}^n\frac{1}{\beta_i}.\tag{①}$$

下面对 n 运用数学归纳法证明：当 $\beta_i\geqslant1$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，都有

$$\prod_{i=1}^n\beta_i-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n\beta_i}\geqslant\sum_{i=1}^n\beta_i-\sum_{i=1}^n\frac{1}{\beta_i}.$$

等号当且仅当 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 中有 $n-1$ 个数等于 1 时成立.

当 $n=2$ 时，若 β_1、$\beta_2\geqslant1$，则有如下等价关系成立

$$\begin{aligned}&\beta_1\beta_2-\frac{1}{\beta_1\beta_2}\geqslant(\beta_1+\beta_2)-\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)\\&\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2)^2-1\geqslant(\beta_1+\beta_2)(\beta_1\beta_2-1)\\&\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-1)(\beta_1-1)(\beta_2-1)\geqslant0.\end{aligned}$$

所以 $n=2$ 时，上述命题成立.

设命题对 $n=k$ 时成立，当 $n=k+1$ 时，我们令 $\alpha=\beta_k\beta_{k+1}$，由归纳假设，可知

$$\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k+1}\beta_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\beta_i}\right)+\alpha-\frac{1}{\alpha},$$

等号当且仅当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1},\alpha$ 中有 $k-1$ 个等于 1 时成立.

又由 $n=2$ 的情形，可知 $\alpha-\frac{1}{\alpha}=\beta_k\beta_{k+1}-\frac{1}{\beta_k\beta_{k+1}}\geqslant\beta_k+\beta_{k+1}-\frac{1}{\beta_k}-\frac{1}{\beta_{k+1}}$. 于是

$$\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k+1}\beta_i}\geqslant\sum_{i=1}^{k+1}\beta_i-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\beta_i},$$

等号当且仅当 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\alpha$ 中有 $k-1$ 个为 1，并且 β_k 与 β_{k+1} 中有一个为 1 时成立，而这等价于 $\beta_1,\cdots,\beta_{k+1}$ 中有 k 个为 1 时成立.

由上述结论及①式可知，形如 $P(x)=a_n(x+1)^{n-1}(x+\beta)$，$a_n\neq0$，$\beta\geqslant1$ 的多项式为所有满足条件的多项式.

34. 记 $x_1=1$，$x_{n+1}=P(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，对固定的 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，记 $x_n-1=M$，则 $x_1\equiv1\equiv x_n\pmod M$，从而 $P(x_1)\equiv P(x_n)\pmod M$，即 $x_2\equiv x_{n+1}\pmod M$. 这样利用数学归纳法，可证：对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，都有

$$x_k\equiv x_{n+k-1}\pmod M. \quad ①$$

由条件 $x_1,x_2,\cdots$ 中有一项为 M 的倍数，故存在 $r\in\mathbf{N}^*$，使得 $x_r\equiv0\pmod M$. 而由 ① 知数列 $\{x_k\}$ 在 $\bmod M$ 的意义下是一个以 $n-1$ 为周期的数列，故可设 $1\leqslant r\leqslant n-1$.

现由 $P(n)>n$，可知 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，故 $x_{n-1}\leqslant x_n-1=M$，进而 $x_r\leqslant M$. 但 $M\mid x_r$，故 $x_r=M=x_n-1$，这要求 $r=n-1$，即 $x_n-1=x_{n-1}$，所以 $P(x_{n-1})=x_n=x_{n-1}+1$. 由于此式对任意 $n\geqslant2$ 都成立，结合 $\{x_n\}$ 为单调递增数列，知 $P(x)=x+1$ 对无穷多个不同的正整数成立.

所以 $P(x)=x+1$.

35. 由条件，得 $P(-x)^2-1=P((-x)^2-1)=P(x^2-1)=P(x)^2-1$，故 $P(x)^2=P(-x)^2$. 现设 $P(x)=a_{2k+1}x^{2k+1}+a_{2k}x^{2k}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_{2k+1}\neq0)$. 对比 $P(x)^2$ 与 $P(-x)^2$ 展开后的各项系数，可得 $a_{2k}=a_{2k-2}=\cdots=a_0=0$. 因此，$P(x)$ 只有非零的奇次项系数，即有 $P(-x)=-P(x)$. 从而 $P(0)=0$，进而

$$P(-1)=P(0^2-1)=P(0)^2-1=-1,\ P(1)=-P(-1)=1.$$

考虑数列 $b_1=1$，$b_{n+1}=\sqrt{b_n+1}$，$n=1,2,\cdots$. 注意到 $b_1<b_2=\sqrt{2}$. 现设 $b_n<b_{n+1}$，则 $b_n+1<b_{n+1}+1$，$\sqrt{b_n+1}<\sqrt{b_{n+1}+1}$，即 $b_{n+1}<b_{n+2}$. 依此由数学归纳法原理知 $\{b_n\}$ 是一个递增数列.

另外 $P(b_1)=P(1)=1=b_1$，现设 $P(b_n)=b_n$，则

$$P(b_{n+1})^2=P(b_{n+1}^2-1)+1=P(b_n)+1=b_n+1=b_{n+1}^2.$$

于是 $P(b_{n+1})=\pm b_{n+1}$，但若 $P(b_{n+1})=-b_{n+1}$，则 $P(b_{n+2})^2=P(b_{n+1})+1=1-b_{n+1}=1-\sqrt{b_n+1}<0$，矛盾. 故 $P(b_{n+1})=b_{n+1}$. 从而，由数学归纳法原理知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $P(b_n)=b_n$.

综上可知，有无穷多个不同的实数 x，使得 $P(x)=x$. 故对任意 x，都有 $P(x)=x$.

36. 由(2)，不妨设 k 是最小的使 $f^{(k)}(0)=0$ 成立的正整数，若 $k\geqslant 3$，则

$$\begin{aligned}|f(0)|&=|f(0)-0|\geqslant|f^{(2)}(0)-f(0)|\geqslant\cdots\geqslant|f^{(k)}(0)-f^{(k-1)}(0)|\\&=|f^{(k-1)}(0)|,\end{aligned}$$

$$\text{而 } |f^{(k-1)}(0)|=|f^{(k-1)}(0)-0|\geqslant|f^{(k)}(0)-f(0)|=|f(0)|.$$

所以 $|f(0)|=|f^{(k-1)}(0)|$.

如果 $f(0)=f^{(k-1)}(0)$，那么 $f(f(0))=f^{(k)}(0)=0$，矛盾.

如果 $f(0)=-f^{(k-1)}(0)$，那么，由(1)可知

$$\begin{aligned}|f(0)|=|f(0)+0|=|f^{(k)}(0)-f^{(k-1)}(0)|\leqslant\\|f^{(k-1)}(0)-f^{(k-2)}(0)|\leqslant\cdots\leqslant\\|f^{(2)}(0)-f(0)|\leqslant|f(0)-0|=|f(0)|.\end{aligned}$$

所以，上述不等号全部取等号.

注意到 $f(0)$，$\cdots$，$f^{(k-1)}(0)$ 都不为零，于是，由方程组

$$\begin{cases}|f^{(2)}(0)-f(0)|=|f(0)|,\\|f^{(3)}(0)-f^{(2)}(0)|=|f(0)|,\\\cdots\\|f^{(k-1)}(0)-f^{(k-2)}(0)|=|f(0)|.\end{cases}$$

可知，对 $2\leqslant j\leqslant k-1$，都有 $f^{(j)}(0)-f^{(j-1)}(0)=\pm f(0)$，于是 $f^{(2)}(0)=2f(0)$，$f^{(3)}(0)\in\{f(0),3f(0)\}$，$f^{(4)}(0)\in\{2f(0),4f(0)\}$，依次递推，可得 $f^{(k-1)}(0)$ 是 $f(0)$ 的正整数倍，与 $f^{(k-1)}(0)=-f(0)$ 矛盾.

综上可知，命题成立.

37. 构造一个组合模型:用 $f(n)$ 表示由 1×1 的红色方块, 1×1 的蓝色方块和 1×2 的白色方块拼成的 $1\times n$ 的长条的数目.

直接计算可知

$$f(n)=\sum\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

这里的求和对 $i+j+2k=n$ 的所有非负整数组 (i,j,k) 进行.

另一方面,采用递推方法来计算 $f(n)$,可知 $f(1)=2$, $f(2)=5$,而对长为 $n+2$ 的 $1\times(n+2)$ 的长条,如果第一个小方块为红色或蓝色,去掉后共有 $f(n+1)$ 个符合条件的长条;如果第一个小方块为白色(其长度为 2),去掉后共有 $f(n)$ 个符合条件的长条,故 $f(n+2)=2f(n+1)+f(n)$.

对比数列 $\{f(n)\}$ 与 $\{p_n\}$ 的初始值和递推关系式可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $f(n)=p_n$.

所以,命题成立.

38. **引理** 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有

$$\left\{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\cdots+\frac{\beta_n}{2^n}\,\middle|\,\beta_i\in\{-1,1\},\ i=1,2,\cdots,n\right\}$$
$$=\left\{\frac{j}{2^n}\,\middle|\,j\text{ 为奇数,且 }|j|<2^n\right\}.$$

引理的证明可通过对 n 归纳来处理.

当 $n=1$ 时,引理显然成立.现设引理对所有小于 n 的正整数成立,考虑 n 的情形.

对 $\beta_i\in\{-1,1\}$,记 $j=2^{n-1}\beta_1+2^{n-2}\beta_2+\cdots+2^0\beta_n$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{2^i}=\frac{j}{2^n}$,并且 j 为奇数.进一步,还有

$$\left|\frac{j}{2^n}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{2^i}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|\beta_i|}{2^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

故 $|j|<2^n$.

反过来,对 j 为奇数,且 $|j|<2^n$.注意到 $\frac{j-1}{2}$ 与 $\frac{j+1}{2}$ 具有不同的奇偶性,我们设 j_0 是 $\frac{j-1}{2}$ 和 $\frac{j+1}{2}$ 中的那个奇数.则 $|j_0|\leqslant\frac{1}{2}(1+|j|)\leqslant2^{n-1}+\frac{1}{2}$,结合 j_0 为奇数,知 $|j_0|<2^{n-1}$.从而由归纳假设知,存在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}\in\{-1,1\}$,使得

$$\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\cdots+\frac{\beta_{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{j_0}{2^{n-1}},$$

令 $\beta_n=j-2j_0$，则 $\beta_n\in\{-1,1\}$，并且

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{2^i}=\frac{j_0}{2^{n-1}}+\frac{j-2j_0}{2^n}=\frac{j}{2^n}.$$

所以，引理获证.

(1) 由引理的结论及 A_n 中元素的结构，可知 $A_n=\left\{1+\frac{j}{2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}+\frac{k}{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}\sqrt{2}\,\middle|\,j,\right.$ $\left.k\text{ 为奇数，且 }|j|<2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},\ k<2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\right\}$，所以，由 $\sqrt{2}$ 为无理数，可知 $|A|=2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cdot 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}=2^n$.

(2) 记 $S=\sum\limits_{\substack{a、b\in A_n\\ a<b}}ab$，那么 $S=\frac{1}{2}\big((\sum\limits_{a\in A_n}a)^2-\sum\limits_{a\in A_n}a^2\big)$.

将 A_n 中的元素 $1+\frac{j}{2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}+\frac{k}{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}\sqrt{2}$ 与 $1-\frac{j}{2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}-\frac{k}{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}\sqrt{2}$ 配对求和，并利用(1) 的结论，可知 $\sum\limits_{a\in A_n}a=2^n$.

进一步，利用结论：若 X、Y 都是有限集，且 $\sum\limits_{x\in X}x=\sum\limits_{y\in Y}y=0$，则 $\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y}(1+x+y)^2=|X|\cdot|Y|+|Y|\cdot\sum\limits_{x\in X}x^2+|X|\cdot\sum\limits_{y\in Y}y^2$. 结合 A_n 的结构，可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A_n}a^2&=\sum_{\substack{j\text{为奇数}\\|j|<2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}}\ \sum_{\substack{k\text{为奇数}\\|k|<2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}}\left(1+\frac{j}{2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}+\frac{k}{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}\sqrt{2}\right)^2\\&=2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\cdot 2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}+\sum_{\substack{j\text{为奇数}\\|j|<2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}}\frac{j^2\cdot 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}{2^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}+\sum_{\substack{k\text{为奇数}\\|k|<2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}}\frac{2k^2\cdot 2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}{2^{2\lceil\frac{n}{2}\rceil}}\\&=2^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\cdot 2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}-1)}{2^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}+\frac{2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cdot 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}(2^{2\lceil\frac{n}{2}\rceil}-1)}{2^{2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}}\right)\\&=2^n+\frac{2^n}{3}\left(3-\frac{1}{2^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}-\frac{1}{2^{2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}}\right)\\&=2^{n+1}-1.\end{aligned}$$

综上，(1) 的答案是 2^n，而(2) 的答案为 $\frac{1}{2}(2^{2n}-2^{n+1}+1)$.

39. 引理　设 $n\in\mathbf{N}^*$，将 n 表示为若干个 3 或 4 之和的有序分拆排成一

个矩阵，则 x_n 为该矩阵中第一列上各数之和.

例如：当 $n=15$ 时，所得的矩阵为

$$\begin{array}{lllll}4, & 4, & 4, & 3 & \\ 4, & 4, & 3, & 4 & \\ 4, & 3, & 4, & 4 & \\ 3, & 4, & 4, & 4 & \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 3\end{array}$$

而直接由递推式可算得 $x_{15}=18$ 等于上述矩阵中第一列各数之和.

引理的证明：对 n 归纳来证，当 $n=1,2,3,4$ 时直接验证可知命题成立. 现设引理对所有小于 $n(\geqslant 5)$ 的下标都成立，考虑 n 的情形.

依 n 表为 3 或 4 的有序分拆的最后一项为 3、4 分为两类：末项为 3 的有序分拆全部去掉末项 3 后得到 $n-3$ 的所有有序分拆；末项为 4 的全部去掉末项 4 后得到 $n-4$ 的所有有序分拆. 结合 $n\geqslant 5$，其分拆若存在，则至少有两项，可知 n 的有序分拆构成的矩阵的第一列上各数之和为 $x_{n-3}+x_{n-4}$（这里用到归纳假设），故引理对 n 成立，命题获证.

回到原题，当 $p=2,3$ 时 $x_p=0$，命题成立，对素数 $p(\geqslant 5)$，设将 p 表为 3 或 4 的有序分拆作出的矩阵为 M，则 M 的每一行的长度 l 满足 $\frac{p}{4}\leqslant l\leqslant\frac{p}{3}$.

对 M 中长度相同的行合成的子矩阵 $\boldsymbol{T}$ 作下面的分析：设 $\boldsymbol{T}$ 中第一列的元素和为 S，由于 $\boldsymbol{T}$ 的每一行中必同时出现 3 和 4（仅出现 3 或 4 时，p 是 3 或 4 的倍数，不为素数），从而将该行中的这对 3 和 4 对换位置所得的 p 的分拆是 $\boldsymbol{T}$ 的另一行. 这表明：$\boldsymbol{T}$ 中任意两列上的元素和相同（因为这两列上对应位置上的数，如果不同，那么必有另一行与此两列交出的数正好是它们的对换），记 $\boldsymbol{T}$ 中每一列的和为 S. 设 $\boldsymbol{T}$ 的列数为 l，则 $\boldsymbol{T}$ 中所有数之和为 sl，而 $\boldsymbol{T}$ 中每一行中所有数之和都为 p，故 sl 是 p 的倍数，结合 $\frac{p}{4}\leqslant l\leqslant\frac{p}{3}$，可知 $p\mid s$.

依上述讨论可得，对 M 中第一列上各数之和而言，它也是 p 的倍数，即有 $p\mid x_p$. 命题成立.

40. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是符合条件的正整数，则由(1)可知对 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $a_k>a_{k-1}$（否则左边 $\geqslant 1$，而右边 <1），从而，有 $a_k>1$，于是，由(2)知

$$\frac{a_{k-1}}{a_k(a_k-1)}\geqslant\frac{a_k}{a_{k+1}-1},$$

即 $\frac{a_{k-1}}{a_k-1}-\frac{a_{k-1}}{a_k}\geqslant\frac{a_k}{a_{k+1}-1}$，所以 $\frac{a_{k-1}}{a_k}\leqslant\frac{a_{k-1}}{a_k-1}-\frac{a_k}{a_{k+1}-1}$，对 $k=i+1,\cdots,$

$n-1$ 求和，就有

$$\frac{a_i}{a_{i+1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leqslant\frac{a_i}{a_{i+1}-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n-1}+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{a_i}{a_{i+1}-1}. \qquad ①$$

在①中令 $i=0$，利用(1) 就有 $\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{99}{100}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{a_{i+1}}<\frac{1}{a_1-1}$，故 $a_1=2$. 类似地，在 ① 中取 $i=1$，结合(1)就有

$$\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100}-\frac{1}{a_1}\right)<\frac{1}{a_2-1},$$

可得 $\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{49}{200}<\frac{1}{a_2-1}$，知 $a_2=5$. 重复这样的讨论，在 ① 中分别取 $i=2$、3，可得 $a_3=56$，$a_4=25\times56^2=78\,400$. 此时

$$\frac{1}{a_5}\leqslant\frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{5}{56}-\frac{56}{25\times56^2}\right)=0.$$

故 a_5 不存在.

综上可知，仅当 $n=4$ 时，这样的数列存在，对应地 a_1，a_2，a_3，a_4 为 2，5，56，78 400.

41. 令 $x_n=ny_n$，$n=2$，3，$\cdots$，则 $x_2=2$，$x_3=3$，且当 $n\geqslant3$ 时，有 $(n-2)x_{n+1}=(n^2-n-1)x_n-(n-1)^2x_{n-1}$，即

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{n-1}=(n-1)\cdot\frac{x_n-x_{n-1}}{n-2}. \qquad ①$$

利用①递推可得

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{n-1}=(n-1)\cdot\frac{x_n-x_{n-1}}{n-2}=(n-1)(n-2)\cdot\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{n-3}$$
$$=\cdots=(n-1)\cdots2\cdot\frac{x_3-x_2}{1}=(n-1)!,$$

得 $x_{n+1}-x_n=n!-(n-1)!$，裂项求和，知 $x_n=x_2+\sum\limits_{k=2}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=x_2+\sum\limits_{k=2}^{n-1}(k!-(k-1)!)=x_2+(n-1)!-1=(n-1)!+1$.

结合 Wilson 定理：当且仅当 n 为素数时，$n\mid(n-1)!+1$，可知 $y_n\in\mathbf{Z}$ 的充要条件是 n 为素数.

42. 引理 设 n、$k\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant kp$，则

$$a_n=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i a_{n-i(p-1)-k}. \qquad ①$$

对 k 归纳予以证明. 当 $k=1$ 时，① 就是 $a_n=a_{n-1}+a_{n-p}$，故 ① 对 $k=1$ 成立.

现设 ① 对 k 成立，考虑 $k+1$ 的情形. 此时 $n\geqslant(k+1)p$，下标 $n-i(p-1)-k(0\leqslant i\leqslant k)$ 的最小值在 $i=k$ 时取到，该最小值为 $n-kp\geqslant p$，所以，下面求和式中的每一项都可用条件中的递推式.

由归纳假设知，当 $n\geqslant(k+1)p$ 时，有

$$\begin{aligned}
a_n&=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i a_{n-i(p-1)-k}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(a_{n-i(p-1)-k-1}+a_{n-i(p-1)-k-p})\\
&=\mathrm{C}_k^0 a_{n-k-1}+\sum_{i=1}^{k}\mathrm{C}_k^i a_{n-i(p-1)-k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_k^i a_{n-i(p-1)-k-p}+\mathrm{C}_k^k a_{n-(k+1)p}\\
&=\mathrm{C}_{k+1}^0 a_{n-(k+1)}+\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_k^{i+1}a_{n-(i+1)(p-1)-(k+1)}+\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_k^i a_{n-(i+1)(p-1)-(k+1)}+\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}a_{n-(k+1)p}\\
&=\mathrm{C}_{k+1}^0 a_{n-(k+1)}+\sum_{i=0}^{k-1}(\mathrm{C}_k^{i+1}+\mathrm{C}_k^i)a_{n-(i+1)(p-1)-(k+1)}+\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}a_{n-(k+1)p}\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}^i a_{n-(i+1)(p-1)-(k+1)}.
\end{aligned}$$

最后一步，用到 $\mathrm{C}_k^{i+1}+\mathrm{C}_k^i=\mathrm{C}_{k+1}^{i+1}$. 所以，①对 $k+1$ 成立，引理获证.

下面利用引理来处理原题. 当 $n\geqslant p^2$ 时，在引理中令 $k=p$，就有

$$a_n=\sum_{i=0}^{p}\mathrm{C}_p^i a_{n-i(p-1)-p},$$

熟知，当 $1\leqslant i\leqslant p-1$ 时，有 $\mathrm{C}_p^i\equiv 0\pmod p$，所以，$a_n\equiv a_{n-p}+a_{n-p^2}\pmod p$，这时结合 $a_n=a_{n-1}+a_{n-p}$，可得 $a_{n-1}\equiv a_{n-p^2}\pmod p$，这表明对任意 $t\geqslant p^2-1$，有 $a_t\equiv a_{t+p^2-1}\pmod p$.

由于 $p^3=p(p^2-1)+p$，故 $a_{p^3}=a_{p+p(p^2-1)}\equiv a_p\pmod p$，而 $a_p=a_0+a_{p-1}=p-1$，所以 $a_{p^3}\equiv p-1\pmod p$，即 a_{p^3} 除以 p 所得的余数为 $p-1$.

43. 为方便计，记 $m=n-1$，$b_i=a_i+1$，则 $1\leqslant a_0\leqslant 2m$，且

$$a_{i+1}=\begin{cases}2a_i, & \text{若 } a_i\leqslant m,\\ 2a_i-(2m+1), & \text{若 } a_i>m.\end{cases}$$

这表明 $a_{i+1}\equiv 2a_i\pmod{2m+1}$，且 $1\leqslant a_i\leqslant 2m$，$i=1, 2, \cdots$.

(1) 题中的 $p(2, 2^k)$ 和 $p(2, 2^k+1)$ 等价于针对 $\{a_i\}$ 求 $p(1, 2^k-1)$ 和 $p(1, 2^k)$. 前者等价于求最小 $l \in \mathbf{N}^*$，使得 $2^l \equiv 1 \pmod{2(2^k-1)+1}$，后者等价于求最小的 $l \in \mathbf{N}^*$，使得 $2^l \equiv 1 \pmod{2^{k+1}+1}$.

显然 $2^{k+1} \equiv 1 \pmod{2(2^k-1)+1}$，而对 $1 \leqslant t \leqslant k$，都有 $1 \leqslant 2^t - 1 < 2^{k+1} - 1 = 2(2^k-1)+1$，故 $p(1, 2^k-1) = k+1$.

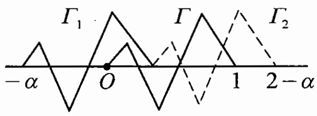
又 $2^{2(k+1)} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}+1}$，从而 $p(1, 2^k) \mid 2(k+1)$，又对 $1 \leqslant t \leqslant k+1$，都有 $1 \leqslant 2^t - 1 < 2^{k+1}+1$，于是 $p(1, 2^k) > k+1$，故 $p(1, 2^k) = 2(k+1)$.

所以，针对 $\{b_i\}$ 有 $p(2, 2^k) = k+1$，$p(2, 2^k+1) = 2(k+1)$.

(2) 还是转到 $\{a_i\}$ 上讨论，要求证明：$p(a_0, m) \mid p(1, m)$. 现设 $p(1, m) = t$，则 $2^t \equiv 1 \pmod{2m+1}$，从而 $2^t a_0 \equiv a_0 \pmod{2m+1}$，这表明 $p(a_0, m) \mid t$（这里用到类似于初等数论中阶的性质），即有 $p(a_0, m) \mid p(1, m)$，命题成立.

44. 先建立一个引理：对任意 $\alpha \in (0, 1)$，折线上存在两点，它们的纵坐标相同，横坐标相差 α 或 $1-\alpha$.

事实上，设 Γ 为题中所给的折线，Γ_1 为 Γ 向左平移 α 个单位得到的折线，Γ_2 为 Γ 向右平移 $1-\alpha$ 个单位得到的折线，容易得到 Γ 与 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 至少有一个交点，而这就是引理要求的结果（如图 6 所示，从 Γ 的最高点与最低点出发讨论即可知 Γ 与 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 有交点）.



（第 44 题）

下面利用引理来证明需要的结论.

取 $\alpha = \frac{1}{2}$，可知 $n=2$ 时，结论成立；取 $\alpha = \frac{1}{3}$，则折线上有两点 A、B，使得 $AB \parallel x$ 轴，且 $|AB| = \frac{1}{3}$ 或 $|AB| = \frac{2}{3}$，若 $|AB| = \frac{1}{3}$，则 $n=3$ 已成立，若 $|AB| = \frac{2}{3}$，则考虑连结 A、B 的 Γ 的子折线，利用引理及 $n=2$ 的结论，可知该子折线上存在点 C、D，使 $CD \parallel AB$，且 $|CD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}$，故 $n=3$ 时，结论也成立. 依此类推，结合数学归纳法，可知结论对任意 $n \geqslant 2$ 均成立.

45. 先用数学归纳法证明存在性.

当 $n=1$ 时，显然存在；设 n 时，存在满足条件的放法 T，考虑 $n+1$ 的情形，这时先将 n 个球依放法 T 放入标号为 $1, 2, \cdots, n$ 的白盒中，并设放好后，最小的空盒号码为 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则依下法放入第 $n+1$ 个球：从 $1, 2, \cdots, i-$

1号白盒中各取一个球放入第 i 号盒中，并将第 $n+1$ 个球也放入 i 号盒中，易知这样的放置方法满足条件.

再用数学归纳法(仍对 n 归纳)证明：放法是唯一的.

当 $n=1$、2时，唯一性显然成立；设对 $n(\geqslant 2)$ 时，满足条件的放置方法只有一种，记为 T.

易知 $n+1\geqslant 3$ 时，满足条件的放法中，第 $n+1$ 个白盒子必为空盒，于是，若 $n+1$ 时存在两种满足条件的放法 T_1 和 T_2. 注意到，第 $n+1$ 号白盒(为空盒)可以拆走，并且 T_1 与 T_2 经一步操作后，白盒中有 n 个球，白盒个数也为 n 个，故它们都变为 T.

设 T_1、T_2 的第一次操作的白盒号分别为 i_1、i_2. 若 $i_1>i_2$，则 T_1 经第一次操作后第 i_2 号白盒中有至少1个球，而 T_2 经第一次操作后第 i_2 号白盒中没有球，不能都变为 T，所以 $i_1\leqslant i_2$，同理 $i_2\leqslant i_1$，即有 $i_1=i_2$. 这时 T_1、T_2 中盒号大于 i_1 的白盒子中的球数相同，小于 i_1 的白盒子中的球数也相同(否则，T_1 与 T_2 经一次操作后，不能都变为 T)，因此 i_1 号盒中的球数也相同，从而 $T_1=T_2$.

这表明，存在唯一的满足条件的放置方法.

46. (1) 分别用 0、1、2 表示 A、B、C，在模 3 的意义来把握序列 R_0，R_1，…的变化情况.

设 $R_j=(x_1, \cdots, x_n)$，$R_{j+1}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则对 $1\leqslant i\leqslant n$，均有 $y_i\equiv -(x_i+x_{i+1}) \pmod 3$.

如果 n 为偶数，取 $R_0=(1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2)$，那么对任意 $m\geqslant 1$，均有 $R_m=(0, 0, \cdots, 0, 0)$，所以此时不存在符合要求的正整数 m. 如果 n 为奇数，由于不同的 n 元数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 至多 3^n 组，故对任意 R_0，存在 $m_{R_0}\in\mathbf{N}^*$，及 $k\in\mathbf{N}$，使得 $R_k=R_{m_{R_0}+k}$. 我们证明：若 $k\geqslant 1$，则 $R_{k-1}=R_{m_{R_0}+k-1}$(从而依此类推可知 $R_0=R_{m_{R_0}}$).

事实上，设 $R_{k-1}=(x_1, \cdots, x_n)$，$R_{m_{R_0}+k-1}=(y_1, \cdots, y_n)$，则由 $R_k=R_{m_{R_0}+k}$，可知 $-(x_i+x_{i+1})\equiv -(y_i+y_{i+1}) \pmod 3$，所以 $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(x_j+x_{j+1})\equiv\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(y_j+y_{j+1}) \pmod 3$，结合 n 为奇数，可知 $-x_1+(-1)^n x_{n+1}\equiv -y_1+(-1)^n y_{n+1} \pmod 3$，即 $-2x_1\equiv -2y_1 \pmod 3$，$x_1\equiv y_1 \pmod 3$，所以 $x_1=y_1$，同理可证对 $i\in\{2, \cdots, n\}$，均有 $x_i=y_i$，所以 $R_{k-1}=R_{m_{R_0}+k-1}$.

依上可知，对任意 R_0，存在 m_{R_0}，使得 $R_0=R_{m_{R_0}}$，于是，在 R_0 变化时，取所有 m_{R_0} 的最小公倍数 m，则对任意 R_0，均有 $R_0=R_m$.

综上可知，当且仅当 n 为奇数时，存在满足条件的 m.

(2) 对 $n=3^k$，$k\in\mathbf{N}^*$，满足条件((1) 中的条件) 的 m 的最小值 $m=3^k$.

事实上，对任意 $R_0=(x_1, \cdots, x_n)$，设 $R_{3^k}=(y_1, \cdots, y_n)$，则由前推出的模 3 意义下的关系式，易知

$$y_p\equiv-\sum_{i=0}^{3^k}\mathrm{C}_{3^k}^{i}x_{i+p}\pmod 3,$$

这里 x_{i+p} 的下标在模 n 的意义下取值，$p=1, 2, \cdots, n$. 注意到对 $1\leqslant i\leqslant 3^k-1$，$\mathrm{C}_{3^k}^{i}\equiv 0\pmod 3$，所以 $y_p\equiv-x_p-x_{3^k+p}=-2x_p\equiv x_p\pmod 3$，从而 $R_{3^k}=R_0$.

另一方面，设 $R_0=(0, 0, \cdots, 0, 1)$，则对 $0<m<3^k$，R_m 的第 3^k-m 个分量不等于 0，所以满足(1) 的 m 的最小值为 3^k.

习题二

1. 将命题一般化，2011 改为 n，对 n 元集 S 及 $0\leqslant N\leqslant 2^n$ 证明结论都成立.

当 $n=1$ 时，S 的子集只有 S 和 $\varnothing$，对 $0\leqslant N\leqslant 2$，将它们中任意 N 个染为白色，其余子集染为黑色，可知命题成立.

设命题对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形. 将 S 的子集分为含 a_{n+1} 和不含 a_{n+1} 的两个部分，这时 $S=\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$. 设 S 的不含 a_{n+1} 的子集为 $A_1, \cdots, A_{2^n}$. 而含 a_{n+1} 的子集为 $B_1, \cdots, B_{2^n}$，其中 $B_i=A_i\cup\{a_{n+1}\}$，$1\leqslant i\leqslant 2^n$.

如果 $0\leqslant N\leqslant 2^n$，那么用归纳假设对 $A_1, \cdots, A_{2^n}$ 中的 N 个染为白色，其余的染黑色，并且满足题中的条件后，将所有 B_i 染为黑色，可知命题对 $n+1$ 成立；如果 $2^n<N\leqslant 2^{n+1}$，设 $N=2^n+k$，那么 $0<k\leqslant 2^n$. 对 $A_1, \cdots, A_{2^n}$ 用归纳假设中的方法，将其中 k 个染为白色，其余的染黑色，使符合要求. 然后将所有 B_i 全部染为白色即可.

综上可知，命题对一切 n 成立，当然对 $n=2011$ 也成立.

2. 将 2048 推广为 2^n 的情形，即证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，将 2^n 个 $+1$ 或 -1 排成一个圆后，依题述操作，有限次后都将变为 $+1$.

当 $n=1$ 时，依条件可得下面的操作序列

$$(+1, -1)\to(-1, -1)\to(+1, +1).$$

可知命题对 $n=1$ 成立.

设命题对 n 成立，则对 $n+1$ 的情形，用 $x_1, x_2, \cdots, x_{2^{n+1}}$ 表示圆上依次排列的 2^{n+1} 个数，那么，有下面的操作序列

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{2^{n+1}})\to(x_1x_2, x_2x_3, \cdots, x_{2^{n+1}}x_1)\to$$
$$(x_1x_3, x_2x_4, \cdots, x_{2^{n+1}}x_2).$$

把上面的两次操作"合并"，视为一次操作，则可知若圆上的 2^n 个数$(x_1, x_3, \cdots, x_{2^{n+1}-1})$和$(x_2, x_4, \cdots, x_{2^{n+1}})$都能经有限次操作后变为全是$+1$，则命题获证. 而这个要求正是归纳假设，所以，命题成立.

3. 不妨设 $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$. 当 $n=1$ 时，$\frac{x_1}{1+x_1^2} \leqslant \frac{1}{2} < 1$，故命题对 $n=1$ 成立. 设命题对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形，令 $y_{i-1}=\frac{x_i}{\sqrt{1+x_1^2}}$，$i=2, 3, \cdots, n+1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{1+x_1^2+\cdots+x_i^2} &= \frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1+y_1^2+\cdots+y_i^2} \\ &< \frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+x_1^2}}.\end{aligned}$$

现设 $x_1=\tan \alpha$，$0 \leqslant \alpha<\frac{\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+x_1^2}} &= \sin \alpha \cos \alpha+\sqrt{n} \cos \alpha \leqslant \sin \alpha+\sqrt{n} \cos \alpha \\ &= \sqrt{n+1} \sin (\alpha+\varphi) \leqslant \sqrt{n+1},\end{aligned}$$

这里 $\varphi=\arctan \sqrt{n}$.

所以，当 $n+1$ 时命题成立，获证.

说明　此题还有一个巧妙的解答：记 $x_0=0$，则由 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_1^2+\cdots+x_i^2}\right)^2 &\leqslant n \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_i^2)^2} \\ &\leqslant n \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(1+x_0^2+\cdots+x_{i-1}^2)(1+x_0^2+\cdots+x_i^2)} \\ &= n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+x_0^2+\cdots+x_{i-1}^2}-\frac{1}{1+x_0^2+\cdots+x_i^2}\right) \\ &= n\left(1-\frac{1}{1+x_0^2+\cdots+x_n^2}\right) \\ &< n.\end{aligned}$$

故原不等式成立.

4. 先证一个引理：$\sum\limits_{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)} |\varepsilon_1 z_1+\cdots+\varepsilon_n z_n|^2=2^n \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^2$，这里求和表示对所有数组$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$进行，$\varepsilon_i \in\{-1, 1\}$.

当 $n=1$ 时，引理显然成立；当 $n=2$ 时，注意到 $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)+(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=2(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$（这个结论即：平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和），依此可知引理对 $n=2$ 成立.

现设引理对 n 成立，则由

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1})}|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}z_{n+1}|^2\\
=&\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}(|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n+z_{n+1}|^2+|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n-z_{n+1}|^2)\\
=&2\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}(|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2+|z_{n+1}|^2)\\
=&2^{n+1}|z_{n+1}|^2+2\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2\\
=&2^{n+1}|z_{n+1}|^2+2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\\
=&2^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2.
\end{aligned}$$

知引理对 $n+1$ 成立. 从而对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，引理成立.

回到原题，由条件，知

$$\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2\leqslant\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}|\varepsilon_1\omega_1+\cdots+\varepsilon_n\omega_n|^2,$$

从而由引理得 $2^n\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|^2\leqslant 2^n\sum\limits_{k=1}^{n}|\omega_k|^2$，命题获证.

5. 明显满足条件的一个多项式是 $P=x_1x_2\cdots x_n$，如果我们能证明 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 中有一项是 $x_1x_2\cdots x_n$ 的倍式（即 $x_1,\cdots,x_n$ 在该项中都出现），那么 P 的次数不小于 n.

下面证明加强的结论：$P(x_1,\cdots,x_n)$ 中有一项为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的倍式.

当 $n=1$ 时，由条件 $P(1)>0$，$P(-1)<0$，故 $P(x_1)$ 不为常数，有一项为 x_1 的倍式，命题成立.

假设命题对符合条件的含 $n-1$ 个变量的多项式都成立，考虑 n 的情形.

对满足条件的 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们令

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\frac{1}{2}[P(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1)-P(x_1,\cdots,x_{n-1},-1)],$$

它是视 P 为 x_n 的多项式时（其余变量 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 视为常数），x_n 的奇次项的

系数和.

由于当 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 都用 $+1$ 或 -1 代替时，如果 -1 的个数为偶数，则 $P(x_1, \cdots, x_{n-1}, 1)>0$，$P(x_1, \cdots, x_{n-1}, -1)<0$，故 $Q(x_1, \cdots, x_{n-1})>0$；类似地，如果 -1 的个数为奇数，那么 $Q(x_1, \cdots, x_{n-1})<0$. 利用归纳假设可知，$Q(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 中有一项为 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 的倍式. 注意到 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $Q(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 的每一项乘以 x_n 的某个奇次幂(不同的项可能幂次不同)求和后得到，所以，$P(x_1, \cdots, x_n)$ 中有一项为 $x_1\cdots x_n$ 的倍式.

综上可知，命题成立.

6. 当 $n=1$ 时，$m_1=a_1$，若 $\mu \geqslant a_1$，则满足 $m_k>\mu$ 的下标 k 不存在，此时命题显然，若 $\mu<a_1$，恰有一个下标 k 符合要求，由 $1<\frac{a_1}{\mu}$ 知，命题也成立.

现设命题对 $1, 2, \cdots, n-1(n \geqslant 2)$ 都成立，设 n 时，r 为满足 $m_k>\mu$ 的下标 k 的个数.

如果 $m_n \leqslant \mu$，那么对数列 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 而言，满足 $m_k>\mu$ 的下标 k 的个数也为 r，此时由归纳假设知

$$r<\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{\mu} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{\mu}.$$

命题对 n 成立.

如果 $m_n>\mu$，那么，存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $\frac{a_{n-i+1}+\cdots+a_n}{i}>\mu$. 对这个 i，就数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-i}$ 而言，至少有 $r-i$ 个下标 k 满足 $m_k>\mu$，从而，由归纳假设知

$$r-i<\frac{a_1+\cdots+a_{n-i}}{\mu},$$

于是

$$(a_1+\cdots+a_{n-i})+(a_{n-i+1}+\cdots+a_n)>(r-i)\mu+i\mu=r\mu,$$

故 $r<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mu}$.

命题获证.

7. 对比第 10 节中平均值不等式的证明二，用其中出现的方法来证这个应用广泛的 Jenson 不等式.

当 $n=1, 2$ 时，不等式显然成立.

现设不等式对 $n=2^k(k \in \mathbf{N}^*)$ 成立，则由 f 的定义，可知

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}f(x_j)+\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}f(x_{2^k+j})\right)$$
$$=\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^{k+1}}f(x_j).$$

因此，不等式对任意 $n=2^k(k\in\mathbf{N}^*)$都成立.

对一般的 $n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant3)$，设 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$，$k\in\mathbf{N}^*$，记 $A=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$，则由不等式对 2^{k+1}成立，知

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+(2^{k+1}-n)A}{2^{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{n}f(x_j)+(2^{k+1}-n)f(A)\right),$$

而 $\frac{1}{2^{k+1}}(x_1+\cdots+x_n+(2^{k+1}-n)A)=\frac{1}{2^{k+1}}(nA+(2^{k+1}-n)A)=A$，于是，我们有

$$2^{k+1}f(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n}f(x_j)+(2^{k+1}-n)f(A),$$

故 $f(A)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)$，即不等式对 n 成立.

命题获证.

8. 引理 设 $f(x)$是$(0,1)$上的凸函数，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，正实数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{1-x_i}{n-1}\right).$$

引理的证明：由 Jenson 不等式，知

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}f(x_j)\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}x_j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{1-x_i}{n-1}\right).$$

于是引理成立.

回证原题. 令 $f(x)=\ln\frac{1+x}{x}$，注意到，对任意 $x,y\in(0,1)$，都有

$$
\begin{aligned}
f(x)+f(y) &= \ln\frac{1+x}{x}+\ln\frac{1+y}{y}=\ln\frac{1+xy+x+y}{xy}\\
&= \ln\left(\frac{1}{xy}+\frac{x+y}{xy}+1\right)\\
&\geqslant \ln\left[\frac{1}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+\frac{x+y}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+1\right]\\
&= \ln\left(\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{4}{x+y}+1\right)=\ln\left(\frac{(x+y+2)^2}{(x+y)^2}\right)\\
&= 2\ln\left[1+\frac{1}{\frac{x+y}{2}}\right]=2f\left(\frac{x+y}{2}\right).
\end{aligned}
$$

所以，$f(x)=\ln\frac{1+x}{x}$ 是 $(0,1)$ 上的凸函数，依此结合前面所得可知命题成立.

9. 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i}{2^i}$，则 $S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，而当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{i=3}^{n}\frac{F_i}{2^i}\\
&= \frac{3}{4}+\sum_{i=3}^{n}\frac{F_{i-1}+F_{i-2}}{2^i}\\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}\frac{F_{i-1}}{2^{i-1}}+\frac{1}{4}\sum_{i=3}^{n}\frac{F_{i-2}}{2^{i-2}}\\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{F_i}{2^i}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_i}{2^i}\\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(S_{n-1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}S_{n-2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}S_{n-1}+\frac{1}{4}S_{n-2}.
\end{aligned}
$$

利用 $S_1=\frac{1}{2}$ 及 $S_2=\frac{3}{4}$ 可知对 $n=1, 2$ 都有 $S_n<2$；现设对 $n=k, k+1$ 都有 $S_n<2$，那么有

$$
S_{k+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S_{k+1}+\frac{1}{4}S_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 2=2.
$$

所以，命题成立.

10. 利用 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 可知 $a_9=a_8+a_7=2a_7+a_6=\cdots=21a_2+$

$13a_1$，依题中条件，可知不定方程

$$13x+21y=k \tag{①}$$

有至少两组正整数解(x, y)，使得$x\leqslant y$.

注意到，若①有两组正整数解(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，使得$x_1\leqslant y_1$，$x_2\leqslant y_2$，则$13x_1+21y_1=13x_2+21y_2=k$，由对称性，不妨设$x_1\leqslant x_2$，那么$13(x_2-x_1)=21(y_1-y_2)$，此时，由$x_1=x_2$可得$y_1=y_2$，导致$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$矛盾，故$x_1<x_2$，从而有$21\mid x_2-x_1$，$13\mid y_1-y_2$（用到$(13, 21)=1$），所以$x_2-x_1\geqslant 21$，得$x_2\geqslant 21+x_1\geqslant 22$，结合$y_2\geqslant x_2$可知$k\geqslant 13\times 22+21\times 22=748$.

另一方面，当$k=748$时，①有两组不同的正整数解，它们是$(22, 22)$和$(1, 35)$，分别对应的(a_1, a_2)形成两个符合要求的数列.

综上可知，所求最小正整数为748.

11. 若$m\geqslant k+2$，则$F_m\geqslant F_{k+2}=F_{k+1}+F_k\geqslant 2F_k$（因为数列$\{F_n\}$是不减数列），于是$x_1\leqslant\frac{1}{2}$，结合$\{x_n\}$的定义可知$x_2\leqslant 0$，进而利用数学归纳法易证：对$n\geqslant 2$，都有$x_n\leqslant 0$. 此时，$\{x_n\}$中不包含等于1的项. 所以$m<k+2$，而$m>k$，故只能是$m=k+1$.

另一方面，对任意$k\in\mathbf{N}^*$，若$m=k+1$，则由$\{x_n\}$的定义可知$x_2=\frac{2F_k-F_{k+1}}{F_{k+1}-F_k}$（除非$k=1$，$m=2$，此时$x_1=1$，数列中已包含1），得$x_2=\frac{F_k-F_{k-1}}{F_{k-1}}=\frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}$，依此递推，当$k$为奇数时，设$k=2n+1$，则有$x_3=\frac{F_{2n-3}}{F_{2n-2}}$，…$x_{n+1}=\frac{F_1}{F_2}=1$，符合题意；当$k$为偶数时，设$k=2n$，则有$x_3=\frac{F_{2n-4}}{F_{2n-3}}$，…，$x_n=\frac{F_2}{F_3}=\frac{1}{2}$，此后数列的每一项都不大于零，不符合题意.

综上可知，所求正整数对$(k, m)=(2n-1, 2n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

12. 答案是11元钱.

设$f(n)$是从$\{1, 2, \cdots, n\}$中确定小张所取的数所需支付的最少钱数，则$f(n)$是一个不减数列. 并且如果小王第一次所取的子集是一个m元集，那么$f(n)\leqslant\max\{f(m)+2, f(n-m)+1\}$.

下面我们利用Fibonacci数列$\{F_n\}$，证明下述结论：设x为正整数，并且$F_n<x\leqslant F_{n+1}(n\geqslant 2)$，则

$$f(x)=n-1. \tag{①}$$

先证明：对任意$n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant 2)$，均有

$$f(F_{n+1}) \leqslant n-1. \quad ②$$

事实上，当 $n=2$ 时，$F_3=2$，易知 $f(F_3)\leqslant 2$. 设对小于 n 的正整数，② 都成立. 考虑 n 的情形，小王第一次取一个子集，使其元素个数为 F_{n-1}，就有 $f(F_{n+1})\leqslant \max\{f(F_{n-1})+2,\ f(F_{n+1}-F_{n-1})+1\} = \max\{f(F_{n-1})+2,\ f(F_n)+1\}\leqslant \max\{n-1,\ n-1\}=n-1$（这里认为 $f(F_2)=f(1)=0$）. 所以 ② 对一切正整数 n 成立.

再证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$F_n<x\leqslant F_{n+1}$，$x\in\mathbf{N}^*$，均有 $f(x)\geqslant n-1$.

当 $n=2$ 时，$x=F_3=2$，此时易知 $f(2)\geqslant 2$，故对 $n=1$ 成立. 设命题对小于 n 的正整数成立，考虑 n 的情形. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$F_n<x\leqslant F_{n+1}$（注意，这里 $n\geqslant 3$，故 $x\geqslant 3$）.

如果小王第一次取的子集的元素个数 $\leqslant F_{n-2}$，那么小王至少应付的钱数 $\geqslant f(x-F_{n-2})+1\geqslant f(F_{n-1}+1)+1\geqslant n-1$；如果小王第一次取的子集的元素个数 $\geqslant F_{n-2}+1$，那么他至少应付的钱款数 $\geqslant f(F_{n-2}+1)+2\geqslant n-3+2=n-1$. 所以，$f(x)\geqslant n-1$.

综上可知，结论①成立. 利用这个结论，结合 $144=F_{12}$，可知小王至少要支付 11 元，才能保证找到小张所取的数.

13. 当 $m=1$ 时显然成立，对于 $m\geqslant 2$ 的情形.

先证：$\{F_n \pmod m\}$ 是一个纯周期数列

这只需注意到，在 $\bmod m$ 意义下 $(F_n,\ F_{n+1})$ 只有 m^2 种不同情形，用抽屉原则可知，存在 $n<k$，使 $(F_n,\ F_{n+1})\equiv(F_k,\ F_{k+1}) \pmod m$，然后结合递推公式可导出 $F_{n-1}\equiv F_{k-1} \pmod m$. 依次倒推即可得出.

然后，由 $F_1=F_2\equiv 1 \pmod m$ 知存在 $p\in\mathbf{N}^*$，使得 $F_{p+1}\equiv F_{p+2}\equiv 1 \pmod m$，从而 $F_p\equiv 0 \pmod m$，$F_{p-1}\equiv 1 \pmod m$，$F_{p-2}\equiv -1 \pmod m$，进而对 $t\in\mathbf{N}^*$，有 $F_{tp-2}\equiv -1 \pmod m$. 取 $n=tp-2$，就有 $F_n^4-F_n-2\equiv 1+1-2\equiv 0 \pmod m$. 命题获证.

14. (1) 不能. 事实上，若 $\mathbf{N}^*$ 可以分划为 m 个 F-数列的并，我们考虑正整数：$2m,\ 2m+1,\ \cdots,\ 4m$. 这 $2m+1$ 个数中，必有 3 个数来自同一个 F-数列. 但是，这 $2m+1$ 个数中任取 3 个，其中任意两个数之和都大于第 3 个数，这是一个矛盾.

(2) 我们利用正整数的 Fibonacci 表示（见第 9 节例 2）来证明：$\mathbf{N}^*$ 可以分划为无穷多个 F-数列的并.

我们将在 Fibonacci 表示下，使得 $a_2=1$ 的所有正整数从小到大排在第一行；使 $a_2=0$，而 $a_3=1$ 的所有正整数从小到大排在第 2 行；使 $a_2=a_3=0$，而 $a_4=1$ 的所有正整数从小到大排在第 3 行；……，列表如下

F_2	F_2+F_4	F_2+F_5	F_2+F_6	$F_2+F_4+F_6$	…
F_3	F_3+F_5	F_3+F_6	F_3+F_7	$F_3+F_5+F_7$	…
F_4	F_4+F_6	F_4+F_7	…	…	…
…	…	…	…	…	…

由 Zeckendorf 定理可知，每一个正整数均在上表中恰好出现一次，而该表格的每一列从上到下形成一个 F-数列. 所以，(2)的结论是肯定的.

15. 当 $i=1$ 时，$a_1 \leqslant k$ 显然成立.

设对 $1 \leqslant s < n$，有 $sa_s \leqslant k$. 下证：$(s+1)a_{s+1} \leqslant k$.

若 $(s+1)a_{s+1} \leqslant sa_s$，则当然有 $(s+1)a_{s+1} \leqslant k$；若 $(s+1)a_{s+1} > sa_s$，即 $a_{s+1} > s(a_s - a_{s+1})$，则 $\dfrac{a_{s+1}}{a_s - a_{s+1}} > s$.

注意到 $[a_s, a_{s+1}] = \dfrac{a_s a_{s+1}}{(a_s, a_{s+1})}$，利用 $\dfrac{a_{s+1}}{(a_s, a_{s+1})} \geqslant \dfrac{a_{s+1}}{a_s - a_{s+1}} > s$，结合 $\dfrac{a_{s+1}}{(a_s, a_{s+1})} \in \mathbf{N}^*$，可知 $\dfrac{a_{s+1}}{(a_s, a_{s+1})} \geqslant s+1$. 于是

$$(s+1)a_{s+1} < (s+1)a_s \leqslant \frac{a_{s+1}}{(a_s, a_{s+1})} \cdot a_s = [a_s, a_{s+1}] \leqslant k.$$

故命题对 $s+1$ 也成立.

16. 用数学归纳法(对 n 归纳)证明下述加强的命题：

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leqslant \frac{1}{a_0}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \qquad ①$$

当 $n=1$ 时，由条件 $a_0 < a_1$，故 $[a_0, a_1] \geqslant 2a_0$，于是 $\dfrac{1}{[a_0, a_1]} \leqslant \dfrac{1}{2a_0} = \dfrac{1}{a_0}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)$，故 $n=1$ 时，不等式①成立.

设不等式①在 n 时成立，则对 $n+1$ 的情形，有

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_n, a_{n+1}]} \leqslant \frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{a_1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \qquad ②$$

如果 $a_1 \geqslant 2a_0$，则②式右边 $\leqslant \dfrac{1}{[a_0, a_1]} + \dfrac{1}{2a_0}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2a_0}\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{a_0}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$；如果 $a_0 < a_1 < 2a_0$，则由 $(a_0, a_1) \leqslant a_1 - a_0$，可知②式右边 $\leqslant$

$\frac{a_1-a_0}{a_0a_1}+\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1\cdot 2^n}<\frac{1}{a_0}-\frac{1}{2a_0\cdot 2^n}=\frac{1}{a_0}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. 所以,不等式 ① 对$n+1$ 也成立.

17. 设二进制表示下, $n=(a_ka_{k-1}\cdots a_0)_2$,这里 $a_i\in\{0,1\}$, $a_k=1$,令 $t_n=(a_ka_{k-1}\cdots a_0)_3$(为一个 3 进制表示下的正整数), $t_0=0$.

我们用数学归纳法证明:对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,均有 $u_n=t_n$.

当 $n=1$ 时,命题显然成立. 设对任意的 $m<n$,均有 $u_m=t_m$. 下面证明 $u_n=t_n$.

一方面,集合 $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ 中无任意 3 个数成等差数列,这是因为对任意 $0\leqslant\alpha<\beta<\gamma\leqslant n$,若 $t_\alpha+t_\gamma=2t_\beta$,由于 $2t_\beta$ 在 3 进制表示下只出现数码 0 和 2,所以 t_α、t_γ 在 3 进制表示下相应的每个数码都需相同. 从而 $t_\alpha=t_\gamma$,要求 $\alpha=\gamma$,矛盾.

上述讨论表明 $u_n\leqslant t_n$.

另一方面,若 $u_n<t_n$,则由归纳假设知 $u_n\in\{t_{n-1}+1, \cdots, t_n-1\}$,此时,在 u_n 的三进制表示中,必出现数码 2(因为仅出现数码 0, 1 的 3 进制正整数 $\in\{t_0, t_1, \cdots\}$). 所以,存在 a、$b\in\mathbf{N}$,使得 $0\leqslant t_a<t_b<u_n$ 满足:

(1) 如果在 u_n 的 3 进制表示中,某一位为 0 (或者 1),则在 t_a, t_b 的 3 进制表示中,同样位置上的数码也为 0 (或者 1);

(2) 如果在 u_n 的 3 进制表示中,某一位为 2,则 t_a 在该位上为 0,而 t_b 在该位上为 1.

于是 $t_a+u_n=2t_b$,矛盾. 所以 $u_n\geqslant t_n$.

综上所述,可知 $u_n=t_n$. 鉴于 $100=(1\,100\,100)_2$,所以

$$u_{100}=(1\,100\,100)_3=981.$$

18. 在 b 进制表示下予以讨论.

设能被 b^n-1 整除的所有数中,其 b 进制表示下出现的非零数字个数的最小值为 s,并在所有这些非零数字个数为 s 的数中,取数码和最小的数 A.

设 $A=a_1b^{n_1}+a_2b^{n_2}+\cdots+a_sb^{n_s}$ 为 A 的 b 进制表示,这里

$n_1>n_2>\cdots>n_s\geqslant 0$, $1\leqslant a_i<b$, $i=1, 2, \cdots, s$.

下面证明: $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 构成模 n 的完系,从而 $s\geqslant n$.

一方面,设 $1\leqslant i<j\leqslant s$,若 $n_i\equiv n_j\equiv r\pmod n$,这里 $0\leqslant r\leqslant n-1$. 我们考察数

$$B=A-a_ib^{n_i}-a_jb^{n_j}+(a_i+a_j)b^{nn_1+r}.$$

显然 $b^n-1\mid B$. 若 $a_i+a_j<b$,则 B 的非零数字的个数为 $s-1$,与 A 的选择矛

盾. 故必有 $b \leqslant a_i + a_j < 2b$，设 $a_i + a_j = b + q$，$0 \leqslant q < b$，这时 B 的 b 进制表示为

$$B = b^{m_1+r+1} + qb^{m_1+r} + ab_1^{n_1} + \cdots + a_{i-1}b^{n_{i-1}} + a_{i+1}b^{n_{i+1}} + \cdots + a_{j-1}b^{n_j-1} + a_{j+1}b^{n_{j+1}} + \cdots + a_s b^{n_s}.$$

这样，B 的数字和 $= \sum_{k=1}^{s} a_k - (a_i + a_j) + 1 + q = \sum_{k=1}^{s} a_k + 1 - b < \sum_{k=1}^{s} a_k$，与 A 的选择亦矛盾. 故 $n_1, \cdots, n_s$ 模 n 两两不同余.

另一方面，若 $s < n$，设 $n_i \equiv r_i \pmod{n}$，$0 \leqslant r_i < n$. 考察数 C，

$$C = a_1 b^{r_1} + a_2 b^{r_2} + \cdots + a_s b^{r_s}.$$

由于 $b^{n_i} \equiv b^{r_i} \pmod{b^n - 1}$，故 $b^n - 1 \mid C$，但 $s < n$ 意味着

$$0 < C \leqslant (b-1)b + (b-1)b^2 + \cdots + (b-1)b^{n-1} = b^n - b < b^n - 1.$$ 矛盾.

所以，命题成立.

19. 我们从每一个奇素数 p 出发找一个满足条件的 n.

注意到，对任意 $m \in \mathbf{N}^*$，$(p^{2^m} - 1, p^{2^m} + 1) = 2$，从而由平方差公式结合数学归纳法可证：

$$p + 1,\ p^2 + 1,\ \cdots,\ p^{2^m} + 1.$$

中任意两个数没有相同的奇素因数，而这些数都不是 p 的倍数. 所以，存在 $m \in \mathbf{N}^*$，使得

$$h(p^{2^{m-1}} + 1) < p < h(p^{2^m} + 1), \qquad ①$$

取满足①的最小正整数 m_0，令 $n = p^{2^{m_0}} - 1$，我们断言：

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2).$$

事实上，$n = p^{2^{m_0}} - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)\cdots(p^{2^{m_0}} + 1)$，而 m_0 是满足 ① 的最小正整数，故 $h(n) < p = h(n+1)$，又 $h(n+2) = h(p^{2^{m_0}} + 1)$，由 ① 知 $h(n+1) < h(n+2)$.

上述讨论表明：对每个奇素数 p，都有一个 n（显然，不同的 p 对应的 n 是不同的）满足条件，而奇素数有无穷多个，故满足条件的 n 有无穷多个.

20. 引理 若 $k \in \mathbf{N}^*$，$k \neq 3$ 且 k 不是 2 的方幂，则 $w(2^k + 1) > 1$.

事实上，若 $2^k + 1 = p^m$，p 为素数，$m \in \mathbf{N}^*$，写 $k = 2^\alpha \cdot \beta$，$\alpha \geqslant 0$，$\beta > 1$，β 为奇数. 分两种情形：

(1) $\alpha = 0$，则由 $k \neq 3$ 知 $\beta > 3$，此时，$2^\beta + 1 = (2+1)(2^{\beta-1} - 2^{\beta-2} + \cdots +$

1) 是 3 的倍数，且 $2^\beta+1>9$，若 $2^\beta+1=3^\gamma$，则 $\gamma\geqslant 3$，此时，两边 mod 4，知 $(-1)^\gamma\equiv 1 \pmod 4$，从而 γ 为偶数，记 $\gamma=2\delta$，则 $2^\beta=(3^\delta-1)(3^\delta+1)$，而 $3^\delta-1$ 与 $3^\delta+1$ 是相邻偶数，其积为 2 的幂，只能是 $3^\delta-1=2$，得 $\delta=1$，$\gamma=2$，矛盾. 故 $\alpha=0$ 时，引理成立.

(2) $\alpha>0$，此时，利用因式分解知 $2^{2^\alpha}+1 \mid 2^k+1$. 若 $w(2^k+1)=1$，则 $p=2^{2^\alpha}+1$ 为素数，此时，设 $2^{2^\alpha\cdot\beta}+1=p^u$，即 $(p-1)^\beta+1=p^u$，$u\geqslant 2$. 两边 mod p^2，利用二项式定理，可知 $p\mid\beta$，进一步，设 $\beta=p^v\cdot x$，$p\nmid x$，由二项式定理，可知

$$p^u=p^\beta-C_\beta^{\beta-1}p^{\beta-1}+\cdots+C_\beta^2p^2-\beta\cdot p,$$

右边最后一项为 p^{v+1} 的倍数，但不是 p^{v+2} 的倍数，而其余每一项都是 p^{v+2} 的倍数. 故上式不能成立. 所以 $\alpha>0$ 时，引理也成立.

利用上述引理，可知当 $k\neq 3$ 且 k 不是 2 的方幂时，有 $w(2^k)<w(2^k+1)$. 下证：存在无穷多个这样的 k，使 $w(2^k+1)<w(2^k+2)$.

事实上，若只有有限个上述 k，使 $w(2^k+1)<w(2^k+2)$. 则存在 $k_0=2^q>5$，对每个 $k\in\{k_0+1,\cdots,2k_0-1\}$ 都有 $w(2^k+1)\geqslant w(2^k+2)=1+w(2^{k-1}+1)$. 于是，有

$$w(2^{2k_0-1}+1)\geqslant 1+w(2^{2k_0-2}+1)\geqslant\cdots\geqslant(k_0-1)+w(2^{k_0}+1)\geqslant k_0.$$

这要求 $2^{2k_0-1}+1\geqslant p_1\cdots p_{k_0}$，这里 $p_1,\cdots,p_{k_0}$ 是最初的 k_0 个素数. 但是 $p_1\cdots p_{k_0}\geqslant(2\times3\times5\times7\times11)\times(p_6\cdots p_{k_0})>4^5\cdot 4^{k_0-5}=2^{2k_0}$，矛盾. 所以，命题成立.

21. 设素数从小到大的排列为 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$. 则 $a_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$.

当 $n=1, 2, 3, 4$ 时，直接验证，可知命题成立. 现设 $n-1$ 时命题成立，即存在正整数 x，使得 $a_{n-1}\leqslant x^2\leqslant a_n$，取其中最大的 x，记为 y，则 $y^2\leqslant a_n$，而 $(y+1)^2>a_n$. 这里 $n\geqslant 5$.

写 $p_{n+1}=2k+1$，则当 $n\geqslant 5$ 时，利用相邻两个奇素数至少差 2 可知

$$p_1+p_2+\cdots+p_n<1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

从而，$y^2\leqslant a_n<k^2$，即 $y<k$. 于是 $(y+1)^2=y^2+2y+1<y^2+2k+1=y^2+p_{n+1}\leqslant p_1+\cdots+p_n+p_{n+1}=a_{n+1}$. 所以，命题对 n 的情形亦成立.

综上可知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，命题成立.

22. 设 a 为正奇数，若 $(a, 5)=1$，则 $(a, 10)=1$，数列 $1, 11, \cdots, \underbrace{11\cdots1}_{a\text{个}1}$ 中

必有两个数 mod a 同余. 即存在 $1\leqslant i<j\leqslant a$，使得$\underbrace{11\cdots1}_{j个1}\equiv\underbrace{1\cdots1}_{i个1}\pmod a$，也就是说 $a\mid\underbrace{1\cdots1}_{j-i个1}\underbrace{0\cdots0}_{i个0}$，所以 $a\mid\underbrace{1\cdots1}_{j-i个1}$，命题获证.

若 $5\mid a$，设 $a=5^{\alpha}\cdot b$，$\alpha\in\mathbf{N}^*$，$(5,b)=1$. 我们先证下述引理.

引理　对任意正整数 n，存在一个仅出现数码 1，3，5，7，9 的 n 位正整数 A_n，使得 $5^n\mid A_n$.

对此引理用归纳法证明. 当 $n=1$ 时，取 $A_n=5$ 即可. 设 $n=k$ 时，存在一个 k 位数 A_k，A_k 的数码都属于$\{1,3,5,7,9\}$，且 $5^k\mid A_k$. 考虑下面的数

$$10^k+A_k,\ 3\times10^k+A_k,\ 5\times10^k+A_k,$$
$$7\times10^k+A_k,\ 9\times10^k+A_k.$$

若 $5^{k+1}\mid A_k$，则令 $A_{k+1}=5\times10^k+A_k$ 即可；若 $5^{k+1}\nmid a_k$，设 $a_k=5^k\times t$，其中 $t\equiv r\pmod 5$，$r\in\{1,2,3,4\}$. 注意到$(5,2^k)=1$，故$\{2^k,3\times2^k,7\times2^k,9\times2^k\}$构成 mod 5 的一个简化剩余系，于是，可选择 $S\in\{1,3,7,9\}$，使得 $S\times2^k\equiv5-r\pmod 5$，从而令 $A_{k+1}=S\times10^k+A_k$，就有 $5^{k+1}\mid A_{k+1}$，且 A_{k+1} 的数码都属于$\{1,3,5,7,9\}$. 引理获证.

回到原题，由引理可知存在一个 α 位数 A，使得 $5^{\alpha}\mid A$，于是，数列 $\overline{A}$，$\overline{AA}$，…，$\underbrace{\overline{A\cdots A}}_{b个A}$（这里$\underbrace{\overline{A\cdots A}}_{k个A}$表示将 k 个 A 连续写出得到的正整数）中，必有两个 mod b 同余，利用第一种情形的方法可知命题也成立.

23. (1) 令 $x_1=123\,467\,895$，则 $S(x_1)=45$，并且由 $45\mid123\,467\,895$，可知 $x_1\in A$. 现设 $x_k\in A$，且 x_k 的十进制表示中 1，2，…，9 出现的次数相同，我们设 x_k 为m 位数，并取 $x_{k+1}=x_k\cdot(10^{2m}+10^m+1)=\overline{x_kx_kx_k}$，则十进制表示下，$x_{k+1}$ 中 1，2，…，9 出现的次数相同，而且 $S(x_{k+1})=3S(x_k)$，又 $10^{2m}+10^m+1\equiv1+1+1\equiv0\pmod 3$，结合 $S(x_k)\mid x_k$，可知 $S(x_{k+1})\mid x_{k+1}$. 依此结合数学归纳法可得结论(1)成立.

(2) **引理**　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，存在一个仅出现数码 1 和 2 的 n 位正整数 x_n，使得 $2^n\mid x_n$.

此引理仿上题中引理的证明可得.

回到原题，当 $k=1,2,3,4,5$ 时，分别取数 1，12，112，4112 和 42 112 可知命题成立.

当 $k\geqslant6$ 时，在 A 中寻找一个 k 位数 x 的想法是：找 x，使得 x 的末 n 位数是引理中的 x_n，然后在 x_n 的前面恰当填写非零数字，并且形成的 k 位正整数 x 的数码和为 2^n，这里 n 待定.

上述 n 存在的一个充分条件是

$$S(x_n)+(k-n)\leqslant 2^n\leqslant S(x_n)+9(k-n) \qquad ①$$

由于 $n\leqslant S(x_n)\leqslant 2n$，因此若下式满足，则①成立.

$$2n+(k-n)\leqslant 2^n\leqslant n+9(k-n)$$

即
$$n+k\leqslant 2^n\leqslant 9k-8n \qquad ②$$

下证：当 $k\geqslant 6$ 时，存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 满足 ②.

事实上，设 n 是满足 $2^n+8n\leqslant 9k$ 的最大正整数，则 $9k<2^{n+1}+8(n+1)$. 这表明：如果 $2^{n+1}+8(n+1)\leqslant 9(2^n-n)$，那么 n 满足 ②.

注意到，$k\geqslant 6$，故上述 $n\geqslant 4$，这时 $7\times 2^n\geqslant 17n+8$（此不等式可对 n 归纳予以证明），即 $2^{n+1}+8(n+1)\leqslant 9(2^n-n)$，从而 n 满足 ②.

综上可知，结论(2)成立.

24. 存在符合条件的数列.

将所有大于 5 的素数从小到大排列，得到数列 p_0，p_1，…；再定义数列 $\{q_n\}$ 如下 $q_{3k}=6$，$q_{3k+1}=10$，$q_{3k+2}=15$，$k=0, 1, 2, \cdots$. 现在定义数列 $\{a_n\}$ 为 $a_n=p_nq_n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，我们证明数列 $\{a_n\}$ 符合条件.

注意到，对下标 $i\neq j$ 有 $p_i\neq p_j$，所以 $\{a_n\}$ 中没有一项是另外任何一项的倍数，故(1) 满足. 进一步，若 $i\equiv j\pmod 3$，则 $(a_i, a_j)=(q_i, q_j)=6$，10 或 15；若 $i\not\equiv j\pmod 3$，由于 6，10，15 两两不互素，可知 $(a_i, a_j)=(q_i, q_j)>1$. 另外，$5\nmid a_0$，$3\nmid a_1$，$2\nmid a_3$，而且每一个大于 5 的素数至多整除 $\{a_n\}$ 中的一项，因此，没有一个大于 1 的正整数能整除 $\{a_n\}$ 中的每一项，故(2) 亦满足.

25. 我们证明：当 $k=2, \cdots, p-1$ 时，存在一个集合 $\{b_{k,1}, b_{k,2}, \cdots, b_{k,k}\}$，其中 $b_{k,i}=1$ 或者某些 $a_1, \cdots, a_{k-1}$ 中的数之积，满足：对 $1\leqslant i<j\leqslant k$，都有 $b_{k,i}\not\equiv b_{k,j}\pmod p$. ①

当 $k=2$ 时，由条件知 $a_1\not\equiv 1\pmod p$，取 $\{b_{k,1}, b_{k,2}\}=\{1, a_1\}$ 即可. 现设①对 k $(2\leqslant k\leqslant p-2)$ 成立，由条件 $p\nmid a_k$，故 $a_kb_{k,1}, \cdots, a_kb_{k,k}$ 对 mod p 两两不同余，并由 $\{b_{k,1}, \cdots, b_{k,k}\}$ 的构成（每个数都不是 p 的倍数）及 $a_k^k\not\equiv 1\pmod p$，可知

$$(a_kb_{k,1})\cdots(a_kb_{k,k})\not\equiv b_{k,1}\cdots b_{k,k}\pmod p.$$

所以，在 mod p 意义下，$(a_kb_{k,1}, \cdots, a_kb_{k,k})$ 不是 $(b_{k,1}, \cdots, b_{k,k})$ 的一个排列，从而存在 $j\in\{1, 2, \cdots, k\}$，使得 $\{a_kb_{k,j}, b_{k,1}, \cdots, b_{k,k}\}$ 中任意两个数 mod p 不同余. 依此可知，结论①成立.

现在考察 $\{b_{p-1,1}, \cdots, b_{p-1,p-1}\}$ 即可得出题中要求的结论（因为它们构成 mod p 的简系）.

26. (1) 任取 $a \in \mathbf{N}^*$，由于只有有限个 f 的值 $\leqslant f(a)$，故存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使对 $d \geqslant n$，都有 $f(a) < f(a+d)$. 考虑数列

$$f(a),\ f(a+n),\ f(a+2n),\ \cdots,\ f(a+2^k n),\ f(a+2^{k+1}n),\ \cdots$$

如果存在 $k \in \mathbf{N}$，使得 $f(a+2^{k+1}n) > f(a+2^k n)$，那么取 $d = 2^k n$，可知(1)成立. 所以，对 $k \in \mathbf{N}$，都有 $f(a+2^{k+1}n) < f(a+2^k n)$（这里不取等号是因为 f 是单射），即 $f(a+n) > f(a+2n) > \cdots$，但由于是满射知小于 $f(a+n)$ 的 f 的值只有有限个，矛盾.

(2) 不一定存在. 例如：令 $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ 如下

$$n = 1;\ 2;\ 3,\ 4;\ 5,\ 6,\ 7,\ 8;\ 9,\ 10,\ \cdots$$
$$f(n) = 1;\ 2;\ 4,\ 3;\ 8,\ 7,\ 6,\ 5;\ 16,\ 15,\ \cdots$$

上述定义中，对 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $f(2^n+1) = 2^{n+1}$，$f(2^n+2) = 2^{n+1}-1$，$\cdots$，$f(2^{n+1}) = 2^n+1$，而 $f(1)=1$，$f(2)=2$.

下证：在 $m \geqslant 5$ 时，对 a、$d \in \mathbf{N}^*$，都有 $f(a+(m-2)d) > f(a+(m-1)d)$ 或者 $f(a+(m-1)d) > f(a+md)$.

事实上，若否，则 $f(a+(m-2)d) < f(a+(m-1)d) < f(a+md)$. 由 f 的定义，知 $f(a+(m-2)d)$，$f(a+(m-1)d)$，$f(a+md)$ 分别落在 3 个不同的递减区间内，而从 2^n+1 到 2^{n+1} 这个递减区间的长度为 2^n，所以 $a+(m-1)d$ 所在递减区间的长度 $\geqslant \dfrac{a+(m-1)d}{2}$，又 $a+(m-2)d$ 与 $a+md$ 都不落在 $a+(m-1)d$ 所在的递减区间，故 $a+md-(a+(m-2)d) \geqslant \dfrac{a+(m-1)d}{2}$，导致 $4d \geqslant a+(m-1)d \geqslant a+4d$，矛盾. 从而(2)的结论是不一定.

27. 引理 若整数 n_1，n_2，$\cdots$ 满足 $n_{k+1} \geqslant n_k^2$，$k=1, 2, \cdots$，$n_1 > 1$，则对任意 $j \in \mathbf{N}^*$，有 $\prod\limits_{k=j}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right) \in \left(1+\dfrac{1}{n_j},\ 1+\dfrac{1}{n_j-1}\right]$.

引理的证明：由条件，可知

$$\begin{aligned}\prod_{k=j}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) &\leqslant \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_j^{2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{n_j}\right)^{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n_j}\right)^k = \frac{1}{1-\dfrac{1}{n_j}} = 1+\frac{1}{n_j-1}.\end{aligned}$$

所以，引理成立.

由此引理可证得唯一性(事实上,若 $\alpha=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$,而 $n_1=m_1,\cdots,n_j=m_j$,则 $\alpha\Big/\prod_{k=1}^{j}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=\alpha\Big/\prod_{k=1}^{j}\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$,前者由引理知 $\in\left(1+\frac{1}{n_{j+1}},1+\frac{1}{n_{j+1}-1}\right]$,后者 $\in\left(1+\frac{1}{m_{j+1}},1+\frac{1}{m_{j+1}-1}\right]$,这可得出 $n_{j+1}=m_{j+1}$).

存在性可由下面的方式得到,记 $\alpha_1=\alpha\in(1,2]$,则存在唯一的 $n_1\in\mathbf{N}^*$,使得 $\alpha_1\in\left(1+\frac{1}{n_1},1+\frac{1}{n_1-1}\right]$,写 $\alpha_2=\frac{\alpha_1}{1+\frac{1}{n_1}}$,则 $1<\alpha_2<\alpha_1\leqslant 2$,对此 α_2,存在唯一的 n_2,使 $\alpha_2\in\left(1+\frac{1}{n_2},1+\frac{1}{n_2-1}\right]$,依次递推,可定义数列 $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$.下证:$n_k^2\leqslant n_{k+1}$.

事实上 $1+\frac{1}{n_{k+1}}<\alpha_{k+1}=\frac{\alpha_k}{1+\frac{1}{n_k}}\leqslant\frac{1+\frac{1}{n_k-1}}{1+\frac{1}{n_k}}=1+\frac{1}{n_k^2-1}$,故 $n_k^2\leqslant n_{k+1}$.

最后,由 n_k 的定义可知 $1<\frac{\alpha}{\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)}=\prod_{k=N}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\leqslant 1+\frac{1}{n_{N+1}-1}$.

令 $N\to+\infty$,即可得 $\alpha=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$.

28. 先证:存在一对正整数 (p,q),使得 $p<q$,且 $a_p\mid a_q$.考察下列数表

$$\begin{array}{c}
x_{0,1},\ x_{0,2},\ \cdots,\ x_{0,m}\\
x_{1,1},\ x_{1,2},\ \cdots,\ x_{1,m}\\
\cdots\\
x_{m,1},\ x_{m,2},\ \cdots,\ x_{m,m}
\end{array}$$

这里 $x_{0,1}=a_1$, $x_{0,j}=x_{0,j-1}+1$, $j=2,\cdots,m$. 而 $x_{i,j}=\left(\prod_{k=1}^{m}x_{i-1,k}\right)+x_{i-1,j}$. $1\leqslant i,j\leqslant m$.

上述数表中,每一行都是连续 m 个正整数,每一列中任意两个数 a、b,若 $a<b$,则 $a\mid b$.

依条件,每一行中都有 $\{a_n\}$ 中至少两个数,因此,表格中有至少 $2(m+1)$ 个数为数列 $\{a_n\}$ 中的项,从而表格中有一列中有两个数在 $\{a_n\}$ 中,记为 a_p, a_q, $p<q$,则 $a_p\mid a_q$.

现在将 $x_{0,1}$ 取为 a_q+1，同上构造同样性质的表格，即可找到下一对 (p',q')，$p'<q'$，使 $a_{p'}\mid a_{q'}$. 依次递推，即可找到无穷多对 (p,q)，使 $p<q$，且 $a_p\mid a_q$.

命题获证.

29. 存在这样的分划. 令 $A=\{n\in\mathbf{N}\mid n$ 的二进制表示中数码 1 出现的次数为偶数$\}=\{0,3,5,6,\cdots\}$；$B=\{n\in\mathbf{N}\mid n$ 的二进制表示中数码 1 出现的次数为奇数$\}=\{1,2,4,7,\cdots\}$. 我们说 A、B 是符合条件的分划.

下面证明：对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有 $r_A(n)=r_B(n)$. ①

对 n 的二进制表示中的位数 m 归纳来证明.

当 $m=0,1$ 时，注意到 $r_A(0)=r_B(0)=r_A(1)=r_B(1)=0$ 可知 ① 成立.

现设对位数不超过 m 的 $n\in\mathbf{N}$，① 都成立. 考察 $m+1$ 位的正整数 n，对可能的等式 $n=s_1+s_2$，$s_1>s_2$，s_1，$s_2\in A$（当 s_1，$s_2\in B$ 时类似讨论），分三种情形讨论.

情形一： 若 s_1 右起第 $m+1$ 位为 1，则 s_2 右起第 $m+1$ 位必为 0. 考察这两个数右起的第 1 至第 m 位，其中 s_1 有奇数个 1，而 s_2 有偶数个 1，令 $s_1'=s_2+2^m$，$s_2'=s_1-2^m$，那么 s_1' 与 s_2' 都有奇数个 1，并且 $s_1'>s_2'$，$s_1'+s_2'=n$，s_1'，$s_2'\in B$. 反过来，当 s_1、$s_2\in B$ 时，亦有 s_1'、$s_2'\in A$. 故这部分两个集合中的表示方法数相同.

情形二： 若 s_1、s_2 右起第 $m+1$ 位都为 0，而右起第 m 位都为 1，同上讨论，可知 $s_1'=s_1-2^{m-1}\in B$，$s_2'=s_2-2^{m-1}\in B$. 故 (s_1',s_2') 构成 B 中对 $n-2^m$ 的一个表示. 反过来，当 s_1、$s_2\in B$ 时，(s_1',s_2') 构成 A 中对 $n-2^m$ 的一个表示. 利用 $r_A(n-2^m)=r_B(n-2^m)$（归纳假设），可知这部分两个集合中的表示方法数亦相同.

情形三： 若 s_1，s_2 右起第 $m+1$ 位都为 0，右起第 m 位不全为 1，这时 s_1 右起第 m 位为 1，而 s_2 右起第 m 位为 0. 此时考察两数右起第 1 位至 $m-1$ 位中 1 的个数，s_1 中有奇数个，s_2 中有偶数个. 令 $s_1'=s_2+2^{m-1}$，$s_2'=s_1-2^{m-1}$. 同情形一可知，这部分两个集合中的表示方法数相同.

综上可知，对 $m+1$ 位数 n，亦有 $r_A(n)=r_B(n)$. 所以，A、B 符合.

30. 设能表示的数构成的集合为 S，令 $T=S\cup\{1\}$，并记 S 中 3 的幂次不超过 h 的元素构成的集合为 S_h，$T_h=S_h\cup\{1\}$，则下面的结论显然成立.

(1) $2T\subseteq T$，$3T\subseteq T$. 这里 $xT=\{xt\mid t\in T\}$.

(2) 若 $h<k$，则 $2T_h+3^k\subseteq T$. 这里 $2T_h+3^k=\{2t+3^k\mid t\in T_h\}$.

下面用数学归纳法证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $n\in T$.

“$1\in T$”由 T 的定义可知是成立的. 若对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，$m<n$，均有 $m\in T$，考虑 n 的情形.

情形一：若 $2\mid n$，则 $\frac{n}{2}\in T$，于是 $n\in 2T\subseteq T$；

情形二：若 $3\mid n$，则 $\frac{n}{3}\in T$，于是 $n\in 3T\subseteq T$；

情形三：若 $2\nmid n$，且 $3\nmid n$，则存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使 $3^k<n<3^{k+1}$. 这时，$0<\frac{n-3^k}{2}<\frac{3^{k+1}-3^k}{2}=3^k<n$，故 $\frac{n-3^k}{2}\in T_{k-1}$. 从而 $n=2\left(\frac{n-3^k}{2}\right)+3^k\in 2T_{k-1}+3^k\subseteq T$.

所以命题成立.

31. 对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，由 f 是满射，知集合 $f^{-1}(k)=\{x\mid x\in\mathbf{N}^*,f(x)=k\}$ 是一个非空集，于是，由最小数原理知，存在 $m_k\in\mathbf{N}^*$，使得 $m_k=\min f^{-1}(k)$.

下面先证明：
$$g(m_k)=k.\qquad①$$

对 k 归纳，当 $k=1$ 时，由 $g(m_1)\leqslant f(m_1)=1$ 结合 $g(m_1)\in\mathbf{N}^*$，知 $g(m_1)=1$. 即 ① 对 $k=1$ 成立.

现设①对所有小于 k 的正整数都成立，即 $g(m_1)=1,\cdots,g(m_{k-1})=k-1$，讨论 $g(m_k)$ 的值.

首先，$g(m_k)\leqslant f(m_k)=k$，其次 $\{g(m_1),\cdots,g(m_{k-1})\}=\{1,2,\cdots,k-1\}$，$g$ 是单射，而由 m_i 的定义知 $m_1,\cdots,m_k$ 两两不同，故 $g(m_k)\geqslant k$. 从而 $g(m_k)=k$. 所以，① 对 $k\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

利用 ① 和 g 为单射，可知 g 为 $\mathbf{N}^*$ 到 $\mathbf{N}^*$ 上的一一对应. 现在对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，记 $g(n)=k$，由 g 为一一对应及 ① 知 $n=m_k$，从而 $f(n)=f(m_k)=k$，所以 $f(n)=g(n)$. 命题获证.

32. 对 $n\in\mathbf{N}^*$，设 a_n 是二进制表示中仅在偶数位上出现数码 1 或仅在奇数位上出现数码 1 的正整数从小到大的排列中的第 n 项. 我们证明：此数列 $\{a_n\}$ 符合条件.

利用正整数的二进制表示可知(1)成立，只需证明(2)亦成立. 考虑所有小于 2^{2r} 的非负整数，它们在二进制表示下都为 $2r$ 位数(不足位的前面补上 0)，其中偶数位都为零的数有 2^r 个，奇数位都为零的数有 2^r 个，只有 0 在两类数中同时出现，因此，数列 $\{a_n\}$ 中恰有 $2^{r+1}-1$ 个数小于 2^{2r}，故 $a_{2^{r+1}-1}=2^{2r}$.

对 $n\in\mathbf{N}^*$，设 $2^{r+1}-1\leqslant n<2^{r+2}-1$，$r\in\mathbf{N}$，则由 $\{a_n\}$ 的定义知 $a_n\geqslant a_{2^{r+1}-1}=2^{2r}=\frac{1}{16}\times 2^{2(r+2)}>\frac{n^2}{16}$.

所以，存在满足的数列 $\{a_n\}$.

参考文献

[1] 熊斌、刘诗雄主编，高中竞赛数学教程，武汉大学出版社，2003 年.
[2] 苏淳，漫话数学归纳法的应用技巧，中国科学技术大学出版社，1992 年.
[3] 郑隆炘，归纳与递推，湖北教育出版社，1984 年.
[4] 陈家声、徐惠芳，递归数列，上海教育出版社，1988 年.
[5] 夏兴国，数学归纳法纵横谈，河南科学技术出版社，1993 年.
[6] 潘承洞、潘承彪，初等数论，北京大学出版社，2003 年.
[7] B. J. Venkatachala, Functional Equations, Prism Books Put Ltd, 2002.
[8] 冯志刚、熊斌，数学奥赛导引，上海科技教育出版社，2001 年.
[9] 冯志刚，数学归纳法的证题方法与技巧，华东师范大学出版社，2005 年.
[10] 冯志刚，初等数论，上海科技教育出版社，2009 年.

“奥数”联赛冲刺篇——《高中数学联赛考前辅导》

- 选题经典且贴近高中联赛
- 知识上查漏补缺，能力上全面提升
- 全新模拟题让你提前感受考场氛围

读者对象：参加联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

“奥数”IMO终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

- 从2009年起，每年出版一册
- 以国家集训队测试题和国家队训练题为主
- 收集了国内主要竞赛：全国联赛、联赛加试、冬令营、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克、东南地区数学奥林匹克
- 附有美国、俄罗斯、罗马尼亚和国际数学奥林匹克

读者对象：参加联赛、冬令营等赛事的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

“奥数”域外篇——《全俄中学生数学奥林匹克(1993－2006)》

俄罗斯是世界上开展数学活动最早、最广泛、也是影响最大的国家之一。俄罗斯是世界上竞赛试题的最大生产国，不仅产量高，而且质量好，其中最出色的当数组合题。

本书收录1993－2006年俄罗斯9—11年级数学奥林匹克第四轮(联邦区域竞赛)和第五轮(全俄决赛)竞赛的所有试题和解答。

读者对象：参加数学竞赛的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

更多图书信息及免费资料请登录：
http://www.hdsdjf.com/downloadfileinfor.aspx? classid＝69

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 数列与数学归纳法/冯志刚著. —2版. —上海：华东师范大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-5617-9230-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第004456号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷

数列与数学归纳法(第二版)

著　　者　冯志刚
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　米倩倩
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海崇明县裕安印刷厂
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　9.5
字　　数　168千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年1月第二次
印　　数　11001-16100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9230-8/G·5522
定　　价　19.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)