数学奥林匹克小丛书　高中卷 7
第二版

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

平面几何

范端喜　邓博文　编著

华东师范大学出版社

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 图形的全等与相似

大家在初中已经接触过全等相似三角形的概念，对于一般的多边形（甚至包括退化形，如线段），全等和相似的概念是：

如果两个图形可以互相通过平移、旋转、反射所得到，称他们为全等形；如果两个图形可以互相通过平移、旋转、反射、伸缩所得到，称它们为相似形；全等形等价于对应边、角、对角线相等；相似形的充要条件是，对应角相等，对应边成相同比例.

九点圆的概念：（如图 1-1）

所谓九点圆，是指三角形的九个特殊点：三个垂心在三边上的投影、三边中点、三个顶点与垂心的连线中点，它们在一个圆上.

这个问题在相似观点下几乎是显然的，读者可以试着证明：以上提到的 9 个点，全部位于以 OH 中点为圆心，外接圆半径的一半为半径的圆上.

事实上，这两个圆位似，位似中心为 H，位似比为 $1:2$.

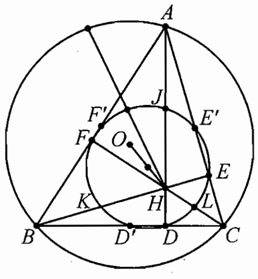


图 1-1

位似是一种特殊的相似. 所谓位似图形是指：如果两个图形不仅是相似图形，且对应点连线线相交于一点，那么这样的两个图形叫做位似图形，位似图形对应点连线的交点是位似中心.

位似图形的任意一对对应点与位似中心在同一直线上，它们到位似中心的距离之比等于相似比.

位似图形的性质有：

1. 位似图形对应线段的比等于相似比.
2. 位似图形的对应角都相等.
3. 位似图形对应点连线的交点是位似中心.
4. 位似图形面积的比等于相似比的平方.
5. 位似图形高、周长的比都等于相似比.

例 1 如图 1-2，设点 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 CP 和 AB 相交于点 E，直线 BP 和 AC 相交于点 F，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 J，边 AB 的垂直平分线交边 AC 于点 K，求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}.$$

（2005 年女子数学奥林匹克）

证明 如图 1-2，连结 BK，CJ.

$$\angle E=\angle ABP-\angle BPE,$$

而由 A，B，P，C 四点共圆，知 $\angle BPE=\angle A$，故 $\angle E=\angle ABP-\angle A$，又由 $KA=KB$，知 $\angle A=\angle ABK$，故

$$\angle E=\angle ABP-\angle ABK=\angle KBF. \quad ①$$

同理 $$\angle F=\angle JCE. \quad ②$$

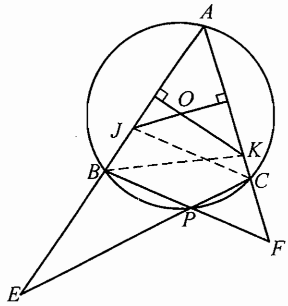


图 1-2

由①，②得 $\triangle JEC\backsim\triangle KBF$.

由此， $$\frac{CE}{BF}=\frac{JE}{KB}=\frac{JE}{AK}, \quad ③$$

$$\frac{CE}{BF}=\frac{JC}{KF}=\frac{AJ}{KF}. \quad ④$$

将③，④两式的左端和右端分别相乘即得结论.

例 2 $\triangle PQR$ 和$\triangle P'Q'R$ 是两个全等的等边三角形，六边形 $ABCDEF$ 的边长分别记为 $AB=a_1$，$BC=b_1$，$CD=a_2$，$DE=b_2$，$EF=a_3$，$FA=b_3$. 求证：$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

证明 如图 1-3，因为 $\angle P=\angle Q=\angle R=\angle P'=\angle Q'=\angle R'=60°$，再根据各组对顶角相等知

$$\triangle PAB\backsim\triangle Q'CB\backsim\triangle QCD\backsim\triangle R'ED\backsim\triangle REF\backsim\triangle P'AF.$$

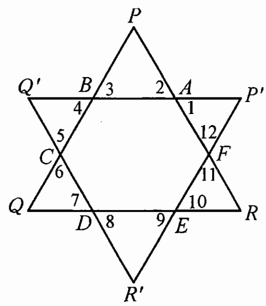


图 1-3

依次设上述六个三角形面积为：S_1，S_1'，S_2，S_2'，S_3，S_3'，则有

$$\frac{S_1}{a_1^2}=\frac{S_1'}{b_1^2}=\frac{S_2}{a_2^2}=\frac{S_2'}{b_2^2}=\frac{S_3}{a_3^2}=\frac{S_3'}{b_3^2}.$$

设其比值为 k，则由 $S_1+S_2+S_3=S_1'+S_2'+S_3'$ 得

$k(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=k(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，即 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

例 3　如图 1-4，圆 Γ_1、Γ_2 内切于点 S，圆 Γ_2 的弦 AB 与圆 Γ_1 切于点 C，M 是弧 AB（不含点 S）的中点，过点 M 作 $MN\perp AB$，垂足为 N，记圆 Γ_1 的半径为 r.

求证：$AC\cdot CB=2r\cdot MN$.（2009 女子数学奥林匹克）

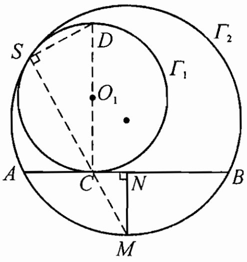


图 1-4

证明　如图作出圆 Γ_1 的直径 CD.

因 S 是两圆 Γ_1、Γ_2 的切点，即位似中心，而 C、M 为两圆上的位似对应点，故 S、C、M 三点共线.

由相交弦定理得 $AC\cdot CB=SC\cdot CM$.

又由 $\mathrm{Rt}\triangle SCD\backsim\mathrm{Rt}\triangle NMC$，得 $SC\cdot CM=CD\cdot MN=2r\cdot MN$.

注　此题本身并不难，但利用 S、C、M 共线这个命题，并结合圆的 Pascal 定理可以证明如下结论：

设三角形 ABC 的外接圆为圆 O_1，另有一圆 O 同时与边 AB，边 AC，弧$\overset{\frown}{BC}$相切于点 D、E、F，则 DE 中点 I 为三角形 ABC 内心.（图 1-5）

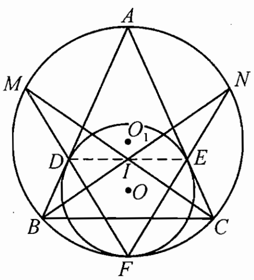


图 1-5

例 4　凸五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$，$P$ 是 BD 和 CE 的交点. 求证：AP 平分线段 CD.

证明　如图 1-6，由条件知 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle ADE$，所以

四边形 $ABCD\backsim$四边形 $ACDE$.　①

设 $AC\cap BD=X$，$AD\cap CE=Y$，由①即知　$AX:CX=AY:DY$.　②

设 $AP\cap CD=M$，由 Ceva 定理知

$$\frac{CM}{DM}=\frac{CX\cdot AY}{DY\cdot AX}=1\text{（由②）}.$$

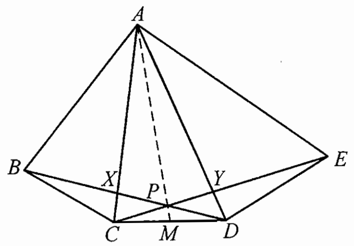


图 1-6

所以 M 为 CD 中点，故 AP 平分线段 CD，证毕.

例 5　已知凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB=BC$，$AD=DC$. E 是线段 AB 上一点，F 是线段 AD 上一点，满足 B、E、F、D 四点共圆. 作 $\triangle DPE$ 顺向相似于 $\triangle ADC$；作 $\triangle BQF$ 顺向相似于 $\triangle ABC$. 求证：A、P、Q 三点共线.（2008 年第七届女子数学奥林匹克）

（注：两个三角形顺向相似是指它们的对应顶点同按顺时针方向或同按

逆时针方向排列.）

证明　如图1-7，将B、E、F、D四点所共圆的圆心记作O，连结OB、OE、OF、OD、BD.

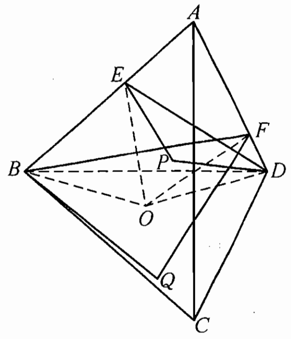


图1-7

在$\triangle BDF$中，O是外心，故$\angle BOF=2\angle BDA$.

又$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，$\angle CDA=2\angle BDA$.

于是　$\angle BOF=\angle CDA=\angle EPD$，

由此可知　$\triangle BOF\backsim\triangle EPD$.　①

另一方面，由B、E、F、D四点共圆知

$$\triangle ABF\backsim\triangle ADE.\quad ②$$

综合①，②可知，四边形$ABOF\backsim$四边形$ADPE$，由此得

$$\angle BAO=\angle DAP.\quad ③$$

同理，可得

$$\angle BAO=\angle DAQ.\quad ④$$

③，④表明A、P、Q三点共线.

例6　设凸四边形$ABCD$对角线交于O点.$\triangle OAD$、$\triangle OBC$的外接圆交于O、M两点，直线OM分别交$\triangle OAB$、$\triangle OCD$的外接圆于T、S两点.求证：M是线段TS的中点.（2006年女子数学奥林匹克）

证明　如图1-8，连结BT，CS，MA，MB，MC，MD.

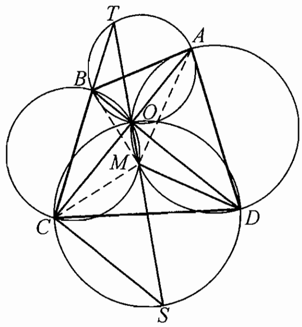


图1-8

由$\angle BTO=\angle BAO$，$\angle BCO=\angle BMO$，故$\triangle BTM\backsim\triangle BAC$，得

$$\frac{TM}{AC}=\frac{BM}{BC}.\quad ①$$

同理，$\triangle CMS\backsim\triangle CBD$，得

$$\frac{MS}{BD}=\frac{CM}{BC}.\quad ②$$

①÷②得 $\dfrac{TM}{MS}=\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{AC}{BD}$.　③

又$\angle MBD=\angle MCA$，$\angle MDB=\angle MAC$.

故$\triangle MBD\backsim\triangle MCA$，得

$$\frac{BM}{CM}=\frac{BD}{AC}.\quad ④$$

将④代入③，即得 $TM=MS$.

例7　如图1-9，设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，以线段 BD 为直径的圆分别交直线 AB、AD 于点 X、P（异于点 B、D），以线段 CD 为直径的圆分别交直线 AC、AD 于点 Y、Q（异于点 C、D）. 过点 A 作直线 PX、QY 的垂线，垂足分别为 M、N. 求证：$\triangle AMN$ 相似 $\triangle ABC$ 的充分必要条件是直线 AD 过 $\triangle ABC$ 的外心.（2009年中国西部数学奥林匹克）

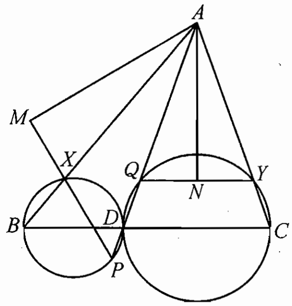


图1-9

证明　由已知有 B、P、D、X 及 C、Y、Q、D 分别四点共圆.

故 $\angle AXM=\angle BXP=\angle BDP=\angle QDC=\angle AYN$.

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle AMX\backsim \mathrm{Rt}\triangle ANY.$$

于是 $$\angle MAX=\angle NAY,\ \frac{AM}{AX}=\frac{AN}{AY}.$$

从而 $\angle MAN=\angle XAY$，结合 $\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{AN}{AY}$，得

$$\triangle AMN\backsim\triangle AXY.$$

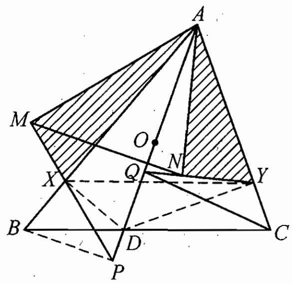


图1-10

故 $\triangle AMN\backsim\triangle ABC\Leftrightarrow\triangle AXY\backsim\triangle ABC$
$\Leftrightarrow XY\parallel BC\Leftrightarrow\angle DXY=\angle XDB$.

而由 A、X、D、Y 四点共圆知 $\angle DXY=\angle DAY$.

又 $\angle XDB=90^\circ-\angle ABC$，则

$$\angle DXY=\angle XDB\Leftrightarrow\angle DAC=90^\circ-\angle ABC.$$

$\Leftrightarrow$直线 AD 过 $\triangle ABC$ 的外心.

例8　已知 $\triangle ABC$ 中，O 是三角形内一点满足：$\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$. 求证：$\triangle ABC$ 三边长成等比数列.（2010年北大保送生考试数学试题）

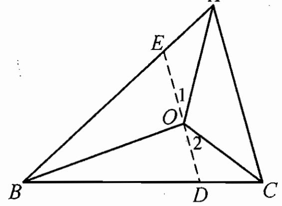


图1-11

证明　如图1-11，过 O 作 AC 平行线交 BC，AB 于 D，E，设 $\angle AOE=\angle 1$，$\angle COD=\angle 2$.

则 $\angle OAC=\angle 1=\angle BAO$，而 $\angle OAC=\angle OCA$，

所以 $AO=OC$，$AE=OE$，且 $\triangle AOE\backsim\triangle ACO$，于是

$$\frac{AC}{AO}=\frac{OC}{OE},\qquad ①$$

又因 $DE\parallel AC$，所以

$$\frac{AB}{CB}=\frac{AE}{CD},\qquad ②$$

再注意到 $\angle 2=\angle OBC$，$\angle BCO=\angle BCO$，所以 $\triangle OCD\backsim\triangle BCD$，

$$\frac{OC}{BC}=\frac{CD}{OC},\qquad ③$$

①×②×③得

$$\frac{AC}{AO}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{OC}{BC}=\frac{OC}{OE}\cdot\frac{AE}{CD}\cdot\frac{CD}{OC},$$

即 $\frac{AC\cdot AB}{BC^2}=1\,(AO=OC,\ AE=OE)$，$BC^2=AC\cdot AB$.

所以$\triangle ABC$三边成等比数列.

例 9　给定 $\gamma>1$，设点 P 是$\triangle ABC$外接圆的弧 BAC 上的一个动点，在射线 BP 和 CP 上分别取定点 U 和 V，使得 $BU=\gamma BA$，$CV=\gamma CA$，再在射线 UV 上取点 Q，使得 $UQ=\gamma UV$. 求点 Q 的轨迹.

解　如图 1-12，连结 AU、AV、AQ，在 BC 延长线上取点 D，使 $BD=\gamma BC$.

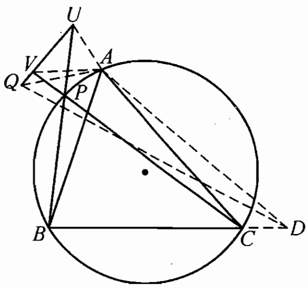


图 1-12

连结 AD、DQ，因为 $CV=\gamma CA$，$BU=\gamma BA$，$\angle ACV=\angle ABU$，所以 $\triangle ACV\backsim\triangle ABU$.

所以 $\frac{AU}{AV}=\frac{AB}{AC}$，$\angle VAC=\angle UAB$.

于是 $\angle UAV=\angle BAC$，则 $\triangle AUV\backsim\triangle ABC$，故 $\frac{UV}{BC}=\frac{AU}{AB}$，$\angle AUV=\angle ABC$.

又 $UQ=\gamma UV$，$BD=\gamma BC$，所以 $\frac{UQ}{BD}=\frac{UV}{BC}=\frac{AU}{AB}$，故 $\triangle AUQ\backsim\triangle ABD$，$\triangle AVQ\backsim\triangle ACD$，$\triangle AQD\backsim\triangle AVC$.

则 $\frac{QD}{VC}=\frac{AD}{AC}$，于是 $QD=\gamma AD$，这表明 Q 位于以点 D 为圆心，γAD 为半径的圆上.

当 P 运动到点 B 和点 C 时，割线 BP 和 CP 分别变为过点 B 和 C 的切线，这时得到的 Q'，Q''为轨迹弧的端点.

例 10 如图 1－13，在三角形 ABC 的内部有四个半径相等的$\odot K_1$，$\odot K_2$，$\odot K_3$，$\odot K_4$，其中$\odot K_1$，$\odot K_2$，$\odot K_3$ 均与三角形 ABC 的两边相切，且与$\odot K_4$ 外切. 证明：三角形 ABC 的内心、外心和 K_4 在一条直线上.

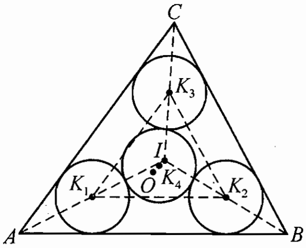


图 1－13

证明 如图 1－13，设三角形的内心为 I，外心为 O，连结 AI、BI、CI、K_1K_2、K_1K_3、K_3K_2、K_1K_4、K_4K_3、K_4K_2.

因为三角形的三边与$\odot K_1$，$\odot K_2$，$\odot K_3$ 相切，所以 K_1 在 AI 上，K_2 在 BI 上，K_3 在 CI 上.

设圆的半径为 r，注意到 AB 是圆 K_1 和圆 K_2 的公切线，且圆 K_1 和圆 K_2 是等圆，所以 K_1 和 K_2 到 AB 的距离都是 r.

故 $K_1K_2 \parallel AB$，同理，$K_2K_3 \parallel BC$，$K_1K_3 \parallel AC$.

所以
$$\frac{IK_1}{IA}=\frac{IK_2}{IB}=\frac{IK_3}{IC}.$$

故三角形 ABC 与三角形 $K_1K_2K_3$ 关于 I 位似.

因为 $K_1K_4=K_4K_3=K_4K_2=2r$，所以 K_4 是三角形 $K_1K_2K_3$ 的外心，又 O 是三角形 ABC 的外心，所以 I、K_4、O 在一条直线上.

例 11 求证：Euler 公式，即 $OI^2=R^2-2Rr$. 其中 R，r 分别为$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆半径.

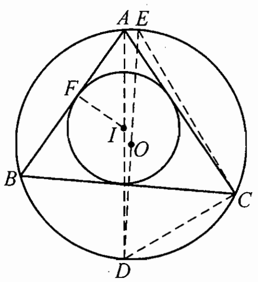


图 1－14

证明 如图 1－14，延长 AI 交$\overset{\frown}{BC}$于 D，作 D 的对径点 E，作 $IF\perp AB$ 于 F，连结 EC、DC、ED，则有 $\angle EDC=\frac{\pi-A}{2}=\angle AIF$，于是$\triangle EDC\backsim\triangle AIF$.

不难证明 $\angle ICD=\angle CID=\frac{A+C}{2}$，即 $DI=DC$，由$\triangle EDC\backsim\triangle AIF$，知
$$2Rr=IF\cdot ED=AI\cdot CD=AI\cdot DI=R^2-OI^2.$$

最后一步用到了圆幂定理. 有关圆幂定理读者可参看第 5 章.

例 12 求证：圆外切四边形的圆心位于两个对角线中点的连线上.（牛顿定理）

证明 如图 1－15，设四边形 $ABCD$ 内切圆圆心为 O，AC 中点为 M，

BD 中点为 N，设 AB 延长线和 DC 延长线交于点 E，过 O 作与 OE 垂直的 XY 交 AB 于 X，交 CD 于 Y，注意到 $\angle AOD=\angle AXY=\angle DYX=90^\circ+\frac{1}{2}\angle AED$，$\angle OAD=\angle OAX$，$\angle ODA=\angle ODY$，$\triangle AOD\backsim\triangle AXO\backsim\triangle OYD$，从而 $\angle OAX=\angle DOY$，$\angle AOX=\angle ODY$.

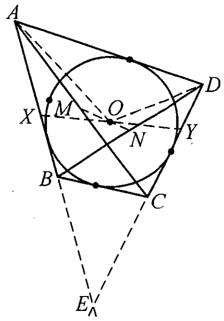


图 1－15

即 $\triangle OAX\backsim\triangle DOY$，于是

$$AX\cdot DY=OX\cdot OY,$$

同理可证，$\qquad BX\cdot CY=OX\cdot OY.$

于是，$AXB\backsim CYD$（这里的相似是两个线段间的相似，X 分 AB 的比等于 Y 分 CD 的比），注意到两相似图形的对应顶点连线中点构成的图形与原来两个图形相似，则有 MON 构成线段，且有 $\frac{MO}{ON}=\frac{AX}{XB}=\frac{CY}{YD}$.

注　这是一个非常困难的问题，在想到上述解答之前，笔者始终没能找到简单的解答. 如果线段的相似超出读者的理解，也可以用解析几何中的定比分点公式来刻画这些点的位置.

例 13　设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，AB 延长线与 DC 延长线交于 E，AD 延长线与 BC 延长线交于 F，AC 中点为 M，BD 中点为 N.

求证：$\frac{MN}{AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{BD}-\frac{BD}{AC}\right)$.

证明　如图 1－16，首先延长 MN 交 EF 于 P，MNP 为牛顿线（AC、BD、EF 中点共线，称为牛顿线），于是 P 为 EF 中点，下面证明

$$2\cdot\frac{MP}{EF}=\frac{AC}{BD}.$$

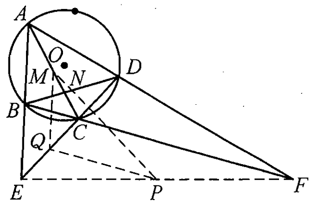


图 1－16

取 EC 中点 Q，由于 $\angle MQP=\angle MQD+\angle DQP=\angle AED+\angle DCF=\angle AED+\angle EAD=\angle EDF$，$\frac{AE}{DE}=\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle EAD}=\frac{\sin\angle EDF}{\sin\angle DCF}=\frac{CF}{DF}$，从而 $\frac{AE}{CF}=\frac{DE}{DF}$，$\frac{MQ}{QP}=\frac{DE}{DF}$，故 $\triangle MQP\backsim\triangle EDF$.

于是 $MP=\frac{EF\cdot MQ}{ED}=\frac{EF\cdot AE}{2\cdot ED}$，即 $2\cdot\frac{MP}{EF}=\frac{AC}{BD}$.

同理，$2\cdot\frac{NP}{EF}=\frac{BD}{AC}$，两式相减即得原命题.

注：有关牛顿线问题读者可参看第 8 章完全四边形习题 8 第 2 题的证明.

习 题 1

1 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，F、G 分别为 AC、BD 的中点.(1)证明：若 $\angle B$ 与 $\angle D$ 的平分线的交点恰好在 AC 上，则 $\frac{1}{4}AC\cdot BD=\sqrt{AG\cdot BF\cdot CG\cdot DF}$.(2)(1)的逆命题一定成立吗？

2 在锐角不等边$\triangle ABC$ 中，$AC>BC$. 设 O、H 分别是$\triangle ABC$ 的外心、垂心，$CF\perp AB$ 于点 F. 令 P 是直线 AB 上一点($P\neq A$)，满足 $AF=PF$. 记 G 是边 AC 的中点，直线 PH 与 BC、OG 与 FX、OF 与 AC 分别交于点 X、Y、Z. 证明：F、G、Z、Y 四点共圆.

3 连结三角形内切圆的圆心和它的顶点的直线将原三角形分为三个三角形. 若它们之中的一个三角形与原三角形相似，求三角形三个角的度数.

4 半圆 Γ 的直径是 AB，M 是 AB 的中点. 在半圆 Γ 的同侧，以 MB 为直径作半圆 Γ_1. 设 X、Y 是半圆 Γ_1 上的点，且 $\overset{\frown}{BX}=1.5\overset{\frown}{BY}$. 直线 MY 交 BX 于点 D，交半圆 Γ 于点 C. 证明：Y 是线段 CD 的中点.

5 设 X、Y、Z 分别是菱形 $ABCD$ 边 AB、BC、CD 上的点，且使得 $XY\parallel AZ$. 证明：XZ、AY、BD 三线共点.

6 已知等腰$\triangle ABC$ 和等腰$\triangle DBC$ 有公共的底边 BC，且 $\angle ABD=90°$. M 是 BC 的中点，E 是线段 AB 内部一点，P 是线段 MC 内部一点，F 是 AC 延长线上一点，且满足 $\angle BDE=\angle ADP=\angle CDF$. 证明：$P$ 是线段 EF 的中点，且 $DP\perp EF$.

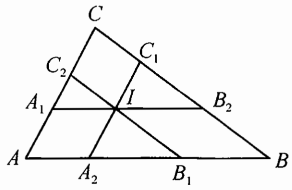
7 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，过 B 作直线分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 C、E，过 B 再作直线分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 D、F. 点 B 位于点 C、E 和 D、F 之间，M、N 分别为 CE、DF 的中点. 证明：$\triangle ACD\backsim\triangle AEF\backsim\triangle AMN$.

8 已知 C 是线段 AB 的中点，过点 A、C 的圆$\odot O_1$ 与过点 B、C 的$\odot O_2$ 相交于 C、D 两点，P 是$\odot O_1$ 上$\overset{\frown}{AD}$(不包含点 C)的中点，Q 是$\odot O_2$ 上$\overset{\frown}{BD}$(不包含点 C)的中点. 求证：$PQ\perp CD$.

9 已知梯形 $PRUS$($PR\parallel SU$)，满足 $\angle PSR=2\angle RSU$，$\angle SPU=2\angle UPR$，又点 Q、T 分别在 PR 和 SU 上，且 SQ 和 PT 分别是$\angle PSR$ 和$\angle SPU$ 的角平分线. PT 与 SQ 交于点 E，过 E 作 SR 的平行线交 PU 于点 F，过 E 作 PU 的平行线交 SR 于点 G，又 FG 分别交 PR、SU 于点 K、

L. 证明：$KF=FG=GL$.

10 如图，设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，过 I 分别作 AB、BC、CA 的平行线 A_1B_2、B_1C_2、C_1A_2. 求 $\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}$ 的值.



（第 10 题）

11 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，$\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的外心分别为 E、F，直线 BE、CF 交于点 G. 若 $BC=2DG=2008$，$EF=1255$，求 $\triangle AEF$ 的面积.

12 在四边形 $PQRS$ 中，A、B、C、D 分别为边 PQ、QR、RS、SP 的中点，M 为 CD 的中点. 假设 AM 上有一点 H，满足 $HC=BC$. 证明：$\angle BHM=90^\circ$.

13 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC$、$\angle BCD$ 均大于 90°，设点 E 是直线 AC 与过点 B 而平行于 AD 的直线的交点，点 F 是直线 BD 与过点 A 而平行于 BC 的直线的交点. 证明：$EF \parallel CD$.

14 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内部的一个点，使得 $\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$，并有 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$. 计算比值 $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.

15 在一个圆中，两条弦 AB、CD 相交于 E 点，M 为弦 AB 上严格在 E、B 之间的点，过 D、E、M 的圆在 E 点的切线分别交 BC、AC 于 F、G. 已知 $\frac{AM}{AB}=t$，求 $\frac{GE}{EF}$（用 t 表示）.

16 设 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点，且满足 $AB+BD=AC+CD$，线段 AD 与 $\triangle ABC$ 的内切圆交于点 X、Y，且 X 距点 A 更近一些，$\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC 切于点 E. 证明：(1) $EY\perp AD$；(2) $XD=2IA'$，其中，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，A' 为边 BC 的中点.

17 设 M、N 是 $\triangle ABC$ 内部的两个点，且满足 $\angle MAB=\angle NAC$，$\angle MBA=\angle NBC$. 证明：

$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1.$$

18 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，$\angle B+\angle D+\angle F=360^\circ$，且 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$. 证明：$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DB}=1$.

2 三角形中的几个重要定理及其应用

梅涅劳斯定理，塞瓦定理是平面几何中的两个极其重要的定理. 它们常常联合起来同时使用.

1. 梅涅劳斯定理：一直线与$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA或它们的延长线分别相交于X、Y、Z，则$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{BY}{YC}\cdot\dfrac{CZ}{ZA}=1$.

事实上，如图2-1过A、B、C分别作直线XYZ的垂线，设垂足分别为Q、P、S. 由三角形相似有关知识有：$\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{AQ}{BP}$，$\dfrac{BY}{YC}=\dfrac{BP}{CS}$，$\dfrac{CZ}{ZA}=\dfrac{CS}{AQ}$. 三式相乘即得.

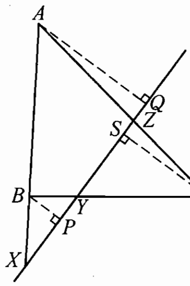


图 2-1

梅涅劳斯定理的逆定理也成立，即“在$\triangle ABC$的边AB、AC、BC(或其延长线上)分别取X、Z、Y. 如果$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{BY}{YC}\cdot\dfrac{CZ}{ZA}=1$，那么$X$，$Y$，$Z$三点共线”. 梅氏定理的逆定理常用来证明三点共线.

2. 塞瓦定理常可分为边元塞瓦定理和角元塞瓦定理.

边元塞瓦定理：如图2-2，$\triangle ABC$内任取一点P，直线AP、BP、CP分别与边BC、CA、AB相交于点D、E、F，则$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$.

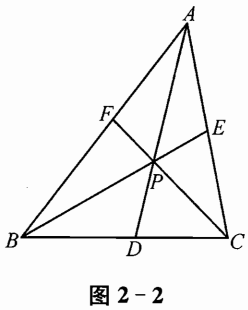


图 2-2

事实上，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle CPD}}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$(用到了分比性质).

同理：$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABP}}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BPC}}$. 三式相乘即得.

边元塞瓦定理的逆定理也成立. 即“在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上分别取点D、E、F，如果$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$. 那么直线$AD$、$BE$、$CF$三线相交于

同一点.塞瓦定理的逆定理常被用来证明三线共点."

角元塞瓦定理：如图 2－3，设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，三条线段 AD、BE、CF 交于一点 M. 则

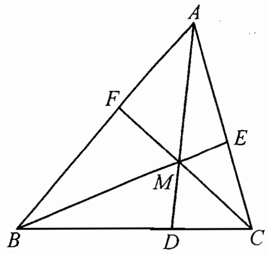


图 2－3

(1) 对 $\triangle ABC$ 与点 M，有

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}\cdot\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle MCB}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=1;$$

(2) 对 $\triangle MBC$ 与点 A，有

$$\frac{\sin\angle BMD}{\sin\angle DMC}\cdot\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle ACB}\cdot\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle ABM}=1;$$

(3) 对 $\triangle MCA$ 与点 B，有

$$\frac{\sin\angle CME}{\sin\angle EMA}\cdot\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle BAC}\cdot\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BCM}=1;$$

(4) 对 $\triangle MAB$ 与点 C，有

$$\frac{\sin\angle AMF}{\sin\angle FMB}\cdot\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle CBA}\cdot\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle CAM}=1.$$

像边元塞瓦定理的情形一样，角元塞瓦定理的逆定理也成立.

如图 2－4，过 $\triangle ABC$ 的三个顶点各引一条异于三角形三边的直线 AD、BE、CF. 若

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}=1,$$

则 AD、BE、CF 三线共点或互相平行.

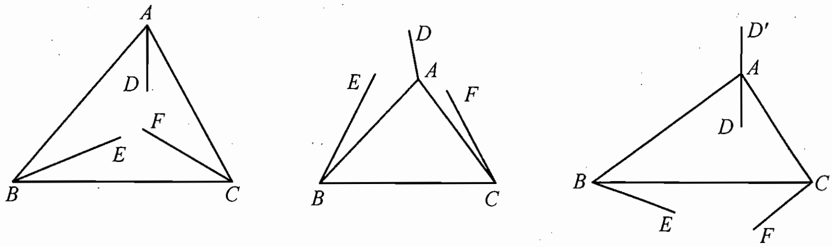


图 2－4

3. 斯台沃特定理：如图 2－5，$\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 D，若 $BD=u$，$CD=v$，$AD=t$，则

$$t^2=\frac{b^2u+c^2v}{a}-uv.$$

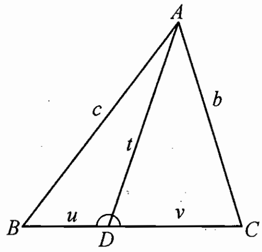


图 2-5

事实上，由余弦定理

$$\cos\angle ADB=\frac{u^2+t^2-c^2}{2ut},\ \cos\angle ADC=\frac{t^2+v^2-b^2}{2tv},$$

而 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$. 可得

$$t^2=\frac{b^2u+c^2v}{a}-uv.$$

特别地，当 AD 是$\triangle ABC$的中线时，$u=v=\frac{1}{2}a$，令 $AD=m_a$，则 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$，此即中线长公式；当 AD 是$\triangle ABC$的内角平分线时，由内角平分线性质：$u=\frac{ac}{b+c}$，$v=\frac{ab}{b+c}$，设 $AD=t_a$，可得 $t_a=\frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$，这里 $p=\frac{a+b+c}{2}$. 此即角平分线长公式.

例 1　如图 2-6，K 是$\triangle ABC$边 BC 上一点且不为 BC 中点，D_1、D_2 是 AK 延长线上不同的两点，BD_i 与 AC 交于点 N_i，CD_i 与 AB 交于点 M_i，$i=1$，2. 求证：M_1N_1 不平行于 M_2N_2.

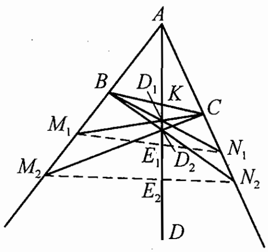


图 2-6

证明　由塞瓦定理，有

$$\frac{M_1B}{BA}\cdot\frac{AC}{CN_1}=\frac{M_1E_1}{E_1N_1},\qquad ①$$

其中 E_1 为直线 AK 与直线 M_1N_1 交点；

$$\frac{M_2B}{BA}\cdot\frac{AC}{CN_2}=\frac{M_2E_2}{E_2N_2},\qquad ②$$

其中 E_2 为直线 AK 与直线 M_2N_2 交点.

注意到 A、E_1、E_2 共线于 AK，假设 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$，于是有

$$\frac{M_1E_1}{E_1N_1}=\frac{M_2E_2}{E_2N_2}.\qquad ③$$

由①、②、③，$\frac{M_1B}{CN_1}=\frac{M_1E_1}{E_1N_1}\cdot\frac{BA}{AC}=\frac{M_2E_2}{E_2N_2}\cdot\frac{BA}{AC}=\frac{M_2B}{CN_2}$ 或 $\frac{M_1B}{M_1M_2}=\frac{N_1C}{N_1N_2}$，

结合 $M_1N_1 \not\parallel M_2N_2$ 有 $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel BC$. 因此 $\dfrac{M_1B}{BA}=\dfrac{N_1C}{CA}$.

回到第一个等式：$\dfrac{M_1B}{BA}\cdot\dfrac{AC}{CN_1}=\dfrac{M_1E_1}{E_1N_1}$，左边等于1，但右边 $\dfrac{M_1E_1}{E_1N_1}=\dfrac{BK}{KC}\neq 1$. 矛盾！故假设不成立，即 M_1N_1 不可能平行于 M_2N_2.

注 此题是根据2010年全国高中数学联赛试题改编的，原题用同一法证较为方便，最后要用到本题结论.

例2 如图2-7，$\triangle ABC$ 中，D 为线段 BC 上一点，满足 $AD\perp BC$，取边 AB 上点 E，边 AC 上点 F，连结 DE、DF，满足 $\angle EDA=\angle FDA$，求证：AD、BF、CE 三线共点.

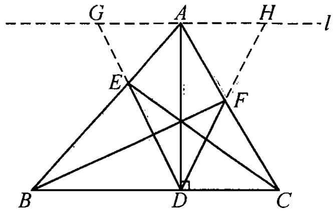


图2-7

证明 法一：过 A 作 BC 的平行线 l，并与 DE 延长线、DF 延长线分别交于 G、H，$l\parallel BC$ 以及 $AD\perp BC$，则 $l\perp AD$，结合 $\angle EDA=\angle FDA$，有 A 为等腰三角形 DGH 底边 GH 的中点，即 $GA=AH$，所以

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AH}=\frac{AG}{AH}=1.$$

由角元塞瓦定理的逆定理知 AD、BF、CE 三线共点.

法二：设 $\angle EDA=\angle FDA=\alpha$，则 $\triangle AED$ 中，由正弦定理 $\dfrac{\sin\alpha}{AE}=\dfrac{\sin\angle AED}{AD}$.

同理 $\triangle BED$ 中，$\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)}{BE}=\dfrac{\sin\angle BED}{BD}$，由于 $\sin\angle AED=\sin\angle BED$，

所以

$$\tan\alpha=\frac{BD\cdot AE}{BE\cdot AD},\qquad ①$$

同理 $\triangle ADF$，$\triangle DFC$ 中，

$$\tan\alpha=\frac{CD\cdot AF}{CF\cdot AD},\qquad ②$$

由①，②，$1=\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FA}\Leftrightarrow AD$、$BF$、$CE$ 三线共点.

注 此题的证法十分巧妙，貌似简单，实则不易想到. 但在学习了有关调

和点列的知识后，读者应当就不难想到该解法了.

例 3　如图 2-8，A_1、B_1、C_1 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 内任意一点，G_a，G_b，G_c 分别为$\triangle AB_1C_1$，$\triangle BC_1A_1$，$\triangle CA_1B_1$ 的重心. 求证：AG_a，BG_b，CG_c 三线共点的充要条件是 AA_1，BB_1，CC_1 三线共点.

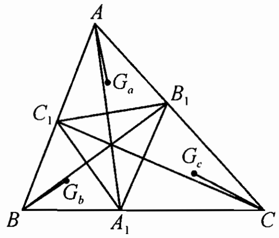


图 2-8

证明　由角元塞瓦定理知 AG_a，BG_b，CG_c 三线共点的充分必要条件为

$$\left(\frac{\sin\angle BAG_a}{\sin\angle G_aAC}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle ACG_c}{\sin\angle G_cCB}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle CBG_b}{\sin\angle G_bBA}\right)=1, \qquad (*)$$

又注意到 G_a 为$\triangle AB_1C_1$ 重心，因此 $S_{\triangle G_aAC_1}=S_{\triangle G_aAB_1}$，即

$$\frac{1}{2}\cdot AC_1\cdot AG_a\cdot\sin\angle C_1AG_a=\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot AG_a\cdot\sin\angle B_1AG_a,$$

由此可得

$$\frac{\sin\angle BAG_a}{\sin\angle G_aAC}=\frac{\sin\angle C_1AG_a}{\sin\angle G_aAB_1}=\frac{AB_1}{AC_1},$$

同理可知

$$\frac{\sin\angle ACG_c}{\sin\angle G_cCB}=\frac{A_1C}{B_1C},\ \frac{\sin\angle CBG_b}{\sin\angle G_bBA}=\frac{BC_1}{BA_1}.$$

则（*）就等价于 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$，由塞瓦定理，这就等价于 AA_1、BB_1、CC_1 三线共点.

注　此题完美地将塞瓦定理的边元形式与角元形式结合起来. 角元塞瓦定理的使用是自然的.

下面介绍两道典型的角元塞瓦定理使用的范例.

例 4　如图 2-9，P 为$\triangle ABC$ 内一点，使得 $\angle PAB=10°$，$\angle PBA=20°$，$\angle PCA=30°$，$\angle PAC=40°$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.（1996，美国数学奥林匹克）

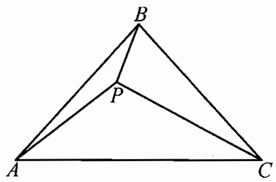


图 2-9

证明　设 $\angle ACB=x$，则 $\angle BCP=x-30°$.

对$\triangle APC$ 和点 B 应用角元塞瓦定理有

$$1=\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle BCA}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle BAP}$$

$$=\frac{\sin 150^\circ}{\sin 100^\circ}\cdot\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin x}\cdot\frac{\sin 50^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

则
$$\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin x}=\frac{2\cos 10^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{\sin(50^\circ-30^\circ)}{\sin 50^\circ}.$$

故 $\cos 30^\circ-\cot x\cdot\sin 30^\circ=\cos 30^\circ-\cot 50^\circ\cdot\sin 30^\circ$.

所以，$\cot x=\cot 50^\circ$.

因此 $x=50^\circ$. 又因为 $\angle BAC=10^\circ+40^\circ=50^\circ=x=\angle ACB$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

例 5 如图 2－10，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle CAB=30^\circ$，$\angle ABD=26^\circ$，$\angle ACD=13^\circ$，$\angle DBC=51^\circ$. 求$\angle ADB$ 的度数.

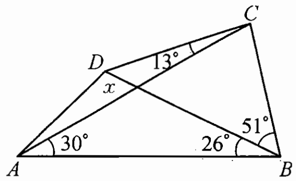


图 2－10

解 设 $\angle ADB=x$，则由于 $\angle CAB=30^\circ$，$\angle ABD=26^\circ$，$\angle DBC=51^\circ$，$\angle ACD=13^\circ$，则 $\angle ACB=73^\circ$，$\angle BDC=43^\circ$，所以 $\angle ADC=x+43^\circ$.

对$\triangle BCD$ 和点 A 应用角元塞瓦定理有

$$1=\frac{\sin\angle DCA}{\sin\angle ACB}\cdot\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle ABD}\cdot\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle ADC}=\frac{\sin 13^\circ}{\sin 73^\circ}\cdot\frac{\sin 77^\circ}{\sin 26^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin(x+43^\circ)}.$$

则
$$\frac{\sin(x+43^\circ)}{\sin x}=\frac{\sin 13^\circ\cdot\sin 77^\circ}{\sin 73^\circ\cdot\sin 26^\circ}=\frac{\sin 13^\circ\cdot\cos 13^\circ}{\sin 73^\circ\cdot\sin 26^\circ}=\frac{1}{2\sin 73^\circ}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 73^\circ}=\frac{\sin 150^\circ}{\sin 107^\circ}=\frac{\sin(107^\circ+43^\circ)}{\sin 107^\circ}.$$

故 $\cos 43^\circ+\cot x\cdot\sin 43^\circ=\cos 43^\circ+\cot 107^\circ\cdot\sin 43^\circ$.

所以，$\angle ADB=x=107^\circ$.

例 6 如图 2－11，点 D、E、F 分别在锐角$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上（均不是端点），满足 $BC\,/\!/\,EF$，D_1 是边 BC 上一点（不同于 B、D、C），过 D_1 作 $D_1E_1\,/\!/\,DE$，$D_1F_1\,/\!/\,DF$，分别交 AC、AB 两

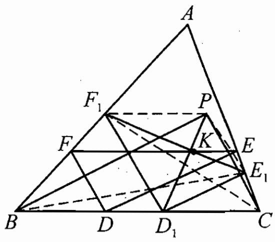


图 2－11

边于点 E_1、F_1，连结 E_1F_1，再在 BC 上方（与 A 同侧）作 $\triangle PBC$，使得 $\triangle PBC \backsim \triangle DEF$，连结 PD_1. 求证：EF、E_1F_1、PD_1 三线共点.

证明 连结 PE_1、PF_1，设 E_1F_1 交 EF 于 K，易知 K 在线段 E_1F_1 上. 以下证 K 在 PD_1 上.

注意 $\triangle DEF \backsim \triangle PBC$，$EF \parallel BC$，故 $DE \parallel BP \parallel D_1E_1$，$DF \parallel CP \parallel D_1F_1$. 再连结 CF_1、BE_1，由梅氏定理得

$$\frac{F_1K}{KE_1} = \frac{F_1F}{FA} \cdot \frac{AE}{EE_1} = \frac{DD_1 \cdot \dfrac{BF_1}{BD_1}}{FA} \frac{AE}{DD_1 \cdot \dfrac{CE_1}{CD_1}} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{CD_1}{BD_1} \cdot \frac{BF_1}{CE_1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2}CD_1 \cdot BF_1 \sin B}{\dfrac{1}{2}BD_1 \cdot CE_1 \sin C}$$

$$= \frac{S_{\triangle CD_1F_1}}{S_{\triangle BD_1E_1}} = \frac{S_{\triangle PD_1F_1}}{S_{\triangle PD_1E_1}}.\text{（由 } CP \parallel D_1F_1 \text{ 及 } BP \parallel D_1E_1\text{）}$$

现仅需再注意 K 在 E_1F_1 上（因 D_1F_1 与 B 在 CP 同侧，而 D_1E_1 与 C 在 BP 同侧）即可由上式知 K 在 PD_1 上.

所以欲证结论成立，证毕.

例 7 在凸五边形 $ABCDE$ 中，$\angle AED = \angle ABC = 90°$，$\angle BAC = \angle EAD$. $BD \cap CE = F$. 求证：$AF \perp BE$.

证明 如图 2-12，过点 A 作 $AH \perp BE$ 于 H，于是只需证明 AH、BD、CE 三线共点.

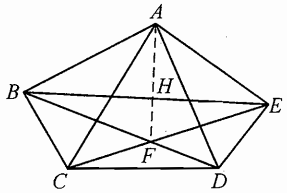


图 2-12

因为 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$，所以

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

又 $\angle BAC = \angle EAD$，则

$$\angle BAD = \angle CAE.$$

所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACE}$.

故
$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CEA} = \frac{AE \cdot EC}{AB \cdot BD}. \quad ①$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BDE$ 中应用正弦定理有

$$\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC} = \frac{BC}{EC}, \frac{\sin\angle BED}{\sin\angle DBE} = \frac{BD}{ED}. \quad ②$$

又 $\angle HAB=\angle EBC$，$\angle EAH=\angle BED$，则

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\angle EAH}{\sin\angle HAB}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle CEA}\\=&\frac{\sin\angle BED}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle CEA}\\=&\frac{\sin\angle BED}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CEA}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC}\\=&\frac{BD\cdot AE\cdot EC\cdot BC}{ED\cdot AB\cdot BD\cdot EC}=\frac{AE\cdot BC}{ED\cdot AB}=1.\end{aligned}$$

由关于$\triangle ABE$的角元塞瓦定理的逆定理知 AH、BD、CE 三线共点 F.

因为 $AH\perp BE$，所以 $AF\perp BE$.

例 8 如图 2－13，点 P、Q 是$\triangle ABC$的外接圆上(异于 A、B、C)的两点，点 P 关于直线 BC、CA、AB 的对称点分别是 U、V、W，连结 QU、QV、QW 分别与直线 BC、CA、AB 交于点 D、E、F.

求证：(1) U、V、W 三点共线；

(2) D、E、F 三点共线.

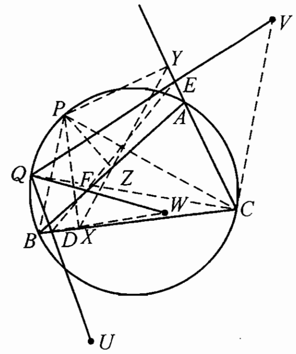


图 2－13

证明 (1) 设从点 P 向 BC、CA、AB 作垂线，垂足分别为 X、Y、Z.

由对称知 XY 为$\triangle PUV$的中位线，故 $UV\parallel XY$.

同理 $VW\parallel YZ$，$WU\parallel XZ$.

又由西姆松定理知 X、Y、Z 三点共线.

故 U、V、W 三点共线.

(2) 因为 P、C、A、B 四点共圆，所以 $\angle PCE=\angle ABP$.

所以 $\angle PCV=2\angle PCE=2\angle ABP=\angle PBW$.

又 $\angle PCQ=\angle PBQ$，故 $\angle PCV+\angle PCQ=\angle PBW+\angle PBQ$，即 $\angle QCV=\angle QBW$.

从而 $\dfrac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}=\dfrac{CV\cdot QC}{QB\cdot BW}$.

同理 $\dfrac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}=\dfrac{AW\cdot AQ}{CQ\cdot CU}$，$\dfrac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=\dfrac{BQ\cdot BU}{AQ\cdot AV}$.

所以 $\dfrac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}\cdot\dfrac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\dfrac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=1$，(这里注意到 $CU=CV$，$AW=AV$，$BU=BW$). 于是

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}}\cdot\frac{S_{\triangle WAQ}}{S_{\triangle WBQ}}=1.$$

故由梅氏定理逆定理知 D、E、F 三点共线.

例 9 如图 2－14，一圆与$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的交点依次为 D_1、D_2、E_1、E_2、F_1、F_2. 线段 D_1E_1 与 D_2F_2 交于点 L，E_1F_1 与 D_2E_2 交于点 M，F_1D_1 与 F_2E_2 交于点 N. 求证：AL、BM、CN 三线共点.（2005 年中国数学奥林匹克）

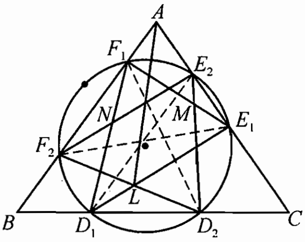


图 2－14

证明 连结 D_1E_2、E_1F_2、F_1D_2，于是，有

$\angle D_1E_1F_2=\angle D_1E_2F_2$，$\angle D_2F_2F_1=\angle D_2D_1F_1$，

$\angle E_2E_1D_1=\angle E_2D_2D_1$，$\angle E_1F_2D_2=\angle E_1F_1D_2$，

$$\angle F_2F_1E_1=\angle F_2E_2E_1,\ \angle F_1D_2E_2=\angle F_1D_1E_2.$$

分别对$\triangle AF_2E_1$ 和点 L、$\triangle BD_2F_1$ 和点 M、$\triangle CE_2D_1$ 和点 N 应用角元塞瓦定理有

$$\frac{\sin\angle F_2AL}{\sin\angle LAE_1}\cdot\frac{\sin\angle AE_1L}{\sin\angle LE_1F_2}\cdot\frac{\sin\angle E_1F_2L}{\sin\angle LF_2A}=1.$$

则
$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle D_1E_1F_2}{\sin\angle E_2E_1D_1}\cdot\frac{\sin\angle D_2F_2F_1}{\sin\angle E_1F_2D_2}. \quad ①$$

同理，有

$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=\frac{\sin\angle E_1F_1D_2}{\sin\angle F_2F_1E_1}\cdot\frac{\sin\angle E_2D_2D_1}{\sin\angle F_1D_2E_2}. \quad ②$$

$$\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}=\frac{\sin\angle F_1D_1E_2}{\sin\angle D_2D_1F_1}\cdot\frac{\sin\angle F_2E_2E_1}{\sin\angle D_1E_2F_2}. \quad ③$$

①×②×③并利用前面的六个等式，有

$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle LAC}\cdot\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=1.$$

由角元塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

例 10 在平面上给定四个点 A_1、A_2、A_3、A_4，其中任意三点不共线，使得 $A_1A_2\cdot A_3A_4=A_1A_3\cdot A_2A_4=A_1A_4\cdot A_2A_3$.

记 O_i 是$\triangle A_kA_jA_l$ 的外心，这里 $\{i, j, k, l\}=\{1, 2, 3, 4\}$. 假设对每个下标 i，都有 $A_i\neq Q_i$. 证明：四条直线 A_iO_i 共点或平行.

证明 如图 2-15，若 A_1、A_2、A_3、A_4 构成一个凹四边形.

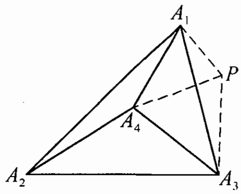


图 2-15

不妨设 A_4 在$\triangle A_1A_2A_3$ 中，如图.

作 $\triangle A_1A_3P \backsim \triangle A_1A_2A_4$，则 $\angle A_3A_1P = \angle A_4A_1A_2$.

于是，$\angle A_4A_1P = \angle A_2A_1A_3$，且 $\dfrac{A_1P}{A_1A_3} = \dfrac{A_1A_4}{A_1A_2}$.

则 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle A_1A_4P$，因此 $\dfrac{A_4P}{A_2A_3} = \dfrac{A_1A_4}{A_1A_2}$.

即 $A_4P = \dfrac{A_1A_4 \cdot A_2A_3}{A_1A_2} = A_3A_4$.

又 $\dfrac{A_3P}{A_1A_3} = \dfrac{A_2A_4}{A_1A_2}$，则

$$A_3P = \frac{A_1A_3 \cdot A_2A_4}{A_1A_2} = A_3A_4.$$

因此，$A_3P = A_4P = A_3A_4$，即$\triangle A_3A_4P$ 是正三角形.

故 $\angle A_1A_2A_4 + \angle A_1A_3A_4 = \angle A_1A_3P + \angle A_1A_3A_4 = 60°$.

同理，
$$\angle A_3A_2A_4 + \angle A_3A_1A_4 = 60°,$$
$$\angle A_2A_1A_4 + \angle A_2A_3A_4 = 60°.$$

设 $\angle A_1A_2A_4 = \alpha$，$\angle A_2A_3A_4 = \beta$，$\angle A_3A_1A_4 = \gamma$.

则 $\angle A_1A_3A_4 = 60° - \alpha$，$\angle A_2A_1A_4 = 60° - \beta$，$\angle A_3A_2A_4 = 60° - \gamma$.

又如图 2-16，因为 O_1 是$\triangle A_2A_3A_4$ 的外心，所以，$\angle A_4A_2O_1 = 90° - \beta$. 于是，$\angle A_1A_2O_1 = 90° + \alpha - \beta$. 同理，$\angle A_2A_3O_2 = 90° + \beta - \gamma$，$\angle A_3A_1O_3 = 90° + \gamma - \alpha$. 又 $\angle A_4A_3O_1 = 90° - \angle A_4A_2A_3 = 30° + \gamma$，则 $\angle A_1A_3O_1 = 90° + \gamma - \alpha$.

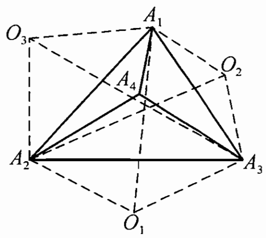


图 2-16

同理，$\angle A_2A_1O_2 = 90° + \alpha - \beta$，$\angle A_3A_2O_3 = 90° + \beta - \gamma$.

由角元塞瓦定理得

$$\frac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle O_1A_1A_3} \cdot \frac{\sin\angle A_3A_2O_1}{\sin\angle O_1A_2A_1} \cdot \frac{\sin\angle A_1A_3O_1}{\sin\angle O_1A_3A_2} = 1.$$

因为 $\angle O_1A_3A_2 = \angle O_1A_2A_3$，所以

$$\frac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle A_3A_1O_1} = \frac{\sin\angle O_1A_2A_1}{\sin\angle O_1A_3A_1}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ+\alpha-\beta)}{\sin(90^\circ+\gamma-\alpha)}.$$

同理，
$$\frac{\sin\angle A_3A_2O_2}{\sin\angle A_1A_2O_2}=\frac{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)}{\sin(90^\circ+\alpha-\beta)},$$

$$\frac{\sin\angle A_1A_3O_3}{\sin\angle A_2A_3O_3}=\frac{\sin(90^\circ+\gamma-\alpha)}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)}.$$

故 $\dfrac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle O_1A_1A_3}\cdot\dfrac{\sin\angle A_3A_2O_2}{\sin\angle O_2A_2A_1}\cdot\dfrac{\sin\angle A_1A_3O_3}{\sin\angle O_3A_3A_2}=1.$

因此，A_1O_1、A_2O_2、A_3O_3 三线共点(或者互相平行).

若四个点 A_1、A_2、A_3、A_4 构成一个凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，类似可得 A_1O_1、A_2O_2、A_3O_3 三线共点(或者互相平行).

同理，A_1O_1、A_2O_2、A_4O_4 三线共点(或者互相平行).

综上，四条直线 A_iO_i 共点或平行.

习　题　2

1 $\triangle ABC$ 是一个三角形. 一个过 A、B 的圆交边 AC、BC 于点 D、E，AB、DE 交于点 F，BD、CF 交于点 M. 求证：$MF=MC$ 的充要条件是 $MB\cdot MD=MC^2$.

2 M、N、P 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的中点，M_1、N_1、P_1 在$\triangle ABC$ 的边上，且满足 MM_1、NN_1、PP_1 分别平分$\triangle ABC$ 的周长. 证明：MM_1、NN_1、PP_1 交于同一点 K.

3 已知直线上的三个定点依次为 A、B、C，Γ 为过 A、C 且圆心不在 AC 上的圆. 分别过 A、C 两点且与圆 Γ 相切的直线交于点 P，PB 与圆 Γ 交于点 Q. 证明：$\angle AQC$ 的平分线与 AC 的交点不依赖于圆 Γ 的选取.

4 已知非等边$\triangle ABC$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交对边于点 A'、B'、C'. AA'的中垂线与 BC 交于点 A''，BB'的中垂线与 AC 交于点 B''，CC'的中垂线交于点 C''. 证明：A''、B''、C''三点共线.

5 已知$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上各有一点 D、E、F，且满足 AD、BE、CF 交于一点 G. 若$\triangle AGE$、$\triangle CGD$、$\triangle BGF$ 的面积相等，证明：G 是$\triangle ABC$ 的重心.

6 设$\triangle ABC$ 的边 AB 的中点为 N，$\angle A>\angle B$，D 是射线 AC 上一点，满足 $CD=BC$，P 是射线 DN 上一点，且与点 A 在边 BC 的同侧，满足

$\angle PBC=\angle A$，PC 与 AB 交于点 E，BC 与 DP 交于点 T. 求表达式 $\dfrac{BC}{TC}-\dfrac{EA}{EB}$ 的值.

7 已知点 B、C 分别在由点 A 引出的两条射线上，且 $AB+AC$ 为一定值. 求证：$\triangle ABC$ 的外接圆恒过不依赖于点 B、C 的点 D（$D\neq A$）.

8 已知凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 所有的角都是钝角，圆 Γ_i（$1\leqslant i\leqslant 6$）的圆心为 A_i，且圆 Γ_i 分别与圆 Γ_{i-1} 和圆 Γ_{i+1} 相外切，其中，$\Gamma_0=\Gamma_6$，$\Gamma_1=\Gamma_7$. 设过圆 Γ_1 的两个切点所连直线与过圆 Γ_3 的两个切点所连直线相交，且过这个交点与点 A_2 的直线为 e；类似地，由圆 Γ_3、圆 Γ_5 和 A_4 定义直线 f，由圆 Γ_5、圆 Γ_1 和 A_6 定义直线 g. 证明：e、f、g 三线共点.

9 设正方形 $PQRS$ 内接于 $\triangle ABC$，其顶点 P 和 Q 在边 BC 上，顶点 R 和 S 分别在边 CA 和 AB 上，记其中心为 A_1. 同样地，定义两个顶点分别在边 CA 和 AB 上的内接正方形的中心依次为 B_1 和 C_1. 求证：直线 AA_1、BB_1、CC_1 三线共点.（42 届 IMO 预选题）

10 在 $\triangle ABC$ 内部给定三点 D、E、F，使得 $\angle BAE=\angle CAF$，$\angle ABD=\angle CBF$. 求证：AD、BE、CF 三线共点的充分必要条件是 $\angle ACD=\angle BCE$.

11 以 $\triangle ABC$ 的三边各为一边，分别在形外作 $\triangle CBD$、$\triangle CAE$、$\triangle ABF$，使得 $\angle BAF=\angle CAE$，$\angle ABF=\angle CBD$，$\angle ACE=\angle BCD$.
求证：AD、BE、CF 三线共点.

12 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 O，分别过点 B、C 作圆 O 的切线，并分别交过点 A 所作圆 O 的切线于点 M、N，AD 为边 BC 上的高. 求证：AD 平分 $\angle MDN$.

13 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$. 在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

14 设三角形 ABC 的两条角平分线为 BE，CF，求证：若 $BE=CF$，则 $AB=AC$.

15 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=20°$，在边 AB、AC 上分别取点 D、E，使得 $\angle EBC=60°$，$\angle DCB=50°$. 求 $\angle BED$ 的度数.

16 证明 Pascal 定理：
圆内接六边形 $ABCDEF$（不要求是凸的）三组对边 AB 和 DE，CD 和 FA，EF 和 BC 的交点 L，M，N 共线.

17 证明 Desargues 定理：
若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的对应顶点连线 AA'，BB'，CC' 相交于一点 O，则对应边 BC 与 $B'C'$，CA 与 $C'A'$，AB 与 $A'B'$ 的交点 D，E，F 共线.

3 三角形的五心

三角形的重心、垂心、内心、外心、旁心称之为三角形的五心. 五心有很多重要性质.

1. 重心：三角形的三条中线交于一点，该点叫做三角形的重心. 主要性质有：

① 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2∶1；

② 重心和三角形任意两个顶点组成的 3 个三角形面积相等. 即重心到三条边的距离与三条边的长成反比；

③ 重心到三角形 3 个顶点距离的平方和最小；

④ 在平面直角坐标系中，重心的坐标是顶点坐标的算术平均数. 即设 A、B、C 的坐标分别为 (x_i, y_i) $(i=1, 2, 3)$，则重心 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

2. 垂心：三角形的三条高（所在直线）交于一点，该点叫做三角形的垂心. 与垂心有关性质：

① 三角形三个顶点、三个垂足、垂心这 7 个点可以得到 6 个四点圆；

② 三角形外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，且 $OG : GH = 1 : 2$；（此直线称为三角形的欧拉线(Euler line)）

③ 垂心到三角形一顶点距离等于此三角形外心到此顶点对边距离的 2 倍.（可用三角知识证得）

3. 内心：三角形内切圆的圆心，叫做三角形的内心. 主要性质有：

① 三角形的三条内角平分线交于一点，该点即为三角形的内心；

② 直角三角形内心到边的距离等于两直角边的和减去斜边的差的二分之一；

③ 三角形的内心到边的距离（即内切圆的半径 r）与三边长及面积之间有关系：$r=\frac{2S_{\triangle}}{a+b+c}$.

4. 外心：三角形外接圆的圆心，叫做三角形的外心. 有关性质：

① 三角形的三条边的垂直平分线交于一点，该点即为三角形外心；

② 若 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\angle BOC = 2\angle A$（$\angle A$ 为锐角或直角）或

$\angle BOC=360^\circ-2\angle A$（$\angle A$ 为钝角）；

③ 当三角形为锐角三角形时，外心在三角形内部；当三角形为钝角三角形时，外心在三角形外部；当三角形为直角三角形时，外心在斜边的中点上；

④ 外心到三顶点的距离相等.

5. 旁心：三角形的旁边圆（与三角形的一边和其他两边的延长线相切的圆）的圆心，叫做三角形的旁心. 有关性质：

① 三角形一内角平分线和另外两顶点处的外角平分线交于一点，该点即为三角形的旁心；

② 每个三角形都有三个旁心；

③ 旁心到三边的距离相等；

④ 旁心与半周长（p）形影不离. 如图 3－1，I_A 是 $\triangle ABC$ 的一个旁心. 作 $I_AE\perp AB$ 于点 E，$I_AF\perp AC$ 于点 F，$I_AD\perp BC$ 于点 D. 显然，$BE=BD$，$CF=CD$，$AE=AF$. $AE+AF=(AB+BD)+(AC+CD)=AB+BC+AC$. 即 $AE=AF=\dfrac{a+b+c}{2}=p$.

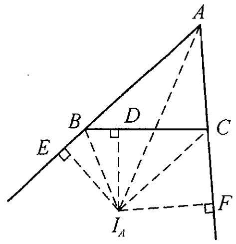


图 3－1

6. 三角形各心之间的相互联系.

① 等腰三角形的内心、外心、重心、垂心共线（均在对称轴上）；

② 等边三角形的内心、外心、重心、垂心共点；

③ $\triangle ABC$ 的内心 I 是切点$\triangle DEF$ 的外心；

④ $\triangle ABC$ 的外心 O 是中点$\triangle DEF$ 的垂心；

⑤ $\triangle ABC$ 的垂心 H 是垂足$\triangle DEF$ 的内心；

⑥ $\triangle ABC$ 的重心 G 是中点$\triangle DEF$ 的重心；

⑦ 若三角形中同时出现内心、旁心，就构成了三组三点共线、三组四点共圆. 如图 3－2，I 为$\triangle ABC$ 的内心，I_A、I_B、I_C 是$\triangle ABC$ 的三个旁心. 显然，A、I、I_A 等三点共线；I_A、C、I、B 等四点共圆，且 II_A 等是三个圆的直径.

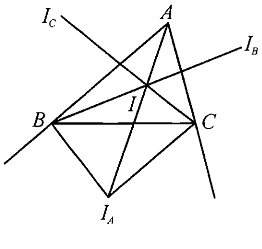


图 3－2

7. 三角形五心的一个向量统一表示：三角形五心有一个向量的表示 $\lambda_1\cdot\overrightarrow{PA}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{PB}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$（$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3\in k$）.

① 当 P 为$\triangle ABC$ 的外心 O 时，$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$；（证明见例 2）

② 当 P 为$\triangle ABC$ 的内心 I 时，$\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$；

③ 当 P 为非直角三角形的垂心 H 时，

$$\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0};$$

④ 当 P 为三角形重心 G 时，则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$；

⑤ 当 P 为三角形旁心 I 时，则：对旁心 I_A，有 $-\sin A\cdot\overrightarrow{I_AA}+\sin B\cdot\overrightarrow{I_AB}+\sin C\cdot\overrightarrow{I_AC}=\vec{0}$；对旁心 I_B 有 $-\sin B\cdot\overrightarrow{I_BB}+\sin A\cdot\overrightarrow{I_BA}+\sin C\cdot\overrightarrow{I_BC}=\vec{0}$；对旁心 I_C 有 $\sin A\cdot\overrightarrow{I_CA}+\sin B\cdot\overrightarrow{I_CB}-\sin C\cdot\overrightarrow{I_CC}=\vec{0}$.

关于旁心的向量性质我们只证①(例 2)，②留作习题，其余留着大家思考.

例 1　如图 3－3，$\odot I$ 切 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 于 A'、B'、C'. 求证：AA'、BB'、CC' 必交于一点 Q，则 $\sum\dfrac{AQ}{AA'}=2$.

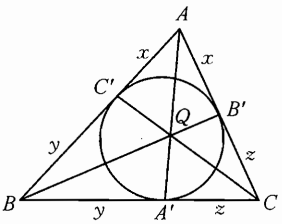


图 3－3

证明　由切线性质，可设 $AC'=AB'=x$，$BC'=BA'=y$，$CA'=CB'=z$，则

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}=1,$$

由 ceva 定理逆定理知，AA'、BB'、CC' 共点 Q.

考虑直线 CC' 截 $\triangle ABA'$，由梅氏定理有

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BC}{CA'}\cdot\frac{A'Q}{QA}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y+z}{z}\cdot\frac{A'Q}{QA}=1\Rightarrow\frac{A'Q}{QA}=\frac{yz}{x(y+z)}.$$

所以 $$\frac{AA'}{AQ}=\frac{AQ+QA'}{AQ}=\frac{xy+yz+zx}{x(y+z)}.$$

同理 $$\frac{BB'}{BQ}=\frac{xy+yz+zx}{y(z+x)},\ \frac{CC'}{CQ}=\frac{xy+yz+zx}{z(x+y)}.$$

故 $$\sum\frac{AQ}{AA'}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{xy+yz+zx}=2.$$

注　这一点 Q 通常称之为"切心".

例 2　求证：当 P 为三角形外心 O 时，则 $\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

证　设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，如图 3－4，连结 AO 交 BC 于 D，交外接圆于 E，连结 CO 交 AB 于 F.

由共边定理可得

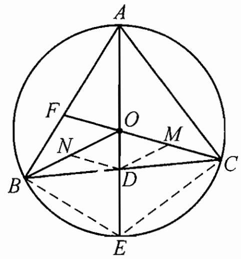


图 3－4

$$\begin{aligned}\frac{BD}{CD}&=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}\\&=\frac{AB\cdot AD\sin\angle BAD}{AC\cdot AD\sin\angle CAD}\\&=\frac{2R\sin C}{2R\sin B}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\\&=\frac{2\sin C}{2\sin B}\cdot\frac{\sin\angle BCE}{\sin\angle CBE}\\&=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}.\end{aligned}$$

同理可得 $$\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}.$$

所以 $$\frac{BD}{BC}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C},$$
$$\frac{CD}{BC}=\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}.$$

在$\triangle ABD$中由梅涅劳斯定理可得：

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DO}{OA}=1$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{DO}{OA}&=\frac{FB}{AF}\cdot\frac{CD}{BC}\\&=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}\\&=\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}.\end{aligned}$$

过D作$DM\ /\!/\ OB$，$DN\ /\!/\ OC$，则由三角形相似可知

$$\overrightarrow{ON}=\frac{CD}{BC}\cdot\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OM}=\frac{BD}{BC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

因为 $$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},$$

又 $$\overrightarrow{OD}=-\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{OA},$$

所以 $$-\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{OA}=\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{OB}+\frac{\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{OC}.$$

故 $\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

例 3 过不等边三角形外心和内心的直线是具有以下性质的点的轨迹：该点在三角形三边或其延长线上的射影将三边分为六段，其中相互间隔的三个有向线段的长度的代数和等于另外三个有向线段的长度的代数和.

如图 3-5 所示，O、I 分别为$\triangle ABC$ 的外心和内心，P 为$\triangle ABC$ 所在平面内的一点，从 P 作 $PD \perp BC$，$PE \perp CA$，$PF \perp AB$，垂足分别为 D、E、F，若

$$AF + BD + CE = FB + DC + EA, \quad ①$$

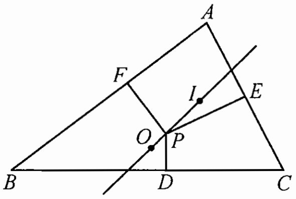


图 3-5

则 P 点的轨迹为直线 OI.

式①中的线段均为有向线段，它们的正方向分别为 $A \to B$，$B \to C$ 和 $C \to A$. 例如，若 F 在线段 AB 的内部，则 AF 和 FB 的长度均为正值，若 F 在 AB 的延长线上，则 AF 的长度为正，FB 的长度为负. 以下证明和讨论中涉及到的线段，凡属于三角形的边所在直线的，其长度的正负号均服从这一规定.

证明 首先证明：直线 OI 上的任意点 P 都满足式①. 为方便起见，设 $OP : OI = k$，OP 和 OI 的方向以 $O \to I$ 为正. 设 O、P、I 在三边上的射影分别为 D_1、D、D_2；E_1、E、E_2 和 F_1、F、F_2，如图 3-6 所示，则由外心和内心的性质可知

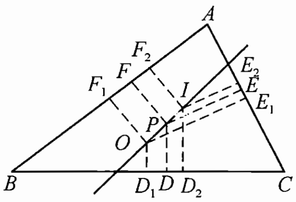


图 3-6

$$AF_1 + BD_1 + CE_1 = F_1B + D_1C + E_1A. \quad ②$$

$$AF_2 + BD_2 + CE_2 = F_2B + D_2C + E_2A. \quad ③$$

从而

$$\begin{aligned} & 2(F_1F_2 + D_1D_2 + E_1E_2) \\ = & (AF_2 - AF_1) + (F_1B - F_2B) + (BD_2 - BD_1) \\ & + (D_1C - D_2C) + (CE_2 - CE_1) + (E_1A - E_2A) \\ = & 0. \end{aligned} \quad ④$$

此外，由于 $OD_1 \parallel PD \parallel ID_2$，$OE_1 \parallel PE \parallel IE_2$，$OF_1 \parallel PF \parallel IF_2$，有以下比例关系：

$$\begin{aligned} D_1D : D_1D_2 = E_1E : E_1E_2 = F_1F : F_1F_2 \\ = OP : OI = k. \end{aligned} \quad ⑤$$

由式②、④、⑤可得

$$\begin{aligned}
&(AF+BD+CE)-(FB+DC+EA)\\
=&(AF_1+F_1F+BD_1+D_1D+CE_1+E_1E)\\
&-(F_1B-F_1F+D_1C-D_1D+E_1A-E_1E)\\
=&(AF_1+BD_1+CE_1)-(F_1B+D_1C+E_1A)\\
&+2(F_1F+D_1D+E_1E)\\
=&2k(F_1F_2+D_1D_2+E_1E_2)\\
=&0,
\end{aligned}$$

因此式①成立.

图 3－6 中，外心 O 在$\triangle ABC$ 的内部，P 为线段 OI 内部的点，这并非必要. 对于其他情况，例如外心在三角形的外部以及 P 在 OI 或 IO 延长线上的情况，包括 P 在三角形外部的情况，只要统一执行上述关于线段长度的符号规定，证明过程都是相同的，这里不一一论述.

其次，可证明：若 P 不是直线 OI 上的点，则式①一定不成立.

由此可知，直线 OI 就是 P 点的轨迹.

例 4　平面内两条直线 $l_1 \parallel l_2$，它们之间的距离等于 a. 一块正方形的硬纸板 $ABCD$ 的边长也等于 a. 现将这块硬纸板平放在两条平行线上，使得 l_1 与 AB、AD 都相交，交点为 E、F；l_2 与 CB、CD 都相交，交点为 G、H. 设$\triangle AEF$ 的周长为 m_1，$\triangle CGH$ 的周长为 m_2. 证明：无论怎样放置正方形硬纸板 $ABCD$，m_1+m_2 总是一个定值.

证明　如图 3－7，连结 EH、FG 得交点 O.

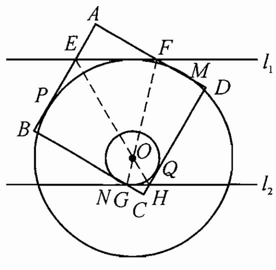


图 3－7

因为点 H 到 AB、l_1 距离相等，所以 EH 平分$\angle BEF$，也平分$\angle DHG$.

又点 G 到 AD、l_1 等距离，所以 FG 平分$\angle DFE$，也平分$\angle BGH$.

由此可知，O 既是$\triangle AEF$ 的旁心，又是$\triangle CGH$ 的旁心，作出两个旁切圆，易知它们是同心圆.

设 P、M、Q、N 分别是 AB、AD、CD、CB 上的切点，易证 P、Q、O 共线；M、O、N 共线，且 $PQ=AD=a$，$MN=AB=a$.

由旁心性质④知

$$AP=AM=\frac{1}{2}m_1,\ CQ=CN=\frac{1}{2}m_2.$$

故 $m_1+m_2=2AP+2CQ=2OM+2ON=2MN=2a$ 为定值.

例 5　设点 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心. 分别以 $\triangle ABC$ 三边的中点为圆心作过点 O 的圆，这三个圆两两的异于 O 的交点分别为 K、L、M. 证明：点 O 是 $\triangle KLM$ 的内心.

证明　如图 3－8 设三边中点分别为 A'、B'、C'，我们发现 $B'C'$ 垂直平分公共弦 OK，并设交点为 K'，那么 $OK'=\frac{1}{2}\cdot OK$，类似地定义 L'、M'，我们有 $\triangle K'L'M'$ 位似于 $\triangle KLM$，相似比为 $\frac{1}{2}$，位似中心为 O，于是原命题 $\Leftrightarrow O$ 是 $\triangle K'L'M'$ 的内心，结合前面的性质：三角形的垂心是其垂足三角形的内心.

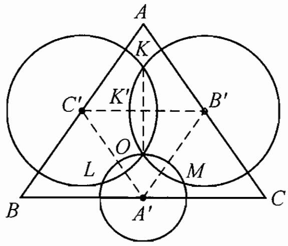


图 3－8

只需证明，O 为 $\triangle A'B'C'$ 的垂心，且 K'、L'、M' 分别是 O 在三边上的垂足.

A' 为边 BC 中点，故 $OA'\perp BC\Rightarrow OA'\perp B'C'$，又 $OK'\perp B'C'$，所以 A'、O、K' 共线且该线垂直于 $B'C'$.

故原命题成立.

例 6　如图 3－9，在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，AD 是边 BC 上的高，P 是线段 AD 内一点. 过 P 作 $PE\perp AC$，垂足为 E，作 $PF\perp AB$，垂足为 F. O_1、O_2 分别是 $\triangle BDF$、$\triangle CDE$ 的外心. 求证：O_1、O_2、E、F 四点共圆的充分必要条件为 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.（2006 年全国高中数学联赛）

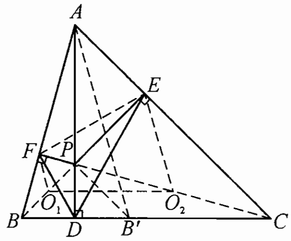


图 3－9

证明　连结 BP、CP、O_1O_2、EO_2、EF、FO_1.

因为 $PD\perp BC$，$PF\perp AB$，故 B、D、P、F 四点共圆，且 BP 为该圆的直径.

又因为 O_1 是 $\triangle BDF$ 的外心，故 O_1 在 BP 上且是 BP 的中点.

同理可证 C、D、P、E 四点共圆，且 O_2 是 CP 的中点.

综上，$O_1O_2\parallel BC$，所以 $\angle PO_2O_1=\angle PCB$.

因为 $AF\cdot AB=AP\cdot AD=AE\cdot AC$，所以 B、C、E、F 四点共圆.

充分性：若 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心，由于 $PE\perp AC$，$PF\perp AB$，所以 B、O_1、P、E 四点共线，C、F、O_2、P 四点共线，$\angle FO_2O_1=\angle FCB=\angle FEB=\angle FEO_1$，故 O_1、O_2、E、F 四点共圆.

必要性：设 O_1、O_2、E、F 四点共圆，故 $\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180^\circ$. 由于 $\angle PO_2O_1=\angle PCB=\angle ACB-\angle ACP$，又因为 O_2 是直角 $\triangle CEP$ 的斜边中

点，也就是 $\triangle CEP$ 的外心，所以 $\angle PO_2E=2\angle ACP$.

因为 O_1 是直角$\triangle BFP$ 的斜边中点，

$$\angle PFO_1=90^\circ-\angle BFO_1=90^\circ-\angle ABP.$$

因为 B、C、E、F 四点共圆，所以

$$\angle AFE=\angle ACB,\ \angle PFE=90^\circ-\angle ACB.$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } 180^\circ&=\angle O_1O_2E+\angle O_1FE\\&=\angle PO_2O_1+\angle PO_2E+\angle O_1FP+\angle PFE\\&=(\angle ACB-\angle ACP)+2\angle ACP+(90^\circ-\angle ABP)\\&\quad+(90^\circ-\angle ACB),\end{aligned}$$

即
$$\angle ABP=\angle ACP,$$

设 B'是 B 关于 AD 的对称点，由 $AB<AC$ 知 B'在线段 CD 上，又$\angle AB'P=\angle ABP=\angle ACP$，于是 A、P、B'、C 四点共圆，所以$\angle PB'B=\angle DAC=90^\circ-\angle C$，从而$\angle C=90^\circ-\angle PB'D=90^\circ-\angle PBD\Rightarrow PB\perp AC$，又 $AP\perp BC$，故 P 为垂心.

例 7 如图 3－10，在$\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D；交直线 l 于 E、F. 证明：直线 DE、DF 分别通过$\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.（2005 全国高中数学联赛）

（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心.）

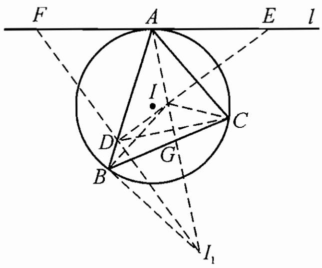


图 3－10

证明 （1）先证 DE 过$\triangle ABC$ 的内心.

如图 3－10，连结 DE、DC，作$\angle BAC$ 的平分线分别交 DC 于 G、DE 于 I，连结 IC，则由 $AD=AC$，得 $AG\perp DC$，$ID=IC$.

又 D、C、E 在$\odot A$ 上，所以$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle DAC=\angle IEC$，因而 A、I、C、E 四点共圆.

从而 $\angle CIE=\angle CAE=\angle ABC$，而 $\angle CIE=2\angle ICD$，则 $\angle ICD=\frac{1}{2}\angle ABC$.

故$\angle AIC=\angle IGC+\angle ICG=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ABC$，所以$\angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB$，

故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

(2) 再证 DF 过 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

连结 FD 并延长交 $\angle ABC$ 的外角平分线于 I_1，连结 II_1、BI_1、BI，由(1)知，I 为内心.

所以 $\angle IBI_1 = 90° = \angle EDI_1$，故 D、B、I_1、I 四点共圆.

因为 $\angle BII_1 = \angle BDI_1 = 90° - \angle ADI$

$$= \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ADG\right) - \angle ADI = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle IDG,$$

所以 A、I、I_1 共线.

故 I_1 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边外的旁心.

例 8 如图 3-11 在锐角三角形 ABC 中，AA_1、BB_1 是两条角平分线，I、O、H 分别是 $\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心，连结 HO，分别交 AC、BC 于点 P，Q. 已知 C、A_1、I、B_1 四点共圆. 求证：(1) $\angle C = 60°$；(2) $PQ = AP + BQ$.

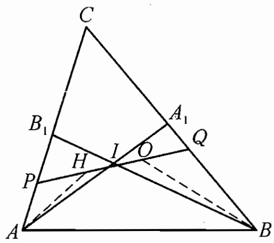


图 3-11

证明 (1) 因为 C、A_1、I、B_1 四点共圆，所以

$$\angle C = 180° - \angle AIB = \angle IAB + \angle IBA$$
$$= \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90° - \frac{1}{2}\angle C,$$

所以 $$\angle C = 60°.$$

(2) 因为

$$\angle AHB = 180° - \angle C = 120°,$$
$$\angle AOB = 2\angle ACB = 120°,$$

所以 A、H、O、B 四点共圆，于是

$$\angle PHA = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = 30°,$$

又 $$\angle PAH = 90° - \angle C = 30°,$$

所以 $$\angle PAH = \angle PHA,$$

于是 $$AP = PH,$$

同理可得 $$BQ = QH,$$

故 $$PQ = AP + BQ.$$

例 9　如图 3－12，圆 O、圆 I 分别是$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆，圆 O 半径为 R，圆 I 半径为 r，圆 I 分别切 AB、AC、BC 于点 F、E、D，若 M 为$\triangle DEF$ 的重心，试求$\dfrac{IM}{OM}$的值(其中 $R\neq 2r$).

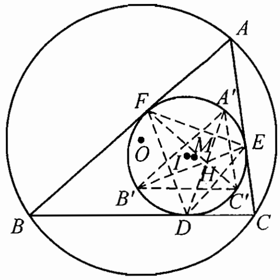


图 3－12

解　取$\triangle DEF$ 的垂心 H，设 DH、EH、FH 分别交$\odot I$ 于 A'、B'、C'.

则 $\angle HA'C'=\angle DFC'=\angle DEB'=\angle DA'B'$.

同理 $\angle HC'A'=\angle HC'B'$. 故 H 为$\triangle A'B'C'$ 的内心.

注意到 D 是$\overset{\frown}{B'DC'}$的中心，则 $ID\perp B'C'$.

又 $ID\perp BC$，所以 $B'C'\,/\!/\,BC$.

同理 $A'B'\,/\!/\,AB$，$A'C'\,/\!/\,AC$，所以$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

而 O、I 分别是$\triangle ABC$ 的外心和内心，I、H 分别是$\triangle A'B'C'$的外心和内心.

所以 $\dfrac{OI}{IH}=k$，k 为$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的相似比.

又 $k=\dfrac{R}{r}$，则$\dfrac{OI}{IH}=\dfrac{R}{r}$.

又 OI、IH 为$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中的对应线段.

则 OI 与 BC 所成的角等于 IH 与 $B'C'$所成的角，则 O、I、H 共线.

又由欧拉定理知$\triangle DEF$ 中，I、M、H 分别为外心、重心和垂心.

所以 $\dfrac{IM}{MH}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{IM}{IH}=\dfrac{1}{3}$.

从而 $OM=OI+IM=\dfrac{R}{r}IH+IM=\left(\dfrac{R}{r}\cdot 3+1\right)\cdot IM$.

故$\dfrac{IM}{OM}=\dfrac{1}{\dfrac{3R}{r}+1}=\dfrac{r}{3R+r}$，得证.

例 10　如图 3－13，锐角$\triangle ABC$ 中，$BC>AC>AB$，AC 上的点 E 与 BC 上的点 D 满足 $AE=BD$，$CD+CE=AB$，BE 交 AD 于 K. 求证：$KH=2IO$.

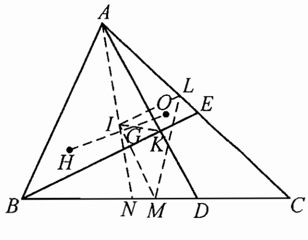


图 3－13

证　设 H、I、O、G 分别为$\triangle ABC$ 垂心、内心、外心、重心.

注意到 H、G、O 三点共线且 $HG=2OG$.

故我们只需证 K、G、I 共线且 $KG=2IG$.

取 BC 中点 M，AC 中点 L，延长 AI 交 BC 于 N.

设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则由条件易知

$$CM=\frac{1}{2}a,\ CD=\frac{1}{2}(a+c-b).$$

由角平分线性质定理 $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{AB}$ 知 $CN=\frac{ab}{b+c}$ 及

$$\frac{NI}{AI}=\frac{BN}{AB}=\frac{CN}{AC}=\frac{BN+CN}{AB+AC}=\frac{a}{b+c}.$$

则 $\frac{NM}{MD}=\frac{CN-CM}{CM-CD}=\frac{\frac{ab}{b+c}-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(a+c-b)}=\frac{a}{b+c}=\frac{NI}{IA}$.

所以 $IM\,/\!/\,AD$，同理 $IL\,/\!/\,BE$.

结合 $ML\,/\!/\,AB$，故 $\triangle IML$ 与 $\triangle KAB$ 对应边均平行.

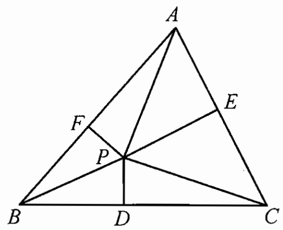
故两三角形位似，位似中心为 AM 与 BL 交点 G，位似比为 $\frac{ML}{AB}=\frac{1}{2}$.

故 I、G、K 三点共线且 $IG=\frac{1}{2}GK$.

结合前面的讨论知原命题成立.

习 题 3

1 如图，已知$\triangle ABC$ 内一点 P，设 D、E、F 分别为点 P 在边 BC、CA、AB 上的投影. 假设 $AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$，且$\triangle ABC$ 的三个旁心分别为 I_A、I_B、I_C. 证明：P 是$\triangle I_AI_BI_C$ 的外心.



（第 1 题）

2 已知圆内接四边形 $ABCD$，K、L、M、N 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点. 证明：$\triangle AKN$、$\triangle BKL$、$\triangle CLM$、$\triangle DMN$ 的垂心恰好是一个平行四边形的四个顶点.

3 设 D、E、F 分别为$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，且满足 $\frac{BD}{DC}=$

$\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$. 证明:若$\triangle DEF$和$\triangle ABC$的外心重合,则$\triangle ABC$是正三角形.

4 已知圆心分别为A、B的两个圆交于点C、D. 过点A、B、C的圆与$\odot A$、$\odot B$分别交于点E、F,且不包含点C的$\overparen{EF}$在$\odot A$和$\odot B$的外部. 证明:CD平分这段弧$\overparen{EF}$.

5 设$\triangle ABC$为非直角三角形,其垂心为H,M_1、M_2、M_3分别为边BC、CA、AB的中点. 令A_1、B_1、C_1分别为H关于M_1、M_2、M_3的对称点,A_2、B_2、C_2分别为$\triangle BA_1C$、$\triangle CB_1A$、$\triangle AC_1B$的垂心. 求证:(1)$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$的重心重合;(2)由$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$的重心所构成的三角形与$\triangle ABC$相似.

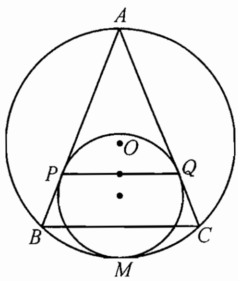
6 已知U为$\triangle ABC$的内切圆的圆心,O_1、O_2、O_3分别为$\triangle BCU$、$\triangle CAU$、$\triangle ABU$的外接圆的圆心. 求证:$\triangle ABC$的外接圆圆心与$\triangle O_1O_2O_3$的外接圆圆心重合.

7 已知在不等边$\triangle ABC$中,三边BC、CA、AB的长度成等差数列. I、O分别是$\triangle ABC$的内心、外心. 证明:(1)$IO\perp BI$;(2)若BI交AC于点K,D、E分别是边BC、AB的中点,则I是$\triangle DEK$的外心.

8 当P为三角形内心I时,证明:

$$\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\mathbf{0}.$$

9 在锐角$\triangle ABC$中,AD是高,I、O分别是内心、外心,且D、I、O三点共线. 求证:$\triangle ABC$的外接圆半径等于与边BC相切的旁切圆半径.(1998,全国高中数学联赛)

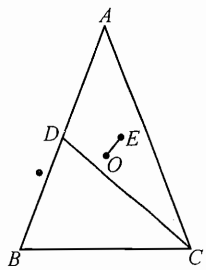


(第10题)

10 如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,一个圆内切于$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$于M,并与AB、AC分别相切于P、Q两点. 求证:线段PQ的中点是$\triangle ABC$内切圆的圆心.

11 在$\triangle ABC$的边AB、BC、CA上分别取点P、Q、S. 证明:以$\triangle APS$、$\triangle BQP$、$\triangle CSQ$的外心为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似.

12 $\triangle ABC$的外心为O,$AB=AC$,D是AB中点,E是$\triangle ACD$的重心. 证明:$OE\perp CD$.



(第12题)

13 $\odot O_1$交$\odot O_2$于点P、Q,$\angle O_1PO_2<90°$,过O_1、O_2、P三点的圆分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$于点A、B. 证明:Q是

$\triangle ABP$ 的旁心.

14 已知 AB、AC 切$\odot O$于点 B、C，OA 交 BC 于点 M，过 M 作$\odot O$的另一弦 EF. 求证：$\triangle ABC$、$\triangle AEF$ 存在一个公共的旁心.

15 已知$\triangle ABC$，点 D 在边 BC 上，O、O_1、O_2 分别是$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 在$\angle A$ 内的旁心，$OE \perp BC$ 于点 E. 求证：$EO_1 \perp EO_2$.

16 AD 是直角三角形 ABC 斜边 BC 上的高，$(AB < AC)$，I_1、I_2 分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心，$\triangle AI_1I_2$ 的外接圆$\odot O$分别交 AB、AC 于 E、F，直线 EF、BC 交于点 M. 证明：I_1、I_2 分别是$\triangle ODM$ 的内心与旁心.

4 圆的初步

1. 圆的内容非常丰富，许多平面几何竞赛问题都和它有关，其中四点共圆是圆的一个极其重要的问题.

2. 圆和有关的角：

① 同弧所对的圆周角相等；

② 弦切角等于弦所对的圆周角；

③ 顶点在某圆内部的角，叫做这圆的圆内角. 圆的圆内角，等于它本身及其对顶角包含的弧所对的圆周角之和；顶点在某圆外部而两边与圆均有公共点的角，叫做这圆的圆外角. 圆的圆外角，等于它包含的两弧所对的圆周角之差.

3. 多值有向角：我们知道，射线绕着它的端点依逆时针的方向旋转为正角，顺时针的方向为负角.

假定有两直线 l, l'，它们或相交或平行或重合. 任意选定一点 O，通过 O 作两直线 h, h' 使分别平行(或重合)于 l, l'，然后将 h 绕 O 点依任何方向旋转，而每当 h 重合于 h' 一次，h 便旋过一个角度，这个角度或小于等于直角，或大于等于直角，甚或大于若干周角. 这些角度视旋转方向为正向或负向而规定它们的值是正的或负的. 现在我们把这样得到的角度都当作 l 与 l' 所做成角的角度，并用记号“$\measuredangle l, l'$”来表示. 凡两直线做成的角若是按这个方法来测定的，那么称为多值有向角. 应该指出，这样的角只注意于旋转的方向，l 与 l' 本身的正负向是无需给定的. 又书写记号“$\measuredangle l, l'$”时，必须注意 l 与 l' 的先后次序，不得错乱.

假定两个多值有向角的通值能够一对一地对应相等，那么我们就说这两个多值有向角相等. 在这个定义中，不难晓得多值有向角的相等具有反身性，对称性，传递性.

显然，若两个多值有向角相等，则它们的最小非负值必相等.

有了多值有向角这个概念，就可以导出一个有关三点共线的命题：三点 A、B、C 共线的充要条件是：$\measuredangle ABC = 0$ 或 $\measuredangle PAB = \measuredangle PAC$.

4. 四点共圆的条件.

四点 A、B、C、D（不论次序）共圆的必要且充分条件为 $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB \neq 0$.

此外，切割线定理，相交弦定理的逆定理都可作为四点共圆的依据.

5. 与圆有关的两个著名定理：

(1) 托勒密定理：在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB \times CD + AD \times BC \geqslant AC \times BD$. 当且仅当四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形时，等号成立.

(2) 西姆松定理：过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线，则三垂足点共线（此线常称为西姆松线）.

西姆松定理的逆定理也是成立的：若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上.

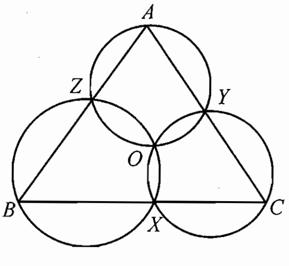


图 4-1

6. 密克(Miquel)定理：设在$\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 所在直线上任取一点 X、Y、Z（如图 4-1），则三圆$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$ 共点.

事实上，令$\odot BZX$ 与$\odot CXY$ 的第二交点为 O，连结 OX、OY、OZ，则 $\measuredangle AYO = \measuredangle CXO = \measuredangle BZO$. 因知 O 点在$\odot AYZ$ 上.

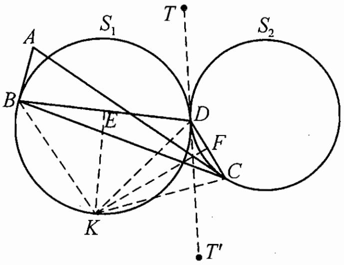


图 4-2

例 1 如图 4-2，设 B 是圆 S_1 上的点，过 B 作圆 S_1 的切线，A 为该切线上异于 B 的点，又 C 不是圆 S_1 上的点，且线段 AC 交圆 S_1 于两个不同的点. 圆 S_2 与 AC 相切于点 C，与圆 S_1 相切于点 D，且 D 与 B 在直线 AC 的两侧. 证明：$\triangle BCD$ 的外心在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明 作两圆公切线 TT' 满足 T 与 A 在 BD 同侧，取 BD 中点 E，CD 中点 F，连结 BK、EK、DK、FK、CK.

因 $\angle TDB = \angle ABD$，$\angle T'DC = \angle DCA$，则

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 180^\circ - \angle TDB + \angle T'DC \\ &= 180^\circ - \angle ABD + \angle DCA \\ &= 180^\circ - (\angle ABC - \angle DBC) + (\angle DCB - \angle ACB) \\ &= 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB + \angle DBC + \angle DCB \\ &= \angle BAC + 180^\circ - \angle BDC.\end{aligned}$$

于是 $$2\angle BDC = 180^\circ + \angle BAC.$$

故
$$\begin{aligned}\angle BKC &= \angle BKD + \angle DKC \\ &= 2\cdot(\angle EKD + \angle DKF) \\ &= 2\cdot\angle EKF \\ &= 2\cdot(180^\circ - \angle BDC) \\ &= 180^\circ - \angle BAC.\end{aligned}$$

因此 K 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

例 2　如图 4－3，$\triangle ABC$ 的内切圆 I 切 BC、CA 于 D、E，K、L 为 AB、AC 的中点，则 DE 与 KL 的交点 T 在 BI 的延长线上.

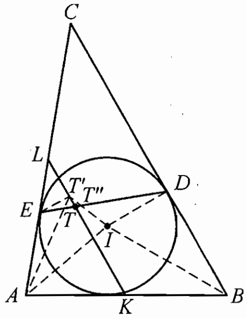


图 4－3

证明　设直线 BI 分别交 ED、KL 于 T''、T'，连结 $T'B$、$T''B$、AT'、AI、ID、ET'.

易知 $\angle KBT' = \angle KT'B$.

所以 $BK = KT' = AK$，从而 $\angle AT'B = 90^\circ$.

又 $\angle AEI = 90^\circ$，故 A、E、T'、I 四点共圆.

又 $\angle CET' = \dfrac{\pi - \angle ACB}{2} = \angle ABC + \angle BAC = \angle AIT''$，

故 A、E、T''、I 四点共圆.

又 T'、T''都在直线 BI 上，所以 $\triangle AEI$ 的外接圆与直线 BI 的交点为 I、T'、T''，故 T'与 T''重合，即 T 在直线 BI 上.

例 3　如图 4－4，设 A、B 是定点，C 是动点，且 $\angle ACB = \alpha$ 是定角，其中，$0^\circ < \alpha < 180^\circ$. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 在边 BC、CA、AB 上的切点分别为 F、E、D，EF 分别与直线 AI、BI 交于点 M、N. 证明：线段 MN 的长是定长，且 $\triangle DMN$ 的外接圆过一个定点.

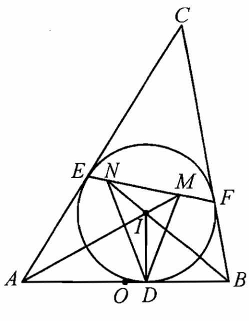


图 4－4

证明　取线段 AB 的中点 O.

因 $\angle CEF = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle C = 180^\circ - \angle AIB = \angle AIN$.

所以 I、N、E、A 四点共圆.

又 I、E、A、D 四点共圆，则 I、N、E、A、D 五点共圆.

同理，B、F、M、I、D 五点共圆.

从而，$\angle ANB = \angle AEI = 90^\circ$，$\angle AMB = \angle IFB = 90^\circ$.

因此，点 M、N 均在以 AB 为直径的圆上.

则 $\angle MON=2\angle MAN=2\angle MBN$
$=\angle NAM+\angle NBM$
$=\angle NDI+\angle MDI=\angle MDN.$

故 M、N、O、D 四点共圆.

因此，$\triangle MND$ 的外接圆过定点 O.

另一方面，$MN=AB\sin\angle NAM=AB\sin\angle IEF$
$=AB\sin\dfrac{C}{2}=AB\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 为定值.

例 4　如图 4－5，AB 是圆 O 的直径．C 与 D 是互异的圆 O 上的两点，且在 AB 的一侧．过 C、D 作圆的切线交于点 E．线段 AD 与 BC 交于点 F，直线 EF 交 AB 于 M．求证：E, C, M, D 共圆．(2010 年西部数学奥林匹克)

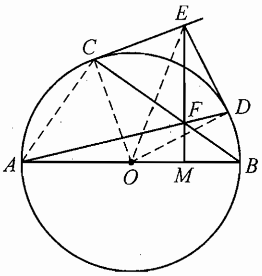


图 4－5

证明　连结 EO、CO、DO、CA．由 $\angle COE=\angle CAF$，知 $\mathrm{Rt}\triangle COE\backsim\mathrm{Rt}\triangle CAF$.

所以，$\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{CO}{CA}$．又 $\angle ECF=90^\circ-\angle BCO=\angle OCA$，

则 $\triangle ECF\backsim\triangle OCA$.

故 $\angle CAO=\angle CFE=\angle BFM$．于是，$\angle FMB=\angle ACB=90^\circ$.

因此，O、M、D、E、C 五点共圆.

例 5　如图 4－6，给定锐角三角形 ABC，O 为外心，直线 AO 交边 BC 于 D，动点 E、F 在 AB、AC 上，使得 A、E、D、F 四点共圆．求证：线段 EF 在 BC 上的投影为恒定长度.

证明　取 AB 上一点 E'，AC 上一点 F' 满足 A、E'、D、F' 四点共圆．下面证明：EF 在 BC 上的投影长度等于 $E'F'$ 在 BC 上的投影长度，由正弦定理，

$$\frac{DE}{DF}=\frac{\sin\angle EFD}{\sin\angle DEF}=\frac{\sin\angle EAD}{\sin\angle DAF}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}=\frac{\cos C}{\cos B},$$

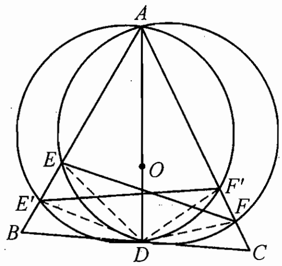


图 4－6

连结 DE、DE'、DF、DF'，则 $\angle DE'B=\angle DF'A$，$\angle DEB=\angle DFA$，所以 $\triangle DEE' \backsim \triangle DFF'$，于是 $\dfrac{EE'}{FF'}=\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$，即 $EE'\cdot\cos B=FF'\cdot\cos C$，

故 EF 在 BC 上的投影长度 $=AE$ 在 BC 上的投影长度 $+AF$ 在 BC 上的投影长度

$=AE\cdot\cos B+AF\cdot\cos C=AE\cdot\cos B+AF\cdot\cos C+EE'\cdot\cos B-FF'\cdot\cos C$

$=AE'\cdot\cos B+AF'\cdot\cos C$

$=E'F'$ 在 BC 上的投影长度，为与 E、F 具体位置无关的常数.

例 6　如图 4－7 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，点 E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 Γ 的弧 BC（不含点 A）内，$AE>EC$，连结 EC 并延长至点 F，使得 $\angle EAC=\angle CAF$，连结 BF 交圆 Γ 于点 D，连结 ED，记 $\triangle DEF$ 的外心为 O，求证：A、C、O 三点共线.（2009 年女子数学奥林匹克）

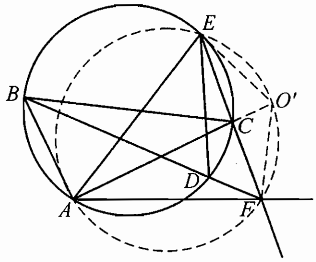


图 4－7

证明　作 $\triangle AEF$ 的外接圆交 AC 延长线于点 O'，连结 $O'E$、$O'F$. 注意到 AC 平分 $\angle EAF$，所以 AO' 在圆 AEF 内平分 $\angle A$，则 O' 为 $\overset{\frown}{EF}$ 的中点，$O'E=O'F$.

由于 $$\angle EO'F=180°-\angle EAF=180°-2\angle EAO', \quad ①$$

$$\angle EDB=\angle EAB=90°-\angle EAO, \quad ②$$

由 ①、② 知 $$\angle EDB=\frac{1}{2}\angle EO'F.$$

从而 D 在以 O' 为圆心，$O'E$ 为半径的圆上.

所以 $O'D=O'E=O'F$，O' 与 O 重合，于是 A、C、O 共线.

例 7　如图 4－8，M、N 分别为锐角 $\triangle ABC$（$\angle A<\angle B$）的外接圆 Γ 上弧 BC、弧 AC 的中点. 过点 C 作 $PC\parallel MN$ 交圆 Γ 于点 P，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，连结 PI 并延长交圆 Γ 于 T.

(1) 求证：$MP\cdot MT=NP\cdot NT$；

(2) 在弧 AB（不含点 C）上任取一点 Q（$\neq A$，T，B），记 $\triangle AQC$、$\triangle QCB$ 的内心分别为 I_1、I_2. 求证：Q、I_1、I_2、T 四点共圆.（2009 年全国高中数学联赛）

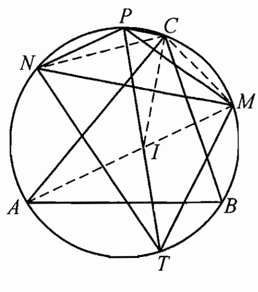


图 4－8

证明　(1) $PC /\!/ NM \Rightarrow$ 等腰梯形 $PCMN$，连结 IM、IC、CM、AI、CN，I 为内心，故 AI 延长线过 $\overset{\frown}{BC}$ 中点 M，于是

$$\begin{aligned}\angle CIM &= \angle CAI + \angle ICA\\ &= \angle BAI + \angle ICA\\ &= \angle BAM + \angle ICA\\ &= \angle BCM + \angle ICB\\ &= \angle ICM,\end{aligned}$$

故 $IM = CM$，又 $PCMN$ 为等腰梯形，有 $CM = PN$，于是 $IM = NP$，同理可证 $PM = IN$.

由此可得四边形 $MINP$ 为平行四边形，即 PI 平分 MN.

所以 TI 平分线段 MN，$S_{\triangle PNT} = S_{\triangle PMT} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot PM \cdot TM \cdot \sin\angle PMT = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot TN \cdot \sin\angle PNT$，又 $\angle PMT$ 与 $\angle PNT$ 互补，$\sin\angle PMT = \sin\angle PNT$，于是 $PM \cdot TM = PN \cdot TN$.

(2) 易知 Q、I_1、N 共线；Q、I_2、M 共线，连结 NQ、MQ、I_1T、I_2T，首先证明 $\triangle I_1NT \backsim \triangle I_2MT$，这是由于 $NI_1 = NC$. $MI_2 = MC$，又 $\frac{NI_1}{NT} = \frac{NC}{NT} = \frac{MP}{NT} = \frac{NP}{MT} = \frac{MC}{MT} = \frac{MI_2}{MT}$，

$\angle I_1NT = \angle QNT = \angle QMT = \angle I_2MT$，由此可得

$\triangle I_1NT \backsim \triangle I_2MT$，从而有

$\angle QI_1T = 180^\circ - \angle NI_1T = 180^\circ - \angle MI_2T = \angle QI_2T$.

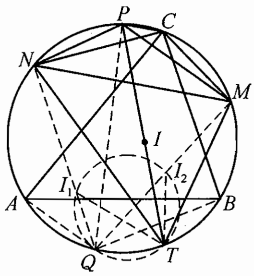
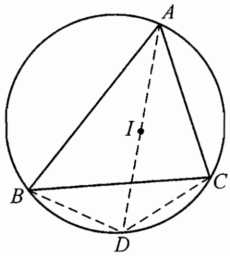


图 4-9

于是，Q、I_1、I_2、T 四点共圆.

注　1. (2)这道题多次在数学竞赛中出现，是一道较难的问题，但是给出命题(1)以后，两部分都不算太难.

2. 如图，I 为 $\triangle ABC$ 内心，AI 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 D，则 $DB = DI = DC$，本题用到了这个内心的重要性质，有的人称之为"鸡爪定理".



例 8　设 L 在 $\triangle ABC$ 的边 BA 上，延长 CA 至 K 使 $\angle CKB = \frac{1}{2}\angle CLB$，延长 CB 至 M 使 $\angle CMA = \frac{1}{2}\angle CLA$. 设 $\triangle CMK$ 的外心为 O，则 $OL \perp AB$.

证明 如图 4－10，作$\triangle CMK$外接圆W，设$MA\cap W=\{S\}$，$KB\cap W=\{R\}$，则$\angle COS=2\cdot\angle CMS=\angle CLA$，$\angle COR=2\cdot\angle CKR=\angle CLB$. 从而$\angle COS+\angle COR=\angle CLA+\angle CLB=180°$. 所以$S$、$O$、$R$三点共线.

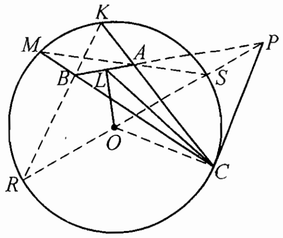


图 4－10

对C、L、M、S、R、K使用帕斯卡定理知$CP\cap SR=P$，CP表示过C的圆W的切线，$CM\cap KR=B$，$CK\cap SM=A$，则P、B、A三点共线. 从而过C的切线、SR、AB交于点P. 由$\angle COR=\angle CLB$知C、O、L、P共圆.
从而$\angle OLB=\angle OLA=90°$，即$OL\perp AB$.

注 此题用到了帕斯卡定理：

如图 4－11，对圆内接六边形$ABCDEF$，设$AB\cap DE=\{X\}$，$BC\cap EF=\{Y\}$，$CD\cap FA=\{Z\}$，则X、Y、Z三点共线. 这是一个很有用的结论. 其证明见习题 2 第 16 题.

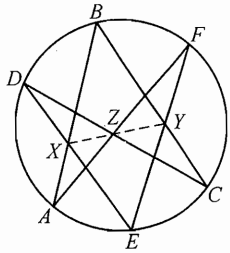


图 4－11

例 9 如图 4－12，已知$\triangle ABC$内切圆$\odot I$分别与边AB、BC切于点F、D，直线AD、CF分别与$\odot I$交于另一点H、K. 求证：$\dfrac{FD\cdot HK}{FH\cdot DK}=3$.

证明 设$AF=x$，$BF=y$，$CD=z$. 由斯特瓦尔特定理得$AD^2=\dfrac{BD}{BC}\cdot AC^2+\dfrac{CD}{BC}\cdot AB^2-BD\cdot DC=\dfrac{y(x+z)^2+z(x+y)^2}{y+z}-yz=x^2+\dfrac{4xyz}{y+z}$. 由切割线定理得：$AH=\dfrac{AF^2}{AD}=\dfrac{x^2}{AD}$. 故

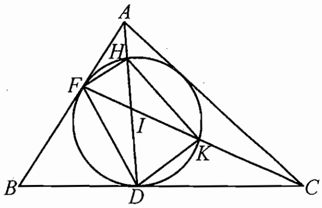


图 4－12

$$HD=AD-AH=\frac{AD^2-x^2}{AD}=\frac{4xyz}{AD(y+z)}.$$

同理 $$KF=\frac{4xyz}{CF(x+y)}.$$

因为$\triangle CDK\backsim\triangle CFD$，所以$DK=\dfrac{DF\cdot CD}{CF}=\dfrac{DF}{CF}\cdot z$.

又因为$\triangle AFH\backsim\triangle ADF$，所以$FH=\dfrac{DF\cdot AF}{AD}=\dfrac{DF}{AD}\cdot x$.

由余弦定理得：

$$\begin{aligned}DF^2&=BD^2+BF^2-2BD\cdot BF\cos B\\&=2y^2\left[1-\frac{(y+z)^2+(x+y)^2-(x+z)^2}{2(x+y)(y+z)}\right]\\&=\frac{4xy^2z}{(x+y)(y+z)}.\end{aligned}$$

故$\dfrac{KF\cdot HD}{FH\cdot DK}=\dfrac{\dfrac{4xyz}{CF(x+y)}\cdot\dfrac{4xyz}{AD(y+z)}}{\dfrac{DF}{AD}\cdot x\cdot\dfrac{DF}{CF}\cdot z}$

$$=\frac{16xy^2z}{DF^2(x+y)(y+z)}=4\quad①.$$

对圆内接四边形 $DKHF$ 应用托勒密定理得

$$KF\cdot HD=DF\cdot HK+FH\cdot DK.$$

再结合式①得 $$\frac{FD\cdot HK}{FH\cdot DK}=3.$$

例 10 已知$\odot O_1$与$\odot O_2$外切于点 T，一直线与$\odot O_2$相切于点 X，与$\odot O_1$交于点 A、B，且点 B 在线段 AX 的内部，直线 XT 与$\odot O_1$交于另一点 S，C 是不包含点 A、B 的$\overset{\frown}{TS}$上的一点，过点 C 作$\odot O_2$的切线，切点为 Y，且线段 CY 与线段 ST 不相交，直线 SC 与 XY 交于点 I. 证明：(1)C、T、I、Y 四点共圆；(2)I 是$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 内的旁切圆的圆心.

证明 (1) 如图 4－13，T 为$\odot O_1$与$\odot O_2$的公切点，则$\overset{\frown}{ST}$对应的度数等于$\overset{\frown}{XT}$对应的度数，即$\angle SAT=\angle XYT$. ①

而$\angle TCI=\angle SAT$，所以$\angle TCI=\angle XYT$，即$\angle IYT=\angle ICT$.

故 C、I、T、Y 四点共圆. ②

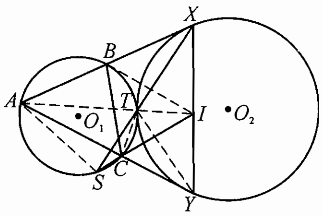


图 4－13

(2) 因为$\angle SAT=\angle SBT$，$\angle AXS=\angle XYT$，结合①式得

$$\angle SAT=\angle AXS,\ \angle SBT=\angle AXS.$$

又$\angle AST=\angle XSA$，$\angle BST=\angle BSX$，所以$\triangle SAT\backsim\triangle SXA$，$\triangle SBT\backsim\triangle SXB$.

则 $SA^2=ST\cdot SX$，$SB^2=ST\cdot SX$.

又$\angle SIT=\angle CYT$(由②得)，$\angle SIT=\angle SXI$，而$\angle IST=\angle XSI$，所以$\triangle SIT\backsim\triangle SXI$，从而 $SI^2=ST\cdot SX$.

则 $SA=SI=SB$，即 S 为 $\triangle ABI$ 的外心.

所以 $\angle XBI=\frac{1}{2}\angle ASI=\frac{1}{2}\angle ASC=\frac{1}{2}\angle CBX$.

故 BI 平分 $\angle CBX$，而 $\angle BCI=\angle BAS$，又 S 为 $\triangle ABI$ 的外心，则 $\angle BAS=-\frac{1}{2}\angle ASB+90^\circ$，则 $2\angle BAS+\angle ASB-90^\circ$.

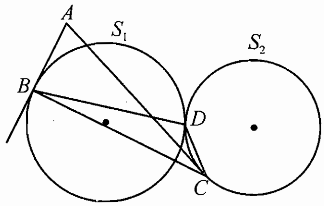
又 $\angle BAS=\angle BCI$，$\angle ASB=\angle ACB$，即 $2\angle BCI+\angle ACB=90^\circ$.

所以 CI 是 $\angle ACB$ 的外角平分线，又 BI 平分 $\angle CBX$.

故 I 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 内的旁切圆圆心. 证毕.

习　题　4

1 如图，设 B 是圆 S_1 上的点，过 B 作圆 S_1 的切线，A 为该切线上异于 B 的点，又 C 不是圆 S_1 上的点，且线段 AC 交圆 S_1 于两个不同的点. 圆 S_2 与 AC 相切于点 C，与圆 S_1 相切于点 D，且 D 与 B 在直线 AC 的两侧. 证明：$\triangle BCD$ 的外心在$\triangle ABC$ 的外接圆上.



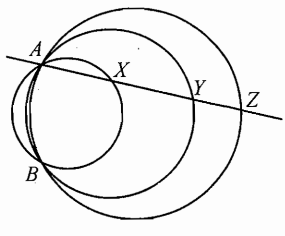
(第 1 题)

2 在$\triangle ABC$ 的外接圆上，$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$的中点分别为 D、E、F，其中 $A\notin\overset{\frown}{BC}$，$B\notin\overset{\frown}{CA}$，$C\notin\overset{\frown}{AB}$. DE 分别交 CB、CA 于点 G、H，DF 分别交 BC、BA 于点 I、J，GH 和 IJ 的中点分别为 M、N.

(1) 用$\triangle ABC$ 的内角表示$\triangle DMN$ 的三个内角；

(2) 若 O 为$\triangle DMN$ 的外心，P 是 AD 与 EF 的交点，证明：O、M、P、N 四点共圆.

3 如图，3 个圆有公共弦 AB. 任一条过点 A 的直线 l 与 3 个圆的交点依次为 X、Y、Z，其中 $X\neq B$. 证明：$\frac{XY}{YZ}$为定值.



(第 3 题)

4 等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，M 为边 BC 的中点，X 是$\triangle ABM$ 外接圆的劣弧$\overset{\frown}{MA}$上的一个动点，T 是$\angle BMA$ 内的一点，且满足 $\angle TMX=90^\circ$，$TX=BX$. 证明：$\angle MTB-\angle CTM$ 的值不依赖于点 X.

5 已知一个圆与$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 相切，也和$\triangle ABC$ 的外接圆相切于

点 T. 若 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，证明：$\angle ATI=\angle CTI$.

6 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，圆心为 O 的圆与线段 BC 切于点 P，与不含点 A 的弧 $\overset{\frown}{BC}$ 切于点 Q. 若 $\angle BAO=\angle CAO$，证明：$\angle PAO=\angle QAO$.

7 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，且满足 $\angle BPC=90^\circ$，$\angle BAP=\angle BCP$，M、N 分别是边 AC、BC 的中点. 若 $BP=2PM$，证明：A、P、N 三点共线.

8 设圆 Γ 和直线 l 不相交，AB 是圆 Γ 的直径，且垂直于直线 l，点 B 比点 A 更靠近直线 l. 在圆 Γ 上任意取一点 C ($C\neq A$、B)，直线 AC 交直线 l 于点 D，直线 DE 与圆 Γ 切于点 E，且点 B、E 在 AC 的同一侧. 设 BE 交直线 l 于点 F，AF 交圆 Γ 于点 G ($G\neq A$). 证明：点 G 关于 AB 的对称点在直线 CF 上.

9 在 $\triangle ABC$ 中，P、Q 分别是边 AB、AC 上的点，且使得 $\angle APC=\angle AQB=45^\circ$. 过点 P 作边 AB 的垂线与 BQ 交于点 S，过点 Q 作边 AC 的垂线与 CP 交于点 R. 设 D 是 BC 上的点，且使得 $AD\perp BC$. 证明：PS、AD、QR 三线共点，且 $SR\parallel BC$.

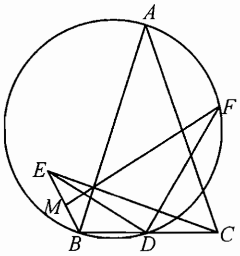
10 已知锐角 $\triangle ABC$，以 AC 为直径的圆为圆 Γ_1，以 BC 为直径的圆为圆 Γ_2，AC 与圆 Γ_2 相交于点 E，BC 与圆 Γ_1 相交于点 F，直线 BE 和圆 Γ_1 相交于点 L、N，其中点 L 在线段 BE 上，直线 AF 和圆 Γ_2 相交于点 K、M，其中点 K 在线段 AF 上. 证明：四边形 $KLMN$ 是圆内接四边形.

11 已知 AA_1、BB_1、CC_1 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线. 证明：C_1 到线段 AC、BC、BB_1、AA_1 的垂足在同一直线上.

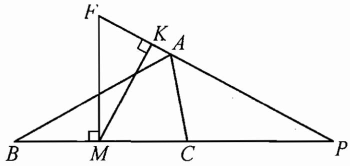
12 D 是 $\triangle ABC$ 内的一点，满足 $\angle DAC=\angle DCA=30^\circ$，$\angle DBA=60^\circ$，$E$ 是边 BC 的中点，F 是边 AC 的三等分点，满足 $AF=2FC$. 求证：$DE\perp EF$.（2007 第六届女子数学奥林匹克）

13 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆，该内切圆切边 AB、BC、CD、DA 的切点分别为 A_1、B_1、C_1、D_1，连结 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，点 E、F、G、H 分别为 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点. 证明：四边形 $EFGH$ 为矩形的充分必要条件是 A、B、C、D 四点共圆.

14 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是边 BC 的中点，E 是 $\triangle ABC$ 外一点，满足 $CE\perp AB$，$BE=BD$. 过线段 BE 的中点 M 作直线 $MF\perp BE$，交 $\triangle ABD$ 的外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{AD}$ 于点 F. 求证：$ED\perp DF$.（2010 女子数学奥林匹克）



（第 14 题）



（第 15 题）

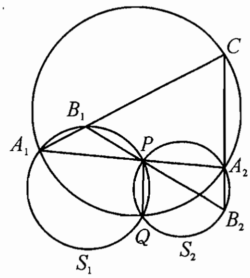
15 如图，在锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，M为边BC的中点，$\angle BAC$的外角平分线交直线BC于点P．点K、F在直线PA上，使得$MF \perp BC$，$MK \perp PA$．求证：$BC^2 = 4PF \cdot AK$．（2010 女子数学奥林匹克）

16 已知圆O、圆I分别是$\triangle ABC$的外接圆和内切圆．证明：过圆O上的任意一点D，都可以作一个三角形DEF，使得圆O、圆I分别是$\triangle DEF$的外接圆和内切圆．（2009 中国第六届东南地区数学奥林匹克）

17 设H为锐角$\triangle ABC$的垂心，D为边BC的中点，过点H的直线分别交边AB、AC于点F、E，使得$AE = AF$，射线DH与$\triangle ABC$的外接圆交于点P．求证：P、A、E、F四点共圆．（2009 中国西部数学奥林匹克）

18 已知圆S_1与圆S_2交于P、Q两点，A_1、B_1为圆S_1上不同于P、Q的两个点，直线A_1P、B_1P分别交圆S_2于A_2、B_2，直线A_1B_1和A_2B_2交于点C．证明：当点A_1和点B_1变化时，$\triangle A_1A_2C$的外心总在一个定圆周上．

19 两圆外切于点A且内切另一圆$\odot T$于点B、C．令D是小圆内公切线割$\odot T$的弦的中点．证明：当点B、C、D不共线时，A是$\triangle BCD$的内心．



（第 18 题）

5 圆幂与根轴

1. 点到圆的幂：设 P 是平面上一定点，从 P 向一定圆作割线，从 P 起到和圆周相交为止的两有向线段之积，称为 P 点对这一定圆的幂.

2. 相交弦定理和切割线定理统称为圆幂定理.

3. 由相交弦定理和切割线定理知，定点 P 对于定圆的幂是一个定值. 设 $PO=d$ (O 为圆心)，$\odot O$ 的半径为 r，则 d^2-r^2 就是点 P 对于 $\odot O$ 的幂. 令 $k=d^2-r^2$，则当 P 在圆外时，$k>0$；当 P 在圆内时，$k<0$；当 P 在圆上时，$k=0$.

与圆幂定理紧密相关的另一个概念是根轴问题. 下面我们证明有关根轴的一个重要结论.

4. 对于两已知圆有等幂的点的轨迹是一条垂直于连心线的直线.

事实上，设点 A 到 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的幂相等，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 R_1，R_2 ($R_1>R_2$)，则 $AO_1^2-R_1^2=AO_2^2-R_2^2$，即

$$AO_1^2-AO_2^2=R_1^2-R_2^2=\text{常数}.$$

如图 5-1，设 O_1O_2 的中点为 D，$AM\perp O_1O_2$ 于 M，则 $AO_1^2=AM^2+(O_1D+DM)^2=AM^2+O_1D^2+DM^2+2O_1D\cdot DM=AD^2+O_1D^2+2O_1D\cdot DM$.

同理 $AO_2^2=AD^2+DO_2^2-2DO_2\cdot DM$，以上两式相减，$DM=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2O_1O_2}=$ 常数.

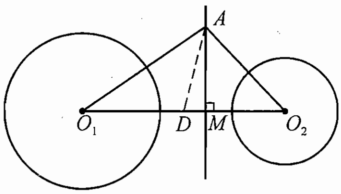


图 5-1

所以，过定点 M 的垂线即是两圆等幂点的轨迹. 这条直线称为两圆的根轴. 特别地，若两圆同心，则 $O_1O_2=0$. 即同心圆的根轴不存在；又若 $R_2=0$，$\odot O_2$ 变成一点 O_2，则点 A 对于 $\odot O_2$ 的幂是 AO_2^2. 此时，直线(轨迹)称为一圆与一定点的根轴.

5. 根轴有下面重要性质：

性质 1 若两圆相交，其根轴就是公共弦所在的直线.

性质 2 若两圆相切，其根轴就是过两圆切点的公切线.

性质 3　三个圆，其两两的根轴或相交于一点，或互相平行.

事实上，若三条根轴中有两条相交，则这一交点对三个圆的幂均相等，所以必在第三条根轴上. 这一点，称为三个圆的根心.

显然，当三个圆的圆心在一直线上时，三条根轴互相平行；当三个圆的圆心不共线时，根心存在.

例 1　如图 5-2，$\triangle ABC$ 中，$AB > BC$，外接圆上点 B 处的切线交直线 AC 于点 P，D 是 B 点关于点 P 的对称点，E 是点 C 关于直线 BP 的对称点. 求证：四边形 $ABED$ 是圆内接四边形.

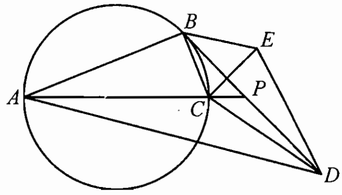


图 5-2

证明　由于 PB 是切线，由切割线定理

$$PA \cdot PC = PB^2 = PD^2 \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PD}{PC},$$

又 $\angle DPA = \angle CPD$，所以 $\triangle DPA \backsim \triangle CPD$. $\Rightarrow \angle CAD = \angle PDC$.

再由 PB 是切线知，$\angle PBC = \angle BAC$.

故 $\angle BAD = \angle PBC + \angle PDC = 180^\circ - \angle BCD$.

再根据 C、E 的对称性知，$\angle BCD = \angle BED$.

于是，$\angle BAD + \angle BED = 180^\circ$.

从而，四边形 $ABED$ 是圆内接四边形.

例 2　如图 5-3，圆 Γ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切于点 A，与边 AB 交于点 K，且和边 BC 相交. 过点 C 作圆 Γ 的切线，切点为 L，连结 KL，交边 BC 于点 T. 求证：线段 BT 的长等于点 B 到圆 Γ 的切线长.

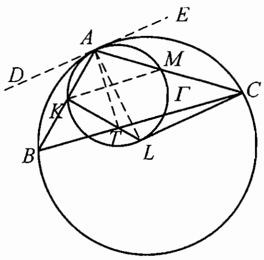


图 5-3

分析　由圆幂定理知：点 B 到圆 Γ 的切线长的平方等于 $BK \cdot BA$. 故问题等价于求证：$BT^2 = BK \cdot BA$.

证明　过 A 作两圆的公切线 DE，连结 AC 交圆 Γ 于 M.

则 $\angle DAB = \angle ACB = \angle AMK \Rightarrow KM \parallel BC$.

注意到 A、K、L、M 四点共圆，所以 $\angle AMK = \angle ALK = \angle ACB \Rightarrow A$、$C$、$L$、$T$ 四点共圆，所以 $\angle ALC = \angle ATC$.

又因 CL 是圆 Γ 的切线，$\angle ALC = \angle AKL$.

所以 $\angle ATC = \angle AKL$，从而它们的补角也相等，即 $\angle BKT = \angle BTA$. 又 $\angle KBT = \angle TBA$，故 $\triangle ABT \backsim \triangle TBK \Rightarrow BT^2 = BK \cdot BA$.

由圆幂定理知，BT 的长等于 B 到圆 Γ 的切线长.

注　若两圆相内切于点 A，过 A 出发的两条射线与两圆分别交于 B_1、C_1 和 B_2、C_2，则 $B_1C_1 /\!/ B_2C_2$. 这个基本结论常用到.（如图 5－4）

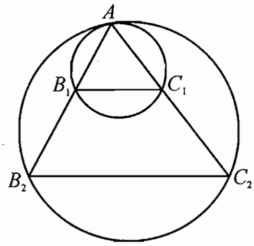


图 5－4

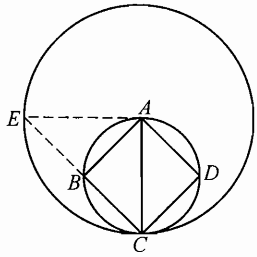


图 5－5

例 3　如图 5－5，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AD = AB$. 求证：$AB^2 + BC \cdot CD = AC^2$.

证明　将△ACD 绕着 A 点逆时针旋转，使 AD 与 AB 重合.

由 $AD = AB$，且 $ABCD$ 是圆内接四边形知：C、B、E 三点共线.

以 A 为圆心，AC 为半径作圆，考虑 B 对此圆的幂：一方面，这个幂是 $BA^2 - CA^2$；另一方面，它也是 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC}$，从而 $AC^2 - AB^2 = BE \cdot BC$（这里是线段的长度）$= CD \cdot BC \Rightarrow AB^2 + BC \cdot CD = AC^2$.

注　此题的证法很多，也可通过相似的方法去证明. 留给读者思考.

例 4　如图 5－6，⊙O_1 与⊙O_2 相交于点 C、D，过点 D 的一条直线分别与⊙O_1、⊙O_2 相交于点 A、B，点 P 在⊙O_1 的弧 AD 上，PD 与线段 AC 的延长线交于点 M，点 Q 在⊙O_2 的弧 BD 上，QD 与线段 BC 的延长线交于点 N. O 是△ABC 的外心. 求证：$OD \perp MN$ 的充要条件是 P、Q、M、N 四点共圆.（2007 年西部数学奥林匹克）

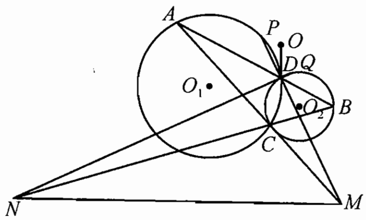


图 5－6

证明　设△ABC 的外接圆 O 的半径为 R，则 M，N 对⊙O 的幂分别为

$$MO^2 - R^2 = MC \cdot MA, \quad ①$$
$$NO^2 - R^2 = NC \cdot NB. \quad ②$$

又因为 A、C、D、P 四点共圆，所以

$$MC \cdot MA = MD \cdot MP, \quad ③$$

同理 Q、D、C、B 四点共圆，所以

$$NC \cdot NB = ND \cdot NQ. \qquad ④$$

由①、②、③、④得

$$\begin{aligned} NO^2 - MO^2 &= ND \cdot NQ - MD \cdot MP \\ &= ND \cdot (ND + DQ) - MD \cdot (MD + DP) \\ &= ND^2 - MD^2 + (ND \cdot DQ - MD \cdot DP). \end{aligned}$$

所以，$OD \perp MN \Leftrightarrow NO^2 - MO^2 = ND^2 - MD^2 \Leftrightarrow ND \cdot DQ = MD \cdot DP \Leftrightarrow P$、$Q$、$M$、$N$ 四点共圆.

注 上面证题的过程中，用到了这样一个结论：$OD \perp MN \Leftrightarrow NO^2 - MO^2 = ND^2 - MD^2$. 它是一个非常重要的结论，在证明垂直一类问题中常用到它.

例 5 如图 5－7，从半圆上的一点 C 向直径 AB 引垂线，设垂足为 D，作圆 O_1 分别切 $\overset{\frown}{BC}$、CD、DB 于点 E、F、G. 求证：$AC = AG$.

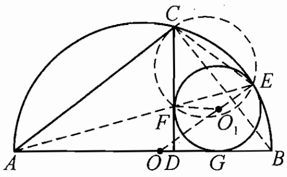


图 5－7

证明 设半圆的圆心为 O，则 O、O_1、E 三点共线.

连结 O_1F 知 $O_1F \perp CD$，且 $O_1F \parallel AB$，连结 EF、AE.

由 $\angle FEO_1 = \frac{1}{2}\angle FO_1O = \frac{1}{2}\angle EOB = \angle OEA \Rightarrow E$、$F$、$A$ 三点共线.

又因为 $\angle ACB = 90°$，且 $CD \perp AB$，所以 $\angle ACF = \angle ABC = \angle AEC$.

从而 AC 是 $\triangle CEF$ 外接圆的切线，故点 A 对 $\triangle CEF$ 外接圆的幂 AC^2 等于点 A 对 $\odot O_1$ 的幂 AG^2（也等于 $AE \cdot AF$），即 $AC = AG$.

上面几道例题都是和幂相关的问题，以下的问题都和根轴有关.

例 6 如图 5－8，设 D、E 是 $\triangle ABC$ 中 AB、AC 上的点. 求证：以 BE、CD 为直径的两圆的根轴必通过 $\triangle ABC$ 的垂心.

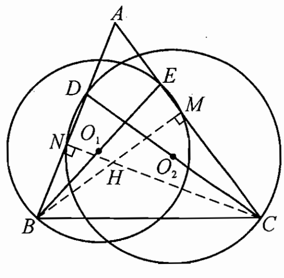


图 5－8

证明 设以 BE 为直径的圆为 $\odot O_1$，以 CD 为直径的圆为 $\odot O_2$，BM、CN 是高线，H 为垂心.

显然 M 在 $\odot O_1$ 上，N 在 $\odot O_2$ 上.

又因 B、C、M、N 四点共圆，所以 $HB \cdot HM = HC \cdot HN$.

而 $HB \cdot HM$ 是 H 对 $\odot O_1$ 的幂，$HC \cdot HN$ 是 H 对 $\odot O_2$ 的幂.

由根轴定理知：H 在它们的根轴上，即以 BE、CD 为直径的两圆的根轴通

过 $\triangle ABC$ 的垂心.

例 7 如图 5-9，已知两个半径不相等的圆 O_1 与圆 O_2 相交于 M、N 两点，且$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 分别与$\odot O$ 内切于 S、T 两点. 求证：$OM \perp MN$ 的充分必要条件是 S、N、T 三点共线.

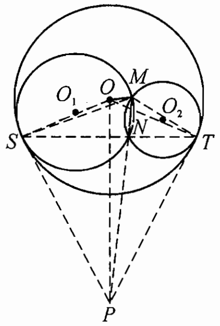


图 5-9

证明 如图 5-9，连结 OS、OT、ST、SM，作公切线 SP、TP，由根轴定理知，P、M、N 三点共线.

又 $\angle OSP = \angle OTP = 90°$，所以 O、S、P、T 四点共圆.

$OM \perp MN \Leftrightarrow \angle OMP = \angle OSP = 90° \Leftrightarrow O$、$M$、$T$、$P$、$S$ 五点共圆.

注意到 SP、TP 为切线，$\angle NSP = \angle SMP$，$\angle NTP = \angle TMP$.

故 O、M、T、P、S 共圆 $\Leftrightarrow \angle SMT + \angle SPT = 180° \Leftrightarrow \angle SMP + \angle TMP + \angle SPT = 180° \Leftrightarrow \angle SPT + \angle PSN + \angle PTN = 180° \Leftrightarrow S$、$N$、$T$ 共线.

例 8 设 O 和 I 分别为$\triangle ABC$ 的外心和内心，$\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，直线 FD 和 CA 相交于点 P，直线 DE 与 AB 相交于点 Q，点 M，N 分别为线段 PE、QF 的中点. 求证：$OI \perp MN$.

证明 如图 5-10，考虑$\triangle ABC$ 与截线 PFD. 由梅氏定理：

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{CP} = \frac{AF}{DC} = \frac{AF}{EC}.$$

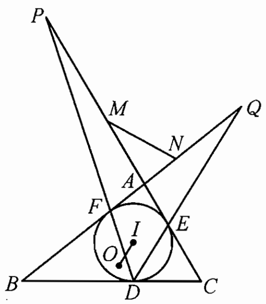


图 5-10

记 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，令 $p = \frac{a+b+c}{2}$，并不妨设 $a > c$，则

$$\frac{PA}{CP} = \frac{PA}{CA+PA} = \frac{PA}{PA+b} = \frac{p-a}{p-c},\ PA = \frac{(p-a)b}{a-c}.$$

而 $PE = PA + AE = \frac{(p-a)b}{a-c} + p - a = \frac{2(p-a)(p-c)}{a-c}$，

$$ME = \frac{1}{2}PE = \frac{(p-a)(p-c)}{a-c},$$

$$MA = ME - AE = \frac{(p-a)(p-c)}{a-c} - (p-a) = \frac{(p-a)^2}{a-c},$$

$$MC = ME + EC = \frac{(p-a)(p-c)}{a-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{a-c}.$$

于是 $MA \cdot MC = ME^2$.

由于 ME 是 M 到 $\triangle ABC$ 内切圆切线长，ME^2 是点 M 到内切圆 I 的幂，而 $MA \cdot MC$ 是 M 到 $\triangle ABC$ 外接圆 O 的幂. 等式“$MA \cdot MC = ME^2$”表示点 M 到 $\triangle ABC$ 外接圆与内切圆的幂相等，因而点 M 在 $\triangle ABC$ 外接圆 O 与内切圆 I 的根轴上. 同理，点 N 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 与内切圆 I 的根轴上，由根轴定理知 $OI \perp MN$.

例 9　如图 5－11，以 O 为圆心的圆通过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A、C，且与 AB、BC 两边分别相交于 K、N 两点，$\triangle ABC$ 和 $\triangle KBN$ 的两外接圆交于 B、M 两点. 证明：$\angle OMB$ 为直角.

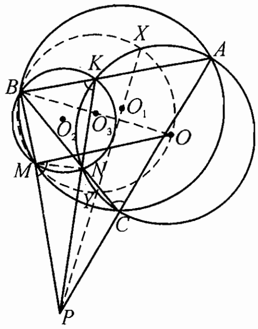


图 5－11

证明　设 $\triangle ABC$、$\triangle BKN$ 的外接圆圆心分别为 O_1、O_2，由题设推知 O、O_1、O_2 三点不共线（否则 B 和 M 重合），而直线 AC、KN、BM 分别为这三个圆中两两圆的根轴，故它们必相交于一点，不妨设交于点 P.

由 $\angle PMN = \angle BKN = \angle NCA$，知 P、M、N、C 四点共圆，故点 B 对此圆的幂等于点 B 对 $\odot O$ 的幂.

设 R 为 $\odot O$ 的半径，则有

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = BO^2 - R^2. \quad ①$$

又点 P 对 $\odot O_2$ 的幂等于点 P 对 $\odot O$ 的幂，即

$$PM \cdot PB = PN \cdot PK = PO^2 - R^2. \quad ②$$

②－①得 $PO^2 - BO^2 = BP(PM - BM)$
$$= (PM + BM)(PM - BM) = PM^2 - BM^2.$$

故 $OM \perp BP$，$\angle BMO = 90°$.

例 10　如图 5－12，设圆 O_1 和圆 O_2 相离，引它们的一条外公切线切圆 O_1 于 A，切圆 O_2 于 C，引它们的一条内公切线切圆 O_1 于 B，切圆 O_2 于 D，求证：直线 AB 和 CD 的交点在两圆的连心线上.

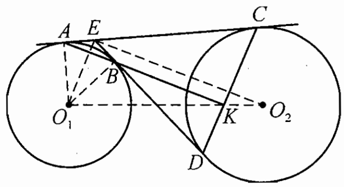


图 5－12

证明　设 AB 和 CD 的交点为 K，AC 与 BD 的交点为 E，连结 O_1E，则 $AB \perp O_1E$，$CD \perp O_2E$.

由于 O_1E 平分 $\angle AEB$，O_2E 平分 $\angle CED$，所以 $O_1E \perp O_2E$，且 $AB \perp CD$，即 K 是分别以 AC 和 BD 为直径的两圆 S_1 和 S_2 的交点.

所以 K 在圆 S_1 和圆 S_2 的根轴上.

下面证明 O_1O_2 是圆 S_1 和圆 S_2 的根轴.

因 $O_1A \perp AC$，所以 O_1A 是圆 S_1 的切线，O_1 关于圆 S_1 的幂是 O_1A^2.

同理，O_1B 是圆 S_2 的切线，O_1 关于圆 S_2 的幂是 O_1B^2.

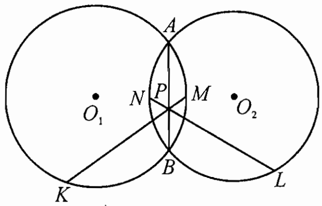
由于 $O_1A^2 = O_1B^2$，所以 O_1 是关于圆 S_1 和 S_2 的等幂点.

同理，O_2 是关于圆 S_1 和圆 S_2 的等幂点，故 O_1O_2 是圆 S_1 和圆 S_2 的根轴.

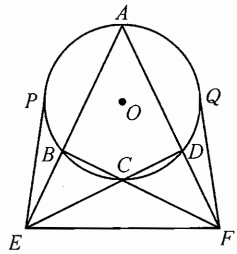
于是，K 在连心线 O_1O_2 上.

习 题 5

1 如图，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 和 B，P 是线段 AB 上一点，KM 是过 P 点的 $\odot O_1$ 的弦，LN 是过 P 点的 $\odot O_2$ 的弦. 求证：K、L、M、N 四点共圆.



（第 1 题）



（第 2 题）

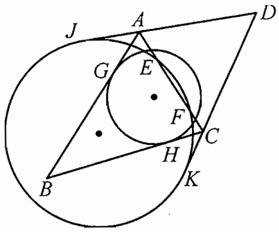
2 如图，$ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，延长 AB 和 DC 相交于 E，延长 AD 和 BC 相交于 F，EP 和 FQ 分别切 $\odot O$ 于 P、Q. 求证：$EP^2 + FQ^2 = EF^2$.

3 设 A、B、C、D 是一条直线上依次排列的四个不同的点，分别以 AC、BD 为直径的圆相交于 X 和 Y，直线 XY 交 BC 于 Z. 若 P 为 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C 和 M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆相交于 B 和 N. 试证：AM、DN 和 XY 三线共点.

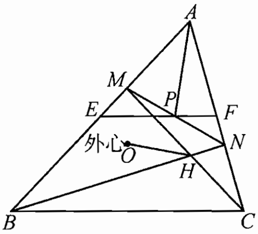
4 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N. 设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线. l 与圆 Γ_1 相切于点 A，与圆 Γ_2 相切于点 B. 设经过点 M 且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C，与圆 Γ_2 还相交于点 D. 直线 CA 和 DB 相交于点 E，直线 AN 和 CD 相交于点 P，直线 BN 和 CD 相交于点 Q. 证明：$EP = EQ$.

5 设 A 是圆 O 的直径 BB' 上或其延长线上任一定点，过 A 引圆 O 的割线 MAM' 或 AMM'，过 A 作 BB' 的垂线交 BM 的延长线于点 N，交 BM' 的延长线于点 N'. 求证：$AN \cdot AN'$ 是定值.

6 某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点，与对角线 AC 相交于 E、F 两点：问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过 E、F 两点，且分别与 DA、DC 的延长线相切？



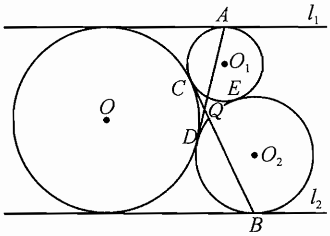
（第 6 题）



（第 7 题）

7 $\triangle ABC$ 中，E、F 分别为 AB、AC 中点，CM、BN 为高，EF 交 MN 于 P，O、H 分别为三角形的外心与垂心. 求证：$AP \perp OH$.

8 已知圆 O 与两条平行线 l_1 和 l_2 相切；第二个圆圆 O_1 切 l_1 于点 A，外切圆 O 于点 C；第三个圆圆 O_2 切 l_2 于点 B，外切圆 O 于点 D，外切圆 O_1 于点 E，AD 交 BC 于 Q. 求证：Q 是 $\triangle CDE$ 的外心.



（第 8 题）

9 设四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，点 M、N 分别是 AD、BC 的中点，点 H_1、H_2（不重合）分别是 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的垂心. 求证：$H_1H_2 \perp MN$.

10 两个大圆圆 A、圆 B 相等且相交，两个小圆圆 C、圆 D 不等亦相交，且交点为 P、Q. 若圆 C、圆 D 既同时与圆 A 内切，又同时与圆 B 外切. 求证：直线 PQ 平分线段 AB.

11 在平面上有三个两两外离的圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3，对于这三个圆外的任意一点 P，将六个点 A_1、B_1、A_2、B_2、A_3、B_3 定义如下：对于 $i=1, 2, 3$，A_i、B_i 是圆 Γ_i 上相异的两点，使得直线 PA_i、PB_i 均与圆 Γ_i 相切. 若 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 三线共点，则称此时的点 P 为"独特的". 求证：若平面上存在独特的点，则所有这样的点落在同一个圆上.

12 等腰 $\triangle ABC$，$AB = AC$，P 在边 BC 的延长线上，X 和 Y 分别是直线 AB

和 AC 上的点. $PX \parallel AC$，$PY \parallel AB$，T 是 $\triangle ABC$ 外接圆上弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点. 证明：$PT \perp XY$.

13 已知非等腰锐角 $\triangle ABC$，AA_1、BB_1 是它的两条高，又线段 A_1B_1 与平行于 AB 的中位线相交于点 C'. 证明：经过 $\triangle ABC$ 的外心和垂心的直线与直线 CC' 垂直.

14 $\triangle ABC$ 中，$\odot I_1$、$\odot I_2$、$\odot I_3$ 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的旁切圆，I、G 是 $\triangle ABC$ 的内心、重心，求证：$\odot I_1$、$\odot I_2$、$\odot I_3$ 的根心在 IG 上.

15 AB、AC 为 $\odot O$ 切线，ADE 为一条割线，M 为 DE 中点，P 为一动点，满足 M、O、P 三点共线，$\odot P$ 为以 P 点为圆心，PD 为半径的圆. 证明：C 点在 $\triangle BMP$ 外接圆与 $\odot P$ 的根轴上.

16 已知 Q 为以 AB 为直径的圆上的一点，$Q \neq A$、B，Q 在 AB 上的投影为 H，以 Q 为圆心、QH 为半径的圆与以 AB 为直径的圆交于点 C、D. 证明：CD 平分线段 QH.

17 已知圆 Γ 和直线 l 不相交，P、Q、R、S 为圆 Γ 上的点，PQ 与 RS、PS 与 QR 分别交于点 A、B，A、B 在直线 l 上. 试确定所有以 AB 为直径的圆的公共点.

18 凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O，$\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的重心分别为 M_1 和 M_2，$\triangle BOC$ 和 $\triangle AOD$ 的垂心分别为 H_1 和 H_2. 证明：$M_1M_2 \perp H_1H_2$.

19 在凸五边形 $ABCDE$ 中，$AB = BC$，$\angle BCD = \angle EAB = 90°$，$P$ 为形内一点，使得 $AP \perp BE$，$CP \perp BD$. 证明：$BP \perp DE$.

20 在 $\angle AOB$ 内部取一点 C，过点 C 作 $CD \perp OA$ 于点 D，作 $CE \perp OB$ 于点 E，再过点 D 作 $DN \perp OB$ 于点 N，过点 E 作 $EM \perp OA$ 于点 M. 证明：$OC \perp MN$.

21 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，$\triangle BOC$ 的外心为 T，点 M 为边 BC 的中点，在边 AB、AC 上分别取点 D、E，使得 $\angle ADM = \angle AEM = \angle BAC$. 证明：$AT \perp DE$.

6 几何变换

一、反射变换

反射变换是平面到自身的变换，若存在一条直线 l，使对于平面上的每一点 P 及其对应点 P'，其连线 PP' 都被定直线 l 垂直平分，则称这种变换为反射变换，定直线 l 称为对称轴. 反射变换有如下性质：

(1) 把图形变为与之全等的图形；

(2) 关于 l 对称的两点连线被 l 垂直平分.

证题过程中使用反射变换，可保留原有图形的性质，且使原来分散条件相对集中，以利于问题的解决.

二、平移变换

平移变换是平面到自身的变换，将平面上任一点 P 变换到 P'，使得：(1)射线 PP' 有给定的方向；(2)线段 PP' 有给定的长度. 则称这种变换为平移变换. 在平移变换下，图形变为与之全等的图形，直线变为与之平行的直线.

在解几何问题时，常利用平移变换使分散的条件集中在一起，具有更紧凑的位置关系或变换成更简单的基本图形.

三、旋转变换

旋转变换是平面到它自身的变换，使原点 O 变换到它自身，其他任何点 X 变到 X'，使得：(1) $OX'=OX$；(2) $\angle XOX'=\theta$（定角）. 则称这样的变换为旋转变换，O 称为旋转中心. 旋转变换保持图形全等，但图形方位可能有变化.

在几何解题中，旋转的作用是使原有图形的性质得以保持，但改变其位置，使能组合成新的有利论证的图形.

例 1 已知六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 中，$AC_1=AB_1$，$BC_1=BA_1$，$CA_1=CB_1$，$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A_1+\angle B_1+\angle C_1$.

求证：$\triangle ABC$ 面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的一半.（2008 年北大自主

招生）

证明　如图 6－1，旋转$\triangle BCA_1$至$BA_1'C_1$，则$\triangle BCA_1 \cong \triangle BA_1'C_1$，显然$\angle AC_1B+\angle BA_1C+\angle CB_1A=360°$，$\angle AC_1B+\angle BC_1A_1'+\angle AC_1A_1'=360°$，所以$\angle AC_1B=\angle AC_1A_1'$.

又$C_1A_1'=CA_1=B_1C$，$AC_1=AB_1$，则$\triangle AC_1A_1' \cong \triangle AB_1C$.

又$AA_1'=AC$，$A_1'B=BC$，$AB=AB$，所以$\triangle ABC \cong \triangle ABA_1'$.

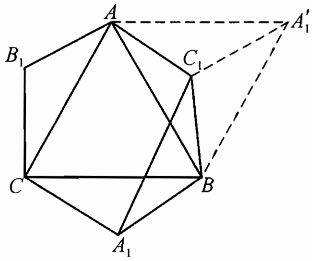


图 6－1

故$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABA_1'}=S_{\triangle AC_1B}+S_{\triangle AB_1C}+S_{\triangle BCA_1}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}S_{AC_1BA_1CB_1}$.

例 2　P是平行四边形$ABCD$内一点，且$\angle PAB=\angle PCB$. 求证：$\angle PBA=\angle PDA$.

证明　将$\triangle ABP$沿向量$\overrightarrow{AD}$平移至DCP'，如图 6－2 设角，则四边形$APP'D$和四边形$BPP'C$均为平行四边形，$\angle 8=\angle 2=\angle 1=\angle 5$，于是四边形$PDP'C$为圆内接四边形，因此，$\angle 4=\angle 7=\angle 6=\angle 3$.

即$\angle PBA=\angle PDA$.

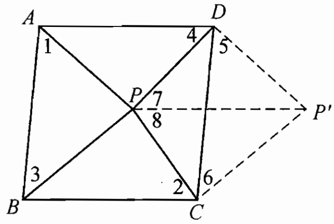


图 6－2

例 3　Fagnano 问题：设$\triangle DEF$的三顶点分别在$\triangle ABC$的三边上，则$\triangle DEF$称为$\triangle ABC$的内接三角形. 证明：在锐角三角形的所有内接三角形中，垂足三角形的周长最短.

证明　如图 6－3 所示，首先以AB为轴将$\triangle ABC$反射为$\triangle ABC_1$，再以BC_1为轴将$\triangle ABC_1$反射为$\triangle A_1BC_1$，再以A_1C_1为反射轴反射成$\triangle A_1B_1C_1$，如此类推，并设E最终被反射成E'，设$\triangle DEF$的三边分别为d、e、f，不难由反射变换保距离知，图中标注的几条边长分别为d、e、f、d、e、f，于是$2(d+e+f)\geqslant EE'$，不难知道$AC /\!/ A_2C_2$，于是EE'是与D、E、F无关的只与三角

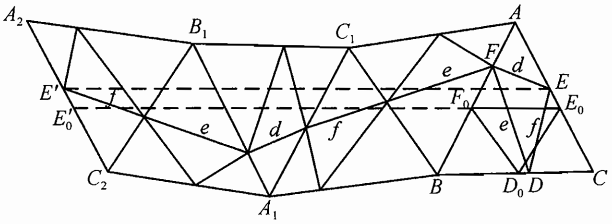


图 6－3

形本身有关的常数，另一方面，若$\triangle DEF$为垂足三角形，则有$\angle DFB=\angle EFA$等等，于是EE'折线上六点共线，取到等号.

所以垂足三角形的周长$=\dfrac{EE'}{2}$是所有内接三角形中周长最短的.

例 4 已知点A、B、C在某平面上.设D、E、F、G、H、I是同一平面上的点，且使得$\triangle ABD$、$\triangle BAE$、$\triangle CAF$、$\triangle DFG$、$\triangle ECH$、$\triangle GHI$为正定向等边三角形.证明:点E是线段AI的中点.

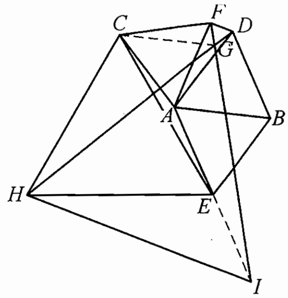


图 6-4

证明 如图 6-4 所示，连结CG、EI在$\triangle ADF$和$\triangle CGF$中，有$AF=CF$，$DF=GF$，又$\angle DFG=\angle AFC=60°$，于是，绕点$F$顺时针旋转$60°$，$\triangle ADF$变换为$\triangle CGF$.

类似地，绕点H顺时针旋转$60°$的几何变换中，$\triangle HCG$变为$\triangle HEI$.

又绕A顺时针旋转$120°$，线段AD变为线段AE，所以，$AE=AD=CG=EI$，且AE和EI与AD的夹角都等于$120°$，即A、E、I三点共线，综上，点E是线段AI的中点.

例 5 如图 6-5，以B_0、B_1为焦点的椭圆与$\triangle AB_0B_1$的边AB_i交于$C_i(i=0,1)$.在AB_0的延长线上任取点P_0，以B_0为圆心、B_0P_0为半径作圆弧$\overparen{P_0Q_0}$交C_1B_0的延长线于点Q_0；以C_1为圆心、C_1Q_0为半径作圆弧$\overparen{Q_0P_1}$交B_1A的延长线于点P_1；以B_1为圆心、B_1P_1为半径作圆弧$\overparen{P_1Q_1}$交B_1C_0的延长线于点Q_1；以C_0为圆心、C_0Q_1为半径作圆弧$\overparen{Q_1P_0'}$交AB_0的延长线于P_0'.求证：

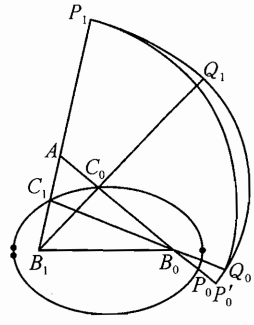


图 6-5

(1) 点P_0'与点P_0重合，且圆弧$\overparen{P_0Q_0}$与$\overparen{P_0Q_1}$相内切于点P_0；

(2) P_0、Q_0、Q_1、P_1四点共圆.(2006 年全国高中数学联赛)

证明 如图 6-5，$\angle Q_0B_0P_0$的角平分线与$\angle AC_1B_0$的角平分线的交点O即为由点P_0到点P_1的旋转变换的旋转中心，旋转角度为$\angle P_0B_0Q_0+\angle Q_0C_1P_1$，且$OP_0=OP_1$.

同理，$\angle P_1B_1Q_1$的角平分线与$\angle Q_1C_0P_0'$的角平分线的交点O'即为由点P_1到点P_0'的旋转变换的旋转中心，旋转角度为$\angle P_1B_1Q_1+\angle Q_1C_0P_0'$，且

$O'P_1 = O'P'_0$.

于是，有 $\angle P_0B_0Q_0 + \angle Q_0C_1P_1 = \pi - \angle A = \angle P_1B_1Q_1 + \angle Q_1C_0P'_0$.

设点 O、O' 在 AB_1 上的投影分别为 D、D'，则 $AD = \dfrac{AC_1 + AB_0 - B_0C_1}{2}$，$AD' = \dfrac{AB_1 + AC_0 - B_1C_0}{2}$.

由于 $B_1C_1 + B_0C_1 = B_1C_0 + B_0C_0$，所以，$AD = AD'$，即 D 与 D' 重合.

又因为点 O、O' 均在 $\angle B_1AB_0$ 的角平分线上，所以 O 与 O' 重合.

从而点 P_0 与点 P'_0 重合，圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相内切于点 P_0，且 P_0、Q_0、Q_1、P_1 四点共圆.

例 6 一个以点 O 为圆心的圆经过△ABC 的顶点 A、C，又与边 AB、BC 分别相交于点 K、N，△ABC 与△KBN 的外接圆交于点 B、M. 求证：$\angle OMB = 90°$.

证明 如图 6-6，设过点 O 且垂直于 BM 的直线为 l.

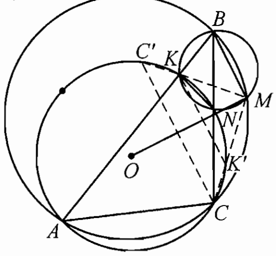


图 6-6

于是，只需证点 M 在直线 l 上.

以 l 为反射轴，作轴反射变换 $S(l)$.

设 $C \to C'$，$K \to K'$.

则 $CC' \perp l$，$KK' \perp l$.

所以，$CC' \parallel KK' \parallel BM$.

连结 $C'K$、KM、CK'、CM、CC'.

又 $\angle KC'C = \angle KAC = \angle BNK = \angle BMK$，所以 C'、K、M 三点共线.

由 $\angle BMC + \angle C'CK' = \angle BMC + \angle CC'K$
$= \angle BMC + \angle BAC = 180°$，

知 C、K'、M 三点共线.

因此，$C'K$、CK' 交于点 M.

故点 M 在直线 l 上.

例 7 在△ABC 中，$AB = AC$，圆 O 是它的外接圆，BN 平分 $\angle ABC$，点 N 在圆 O 上，点 E、F 分别在边 AB、AC 上，满足 $EO \perp BN$，$EF \perp EO$. 求证：$AE^2 = BE \cdot AF$.

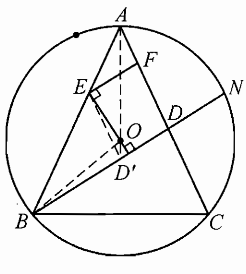


图 6-7

证明 如图 6-7，因为 $EF \perp EO$，$BN \perp EO$，则 $EF \parallel BN$.

所以，$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{FD}$.

故 $AE\cdot FD=BE\cdot AF$.

于是，只需证 $AE=FD$.

由于线段 AE、FD 不在同一个三角形中，故可考虑作平移变换.

作沿向量$\overrightarrow{FE}$平移变换，则四边形 $FED'D$ 为$\square$，设 D 变为 D'.

连结 AO、BO、$D'O$、ED'. 因为

$$\angle ED'B=\angle FDB=\angle C+\frac{1}{2}\angle B,$$

$$\angle EBO=\angle EAO=\frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle BEO=90^\circ-\angle AEF=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B,$$

则
$$\begin{aligned}\angle EOB&=180^\circ-\angle BEO-\angle EBO\\&=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle B\right)-\frac{1}{2}\angle A\\&=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)+\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A\\&=\angle B+\frac{1}{2}\angle C.\end{aligned}$$

易知 $\angle B=\angle C$.

则 $\angle EOB=\angle ED'B$，所以，E, O, D', B 四点共圆.

故
$$\angle ED'O=\angle EBO=\angle EAO,$$

$$\begin{aligned}\angle BOD'+\angle EOB+\angle AOE&=\angle BED'+\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\angle AOE\\&=\angle A+\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\angle AOE\\&=\angle AOE+90^\circ+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A\\&=\angle AOE+90^\circ+\angle AEF+\angle EAO=180^\circ.\end{aligned}$$

因此，D', O, A 三点共线.

又 $\angle ED'O=\angle EAO$，则 $AE=ED'=FD$.

例 8 $\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于 A、B 两点，过 A 作任一割线与两圆交于 P、Q. 两圆在 P、Q 外切线交于 R，直线 BR 交$\odot(O_1O_2B)$于另一点 S. 求证：RS 等于$\odot(O_1O_2B)$直径长.

证明 如图 6－8，以 B 为中心作位似旋转变换使 $\odot O_1\to\odot O_2$，则 P、Q

为变换的对应点，$PR \to RQ$，$PO_1 \to QO_2$.

所以 $\angle PBQ = \angle O_1BO_2 = \angle(RQ, PR) = \pi - \angle PRQ = \angle(O_2Q, O_1P)$.

所以 P、R、Q、B 共圆，且 PO_1、QO_2 交于 C，$\angle O_1CO_2 = \angle O_1BO_2$.

所以 $C \in \odot(O_1O_2B)$.

因为 $\angle BSO_2 = \angle O_2CB = \angle QCB = \angle QRB$，所以 $SO_2 \parallel RQ$.

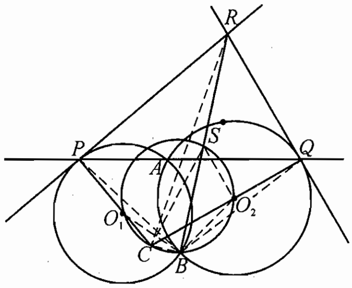


图 6-8

又因为 $RQ \perp CQ$，故 $SO_2 \perp CQ$. 即 CS 为 $\odot O_1O_2B$ 直径.

注意到 $\angle CSB = \angle CO_2B = 2\angle O_2QB = 2\angle CQB = 2\angle CRB$（这里用到 $\angle CBS = \angle CQR = 90^\circ$，$R$，$Q$，$B$，$C$ 四点共圆，从而 $\angle CQB = \angle CRB$），于是 $RS = CS$.

故 RS 等于 $\odot(O_1O_2B)$ 直径长.

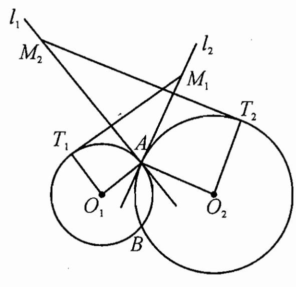
习　题　6

1 已知梯形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 P，点 Q 在平行线 BC、AD 之间，满足 $\angle AQD = \angle CQB$，且 P、Q 在直线 CD 的两侧. 证明：$\angle BQP = \angle DAQ$.

2 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B < \angle C$，设经过点 B、C 且与 AC 切于点 C 的圆为 $\odot O$，直线 AB、CO 分别与 $\odot O$ 交于点 $D(\neq B)$、$P(\neq C)$. 过点 P 作 AO 的平行线与 AC 交于点 E. 直线 EB 交 $\odot O$ 于点 L $(\neq B)$，BD 的中垂线与 AC 交于点 F，LF 交 CD 于点 K. 证明：$EK \parallel CL$.

3 点 O 是平行四边形 $ABCD$ 内的一个点，使得 $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. 证明：$\angle OBC = \angle ODC$.

4 如图，圆 W_1、W_2 的圆心分别为 O_1、O_2，两圆相交于点 A、B. 由点 A 分别向圆 W_1、W_2 作切线 l_1、l_2，点 T_1、T_2 分别位于圆 W_1、W_2 上，使得 $\angle T_1O_1A = \angle AO_2T_2$. 圆 W_1 上过点 T_1 的切线与 l_2 相交于点 M_1，圆 W_2 上过点 T_2 的切线与 l_1 相交于点 M_2. 证明：线段 M_1M_2 的中点位于一条不依赖于点 T_1、T_2 位置的直线上.



（第 4 题）

5 圆内接四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点 K 满

足$\angle AKB=\angle ADC$，I、I'分别为$\triangle ACD$、$\triangle ABK$的内心，线段II'与BD交于点X.证明：A、X、I、D四点共圆.

6 在圆内接四边形$ABCD$中，已知$AB=BC$，$AD=3DC$，R为对角线BD上一点，且满足$DR=2RB$，Q为线段AR上一点，且满足$\angle ADQ=\angle BDQ$.设P为线段AB与直线DQ的交点.若$\angle ABQ+\angle CBD=\angle QBD$，求$\angle APD$的度数.

7 $\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，A'是边BC的中点，AA'与外接圆交于点A''，$A'Q_a\perp AO$，点Q_a在AO上，过点A''的外接圆的切线与$A'Q_a$相交于点P_a.用同样的方式，可以构造点P_b和P_c.证明：P_a、P_b、P_c三点共线.

8 设E、F分别为正方形$ABCD$的边BC、CD上的点，AE、AF分别与对角线BD交于P、Q两点，且$BE+DF=EF$.求证：五边形$PECFQ$内接于圆.

9 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=20^\circ$，点D、E分别在腰AB、AC上，且$\angle CBE=60^\circ$，$\angle DCB=50^\circ$，求$\angle DEB$.

10 将一张正方形纸片$ABCD$折叠，使D点重合于边BC上一点D'，A点折叠后的位置是A'，AB与$A'D'$交于E，设$\triangle BD'E$的内切圆半径为r.证明：$A'E=r$.

11 设B、C是线段AD上的两点，且$AB=CD$.求证：对于平面上任意一点P，都有$PA+PD\geqslant PB+PC$.

12 点D是$\triangle ABC$的外接圆的不包含点A的弧$\overset{\frown}{BC}$上的一点，且$D\neq B$，$D\neq C$，在射线BD和CD上分别取点E、F，使$BE=AC$，$CF=AB$.再设M是线段EF的中点.证明：$\angle BMC$是直角.

13 已知边长分别为a、b、c的$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\odot O_1$内切于$\odot O$，切点T在BC弧上，由点A、B、C分别引$\odot O_1$的切线长顺次为α、β、λ.证明：$a\alpha=b\beta+c\gamma$.

14 由$\triangle ABC$向外作$\triangle BCD$和$\triangle ACE$，使得：$AE=BD$且$\angle BDC+\angle AEC=180^\circ$，$F$是线段$AB$上的一点满足$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{DC}{CE}$.证明：$\dfrac{DE}{CD+CE}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{AC}$.

15 已知圆W的中心为O，BC为直径.点A位于圆W上使得$0^\circ<\angle AOB<120^\circ$.设$D$是不包含$C$点的弧$\overset{\frown}{AB}$的中点.直线$l$通过$O$且平行于直线$AD$，设$l$交直线$AC$于$J$.线段$OA$的垂直平分线交圆$W$于$E$和$F$.求证：$J$是$\triangle CEF$的内心.

16 设$ABCDEF$是凸六边形，$AB=BC=CD$，$DE=EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$，$G$、$H$是六边形内两点，使$\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$.求证：$AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$.

7 三角法

三角法是平面几何的基本而又重要的方法之一.熟练掌握和运用公式是用三角法证明平面几何问题的基础.

正弦定理和余弦定理是三角法证明平面几何问题中用得最多的两个基本定理.

1. 正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($a$、$b$、$c$ 是三角形的三边，R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径).

2. 余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3. 积化和差公式：$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$，$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

4. 和差化积公式：$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. 三倍角公式：$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$，$\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{4}\cdot\sin 3\alpha$，$\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$，$\tan\alpha\cdot\tan(60^\circ+\alpha)\cdot\tan(60^\circ-\alpha)=\tan 3\alpha$.

6. 三角形中的恒等式很多，其中用得较多的有：

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cdot\cos C,$$
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C,$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1.$$

7. 设 r、R 分别为$\triangle ABC$的内切圆，外接圆半径，则有 $\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos A+\cos B+\cos C-1$.

事实上，设 I 是内心，$\triangle BIC$ 中，$r=BI\sin\frac{B}{2}$，而由正弦定理，$\frac{BI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{BC}{\sin\angle BIC}=\frac{2R\sin A}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$，所以 $r=\frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，所以$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

例 1　(四边形的余弦定理)设凸四边形 $ABCD$ 对角线交于点 P，$\angle APB=\theta$，求证：

$$\cos\theta=\frac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2AC\cdot BD}.$$

证明　如图 7-1，设 PA、PB、PC、PD 的长分别为 a、b、c、d，则有

$$AD^2=a^2+d^2+2ad\cos\theta,$$
$$BC^2=b^2+c^2+2bc\cos\theta,$$
$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta,$$
$$CD^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta.$$

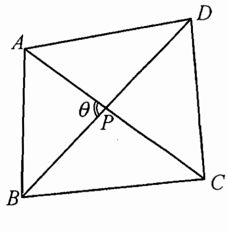


图 7-1

前两式之和减去后两式之和，得

$$\begin{aligned}AD^2+BC^2-AB^2-CD^2&=2(ad+bc+ab+cd)\cos\theta\\&=2AC\cdot BD\cos\theta.\end{aligned}$$

例 2　如图 7-2，给定凸四边形 $ABCD$，$\angle B+\angle D<180°$，P 是平面上的动点，令 $f(P)=PA\cdot BC+PD\cdot CA+PC\cdot AB$.

(1) 求证：当 $f(P)$ 达到最小值时，P、A、B、C 四点共圆；

(2) 设 E 是$\triangle ABC$外接圆 O 的 AB 上一点，满

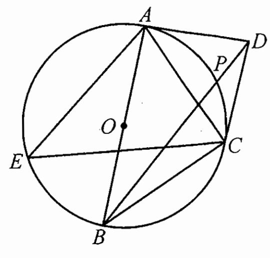


图 7-2

足：$\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1$，$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ECA$，又 DA、DC 是圆 O 的切线，$AC=\sqrt{2}$，求 $f(P)$ 的最小值.（2008 年全国高中数学联赛）

（1）证：由托勒密不等式，对平面上的任意点 P，有

$$PA\cdot BC+PC\cdot AB\geqslant PB\cdot AC.$$

因此
$$\begin{aligned}f(P)&=PA\cdot BC+PC\cdot AB+PD\cdot CA\\&\geqslant PB\cdot CA+PD\cdot CA=(PB+PD)\cdot CA.\end{aligned}$$

因为上面不等式当且仅当 P、A、B、C 顺次共圆时取等号，因此当且仅当 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆且在 AC 上时，$f(P)=(PB+PD)\cdot CA$.

又因 $PB+PD\geqslant BD$，此不等式当且仅当 B、P、D 共线且 P 在 BD 上时取等号.

因此当且仅当 P 为$\triangle ABC$ 的外接圆与 BD 的交点时，$f(P)$ 取最小值 $f(P)_{\min}=AC\cdot BD$.

故当 $f(P)$ 达最小值时，P、A、B、C 四点共圆.

（2）记 $\angle ECB=\alpha$，则 $\angle ECA=2\alpha$，由正弦定理有

$$\frac{AE}{AB}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而
$$\sqrt{3}\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha,$$

即
$$\sqrt{3}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha,$$

所以
$$3\sqrt{3}-4\sqrt{3}(1-\cos^2\alpha)-4\cos\alpha=0,$$

整理得
$$4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0,$$

解得
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 或 }\cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{（舍去）},$$

故
$$\alpha=30^\circ,\ \angle ACE=60^\circ.$$

由已知 $\frac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\frac{\sin(\angle EAC-30^\circ)}{\sin\angle EAC}$，有

$$\sin(\angle EAC-30^\circ)=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC,$$

即
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\frac{1}{2}\cos\angle EAC=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC,$$

整理得 $$\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\frac{1}{2}\cos\angle EAC,$$

故 $$\tan\angle EAC=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3},$$

可得 $$\angle EAC=75^\circ,$$

从而 $\angle E=45^\circ$，$\angle DAC=\angle DCA=\angle E=45^\circ$，$\triangle ADC$ 为等腰直角三角形.

因 $AC=\sqrt{2}$，则 $CD=1$.

又 $\triangle ABC$ 也是等腰直角三角形，故 $BC=\sqrt{2}$，$BD^2=1+2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cos 135^\circ=5$，$BD=\sqrt{5}$.

故 $f(P)_{\min}=BD\cdot AC=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

例 3 如图 7－3，在三角形 ABC 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上点，使得 $\angle CBD=40^\circ$，$\angle BCE=70^\circ$，F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明：直线 AF 和直线 BC 垂直.

证明 设 $BC=1$，分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCF$ 中用正弦定理，得

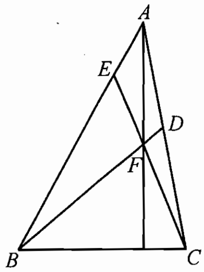


图 7－3

$$AB=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ},AC=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ},\ BF=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 70^\circ},\ CF=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ},$$

而

$$\begin{aligned}
&AF\perp BC\Leftrightarrow AB^2-AC^2=BF^2-CF^2\\
&\Leftrightarrow\frac{\sin^2 80^\circ-\sin^2 60^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{\sin^2 70^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin^2 70^\circ}\\
&\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 160^\circ)}{\sin^2 40^\circ}=\frac{\frac{1}{2}(\cos 80^\circ-\cos 140^\circ)}{\sin^2 70^\circ}\\
&\Leftrightarrow\frac{\sin 140^\circ\sin 20^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{\sin 110^\circ\sin 30^\circ}{\sin^2 70^\circ}\\
&\Leftrightarrow\sin 40^\circ\sin 30^\circ=\sin 20^\circ\sin 70^\circ\\
&\Leftrightarrow\sin 40^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ.
\end{aligned}$$

这是显然的，故命题得证.

注 此题是 1998 年加拿大的一道竞赛题，证法很多，读者可以试着给出自己的证法.

例 4　如图 7－4，已知$\triangle ABC$中，O是三角形内一点满足：$\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$. 求证：$\triangle ABC$三边长成等比数列.

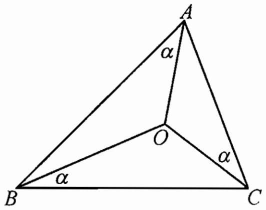


图 7－4

证明　如图 7－4，设$\angle BAO=\angle CBO=\angle ACO=\alpha$.

先证 $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$.　　*

在$\triangle OAB$中，由正弦定理：$\dfrac{AB}{\sin\angle AOB}=\dfrac{OB}{\sin\angle BAO}$，

而 $\sin\angle AOB=\sin(\angle BAO+\angle ABO)=\sin(\angle CBO+\angle ABO)=\sin B$，

所以
$$\frac{AB}{\sin B}=\frac{OB}{\sin\alpha}. \quad ①$$

同理$\triangle OBC$中有
$$\frac{BC}{\sin C}=\frac{OB}{\sin(C-\alpha)}. \quad ②$$

$\dfrac{①}{②}$，有$\dfrac{AB\sin C}{BC\sin B}=\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}$，即$\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}$，

而 $\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin C\cos\alpha-\cos C\sin\alpha}{\sin\alpha}=\sin C\cdot\cot\alpha-\cos C$.

所以 $\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\sin C\cdot\cot\alpha-\cos C$，即 $\cot\alpha=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}+\cot C=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}+\cot C=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}+\cot C=\cot A+\cot B+\cot C$.

*式得证，由*式及已知条件知，$\alpha=\dfrac{A}{2}$. 从而有 $\cot\dfrac{A}{2}=\cot A+\cot B+\cot C$，

而 $\cot\dfrac{A}{2}-\cot A=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}$，$\cot B+\cot C$

$$=\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C},$$

所以 $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，所以 $\sin^2 A=\sin B\sin C$，即 b，a，c 成等比数列.

注：(1) 这是一道北大保送生考试题，在第一章我们曾用相似方法给出了证明，这里我们用的是三角方法；

(2) 若O是$\triangle ABC$内一点，满足$\angle BAO=\angle CBO=\angle ACO=\alpha$这样的点$O$称为布洛卡点，布洛卡点的一个基本性质是：$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$.

例5 如图 7－5，设$\triangle ABC$是锐角三角形，点D、E、F分别在边BC、CA、AB上，线段AD、BE、CF经过$\triangle ABC$的外心O. 已知以下六个比值

$$\frac{BD}{DC}、\frac{CE}{EA}、\frac{AF}{FB}、\frac{BF}{FA}、\frac{AE}{EC}、\frac{CD}{DB}$$

中至少有两个是整数. 求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.（2007 第六届女子数学奥林匹克）

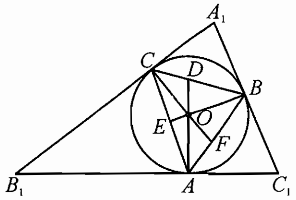


图 7－5

证明 从六个比值中取出两个，共有两种类型：

(1)涉及同一边；(2)涉及不同的边.

(1) 如果同一边上的两个比值同时是整数，不妨设为$\frac{BD}{DC}$、$\frac{CD}{DB}$. 因它们互为倒数，又同是整数，所以，必须都取 1，则 $BD=DC$.

由于 O 是$\triangle ABC$ 的外心，进而得 AD 是边 BC 的中垂线. 于是，$AB=AC$.

(2) 记 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$.

因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以，

$$\angle BOC=2\alpha，\angle COA=2\beta，\angle AOB=2\gamma.$$

于是，$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAC}}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$.

同理 $$\frac{CE}{EA}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma}，\frac{AE}{FB}=\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

若上述六个比值中有两个同时是整数且涉及不同的边时，则存在整数 m、n，使得

$$\sin 2x=m\sin 2z \text{ 且 } \sin 2y=n\sin 2z， \quad ①$$

或 $$\sin 2z=m\sin 2x \text{ 且 } \sin 2z=n\sin 2y， \quad ②$$

其中，x、y、z 是 α、β、γ 的某种排列.

以下构造$\triangle A_1B_1C_1$，使得它的三个内角分别为 $180°-2\alpha$，$180°-2\beta$，$180°-2\gamma$.

如图 7－5，过点 A、B、C 分别作$\triangle ABC$外接圆的切线，所围成的$\triangle A_1B_1C_1$ 即满足要求.

根据正弦定理，知$\triangle A_1B_1C_1$ 的三边与 $\sin 2\alpha$、$\sin 2\beta$、$\sin 2\gamma$ 成正比.

在式①、②两种情况下，可知其三边之比分别为 $1:m:n$ 或 $m:n:mn$.

对于式①，由三角形两边之和大于第三边，可知必须 $m=n$；

对于式②，要保证 $m+n>mn$，即 $(m-1)(n-1)<1$，由此，m、n 中必有一个为 1.

无论哪种情况，都有 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等腰三角形.

因此，$\triangle ABC$ 也是等腰三角形.

例 6 证明 Morley 定理：如图 7－6，设 $\triangle ABC$ 内有三点 D、E、F，$\angle DBC=\angle FBA=\frac{1}{3}\angle ABC$，$\angle FAB=\angle EAC=\frac{1}{3}\angle BAC$，$\angle ECA=\angle DCB=\frac{1}{3}\angle ACB$，则 $\triangle DEF$ 是正三角形.

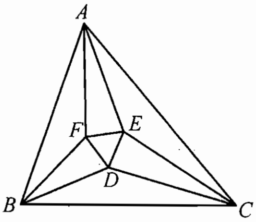


图 7－6

证明 不妨设 $\triangle ABC$ 对应角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.

先证
$$AF=8R\sin\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)\sin\frac{\angle B}{3}\sin\frac{\angle C}{3},$$

这是因为
$$\frac{AF}{AB}=\frac{\sin\frac{\angle B}{3}}{\sin\frac{\angle A+\angle B}{3}}=\frac{\sin\frac{\angle B}{3}}{\sin\left(60^\circ-\frac{\angle C}{3}\right)},$$

于是
$$AF=AB\cdot\frac{\sin\frac{\angle B}{3}}{\sin\left(60^\circ-\frac{\angle C}{3}\right)}=2R\cdot\sin\angle C\cdot\frac{\sin\frac{\angle B}{3}}{\sin\left(60^\circ-\frac{\angle C}{3}\right)}$$
$$=8R\cdot\sin\angle C\cdot\sin\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)\cdot\sin\frac{\angle B}{3}.$$

（这里用到 $\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{4}\cdot\sin 3\alpha$.）

类似地有，$AE=8R\cdot\sin\left(60^\circ+\frac{\angle B}{3}\right)\cdot\sin\frac{\angle B}{3}\cdot\sin\frac{\angle C}{3}$，于是 $EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos\frac{\angle A}{3}=64R^2\sin^2\frac{\angle B}{3}\sin^2\frac{\angle C}{3}\left(\sin^2\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)+\sin^2\left(60^\circ+\frac{\angle B}{3}\right)\right)-2\times64R^2\cdot\sin^2\frac{\angle B}{3}\sin^2\frac{\angle C}{3}\sin\left(60^\circ+\frac{\angle B}{3}\right)\sin\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)\cdot\cos\frac{\angle A}{3}=64R^2\sin^2\frac{\angle B}{3}\sin^2\frac{\angle C}{3}\left[\sin^2\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)+\sin^2\left(60^\circ+\frac{\angle B}{3}\right)-2\sin\left(60^\circ+\frac{\angle B}{3}\right)\cdot\sin\left(60^\circ+\frac{\angle C}{3}\right)\cdot\cos\frac{A}{3}\right]=64R^2\sin^2\frac{\angle B}{3}\sin^2\frac{\angle C}{3}\left[1+\right.$

$\cos\dfrac{\angle A}{3}\cdot\cos\left(\dfrac{\angle C}{3}-\dfrac{\angle B}{3}\right)-2\sin\left(60^\circ+\dfrac{\angle B}{3}\right)\sin\left(60^\circ+\dfrac{\angle C}{3}\right)\cos\dfrac{A}{3}\Big]=$ $64R^2\sin^2\dfrac{\angle B}{3}\cdot\sin^2\dfrac{\angle C}{3}\left[1-\cos^2\dfrac{\angle A}{3}\right]=64R^2\sin^2\dfrac{\angle A}{3}\sin^2\dfrac{\angle B}{3}\sin^2\dfrac{\angle C}{3}$，于是 $EF=8R\sin\dfrac{\angle A}{3}\sin\dfrac{\angle B}{3}\sin\dfrac{\angle C}{3}$，是关于 A、B、C 对称的值，所以 $DF=DE=EF$.

例 7 如图 7-7，已知 O、I 分别是三角形 ABC 的外心和内心，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$. 问当且仅当 a，b，c 满足什么条件时，有 $OI\perp IB$？证明你的结论.（注：若 O、I 重合时，也算成立.）

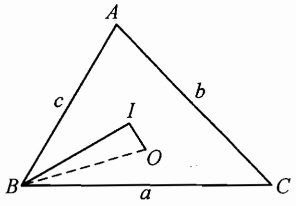


图 7-7

解 因为 $OI\perp IB\Leftrightarrow OI^2+BI^2=OB^2$. 令 $\triangle ABC$ 内切圆半径 r，外接圆半径为 R. 由欧拉定理 $OI^2=R^2-2Rr$，且 $BI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$. 所以 $R^2-2Rr+\left(\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}\right)^2=R^2$. 故 $\dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{B}{2}}=2Rr$，$r=2R\sin^2\dfrac{B}{2}$. 所以 $\dfrac{r}{R}=1-\cos B$. 又 $\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1$（知识点 7）. 所以 $\cos A+\cos B+\cos C-1=1-\cos B$. $\cos A+\cos C=2-2\cos B$. 所以 $2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin^2\dfrac{B}{2}$，$2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin^2\dfrac{B}{2}$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin\dfrac{B}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\dfrac{B}{2}\neq0$. 所以 $\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}$.

另一方面，$a+c=2b\Leftrightarrow\sin A+\sin C=2\sin B\Leftrightarrow2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}$. 综上，当且仅当 $a+c=2b$ 时，$OI\perp IB$.

例 8 如图 7-8，设 P 是锐角三角形 ABC 内一点，AP，BP，CP 分别交边 BC，CA，AB 于点 D，E，F，已知 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$，求证：$P$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.（2007 年西部数学奥林匹克）

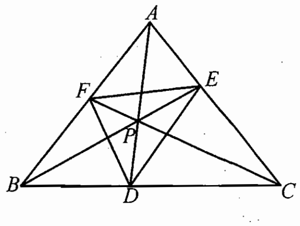


图 7-8

证明 记 $\angle EDC=\alpha$，$\angle AEF=\beta$，$\angle BFD=\gamma$，用 A，B，C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角的大

小.则

$$\begin{aligned}\angle AFE &= \angle BFE + \angle BEF = (\angle B - \angle DBE) + (\angle DEF - \angle DEB) \\ &= (\angle B - \angle DBE) + (\angle B - \angle DEB) 2B - (\angle DBE + \angle DEB) \\ &= 2B - \alpha.\end{aligned}$$

同理可证：$\angle BDF = 2C - \beta$，$\angle CED = 2A - \gamma$.

现在设 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DEC$ 的外接圆半径为 R_1 和 R_2，则由正弦定理及 $\angle EFD = C$，可知 $2R_1 = \dfrac{DE}{\sin\angle EFD} = \dfrac{DE}{\sin C} = 2R_2$，故 $R_1 = R_2$. 类似可得 $\triangle DEF$ 和 $\triangle AEF$，$\triangle BDF$ 的外接圆半径相等. 所以 $\triangle DEF$，$\triangle AEF$，$\triangle BDF$ 和 $\triangle DEC$ 这四个三角形的外接圆半径都相同，记为 R.

利用正弦定理得：

$$\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{EA}{\sin(2B-\alpha)} = \frac{AF}{\sin\beta} = \frac{FB}{\sin(2C-\beta)} = \frac{BD}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin(2A-\gamma)} = 2R. \tag{①}$$

再由 Ceva 定理可知 $\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC} = 1$，结合上式得

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(2B-\alpha)\sin(2C-\beta)\sin(2A-\gamma)} = 1. \tag{②}$$

若 $\alpha < B$，则 $\alpha = \angle EDC < \angle EFA = 2B - \alpha$，于是

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - \angle EFA - \angle EFD = 180^\circ - \angle EFA - C \\ &< 180^\circ - \angle EDC - C = \angle CED = 2A - \gamma.\end{aligned}$$

类似可知 $\beta < 2C - \beta$.

注意到，当 $0 < x < y < x + y < 180^\circ$ 时，有 $\sin x < \sin y$. 所以，由 $0 < \alpha < 2B - \alpha < \alpha + (2B - \alpha) = 2B < 180^\circ$（这里用到 $\triangle ABC$ 为锐角三角形）可得 $\sin\alpha < \sin(2B-\alpha)$，同理 $\sin\beta < \sin(2C-\beta)$，$\sin\gamma < \sin(2A-\gamma)$. 这与②矛盾.

类似地，若 $\alpha > B$，可得②的左边小于右边，矛盾. 所以，$\alpha = B$. 同理 $\beta = C$，$\gamma = A$. 因此，由①可知 D，E，F 分别为 BC，CA，AB 的中点. 从而，P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

例 9　如图 7-9，AB 为圆 ω 的直径，直线 l 切$\odot\omega$ 于 A. C、M、D 在 I 上满足 $CM = DM$，又设 BC、BD 交$\odot\omega$ 于 P、Q，$\odot\omega$ 切线 PR、QR 交于 R. 求证：R 在 BM 上.

证明　连结 PA、QA，设 BR 交$\odot\omega$ 于 T，连结

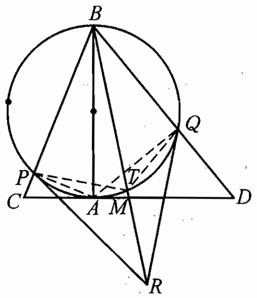


图 7-9

PT、QT.

在$\triangle BMC$与$\triangle BMD$中用正弦定理得

$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin C}=\frac{CM}{BM}=\frac{DM}{BM}=\frac{\sin\angle DBM}{\sin D}.$$

于是
$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle DBM}=\frac{\sin C}{\sin D}.$$

注意到 $\angle BPA=\angle BAC=\angle BAD=\angle BQA=90^\circ$.

故
$$\angle C=\angle BAP,\ \angle D=\angle BAQ.$$

则
$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle DBM}=\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle BAQ}=\frac{BP}{BQ}. \qquad ①$$

另一方面，易知$\triangle RTP\backsim\triangle RPB$，$\triangle RTQ\backsim\triangle RQB$.

因此
$$\frac{BP}{PT}=\frac{BR}{PR}=\frac{BR}{QR}=\frac{BQ}{QT}.$$

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{PT}{QT}=\frac{\sin\angle PBT}{\sin\angle QBT}=\frac{\sin\angle CBR}{\sin\angle DBR}. \qquad ②$$

由①②两式知
$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle DBM}=\frac{\sin\angle CBR}{\sin\angle DBR}.$$

又
$$\angle CBM+\angle DBM=\angle CBR+\angle DBR<\pi.$$

由上式易知
$$\angle DBM=\angle DBR.$$

（事实上，上式等价于 $\sin\angle CBD\cot\angle DBM-\cos\angle CBD=\sin\angle CBD\cos\angle DBR-\cos\angle CBD$）.

所以B、M、R三点共线，得证.

注 在有圆的情况下，角度较易转化，因此应尽量把线段比化为角度比，再通过角度比求解题目.

例 10 已知锐角三角形ABC，CD是高，点M是AB中点.过点M的直线分别交射线CA、CB于点K、L，且$CK=CL$.求证：若$\triangle CKL$的外心为点S，则$SD=SM$.

证明 如图7-10，不妨设$AC\geqslant BC$，易知此时点K在AC上，点L在CB延长线上.

由正弦定理知

$$\frac{AK}{AM}=\frac{\sin\angle AMK}{\sin\angle AKM},\ \frac{BL}{BM}=\frac{\sin\angle BML}{\sin\angle BLM},$$

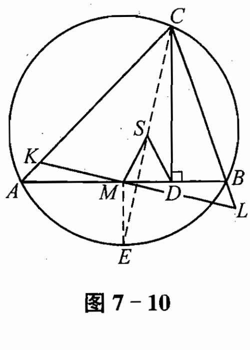


图 7-10

由对顶角相等及 $\angle AKM+\angle BLM=180^\circ$，得

$$\frac{AK}{AM}=\frac{BL}{BM},$$

即 $AK=BL$.

这样一来，便有

$$CK=CL=\frac{AC+BC}{2},\ CS=\frac{CK}{2\cos\frac{\angle ACB}{2}}=\frac{AC+BC}{4\cos\frac{\angle ACB}{2}},$$

延长 CS 交 $\triangle ABC$ 外接圆 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 E，则点 E 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点.

若设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则 $CE=2R\sin\left(\angle CAB+\frac{\angle ACB}{2}\right)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{CE}{CS}&=2R\sin\left(\angle CAB+\frac{\angle ACB}{2}\right)\cdot\frac{2\cos\frac{\angle ACB}{2}}{R(\sin\angle ABC+\sin\angle CAB)}\\&=\frac{4\sin\left(\angle CAB+\frac{\angle ACB}{2}\right)\cos\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\angle CAB+\sin\angle ABC}\\&=\frac{2(\sin(\angle CAB+\angle ACB)+\sin\angle CAB)}{\sin\angle CAB+\sin\angle ABC}\\&=\frac{2(\sin\angle ABC+\sin\angle CAB)}{\sin\angle CAB+\sin\angle ABC}=2.\end{aligned}$$

这表明，点 S 为 CE 中点. 又因为 $ME\perp AB$，$CD\perp AB$，故点 S 在 MD 的中垂线上. 故 $SD=SM$.

例 11　如图 7－11，已知 $\triangle ABC$，$\angle C<\angle A<90^\circ$，$D\in AC$，且 $BD=BA$，$\triangle ABC$ 内切圆与 AB、AC 分别切于 K、L. 设 J 是 $\triangle BCD$ 内心. 证明，KL 平分线段 AJ.

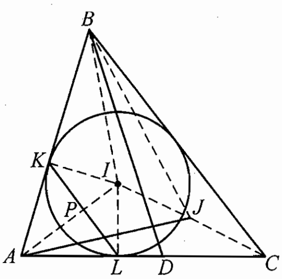


图 7－11

证明　设 I 为 $\triangle ABC$ 内心，$AI\cap KL=P$，连结 IK、IL、BI、BJ、IJ.

设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r，三内角为 A、B、C.

由于 $BI=\dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$ 且 $\dfrac{BI}{\sin\angle BJI}=\dfrac{IJ}{\sin\angle IBJ}$，

$$\angle IBJ=\frac{\angle ABC-\angle DBC}{2}=\frac{\angle ABD}{2}=\frac{180^\circ-2A}{2}=90^\circ-A,$$

$\angle IJB=180^\circ-\angle IBJ-\angle BIJ=180^\circ-(90^\circ-A)-\left(90^\circ+\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{A}{2}$.（这里用到 C、I、J 三点共线）

所以 $IJ=\dfrac{BI}{\sin\dfrac{A}{2}}\sin(90^\circ-A)=\dfrac{BI}{\sin\dfrac{A}{2}}\cos A$.

J 到 KL 的距离 $=PI+IJ\sin\dfrac{B}{2}=PI+\dfrac{r\cos A}{\sin\dfrac{A}{2}}$，$A$ 到 KL 的距离为 AP.

而 KL 平分 $AJ\Leftrightarrow A$ 到 KL 的距离 $=J$ 到 KL 的距离

$$\Leftrightarrow AP-PI=\frac{r\cos A}{\sin\frac{A}{2}}. \qquad ①$$

①式左边 $=r\cot\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}-r\sin\dfrac{A}{2}=r\left(\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}-\sin\dfrac{A}{2}\right)=r\cdot$
$\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{r\cos A}{\sin\dfrac{A}{2}}=$ ① 式右边.

故 KL 平分 AJ，证毕.

例 12 如图 7 - 12，凸四边形 $ABFD$ 中，$AB+BF=AD+DF$. 延长 AB 与 DF 相交于点 C，延长 AD 与 BF 相交于 E. 求证：$AC+CF=AE+EF$.

证明 连结 AF，并分别记角如图 7 - 12 所示.

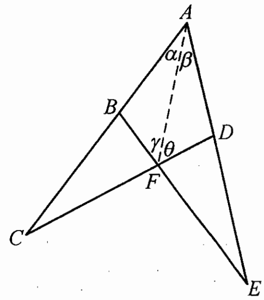


图 7 - 12

首先，在△ABF 中，由正弦定理有：

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BF}{\sin\alpha}=\frac{AF}{\sin(\gamma+\alpha)},$$

所以 $AB+BF=AF\cdot\dfrac{\sin\gamma+\sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)}$.

同理，$AD+DF=AF\cdot\dfrac{\sin\theta+\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)}$.

所以 $AB+BF=AD+DF\Leftrightarrow\dfrac{\sin\gamma+\sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)}=\dfrac{\sin\theta+\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)}$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}=\cos\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\theta+\beta+\gamma-\alpha}{2}+\cos\frac{\theta+\beta-\gamma+\alpha}{2}$$
$$=\cos\frac{\gamma+\alpha+\theta-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma+\alpha-\theta+\beta}{2}.$$

另一方面：$AC+CF=AE+EF\Leftrightarrow\dfrac{\sin\theta+\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=\dfrac{\sin\gamma+\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$，

$\Leftrightarrow\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}=\sin\dfrac{\gamma+\beta}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}$，

即 $-\dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{\theta+\alpha+\gamma-\beta}{2}-\cos\dfrac{\theta+\alpha-\gamma+\beta}{2}\right]=-\dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{\gamma+\beta+\theta-\alpha}{2}-\cos\dfrac{\gamma+\beta-\theta+\alpha}{2}\right]\Leftrightarrow\cos\dfrac{\theta+\alpha+\gamma-\beta}{2}-\cos\dfrac{\theta+\alpha-\gamma+\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma+\beta+\theta-\alpha}{2}-\cos\dfrac{\gamma+\beta-\theta+\alpha}{2}$.

故由 $AB+BF=AD+DF$ 可以推出 $AC+CF=AE+EF$.

例 13 如图 7－13 已知锐角$\triangle ABC$ 的垂心为 H，内心为 I，且满足 $AC\neq BC$，CH，CI 分别与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D、L. 证明：$\angle CIH=90^\circ$ 的充分必要条件是 $\angle IDL=90^\circ$.

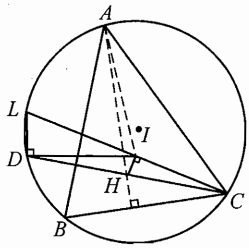


图 7－13

证明 不妨设 $\angle B>\angle A$，外接圆半径为 R，

所以 $\angle HCL=\angle HCA-\angle ICA=90^\circ-\angle A-\dfrac{\angle C}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(180^\circ-2\cdot\angle A-180^\circ+\angle A+\angle B)=\dfrac{1}{2}\cdot(\angle B-\angle A)$.

由正弦定理：$CH=\sin\angle HAC\cdot\dfrac{AC}{\sin\angle AHC}=\cos\angle C\cdot\dfrac{AC}{\sin\angle B}$

$=2R\cdot\cos\angle C$，

同理，$CI=\dfrac{\sin\angle IAC\cdot AC}{\sin\angle AIC}=\dfrac{\sin\dfrac{\angle A}{2}\cdot(2R\sin\angle B)}{\sin\left(90^\circ+\angle\dfrac{B}{2}\right)}$

$$=\frac{\sin\dfrac{\angle A}{2}\cdot 4R\cdot\sin\dfrac{\angle B}{2}\cdot\cos\dfrac{\angle B}{2}}{\cos\dfrac{\angle B}{2}}=4R\cdot\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}.$$

$$LD=2R\cdot\sin\angle LCD=2R\cdot\sin\angle HCI=2R\cdot\sin\frac{\angle B-\angle A}{2}.$$

由鸡爪定理：$LI=LB=2R\cdot\sin\angle LCB=2R\cdot\sin\frac{\angle C}{2}$.

$$\angle CLD=\angle CAD=\angle A+\angle DCB=\angle A+90^\circ-\angle B.$$

于是，$\angle IDL=90^\circ$ 的充分必要条件是 $LD=LI\cdot\cos\angle DLC$，即 $2R\cdot\sin\frac{\angle B-\angle A}{2}=2R\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cdot\cos(90^\circ-\angle B+\angle A)=2R\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cdot\sin(\angle B-\angle A)=4R\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cdot\sin\frac{\angle B-\angle A}{2}\cdot\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}$ 或者 $1=2\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cdot\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}$，这就相当于 $\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}=\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}\cdot 2\cdot\sin^2\frac{\angle C}{2}$.

另一方面，$\angle CIH=90^\circ$ 即 $CI=CH\cdot\cos\angle ICH$，

等价于 $4R\cdot\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}=\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}\cdot 2R\cdot\cos\angle C$，消去 $2R$ 得 $2\cdot\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}=\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}\cdot\left(1-2\cdot\sin^2\frac{\angle C}{2}\right)$，即 $\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}-\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}=\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\angle C}{2}\right)\Leftrightarrow\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}=2\cos\frac{\angle B-\angle A}{2}\cdot\sin^2\frac{\angle C}{2}$.

于是 $\angle CIH=90^\circ$ 的充要条件是 $\angle IDL=90^\circ$.

习　题　7

1 设与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切并与边 AB、AC 相切的圆为 C_a，记 r_a 为圆 C_a 的半径，r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径. 类似地定义 r_b、r_c. 证明：$r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$.

2 已知圆 W 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆，设圆 W 与圆 W_1 外切且切点异于点 A、B、C，点 A_1、B_1、C_1 在圆 W_1 上，且使得 AA_1、BB_1、CC_1 与圆 W_1 相切. 证明：线段 AA_1、BB_1、CC_1 中的一线段的长度等于另两线段长度之和.

3 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle B<\angle C$，AO 交边 BC 于点 D. $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外心分别为 E、F. 在 BA 和 CA 的延长线上分别取点 G 和 H，使

得 $AG=AC$，$AH=AB$. 证明：四边形 $EFGH$ 是矩形的充分必要条件是 $\angle ACB-\angle ABC=60^\circ$.

4 已知 $\triangle ABC$ 的外心 O，P 为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点. 由 P 向 BO 作垂线交 AB 于 S，交 BC 于 T. 由 P 向 AO 作垂线交 AB 于 Q，交 AC 于 R. 证明：(1) $\triangle PQS$ 是等腰三角形；(2) $PQ^2=QR\cdot ST$.

5 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=2\angle ABC$，点 D 是 BC 边上一点，使得 $2\angle BAD=\angle ABC$. 证明：$\dfrac{1}{BD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

6 设 R、r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径，R'、r' 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径和内切圆半径. 证明：若 $\angle C=\angle C'$，$Rr'=R'r$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

7 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle B=45^\circ$，O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心，且 $\sqrt{2}OI=AB-AC$. 求 $\sin A$.

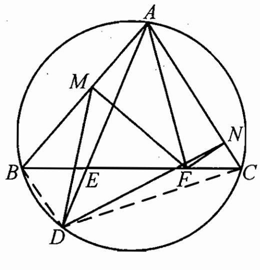
8 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三条边，$a\leqslant b\leqslant c$，R 和 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径. 令 $f=a+b-2R-2r$，试用角 C 的大小来判定 f 的符号.

9 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，从 A 作 BC 的高，垂足为 P，且 $\angle BCA\geqslant\angle ABC+30^\circ$. 证明：$\angle CAB+\angle COP<90^\circ$.

10 圆 W 内切于四边形 $ABCD$，I 是圆 W 的圆心，且有 $(AI+DI)^2+(BI+CI)^2=(AB+CD)^2$. 证明：四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

11 已知 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆、AB、AC 均相切，切点分别为 T、P、Q，I 是 PQ 中点. 证明：I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心.

12 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E、F 满足 $\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$，$FN\perp AC$，垂足为 M、N. 延长 AE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D. 证明：四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等.



(第 12 题)

13 已知三角形 ABC 的内心为 I，外心为 O，点 B 关于圆 O 的对径点为 K，在 AB 的延长线上取点 N，CB 的延长线上取点 M，使得 $MC=NA=S$，S 为三角形 ABC 的半周长. 证明：$IK\perp MN$.

8 完全四边形、调和点列

本节介绍完全四边形以及调和点列的性质.

完全四边形：

我们把两两相交，且没有三线共点的四条直线及它们的六个交点所构成的图形，叫做完全四边形.

如图 8－1，直线 ABC、BDE、CDF、AFE 两两交于 A、B、C、D、E、F 六点，则四边形 $ABCDEF$ 即为完全四边形，线段 AD、BF、CE 为其三条对角线.

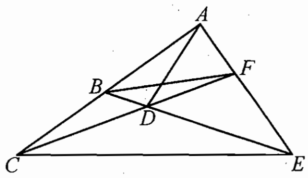


图 8－1

性质 1 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，四个三角形△ABE、△BCD、△ACF、△DEF 的外接圆共点(这点称为 Miquel 点).

证明 如图 8－2，设△BCD 与△DEF 的外接圆除交于点 D 外，还交于点 M.

设点 M 在直线 CB、CD、BD 上的射影分别为 P、Q、R.

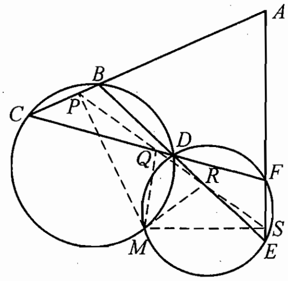


图 8－2

由西姆松定理，知 P、Q、R 三点共线.

同样，点 M 在直线 DF、DE、FE 上的射影分别为 Q、R、S，则 Q、R、S 三点也共线.

故 P、Q、R、S 四点共线.

在△ACF 中，点 P 在直线 AC 上，点 Q 在直线 CF 上，点 S 在直线 AF 上，且 P、Q、S 三点共线，由西姆松定理的逆定理，知点 M 在△ACF 的外接圆上.

同理，点 M 在△ABE 的外接圆上.

故△ABE、△BCD、△ACF、△DEF 的四个外接圆共点.

以下的性质 2 极为重要：

性质 2 完全四边形的一条对角线所在直线与其他两条对角线所在直线

相交，则该线被其他两条对角线所在直线调和分割.

设四边形 $ABCD$ 是平面四边形，对角线 AC 和 BD 交于点 P，对边 AB 和 DC、AD 和 BC 分别交于点 Q、R，AC、BD 分别与 QR 交于点 X、Y，则 Q、R、X、Y；B、D、P、Y；A、C、P 、X 均为调和点列.

证明 如图 8－3，对于直线 BDY 截$\triangle AQR$、直线 QRY 截$\triangle ABD$、直线 QXR 截$\triangle ABC$，分别应用梅涅劳斯定理得

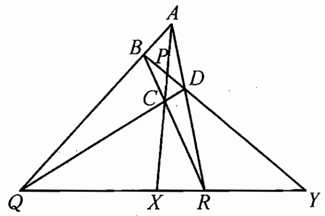


图 8－3

$$\frac{AB}{BQ}\cdot\frac{QY}{YR}\cdot\frac{RD}{DA}=1, \quad ①$$

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BY}{YD}\cdot\frac{DR}{RA}=1, \quad ②$$

$$\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CR}{RB}=1. \quad ③$$

对于点 C 与$\triangle AQR$、点 C 与$\triangle ABD$、点 D 与$\triangle ABC$，分别应用塞瓦定理得

$$\frac{AB}{BQ}\cdot\frac{QX}{XR}\cdot\frac{RD}{DA}=1, \quad ④$$

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DR}{RA}=1, \quad ⑤$$

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BQ}{QA}=1. \quad ⑥$$

比较①和④、②和⑤、③和⑥分别得

$$\frac{QY}{YR}=\frac{QX}{XR},\ \frac{BY}{YD}=\frac{BP}{PD},\ \frac{AX}{XC}=\frac{AP}{PC}.$$

所以，Q、R、X、Y；B、D、P、Y；A、C、P、X 分别为调和点列.

特别地，若 $BD \parallel QR$，则视交点 Y 在无穷远处，此时，$\frac{BP}{PD}=\frac{QX}{XR}=1$.

上述三组调和点列仍成立.

性质 3 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，若 G、H 分别是 CF、BE 的中点，则

$$S_{\text{四边形}BCEF}=4S_{\triangle AGH}.$$

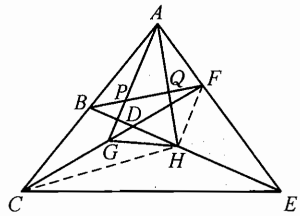


图 8－4

证明 如图 8－4，连结 CH、HF 得

$$S_{\triangle AGH}=S_{\triangle ACH}-S_{\triangle CGH}-S_{\triangle ACG}$$
$$=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle BCH}-\frac{1}{2}S_{\triangle CHF}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACF}$$

$$=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}+\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}-\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ACHF}$$
$$=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}HCEF}=\frac{1}{4}(S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BCE})$$
$$=\frac{1}{4}S_{\text{四边形}BCEF}.$$

调和点列

调和点列是射影几何学的重要内容，它在平面几何中也有着广泛的应用.

对于线段 AB 的内分点 C 和外分点 D 满足 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$，则称点 C、D 调和分割线段 AB 或者 A、B、C、D 是调和点列.

我们允许无穷远点的存在，即规定如果 D 为无穷远点，则 $\frac{AD}{DB}=1$，也可以说，当 C 平分线段 AB 时，A、B、C 以及直线 AC 上的无穷远点四点成调和点列.

性质 4　对于线段 AB 的内分点 C 和外分点 D 满足 C、D 调和分割线段 AB，M 是线段 AB 的中点，则有以下结论成立：

(1) 点 A、B 调和分割线段 CD；

(2) $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$；

(3) $AB\cdot CD=2AD\cdot BC$；

(4) $CA\cdot CB=CM\cdot CD$.

以上证明并不难，留给读者完成.

性质 5　对线段 AB 的内分点 C 和外分点 D 以及直线 AB 外一点 P，给出四个论断：

(1) PC 是 $\angle APB$ 的平分线；

(2) PD 是 $\angle APB$ 的外角平分线；

(3) C、D 调和分割线段 AB；

(4) $PC\perp PD$.

以上四个论断中，任意选取两个作题设、另外两个作结论组成的六个命题均为真命题. 这里仅对由论断(3)和(4)作题设，(1)和(2)作结论的命题给出证明.

证明　如图 8－5，不妨设 $\angle APC=\alpha$，$\angle BPC=\beta$.

由 $PC\perp PD$ 知

$$\angle APD=90^\circ+\alpha,\ \angle BPD=90^\circ-\beta.$$

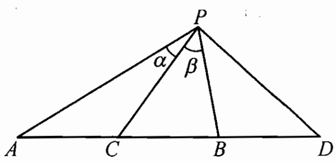


图 8－5

故 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{PA\sin\angle APC}{PB\sin\angle BPC}=\dfrac{PA\sin\alpha}{PB\sin\beta}$,

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{PA\sin\angle APD}{PB\sin\angle BPD}=\dfrac{PA\cos\alpha}{PB\cos\beta}$.

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$,即 $\alpha=\beta$.

因此,结论(1)成立.

接下来易证结论(2),略.

性质 6 如图 8-6,过 O 引出四条给定的直线,直线 L 与这四条直线相交,交点分别为 A、B、C、D,则 $\dfrac{\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{CD}}$ 为定值,这个比例称为交比.

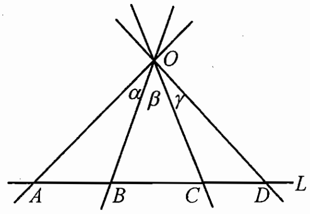


图 8-6

证明 如图设角,则 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}}=-\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OBC}}=-\dfrac{OA\cdot\sin\alpha}{OC\cdot\sin\beta}$.

同理,$\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{CD}}=-\dfrac{OA\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{OC\cdot\sin\gamma}$.

所以 $\dfrac{\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{CD}}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ 为定值.

特别地,若上述定值为-1时,则 A、C、B、D 成调和点列.

此时称直线 OA、OB、OC、OD 成调和线束.

容易发现,共点的四条直线成调和线束的充要条件是任作一不过它们交点的直线截四条直线所得的交点成调和点列.(注意:如果该直线与四条直线之一平行,命题仍有效,这时有一点为无穷远点)

由此可得

定理 1 如图 8-7,设过 O 的线束 OA、OB、OC、OD 分别交不过 O 的两条直线 l_1 与 l_2 于 A、B、C、D、A'、B'、C'、D',其中 A' 在直线 OA 上,等等.

那么 A、B、C、D 成调和点列的充要条件是 A'、B'、C'、D' 成调和点列.以后使用该结论时统一称 O 为中心.

下面介绍两个比较常用的基本图形:

如图 8-8,若线段 AB 的中点为 C,O 为直线 AB 外一点,则 OA、OC、OB 以及过 O 且平行于 AB 的直线成调和线束.

如图 8-9,若四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 成调和线束,则 $l_1\perp l_3$ 的充要条件是 l_2、l_4 与 l_3 的夹角相等.

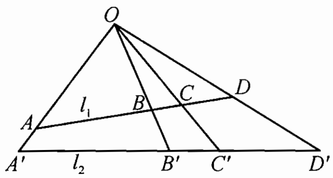


图 8－7

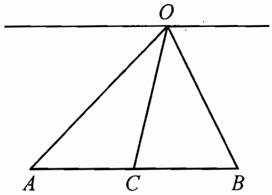


图 8－8

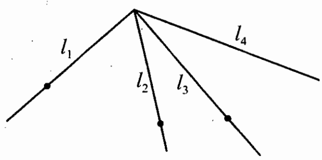


图 8－9

性质 7　设 A、B、C、D 共线，则 A、B、C、D 为调和点列的充要条件是，从线段 CD 的中点 O 起，截同向线段 OA 及 OB，使这线段的一半长为比例中项，即 $OC^2=OA\cdot OB$.（如图 8－10 所示）

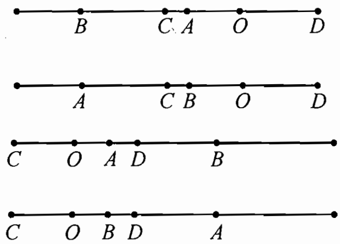


图 8－10

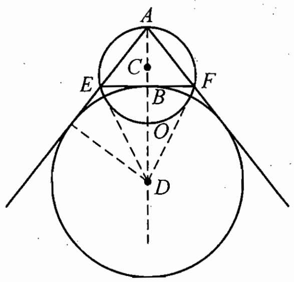


图 8－11

推论 1　一圆的直径被另一圆周调和分割的充要条件是，这两个圆正交.（两圆正交是指过它分别作两圆切线，则这两条线垂直）

推论 2　如图 8－11 设点 C 是$\triangle AEF$ 的内心，角平分线 AC 交边 EF 于点 B，射线 AB 交$\triangle AEF$ 的外接圆于点 O，则射线 AB 上的点 D 为$\triangle AEF$ 的旁心的充要条件是 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{DO}{OB}$.

事实上，若 D 为$\triangle AEF$ 的旁心，如图 8－11，则易知，三角形的角平分线被其内心和相应的旁心调和分割，于是有 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AD}{DB}$. 显然 C、E、D、F 共圆. 且圆心为 O. 于是 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AD-AC}{DB-CB}$（分比定理）$=\dfrac{CD}{(DO+OB)-(OC-OB)}=\dfrac{CD}{2OB}=\dfrac{2OD}{2OB}=\dfrac{OD}{OB}$. 反之，若 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{DO}{OB}$，可用同一法证得 D 为$\triangle AEF$ 的旁心.

例 1　如图 8－12，RK、RL 是圆的两条切线，过 R 的割线交圆于 S、T 两点，交 KL 于 V，则 R、V、S、T 是调和点列.

证明　连结 SL、TL，注意到 $\angle SLR=\angle LTR$，于是$\triangle SLR\backsim\triangle LTR$，

$\dfrac{SL}{LT}=\dfrac{SR}{RL}=\dfrac{RL}{RT}=\sqrt{\dfrac{SR}{RT}}$，同理可证，$\dfrac{SK}{KT}=\sqrt{\dfrac{SR}{RT}}$，另一方面，$\dfrac{SV}{VT}=\dfrac{S_{\triangle SKL}}{S_{\triangle TKL}}=\dfrac{SK\cdot SL}{TK\cdot TL}=\dfrac{SL}{LT}\cdot\dfrac{SK}{KT}=\dfrac{SR}{RT}$，即 R、V、S、T 成调和点列.

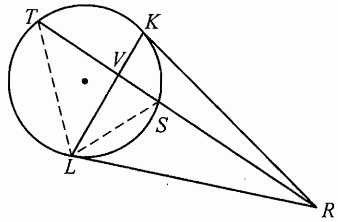


图 8-12

例 2　已知 PA、PB 是由圆 O 外一点 P 引出的两条切线，M、N 分别为线段 AP、AB 的中点，延长 MN 交圆 O 于点 C，点 N 在 M 与 C 之间，PC 交圆 O 于点 D，延长 ND 交 PB 于点 Q. 证明：四边形 $MNQP$ 为菱形.

证明　由例 1 结论知，P、E、D、C 成调和点列.

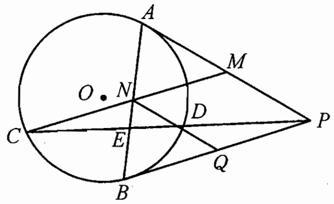


图 8-13

由于 $MN\parallel PB$，由定理 1，以 N 为中心，由 $(P、E、D、C)$ 为调和点列可以得到 $(P、B、Q、\infty)$ 为调和点列.

所以，Q 为 PB 的中点.

而 $PB=PA$，M、N、Q 为 PA、AB、PB 的中点，故四边形 $MNQP$ 为菱形.

例 3　求证：以完全四边形的三条对角线为直径的圆共轴，且完全四边形的四个三角形的垂心在这条根轴上.

证明　如图 8-14，不妨设 H_1 为 $\triangle DEF$ 的垂心，以 CF、BE、AD 为直径的圆依次为 O_1、O_2、O_3，连结 H_1F 与 $\odot O_1$ 交于 K，显然 K 在 DE 延长线上.

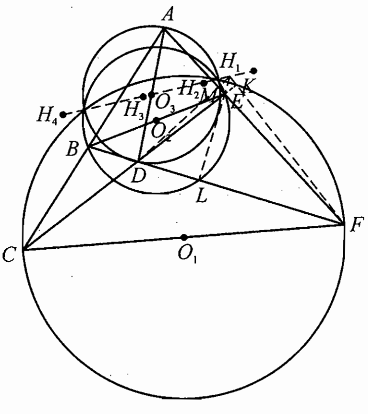


图 8-14

H_1 对 $\odot O_1$ 的幂为 $H_1K\cdot H_1F$，H_1 对 $\odot O_2$ 的幂为 $H_1E\cdot H_1L$.

而由 K、F、L、E 四点共圆知，$H_1K\cdot H_1F=H_1E\cdot H_1L$，即 H_1 对 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的幂相等.

同理 H_1 对 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 的幂相等，故 H_1 对 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 等幂.

同理 H_2、H_3、H_4 也对 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 等幂.

显然 H_1、H_2、H_3、H_4 不重合，(从而不可能都是根心)，这里有三个圆两两根轴相同，且 H_1、H_2、H_3、H_4 均在这条根轴上.

例 4　证明：

Candy 定理：设 AB 为一圆任一条弦，O 为 AB 上任一点，过 O 任作两条弦 CD、EF，连结 CF、ED 交 AB 于 G、H，则 $\frac{1}{OG}-\frac{1}{OH}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}$.

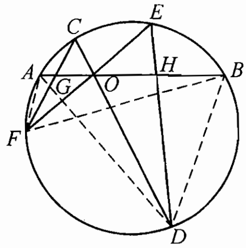


图 8 - 15

证明　如图 8 - 15，连结 AF、BF、AD、BD，则 $\angle AFC=\angle ADC$，$\angle CFE=\angle CDE$，$\angle EFB=\angle EDB$.

由上述交比性质结论知，

$\frac{AG/GO}{AB/BO}=\frac{AO/OH}{AB/BH}\Rightarrow\left(\frac{AO}{GO}-1\right)\cdot BO=\frac{AO}{OH}\cdot(BO-OH)=AO\times\left(\frac{BO}{OH}-1\right)\Rightarrow\frac{1}{GO}-\frac{1}{AO}=\frac{1}{OH}-\frac{1}{BO}$，所以 $\frac{1}{GO}-\frac{1}{OH}=\frac{1}{AO}-\frac{1}{BO}$.

例 5　如图 8 - 16，在 $\triangle PBC$ 中，$\angle PBC=60^\circ$，过点 P 作 $\triangle PBC$ 的外接圆圆 O 的切线，与 CB 的延长线交于点 A，点 D、E 分别在线段 PA 和圆 O 上，使得 $\angle DBE=90^\circ$，$PD=PE$，连结 BE 与 PC 相交于点 F. 已知 AF、BP、CD 三线共点.

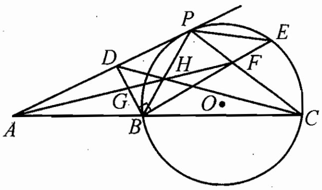


图 8 - 16

(1) 求证：BF 是 $\angle PBC$ 的角平分线；

(2) 求 $\tan\angle PCB$ 的值.（2006 中国西部赛试题）

解　(1) 设 AF、BP、CD 三线共点于 H，设 AH 与 BD 交于点 G. 在完全四边形 $ABCHPD$ 中，由对角线调和分割性质知 AH 被 G、F 调和分割，从而知 BA、BH、BG、BF 为调和线束. 而 $BD\perp BE$，故 BF 平分 $\angle ABP$ 的外角，即 BF 是 $\angle PBC$ 的平分线.

(2) 设 $\angle PCB=\alpha$，则 $\angle APB=\angle PEB=\alpha$，在 $\triangle PEB$ 及 $\triangle PDB$ 中分别由正弦定理并注意到 $PD=PE$ 有

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\alpha}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{6+\sqrt{6}}{11}.$$

例 6　设 OI 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、内心，$\triangle ABC$ 的内切圆与 BC、CA、AB 分别切于点 D、E、F，直线 DF 与 CA 交于点 P，直线 DE 与 AB 交于点 Q，M、N 分别是线段 PE、QF 的中点，求证：$OI\perp MN$.（2007 中国数学奥林匹克）

证明　如图 8 - 17，易证 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

所以，AD、BE、CF 三线共点.

由性质 2 知 P、E、A、C 是调和点列.

因为 M 是线段 PE 的中点，所以，由性质 7 得 $ME^2=MA\cdot MC$. 同理，$NF^2=NA\cdot NB$.

因此，点 M、N 分别到 $\triangle ABC$ 的内切圆和外接圆等幂，即点 M、N 在 $\triangle ABC$ 的内切圆与外接圆的根轴上.

故 $OI\perp MN$.

注：本题在第 5 章中曾出现过，但这里用的是不同的方法.

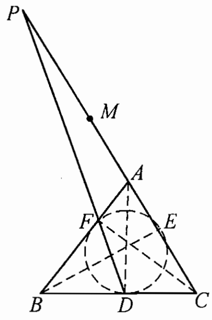


图 8-17

例 7　设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边分别交于点 E、F，两条对角线的交点为 P，过 P 作 $PO\perp EF$ 于点 O. 求证：$\angle BOC=\angle AOD$.

证明　如图 8-18，延长 AC、DB 分别与 EF 交于点 Q、R. 若 BD 与 EF 平行，则视点 R 在无穷远处.

由性质 2 知 P、Q 调和分割线段 AC，P、R 调和分割线段 BD.

因为 $PO\perp EF$，所以，根据性质 5 中(3)和(4) ⇒ (1)和(2)，知 $\angle POA=\angle POC$，$\angle POB=\angle POD$. 因此，$\angle BOC=\angle AOD$.

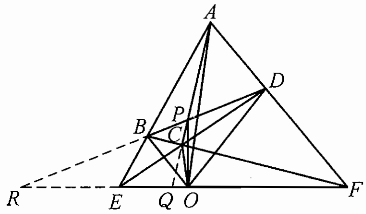


图 8-18

例 8　过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的三条高分别交对边于点 D、E、F，过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC、AB 于点 Q、R，EF 交 BC 于点 P. 证明：$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

证明　如图 8-19，取边 BC 的中点 M.

由性质 2 知 B、C、D、P 是调和点列.

又 M 是 BC 的中点，因此 $DM\cdot DP=DB\cdot DC$.（性质 4 的第(4)条）

易证 B、C、E、F 四点共圆.

又因 $RQ\parallel EF$，所以 $\angle RQC=\angle PEC=\angle RBC$.

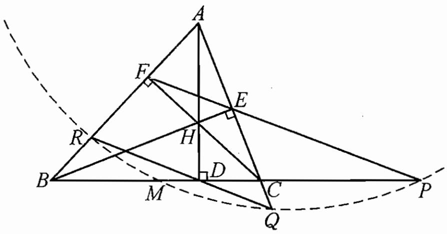


图 8-19

因此，B、Q、C、R 四点共圆，即 $DR\cdot DQ=DB\cdot DC=DM\cdot DP$.

由相交弦定理的逆定理知 $\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

例 9　凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 P，两组对边的直线分别交于点 Q、R，经过 P 的直线分别交 AB、CD、QR 于点 M、N、G.

证明：$\dfrac{1}{MP}+\dfrac{1}{MG}=\dfrac{2}{MN}$.

证明　如图 8－20，设 AC 与 QR 交于点 S，则 A、C、P、S 成调和点列.

连结 QP. 考虑过 Q 的四条线束 QA、QP、QD、QR，它们被两条直线 $APCS$ 和 $MPNG$ 所截，由于 A、C、P、S 成调和点列，因此，M、N、P、G 是调和点列，即 $\dfrac{1}{MP}+\dfrac{1}{MG}=\dfrac{2}{MN}$.

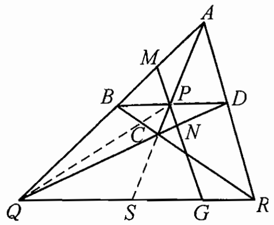


图 8－20

例 10　如图 8－21，已知 B、N、F 均在△ACE 的边上，AN 分别交 BF、BE、CF 于点 M、G、H. 求证：$\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=\dfrac{1}{AG}+\dfrac{1}{AH}$.

证明　设直线 BF，CE 交于 I，再设 ID 与 AN 交于 J，由调和四边形的性质 2 知，A、G、M、N；A、J、G、H 均为调和点列.

所以左式$=\dfrac{2}{AJ}=$右式.

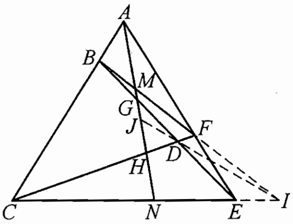


图 8－21

例 11　如图 8－22，圆 O_1 和圆 O_2 与△ABC 的三边所在的三条直线都相切，E、F、G、H 为切点，并且 EG、FH 的延长线交于点 P. 求证：直线 PA 与 BC 垂直.

证明　设直线 PA 交 BC 于点 D.

对△ABD 及截线 PHF，对△ADC 及截线 PGE 分别应用梅涅劳斯定理，有

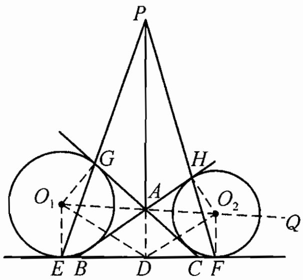


图 8－22

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP}{PA}=1=\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}.$$

由切线性质，有 $BF=HB$，$CE=GC$，有 $\dfrac{AH}{FD}=\dfrac{AG}{ED}$，即 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AG}{AH}$.

连结 O_1G、O_2H，由 $\mathrm{Rt}\triangle AGO_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle AHO_2$，知 $\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{O_1G}{O_2H}$.

连结 O_1E、O_2F，则 $\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{O_1E}{O_2F}$.

连结 O_1D、O_2D，则在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1ED$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle O_2FD$ 中，有 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{O_1E}{O_2F}$.

于是，$\mathrm{Rt}\triangle O_1ED \backsim \mathrm{Rt}\triangle O_2FD$，即有 $\angle O_1DE=\angle O_2DC$，从而直线 DF 为 $\triangle O_1DO_2$ 的 $\angle O_1DO_2$ 的外角平分线.

设直线 O_1O_2 与直线 EF 交于点 Q（或无穷远点 Q），从而点 A、Q 调和分割 O_1O_2（由于 A、Q 分别是内、外位似中心，$\dfrac{O_1A}{O_2A}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{O_1Q}{QO_2}$，这里 r_1、r_2 分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径），即 DO_1、DO_2、DA、DQ 为调和线束，于是知 $DA\perp PQ$，故 $PA\perp BC$.

习 题 8

1 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，对角线 AD 的延长线交对角线 CE 于点 G. 记 $\dfrac{AD}{DG}=p_1$，$\dfrac{CD}{DF}=p_2$，$\dfrac{ED}{DB}=p_3$，$\dfrac{AB}{BC}=\lambda_3$，$\dfrac{CG}{GE}=\lambda_2$，$\dfrac{EF}{FA}=\lambda_1$. 求证：

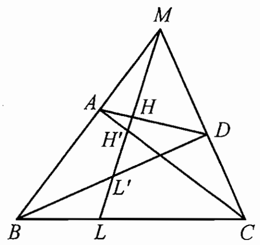
$$\lambda_1=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}=\frac{1+p_2}{1+p_3} \quad ①$$

$$\lambda_2=\frac{p_2p_3-1}{1+p_2}=\frac{1+p_2}{p_2p_1-1}=\frac{1+p_3}{1+p_1} \quad ②$$

$$\lambda_3=\frac{p_3p_1-1}{1+p_3}=\frac{1+p_3}{p_3p_2-1}=\frac{1+p_1}{1+p_2} \quad ③$$

2 求证：完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线 AD、BF、CE 的中点 M、N、P 三点共线.

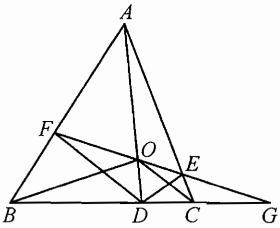
3 凸四边形 $ABCD$ 的一组对边 BA 和 CD 的延长线交于 M，且 AD 不平行于 BC，过 M 作截线交另一组对边所在直线于 H、L，交对角线所在直线于 H'、L'. 求证：$\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{ML}=\dfrac{1}{MH'}+\dfrac{1}{ML'}$.



（第 3 题）

4 已知四边形 $ABCD$ 内接于以 BD 为直径的圆. 设 A' 为点 A 关于 BD 的对称点，B' 为点 B 关于 AC 的对称点，直线 $A'C$ 与 BD、AC 与 $B'D$ 分别交于点 P、Q. 证明：$PQ\perp AC$.

5 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，且 AD 与 EF 垂直相交于 O，又 DE、DF 分别平分 $\angle ADC$、$\angle ADB$，则 OD 平分 $\angle BOC$.



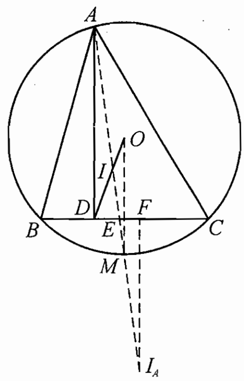
(第 5 题)

6 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O，P 为 OA 延长线上一点，直线 l 与 PB 关于 BA 对称，直线 h 与 PC 关于 AC 对称，l 与 h 交于点 Q. 若 P 在 OA 的延长线上运动，求 Q 的轨迹.

7 在 $\triangle ABC$ 中，经过点 B、C 的圆与边 AC、AB 的另一个交点分别为 E、F，BE 与 CF 交于点 P，AP 与 BC 交于点 D、M 是边 BC 的中点，D、M 不重和. 求证：D、M、E、F 四点共圆.

8 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 交于点 F，延长 DF 交 BC 于点 G. 求证：$\angle GAC = \angle EAC$.

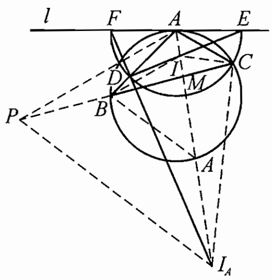
9 在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，它的内切圆切边 BC 于点 E，连结 AE 交内切圆于点 D（不同于点 E）. 在线段 AE 上取异于 E 的一点 F，使得 $CE = CF$，连结 CF 并延长交 BD 于点 G. 求证：$CF = FG$.



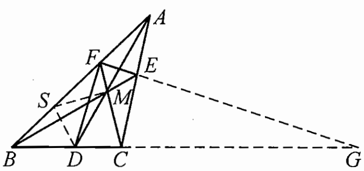
(第 10 题)

10 如图，O、I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、内心，AD 是边 BC 上的高，I 在线段 OD 上. 求证：$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于边 BC 上的旁切圆半径.

11 如图，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB > AC$. 过点 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l. 又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于点 D，交直线 l 于点 E、F. 证明：直线 DE、DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.（2005 年全国高中联赛）



(第 11 题)



(第 12 题)

12 如图，AD 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线，$\angle ADC = 60°$，点 M 在 AD 上，满足 $DM = DB$，射线 BM、CM 交 AC、AB 于点 E、F. 证明：$DF \perp EF$.

9 反演与配极

本章我们将介绍反演变换与配极理论. 配极与前面所讲的调和点列有着密不可分的关联，作为对与上章的补充. 反演是一种全新的几何变换，它的性质很独特，主要作用是将大量的圆变成直线，减少图形的复杂性.

反演

定义 设 O 是平面 π 上的一个定点，k 是一个非零常数，如果平面 π 的一个变换，使得对于平面 π 上任意异于 O 的点 A 与其像点 A'，恒有

(i) A'、O、A 共线；

(ii) $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OA}=k$.

则这个变换称为平面 π 的一个反演变换，记作 $I(O,k)$，其中定点 O 称为反演中心，常数 k 称为反演幂，点 A' 称为 A 的反点.

这里要注意，反演中心本身不参与反演变换. 反演后，反演中心 O 仍记为 O，位置不动.

当反演幂 $k>0$ 时，反演变换 $I(O,k)$ 称为双曲型反演变换；当 $k<0$ 时，反演变换 $I(O,k)$ 称为椭圆型反演变换.

对于反演变换 $I(O,k)$，令 $r=\sqrt{|k|}$，则以反演中心 O 为圆心，r 为半径的圆称为反演变换 $I(O,k)$ 的反演圆或基圆，r 称为反演半径.

显然，当点 A' 是点 A 的反点时，点 A 也是点 A' 的反点，因而点 A 与点 A' 互为反点，由此可见，反演变换是可逆的，且其逆变换就是自身.

平面 π 上的图形 F 在反演变换下的像 F' 称为图形 F 关于这个反演变换的反形，简单图形 F' 是图形 F 的反形. 显然，如果图形 F' 是图形 F 的反形，则图形 F 是图形 F' 的反形，因而图形 F 与图形 F' 互为反形.

反演变换的不动点称为自反点，而反演变换的不变图形称为自反图形.

定理 1 设 A、B 为平面上两点且 A、B、O 不共线，在反演变换 $I(O,k)$ 下，设 A、B 两点的反点分别为 A'、B'，则 A、B、A'、B' 四点共圆.

证明 如图 9-1，设 $A\xrightarrow{I(O,k)}A'$，$B\xrightarrow{I(O,k)}B'$，且 A、B、A'、B' 不共线，由反演变换的定义，有 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OA}=k=\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OB}$，故 A、B、A'、B' 共圆.

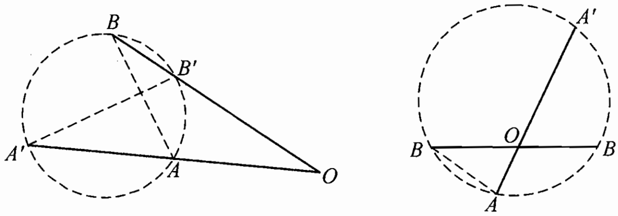


图 9－1

定理 2 在反演变换 $I(O, k)$ 下，设 A、B（均不同于反演中心 O）两点的反点分别为 A'、B'，则有 $A'B'=\dfrac{|k|}{OA\cdot OB}\cdot AB$.

证明 若 O、A、B 共线，则由 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OA}=k$，$\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OB}=k$，可得 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=\dfrac{k}{\overrightarrow{OB}}-\dfrac{k}{\overrightarrow{OA}}=\dfrac{k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})}{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}=\dfrac{k\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}$.

若 O、A、B 不共线，则由 $\triangle OB'A'$ 相似 $\triangle OAB$，有

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA\cdot OA'}{OA\cdot OB}=\frac{|k|}{OA\cdot OB}.$$

由此可见，无论哪种情形，结论都成立.

定理 3 除反演中心外，平面上的每一个点，都有唯一的反演点，且这种关系是对称的，即如果点 P 是 P' 的反演点，那么，P' 也是 P 的反演点. 位于反演圆上的点，保持在原处；位于反演圆内的点，变换为圆外部的点；位于反演圆外的点，变换为圆内部的点.

定理 4 设 P 为反演圆 $O(r)$ 外的一点，则它的反演点 P' 是 OP 与 P 到圆的切线的切点连线的交点.

定理 5 过反演中心的直线反演后为自身.（这条直线不包含反演中心，即挖去反演中心）任意一条不过反演中心的直线，它的反形是经过反演中心的圆，反之亦然. 特别地，过反演中心相交的圆，变为不过反演中心的相交直线.

定理 6 不过反演中心的圆，它的反形是一个圆，反演中心是这两个互为反形的圆的一个位似中心，任一对反演点是逆对应点.

定理 7 两条直线或曲线的夹角在反演变换下是不变的（两条曲线之间的夹角是指它们的切线之间的夹角）.

这些定理均容易由反演的定义证明，读者可以试试看.

配极

定义 在平面上取定一个以 O 为圆心、r 为半径的圆. 对于不同于 O 的任一点 P，作一直线 l 通过 P 的反演像 P'（即 O、P、P' 三点共线，且 $OP\cdot OP'=r^2$）且垂直于射线 OP. 则称直线 l 为点 P 的极线，P 为直线 l 的极点.

性质 1 若点 A 在 B 的极线上，则点 B 在 A 的极线上. 这时称 A、B 共轭.

（这是因为 A 在 B 的极线上意味着 $AB' \perp BB'$，如图 9-2，而 $OB' \cdot OB = r^2 = OA' \cdot OA$，故 A、B'、B、A' 四点共圆，从而 $AA' \perp A'B$）

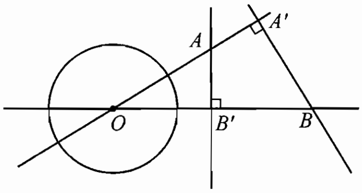


图 9-2

性质 2 若点 P 在圆 O 之外，过 P 作圆 O 的两条切线与圆 O 切于点 M、N，则 MN 是 P 的极线.

（M、N 的极线分别是过 M、N 的圆 O 的切线，均过 P，于是 P 的极线过 M、N）

性质 3 若过圆 O 外一点 P 作一直线与圆 O 交于点 R、S，线段 RS 与 P 的极线交于点 Q，则 $(P、S、Q、R)$ 为调和点列.

（由上一章例 1 以及本章性质 2 即知）

定理 1 过一点 A 任作两割线交圆 O 于 P、Q 和 R、S，连结 PR 与 QS、PS 与 QR 分别交于 B、C，则 BC 必是 A 关于圆 O 的极线.

证明 如图 9-3，设直线 BC 与直线 AS 交于 N，与直线 AQ 交于 M，利用上一章性质 2，即完全四边形的调和分割性知，S、R、N、A 成调和点列，结合性质 3 以及确定三点后，第四调和点的唯一性，A 的极线过 N，同理，A 的极线过 M，于是 A 的极线为 MN，所以 BC 是 A 的极线.

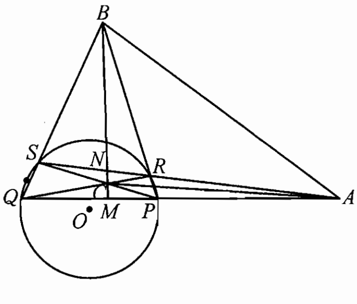


图 9-3

我们称一个圆内接四边形为调和四边形，如果它满足对边乘积相等.

通过正弦定理以及调和线束中的 $1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{CD}} = \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$，

我们发现：

定理 2 圆 O 内接四边形 $ABCD$ 为调和四边形的充要条件是对圆上一点 P，PA、PC，PB、PD 成调和线束.

不难证明：

定理 3 对圆外一点 P，过 P 作圆 O 的两条切线，切点分别是 A、B，再任作割线 PCD 交圆 O 于 C、D，则 $ACBD$ 为调和四边形.

例 1 证明 Ptolemy 不等式：

对平面上任意不共线的四点 A、B、C、D，有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$. 等号成立当且仅当 $ABCD$ 是圆内接凸四边形.

证明　如图 9-4，以 A 为反演中心，单位长度为反演半径，设 B、C、D 的反点分别为 B'、C'、D'，则

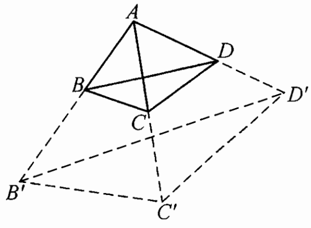


图 9-4

$$B'C'=\frac{BC}{AB\cdot AC},\ C'D'=\frac{CD}{AC\cdot AD},$$
$$B'D'=\frac{BD}{AB\cdot AD},$$

于是由 $B'C'+C'D'\geqslant B'D'$ 得

$$\frac{BC}{AB\cdot AC}+\frac{CD}{AC\cdot AD}\geqslant\frac{BD}{AB\cdot AD},$$

即
$$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD.$$

等号成立条件是 B'、C'、D' 共线且 C' 在线段 $B'D'$ 上，即 $ABCD$ 是圆内接凸四边形.

注　事实上，对直线上顺次排列的四点 A、B、C、D，有 Euler 恒等式：

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

例 2　AB 是圆 O 的直径，C 是 AB 上一点，过点 C 作 AB 的垂线交圆 O 于点 D，过点 D 作圆 O 的切线交 AB 的延长线于点 E，P 为圆 O 上任意一点，证明：$\angle BPC=\angle BPE$.

证明　如图 9-5，连结 AD、AP、BD，D 点的极线过 E，于是 E 的极线过 D，又 E 的极线应与 OE 垂直，则 C 在 E 的极线上，由性质 3 知，A、B、C、E 成调和点列，即 PA、PB、PC、PE 成调和线束，再由 $AP\perp PB$ 知 $\angle CPB=\angle BPE$.

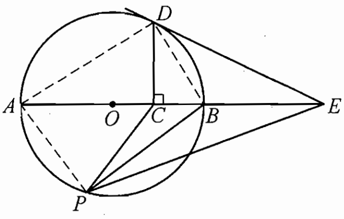


图 9-5

例 3　如图 9-6，Q 是以 AB 为直径的圆上的一点，$Q\neq A$、B，Q 在 AB 上的投影为 H. 以 Q 为圆心、QH 为半径的圆与以 AB 为直径的圆交于点 C、D. 证明：CD 平分线段 QH.（2006 土耳其国家队选拔考试）

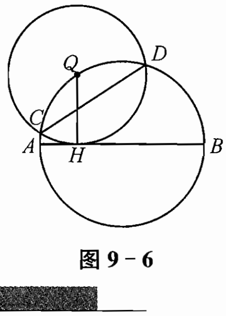


图 9-6

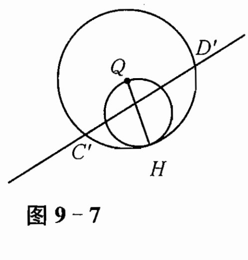


图 9-7

证明 作以 Q 为反演中心、$\odot Q$ 为反演圆的反演变换.

则 $\odot O$ 反演为直线 CD，AB 反演为以 QH 为直径且与 $\odot Q$ 内切的圆(如图 9-7).

因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 AB 与 $\odot O$ 正交.

由反演的保角性知，CD 与以 QH 为直径的圆正交，故 CD 平分线段 QH.

例 4 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，对角线 AC 交 BD 于 P. 设 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 的外接圆圆心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4. 求证：OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

证明 如图 9-8，作以 P 为反演中心、P 关于 $\odot O$ 的幂为反演幂的反演变换. 则 $\odot O$ 反演为本身，$\odot O_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 反演为四边形 $ABCD$ 各边所在的直线，过点 P 的直线也反演为本身.

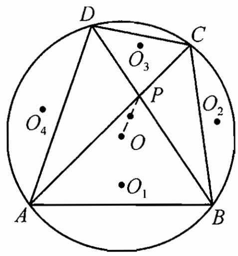


图 9-8

由于直线 PO_2 与 $\odot O_2$ 正交，因此，它们的反形也正交，即 $PO_2 \perp AD$.

又易知 $O_4O \perp AD$，则 $PO_2 \parallel O_4O$.

同理，$PO_4 \parallel O_2O$.

因此，四边形 PO_2OO_4 为平行四边形，PO 与 O_2O_4 互相平分.

同理，PO 与 O_1O_3 互相平分.

故 PO、O_1O_3、O_2O_4 交于 PO 的中点.

例 5 已知圆 O 外一点 X，由 X 向圆 O 引两条切线，切点分别为 A、B，过点 X 作直线，与圆 O 交于两点 C、D，且满足 $CA \perp BD$. 若 CA 与 BD 交于点 F，CD 与 AB 交于点 G，BD 与 GX 的中垂线交于点 H. 证明：X、F、G、H 四点共圆.

证明 由配极性质 3 可知(X、G、D、C)为调和点列，而 $CA \perp BD$，故由调和点列的有关性质知 $\angle GFD = \angle DFX$.

如图 9-9，设 $\triangle GFX$ 的外接圆与 BF 交于点 H'. 则 $GH' = XH'$，即点 H' 在 GX 的中垂线上. 从而，$H' = H$. 因此，X、F、G、H 四点共圆.

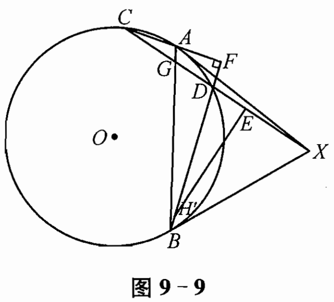


图 9-9

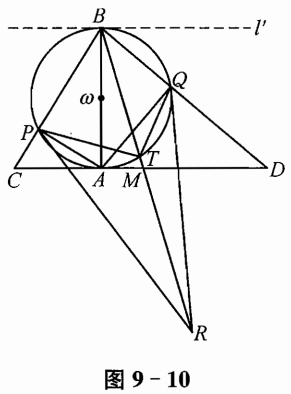


图 9-10

例 6 如图 9-10，AB 为圆 ω 的直径，直线 l 切$\odot\omega$ 于 A. C、M、D 在 l 上满足 $CM=DM$，又设 BC、BD 交$\odot\omega$ 于 P、Q，$\odot\omega$ 切线 PR、QR 交于 R. 求证：R 在 BM 上.

证明 过 B 作 CD 平行线 l'，则 BC、BD，BM、l'成调和线束，AB 过圆心，CD 为切线，$l' \parallel CD$，所以 l'为圆的切线，于是，BB(过 B 的切线)、BP、BT、BQ 成调和线束，因此结合定理 2 有，四边形 $BPTQ$ 为调和四边形，根据定理 3，R 为直线 PQ 的极点，因此在直线 $BT(BM)$ 上.

例 7 如图 9-11，$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 切 BC、CA、AB 于 D、E、F，AD 与$\odot I$ 的另一个交点 X，BX、CX 分别交$\odot I$ 于 P、Q. 又记 BC 中点为 M. 若 $AX=XD$，求证：$FP \parallel EQ$.

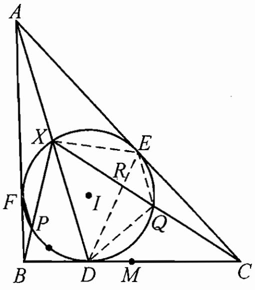


图 9-11

证明 连结 EQ，设 ED 与 CX 交于 R，由定理 3 知，四边形 $EQDX$ 为调和四边形，于是 EE(过 E 的切线)、ED，EQ、EX 成调和线束，或 EA、ED，EX、EQ 成调和线束，结合 $AX=XD$ 即知 $EQ \parallel AD$，同理，$PF \parallel AD$，故 $PF \parallel EQ$.

例 8 如图 9-12，设凸四边形 $ABCD$ 对角线交于 O 点. $\triangle OAD$，$\triangle OBC$ 的外接圆交于 O，M 两点，直线 OM 分别交$\triangle OAB$，$\triangle OCD$ 的外接圆于 T，S 两点. 求证：M 是线段 TS 的中点.（2006 年女子数学奥林匹克）

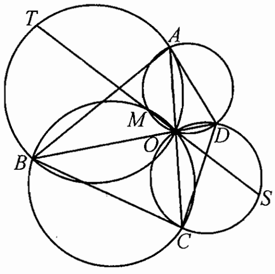


图 9-12

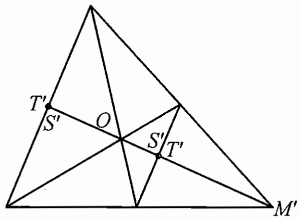


图 9-13

证明 以 O 为反演中心，单位长度为反演半径作反演.

反形如图 9-13 所示，则 $SM=TM$ 的充要条件是 $TO-OM=OS+OM$，即 $TO+2OM=OS$，这就等价于 $\dfrac{1}{OS'}+\dfrac{2}{OM'}=\dfrac{1}{OT'}$.

由上章性质 2 知，T'、S'，O、M'成调和点列，于是 $\dfrac{1}{OS'}+\dfrac{2}{OM'}=\dfrac{1}{OT'}$.

注 两圆相交时，通常以其中一个交点为反演中心，则两圆反形为两条

相交的直线，交点为两圆的另一个交点的反演点.

例 9　如图 9－14，已知圆 O 中，CG 为直径，过点 G 作一条直线. 在直线上截取 $AG=BG$（A，B 均在圆外）. 连结 AC，BC. 分别交圆 O 于点 D，E. 过 D，E 分别作圆 O 切线. 交于一点 P，连结 PG. 求证：PG 垂直于 AB.

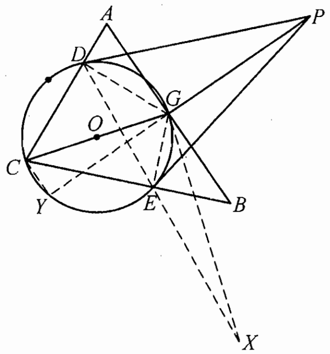


图 9－14

证明　过 C 作 AB 平行线交圆 O 于 Y，过 G 做圆 O 切线交直线 DE 于 X，则 X 在 G 的极线即过 G 的切线上，X 还在 P 的极线 DE 上，所以 X 的极线过 G、P，又 $AG=GB$，故 A、B，G、∞ 成调和点列，所以 CA、CB、CG、$C\infty$ 成调和线束，于是 $DGEY$ 是调和四边形.

从而 XY 是切线，即 X 在 Y 的极线上，那么 X 的极线 GP 过 Y 点，结合 GY 垂直于 CY，即 PG 垂直于 AB.

例 10　给定 4 个圆 $\odot S_1$、$\odot S_2$、$\odot S_3$、$\odot S_4$，设 $\odot S_1$ 和 $\odot S_2$、$\odot S_2$ 和 $\odot S_3$、$\odot S_3$ 和 $\odot S_4$、$\odot S_4$ 和 $\odot S_1$ 分别交于点 A_1 和 A_2、B_1 和 B_2、C_1 和 C_2、D_1 和 D_2. 若 A_1、B_1、C_1、D_1 四点共圆（或共线），证明：A_2、B_2、C_2、D_2 四点共圆（或共线）.

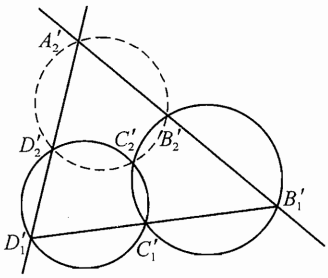


图 9－15

证明　作以 A_1 为反演中心的反演变换，于是，$\odot S_1$、$\odot S_2$ 反形为直线 $A_2'D_1'$、$A_2'B_1'$，$\odot S_3$、$\odot S_4$ 反形为 $\triangle B_2'C_1'B_1'$、$\triangle D_2'C_1'D_1'$ 的外接圆，这两个圆交于 C_2'. 如图 9－15 只要证 A_2'、B_2'、C_2'、D_2' 四点共圆即可.

这就转化为三角形中的密克点问题：

$\triangle A_2'B_1'D_1'$ 中，C_1'、B_2'、D_2' 分别在边 $D_1'B_1'$、$B_1'A_2'$、$A_2'D_1'$ 上，若 $\triangle D_2'D_1'C_1'$ 的外接圆与 $\triangle B_1'B_2'C_1'$ 的外接圆交于点 C_2'，则 $\triangle A_2'D_2'B_2'$ 的外接圆也过该点.

这个问题在圆的一章中就已经提到过.

例 11　如图 9－16，凸四边形 $ABCD$ 有内切圆，且内切圆分别切边 AB、BC、CD、DA 于 A_1、B_1、C_1、D_1，点 E、F、G、H 分别为线段 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点，证明：四边形 $EFGH$ 为矩形的充要条件是 A、B、C、D 共圆.

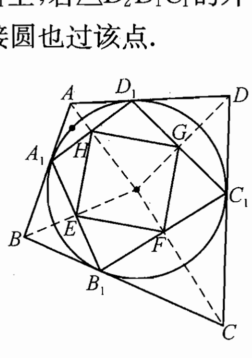


图 9－16

证明　以 $ABCD$ 内切圆为反演圆作反演变换，则

由反演定理 4，A、B、C、D 的反点分别为 H、E、F、G，因为不过反演中心的圆的反形仍是一个圆，于是 A、B、C、D 共圆等价于 E、F、G、H 共圆.

注意 E、F、G、H 分别是为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 四边形的中点，所以四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形，因而 E、F、G、H 四点共圆的充要条件是平行四边形 $EFGH$ 是矩形，这又等价于 A、B、C、D 共圆.

注　此题曾在圆的初步中讲解过，这里给出一种反演变换的解法.

例 12　圆内接四边形 $ABCD$ 内有一点 P 满足 $\angle APD=\angle ABP+\angle DCP$. P 在 AB、BC、CD 上射影为 E、F、G. 证明：$\triangle EFG\backsim\triangle APD$.

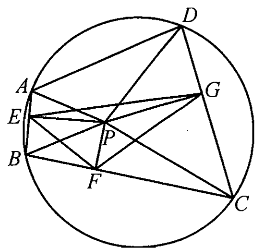


图 9－17

证明　**法一**：因为 $\angle EFG=\angle EFP+\angle GFP=\angle EBP+\angle GCP=\angle APD$，故只需证

$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{EF}{FG}$. 又 $\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{PB\sin B}{PC\sin C}=\dfrac{PB\cdot AC}{PC\cdot BD}$，故只需证

$$\frac{AP}{PD}=\frac{PB\cdot AC}{PC\cdot BD}\Leftrightarrow\frac{AP\cdot PC}{AC}=\frac{BP\cdot PD}{BD}. \qquad ①$$

又因 $\angle APD=\angle ABP+\angle DCP$，所以$\triangle ABP$ 的外接圆与$\triangle DCP$ 外接圆外切于点 P.

作以 P 为反演中心，P 对 $ABCD$ 外接圆的幂为反演幂作反演变换.

则 A、B、C、D 分别变为 A'、B'、C'、D'，且 A'是 AP 与 $ABCD$ 外接圆的交点，B'、C'、D'类似.

因为$\triangle ABP$、$\triangle CDP$ 外接圆外切于 P.

故用反演性质知 $A'B'\parallel C'D'\Rightarrow A'B'C'D'$ 为等腰梯形$\Rightarrow A'C'=B'D'$.

由反演变换距离公式知

$$A'C'=AC\times\frac{|d|}{PA\cdot PC},\ B'D'=BD\times\frac{|d|}{PB\cdot PD}\ (d\ 为反演幂).$$

所以①$\Leftrightarrow A'C'=B'D'$，此式已证明成立，故原题得证.

法二：作 $\angle APT=\angle ABP$，其中 T 为 AD 上的点，TP 交 BC 于 S.

由 $\angle APD=\angle ABP+\angle DCP$ 知，$\angle TPD=\angle DCP$.

易知 PT 为$\triangle ABP$、$\triangle DCP$ 外接圆的切线. 由根轴定理知 BA、CD、ST 交于一点，设为 R.

$$\begin{aligned}\angle PAD&=\angle BAD-\angle BAP=\pi-\angle BCR-\angle BPS\\&=\angle BPR-\angle BCR\ (\angle BPR=\pi-\angle BPS)\\&=\angle BPR-(\angle BSR-\angle SRC)\end{aligned}$$

$$= \angle BPR - \angle BSR + \angle SRC$$
$$= \angle PBS + \angle PEG$$
$$= \angle PEF + \angle PEG = \angle FEG. \quad ①$$

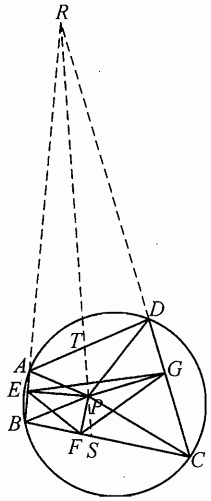


图 9-18

由已知条件易知 P、E、B、F 和 P、G、C、F 都有四点共圆.

$\angle ABP = \angle EFP$，$\angle PCG = \angle PFG$，故

$$\angle APD = \angle ABP + \angle PCG$$
$$= \angle EFG + \angle PFG = \angle EFG \quad ②$$

由①、②知 $\triangle EFG \backsim \triangle APD$.

例 13 双心四边形 $ABCD$，$AC \cap BD = E$，内、外心为 I、O. 求证：I、O、E 三点共线.

证明 先证一个引理.

引理：圆外切四边形 $ABCD$，切点为 M、N、K、L，则 AC、BD、MK、NL 四线共点.

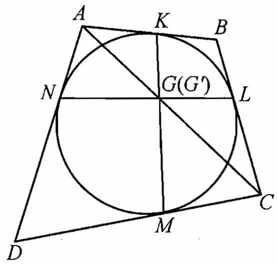


图 9-19

引理的证明：如图 9-19，设 $AC \cap KM = G$，$LN \cap KM = G'$，由正弦定理得

$$\frac{GC}{AG} = \frac{CM\dfrac{\sin\angle GMC}{\sin\angle CGM}}{AK\dfrac{\sin\angle AKG}{\sin\angle AGK}}$$
$$= \frac{CM}{AK}\,\frac{\sin\angle GMC}{\sin\angle AKG}\,\frac{\sin\angle AGK}{\sin\angle CGM} = \frac{CM}{AK}.$$

同理 $\dfrac{G'C}{AG'} = \dfrac{CL}{AN}$.

所以 $\dfrac{G'C}{AG'} = \dfrac{CL}{AN} = \dfrac{CM}{AK} = \dfrac{CG}{AG}$，即 $G = G'$.

故 AC、NL、KM 三线共点.

同理 BD、KM、LN 三线共点，引理得证.

回到原题：如图 9-20，切点仍记为 K、L、M、N，由引理 $KM \cap LN = E$.

以 I 为中心，$\odot(KNM)$ 为反演圆作反演，A'、B'、C'、D' 分别为 $KLMN$ 四边中点.

由 $B'C' \parallel KM \parallel A'D'$，$A'B' \parallel NL \parallel D'C'$ 知 $A'B'C'D'$ 为平行四边形.

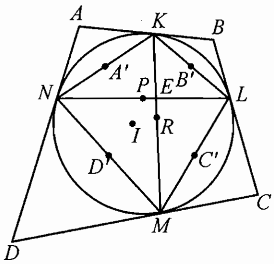


图 9-20

而 A、B、C、D 共圆知 A'、B'、C'、D' 共圆，$A'B'C'D'$ 必为矩形，其中心设为 Q，且有 $KM\perp LN$.

由反演性质知 Q、I、O 三点共线.

设 LN、KM 中点为 P、R，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IQ'}&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'})\\&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{IP}).\end{aligned}$$

由垂径定理知 $PIRE$ 为矩形.

从而 $\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{IE}$.

故 $\overrightarrow{IQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IE}$，即 I、Q、E 三点共线，从而 O、I、E 三点共线.

习　题　9

1 设△ABC 的内切圆 Γ 与 BC 切于点 D，D'是圆 Γ 上的点，且 DD' 为圆 Γ 的直径，过 D' 作圆 Γ 的切线与 AD 交于点 X，过 X 作圆 Γ 的不同于 XD' 的切线，切点为 N. 证明：△BCN 的外接圆与圆 Γ 切于点 N.

2 圆 O_1 与圆 O_2 交于 A、B 两点. 过点 O_1 的直线 DC 交圆 O_1 于 D 且切圆 O_2 于 C，CA 切圆 O_1 于 A，圆 O_1 的弦 AE 与直线 DC 垂直. 过 A 作 AF 垂直于 DE，F 为垂足. 求证：BD 平分线段 AF.

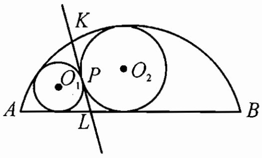
3 凸四边形 $ABCD$ 外切于⊙O，AB、BC、CD、DA 上的切点分别是 E、F、G、H，直线 HE 与 FG 相交于点 P. 求证：$OP\perp AC$.

4 G 是△ABC 的重心，M、N 分别是 AC、AB 的中点. 设△ANC 和△AMB 的外接圆相交于 A 和 P，△AMN 的外接圆交 AP 于 T. 求 $AT:AP$.

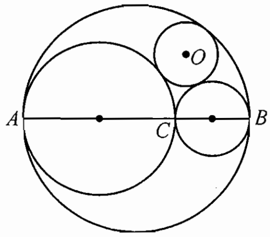
5 设 P 为△ABC 内一点，令 $\alpha=\angle BPC-\angle A$，$\beta=\angle CPA-\angle B$，$\gamma=\angle APB-\angle C$. 求证：$\dfrac{PA\cdot\sin A}{\sin\alpha}=\dfrac{PB\cdot\sin B}{\sin\beta}=\dfrac{PC\cdot\sin C}{\sin\gamma}$.

6 在弓形中，内接一对相切的圆，对每一对相切的圆，通过它们的切点引公切线. 证明：所有的切线通过一个点.

7 如图，在线段 AB 上取点 C，以线段 AC、BC、AB 为直径分别作圆，⊙O 与这三个圆都相切. 证明：⊙O 的直径等于它的圆心到直线 AB 的距离.



（第 6 题）



（第 7 题）

8 已知圆内接四边形 $ABCD$，直线 AD 和 BC 交于点 E，且点 C 在点 B、E 之间，对角线 AC、BD 交于 F，设点 M 为边 CD 的中点，点 N 是$\triangle ABM$ 的外接圆上的不同于 M 的点，且满足 $\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{AM}{BM}$. 证明：$E$、$F$、$N$ 三点共线.

9 已知三角形 ABC 及其内切圆 O，E、F、G 分别为 BC、BA、AC 边上的切点，H 为边 BC 上高 AD 的中心，EH 交圆 O 于 I. 求证：IE 平分$\angle BIC$.

10 在四个圆中，每个圆都和其他的两个圆外切. 证明：四个切点位于同一个圆上.

11 已知$\triangle ABC$ 的中线 AM 交其内切圆 Γ 于点 K、L，分别过 K、L 且平行于 BC 的直线交圆 Γ 于点 X、Y，AX、AY 分别交 BC 于点 P、Q. 证明：$BP=CQ$.

12 四边形 $ABCD$ 有内切圆$\odot I$，E、F、G、H 分别是$\odot I$ 在四边 AB、BC、CD、DA 上的切点. 求证：AC、BD、EG、FH 四线共点.

10 几何不等式

几何不等式是几何问题中难度较大的一类.想解决这类问题不光得有平面几何知识,还得有深厚的代数功底.因此,一般出现在较高层次的竞赛中,如 IMO、CMO、国家集训队考试中.

下面介绍其中比较经典的一些问题.

例 1 设一条平面闭折线周长为 1.证明:可以用一个半径为$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条折线.

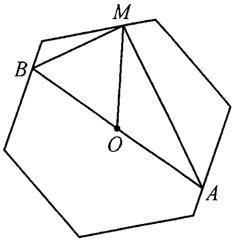


图 10－1

证明 如图 10－1,令 AB 平分折线周长,O 为线段 AB 的中点,任取折线上一点 M,则 $MA+MB$ 不超过 A 与 B 之间的折线总长$\frac{1}{2}$,故 $OM\leqslant\frac{1}{2}(MA+MB)\leqslant\frac{1}{4}$.

于是以 O 为圆心、$\frac{1}{4}$为半径的圆可以盖住这条折线.

例 2 设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c,三边上的中线长分别为 m_a、m_b、m_c,求证:$m_a(bc-a^2)+m_b(ca-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0$.

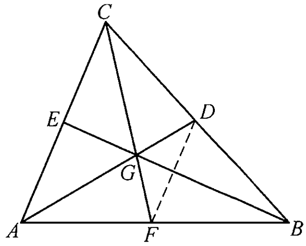


图 10－2

证明 如图 10－2,设$\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AD、BE、CF,重心为 G,对四边形 $BDGF$ 应用托勒密不等式可得

$$BG\cdot DF\leqslant GF\cdot DB+DG\cdot BF.$$

即 $2bm_b\leqslant am_c+cm_a$,故 $2b^2m_b\leqslant abm_c+bcm_a$ 等等.三式相加即得 $m_a(bc-a^2)+m_b(ca-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0$.

例 3 设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点,求证:$PA\cdot PC+PB\cdot PD\geqslant AB\cdot BC$,并指出等号成立条件.

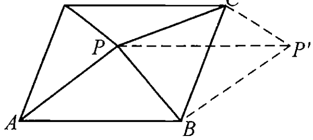


图 10－3

证明 如图 10－3,取点 P'使得 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{AB}$,

于是原命题等价于 $P'P \cdot BC \leqslant PC \cdot P'B + PB \cdot P'C$，即四边形 $PBP'C$ 的托勒密不等式，等号成立的充要条件是 $PBP'C$ 为圆内接四边形，即 $\angle APD + \angle CPB = \pi$.

例 4 （费马点问题）设 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$，$P$ 为任意一点（不是 O），求证：

$$PA + PB + PC > OA + OB + OC.$$

证明 如图 10－4，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 分别引 OA，OB，OC 的垂线.

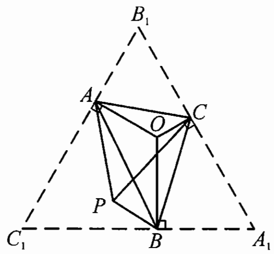


图 10－4

设这三条垂线的交点为 A_1，B_1，C_1，考虑四边形 $AOBC_1$. 因为 $\angle OAC_1 = \angle OBC_1 = 90^\circ$，$\angle AOB = 120^\circ$，所以 $\angle C_1 = 60^\circ$. 同理，$\angle A_1 = \angle B_1 = 60^\circ$，所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形.

设 P 到 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边 B_1C_1、C_1A_1、A_1B_1 的距离分别为 h_a、h_b、h_c，且 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长为 a，高为 h. 由等式 $S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle PB_1C_1} + S_{\triangle PC_1A_1} + S_{\triangle PA_1B_1}$ 知 $\frac{1}{2}ha = \frac{1}{2}h_a \cdot a + \frac{1}{2}h_b \cdot a + \frac{1}{2}h_c \cdot a$，所以 $h = h_a + h_b + h_c$.

这说明正三角形 $A_1B_1C_1$ 内任一点 P 到三边的距离和等于 $\triangle A_1B_1C_1$ 的高 h，这是一个定值，所以 $OA + OB + OC = h =$ 定值. 显然，$PA + PB + PC > P$ 到 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边距离和，所以 $PA + PB + PC > h = OA + OB + OC$. 这就是我们所要证的结论.

由这个结论可知 O 点具有如下性质：它到三角形三个顶点的距离和小于其他点到三角形顶点的距离和，这个点叫费马点.

注 当 $\triangle ABC$ 的三个角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 都小于 120° 时，在它的内部一定存在一点 O，使得 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$. 当 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中有一个 $\geqslant 120^\circ$ 时，不妨设 $\angle A \geqslant 120^\circ$，则对于任意一点 P 都有 $PA + PB + PC \geqslant AB + AC$.

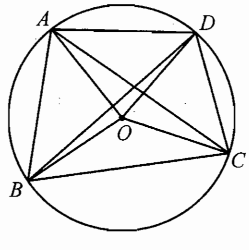


图 10－5

例 5 已知四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形. 证明：$|AB - CD| + |AD - BC| \geqslant 2|AC - BD|$.

证明 如图 10－5，设四边形 $ABCD$ 的外心为 O，且圆 O 的半径为 1.

设 $\angle AOB = 2\alpha$，$\angle BOC = 2\beta$，$\angle COD = 2\gamma$，$\angle DOA = 2\delta$，则 $\alpha + \beta +$

$\gamma+\delta=\pi$.

不妨设 $\alpha\geqslant\gamma$，$\beta\geqslant\delta$，则

$$|AB-CD|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|.$$

同理，

$$|AD-BC|=4\left|\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right|,$$

$$|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right|,$$

则

$$|AB-CD|-|AC-BD|=8\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cdot\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\geqslant 0.$$

即 $|AB-CD|\geqslant|AC-BD|$. 同理可证 $|AD-BC|\geqslant|AC-BD|$.
所以 $|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant 2|AC-BD|$.

例 6 设 P、Q、R 分别位于 $\triangle ABC$ 的三条边 BC、CA、AB 上，且将三角形周长三等分，求证：$QR+RP+PQ\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$. a、b、c 表示三角形三边长.

证明 如图 10-6，分别作 R、Q 在底边 BC 上的投影 M、N，则 $QR\geqslant MN=a-(BR\cdot\cos B+CQ\cdot\cos C)$，同理有，$RP\geqslant b-(CP\cdot\cos C+AR\cdot\cos A)$，$PQ\geqslant c-(AQ\cdot\cos A+BP\cdot\cos B)$.

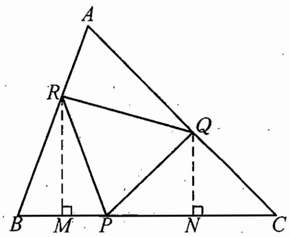


图 10-6

将三式相加，并注意到 $AQ+AR=BR+BP=CP+CQ=\frac{1}{3}(a+b+c)$，即得

$$QR+RP+PQ\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)(3-\cos A-\cos B-\cos C)\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c).$$（这步用到 $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.）

注 $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$ 的证明：

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant 2\cos\frac{A+B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1\\&=-2\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\\&\leqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当△ABC 为等边三角形.

例 7 （Erdös-Mordell 不等式）设 P 为三角形 ABC 内任意一点，P 到三边 BC、CA、AB 的距离分别为 $PD=p$，$PE=q$，$PF=r$，并记 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，证明：$x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$，等号成立当且仅当△ABC 为正三角形并且 P 为此三角形的中心.

证明　如图 10－7，过点 P 作直线 MN，使得 $\angle AMN=\angle ACB$，于是 $\triangle AMN\backsim\triangle ACB$，从而 $\dfrac{AN}{MN}=\dfrac{c}{a}$，$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{b}{a}$.

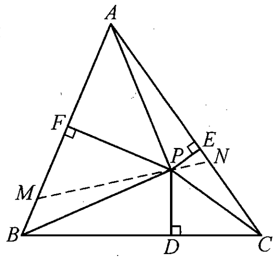


图 10－7

由于 $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle ANP}$，所以有

$$AP\cdot MN\geqslant q\cdot AN+r\cdot AM,$$

所以 $x=AP\geqslant q\cdot\dfrac{AN}{MN}+r\cdot\dfrac{AM}{MN}$.

即 $x\geqslant\dfrac{c}{a}q+\dfrac{b}{a}r$，等等.

于是 $x+y+z\geqslant p\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+q\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+r\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geqslant 2(p+q+r)$.

第一个等号成立的条件是 $AP\perp MN$，即 $\angle PAC=90^\circ-\angle B$，以及 $\angle PBA=90^\circ-\angle C$，$\angle PCB=90^\circ-\angle A$.

第二个等号成立的条件是 $a=b=c$，所以 $x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$ 的等号成立条件是△ABC 为正三角形，且 P 为其中心.

例 8　Neuberg-Pedoe 不等式：设 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 分别是位于同一平面上的两个三角形△$A_1B_1C_1$ 和△$A_2B_2C_2$ 的各边长，F、F' 分别是它们的面积，记

$$M=b_1^2(-a_1^2+a_2^2+a_3^2)+b_2^2(a_1^2-a_2^2+a_3^2)+b_3^2(a_1^2+a_2^2-a_3^2).$$

求证：$M\geqslant 16FF'$.

证明　由柯西不等式，$16FF'+2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)\leqslant((16F^2+2a_1^4+2a_2^4+2a_3^4)(16F'^2+2b_1^4+2b_2^4+2b_3^4))^{\frac{1}{2}}=(a_1^4+a_2^4+a_3^4+2a_1^2a_2^2+$

$2a_2^2a_3^2+2a_3^2a_1^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(b_1^4+b_2^4+b_3^4+2b_1^2b_2^2+2b_2^2b_3^2+2b_3^2b_1^2)^{\frac{1}{2}}$（这步用到海伦公式）$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$.

即 $M\geqslant 16FF'$.

注 海伦公式是指三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$，其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$.

例9 设 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，H、O、R 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心、外接圆半径. 求证：$S=\min\left(MA^3+MB^3+MC^3-\frac{3}{2}R\cdot MH^2\right)$.

证明 $S=3R^3-\frac{3}{2}R\cdot OH^2$.

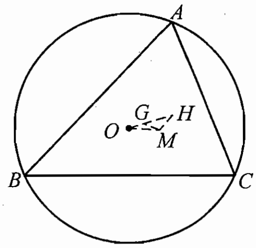


图 10-8

如图 10-8，一方面，当 $M=O$ 时等号成立.

另一方面，由均值不等式有

$$\frac{MA^3}{R}+\frac{R^2+MA^2}{2}\geqslant\frac{MA^3}{R}+R\cdot MA\geqslant 2MA^2.$$

所以 $\frac{MA^3}{R}\geqslant\frac{3}{2}MA^2-\frac{R^2}{2}$.

类似三式相加得 $\frac{1}{R}(MA^3+MB^3+MC^3)\geqslant\frac{3}{2}(MA^2+MB^2+MC^2)-\frac{3}{2}R^2$. ①

由 Leibniz 公式（见注①），设三角形的重心为 G，有

$$AM^2+BM^2+CM^2=3MG^2+\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2),$$

$$AO^2+BO^2+CO^2=3OG^2+\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2).$$

两式相减得

$$AM^2+BM^2+CM^2=3R^2+3MG^2-3OG^2,$$

又由 Stewart 定理知

$$3R^2+3MG^2-3OG^2=2MO^2+3R^2+MH^2-OH^2\text{（见注②）}$$
$$\geqslant 3R^2+MH^2-OH^2.$$

代入①即得 $MA^3+MB^3+MC^3-\frac{3}{2}R\cdot MH^2\geqslant 3R^3-\frac{3}{2}R\cdot OH^2$，得证.

注 ① Leibniz 公式是指：对于 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点 M，设三角形 ABC 的重心为 G，则

$$AM^2+BM^2+CM^2=3MG^2+\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2)$$
$$=3MG^2+AG^2+BG^2+CG^2,$$

(可以用解析法或 Stewart 定理证明).

② 由 Stewart 定理（见第一章知识点）知，$MG^2=\frac{2OG\cdot MO^2+OG\cdot MH^2}{3OG}-2OG^2=\frac{2}{3}MO^2+\frac{1}{3}MH^2-2OG^2$，于是 $3MG^2-3OG^2=2MO^2+MH^2-9OG^2=2MO^2+MH^2-OH^2$.

③ 此类最值问题一般思路是：先找出最值点，算出（猜测）最值，再用不等式、几何关系证明您的结论.

例 10 求证：四条边给定的四边形中，内接于圆的四边形面积最大.

证明 先提出一个引理：设凸四边形 $ABCD$ 的边长为 a、b、c、d，对角和为 2φ（任一组），设四边形的面积为 S_0，则 $S_0^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\varphi$. 其中 $2s=a+b+c+d$.

引理证明：由余弦定理，$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$，所以 $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}=ad\cdot\cos A-bc\cdot\cos C$.

又 $2S_0=ad\sin A+bc\sin C$，上面两式各自平方后相加得

$$S_0^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\varphi.$$

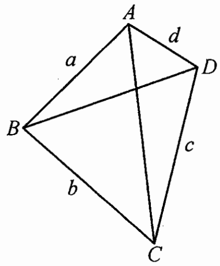


图 10-9

回到原题，对于凹四边形 $ABCD$，不妨设 D 在三角形 ABC 内，则作 D 关于 BC 的反射点 D'，四边形 $ABCD'$ 与 $ABCD$ 四边各自相同，但后者面积更大. 对于凸四边形 $ABCD$，$S_0\leqslant(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ 等号成立时当且仅当 $\cos\varphi=0$，即它为圆内接四边形.

综上，对于给定四边长为 a、b、c、d 的四边形，当且仅当它为圆内接四边形时，它有最大面积 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，其中 $S=\frac{a+b+c+d}{2}$.

习 题 10

1 设 R 与 r 分别是锐角△ABC 的外接圆与内切圆的半径，设∠A 是△ABC

的三个内角中最大的一个，M 是边 BC 的中点，过点 B、C 作$\triangle ABC$ 的外接圆的切线，交于点 X. 证明：$\frac{r}{R}\geqslant\frac{AM}{AX}$.

2 已知 a、b、c 和 R 分别为三角形的三边长和外接圆半径. 证明：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}.$$

3 已知$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c，点 P 在$\triangle ABC$ 的内部，P 到三条边的距离分别为 p、q、r. 证明：$R\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{18\sqrt[3]{pqr}}$，其中 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径，并确定等号成立的条件.

4 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle C$ 的平分线分别与对边交于点 D、E. 若 $\angle B>60^\circ$，证明：$AE+CD<AC$.

5 (嵌入不等式)A，B，C 为$\triangle ABC$ 的内角. 求证：对任意实数 x、y、z，$x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B\geqslant 0$.

6 设在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD+BC$. 在此四边形内，距离 CD 为 h 的地方有一点 P，使得 $AP=h+AD$，$BP=h+BC$. 求证：$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant$

$\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$.

7 设$\triangle ABC$ 为锐角三角形，外接圆圆心为 O，半径为 R，AO 交$\triangle BOC$ 所在圆于另一点 A'，BO 交$\triangle COA$ 所在圆于另一点 B'，CO 交$\triangle AOB$ 所在圆于另一点 C'. 证明：$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，并指出在什么情况下等号成立.

8 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB=BC$，$CD=DE$，$EF=FA$，证明：$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{3}{2}$，并指出等号成立的条件.

9 设在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 和$\angle C$ 的角平分线分别交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1、B_1、C_1. 求证：$AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+CA$.

10 两个凸四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的边长分别为 a、b、c、d 和 a'、b'、c'、d'，面积分别为 s 和 s'. 证明：$aa'+bb'+cc'+dd'\geqslant 4\sqrt{ss'}$.

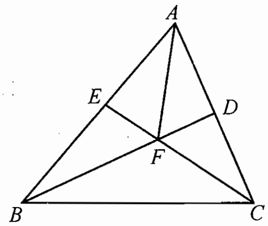
11 已知$\triangle ABC$，设 I 是它的内心，角 A、B、C 的内角平分线分别与其对边交于 A'、B'、C'. 求证：$\frac{5}{4}<\frac{AI\cdot BI}{AA'\cdot BB'}+\frac{BI\cdot CI}{BB'\cdot CC'}+\frac{CI\cdot AI}{CC'\cdot AA'}\leqslant\frac{4}{3}$.

12 设 P 为$\triangle ABC$ 内部或边上任一点，记 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

13 面积为 M 的凸四边形内接于一圆，圆心在四边形内部. 证明：以该四边形对角线交点在四边上的射影为顶点的四边形面积不超过 $\frac{M}{2}$.

14 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，A_1、B_1、C_1 分别为 AG、BG、CG 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点. 求证：$GA_1+GB_1+GC_1\geqslant GA+GB+GC$，等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

15 如图，设 $\triangle ABC$ 内存在一点 F，使得 $\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA$，直线 BF、CE 分别交 AC、AB 于 D、E. 证明：$AB+AC\geqslant 4DE$.



（第 15 题）

16 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，$\triangle ABC$ 的三条高线中最长的一条记为 $h_{\max}$. 证明：$AH+BH+CH\leqslant 2h_{\max}$.

17 设 $\triangle ABC$ 是等边三角形，P 是其内部一点，线段 AP、BP、CP 依次交三边 BC、CA、AB 于 A_1、B_1、C_1 三点. 证明：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$.

11 平面几何中的其他方法和问题选讲

除了前面几章介绍的内容之外，还有一些方法也是平面几何中常用的，比如：同一法、代数法、复数法、向量法、解析法等. 本章就这几种方法各举若干事例.

同一法

例1 $\triangle ABC$ 中，$AH \perp BC$，分别以 AC、AB 为直径作两个圆，D 是 BC 上一点，过 D 分别作 AB、AC 的平行线，在圆的上方交于 F、E. 求证：D、H、F、E 四点共圆.

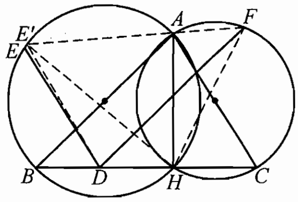


图 11－1

证明 如图 11－1，延长 FA 交以 AB 为直径的圆于 E'，连结 DE'、HE'，则 $\angle HDF = \angle HBA = \angle HE'A = \angle HE'F$，于是 H、D、E'、F 四点共圆，故 $\angle E'DB = \angle E'FH = \angle AFH = \angle ACH = \angle ACB = \angle EDB$，故 E'、E 重合. 从而 D，H，F，E 四点共圆.

注：本题若不用反证法则很难证明，读者不妨一试.

代数法

例2 如图 11－2，设 P 为$\triangle ABC$ 的一个内点，PA、PB、PC 分别交边 BC、CA、AB 于 D、E、F. 证明 $S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 成立当且仅当 P 至少位于$\triangle ABC$ 的一条中线上.

证明 设 $a=\frac{AF}{FB}$，$b=\frac{BD}{DC}$，$c=\frac{CE}{EA}$，则

由塞瓦定理(对$\triangle ABC$ 和 D、E、F)得

$$abc=1 \Rightarrow c=\frac{1}{ab}. \quad ①$$

由梅氏定理(对$\triangle ABD$ 和 FC 使用)

$$\frac{AF}{FB}\frac{BC}{CD}\frac{DP}{PA}=1.$$

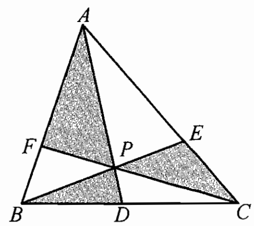


图 11－2

所以 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AF}{FB}\dfrac{BC}{CD}=a(b+1)=a+ab.$

则 $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{AP}{AP+PD}=\dfrac{a+ab}{1+a+ab}.$

从而 $\dfrac{S_{\triangle AFP}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AF}{AB}\dfrac{AP}{AD}\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{a}{a+1}\dfrac{a+ab}{1+a+ab}\dfrac{b}{b+1}$

$$=\frac{ab(a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}.$$

同理可求出 $\dfrac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle ABC}}$ 及 $\dfrac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle ABC}}$.

故 $S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}\Leftrightarrow\dfrac{S_{\triangle AFP}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{ab(a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}+\frac{bc(b+bc)}{(1+b)(1+c)(1+b+bc)}+\frac{ca(c+ca)}{(1+c)(1+a)(1+c+ca)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab(a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}+\frac{b(1+ab)}{(1+b)(1+ab)(1+a+ab)}+\frac{a(1+a)}{(1+a)(1+ab)(1+a+ab)}=\frac{1}{2}\text{(将①代入)}$$

$\Leftrightarrow a^3b^3-a^2b^3-a^3b+a^2+b-1=0$（展开，实际上去分母不是太困难）

$\Leftrightarrow(a-1)(b-1)(ab-1)(ab+a+1)=0$

$\Leftrightarrow(1-a)(1-b)(1-c)(ab+a+1)=0$

$\Leftrightarrow a,\ b,\ c$ 中至少有一个为 1（因为 $ab+a+1>0$）

$\Leftrightarrow p$ 至少位于$\triangle ABC$ 的一条中线上，证毕.

复数法

例 3　如图 11－3，D 是$\triangle ABC$ 内的一点，满足 $\angle DAC=\angle DCA=30^\circ$，$\angle DBA=60^\circ$，$E$ 是边 BC 的中点，F 是边 AC 的三等分点，满足 $AF=2FC$. 求证：$DE\perp EF$.（2007 第六届女子数学奥林匹克）

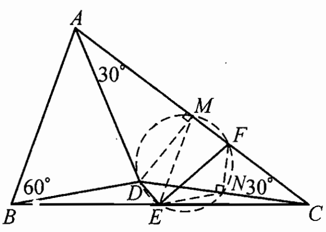


图 11－3

证明　建立复平面，令 $B=0$，$D=1$，$A=-\omega^2k$. 这里 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$k\in\mathbf{R}$.

经计算可得

$$C=1-\omega^2-\omega k,$$

$$E=\frac{B+C}{2}=\frac{1-\omega^2-\omega k}{2},$$

$$F=\frac{2C+A}{3}=\frac{2-2\omega^2-2\omega k-\omega^2 k}{3}.$$

于是，
$$E-1=-\frac{1+\omega^2+\omega k}{2},$$

$$F-E=\frac{1-\omega^2-(\omega+2\omega^2)k}{6}.$$

故
$$\frac{F-E}{E-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\omega^2-1+(\omega+2\omega^2)k}{1+\omega^2+\omega k}$$
$$=\frac{\omega-\omega^2}{3}\cdot\frac{k+1}{k-1}=\frac{i}{\sqrt3}\cdot\frac{k+1}{k-1}.$$

因此，$DE\perp EF$，即 $\angle DEF=90^\circ$.

例 4 如图 11-4，在 $\triangle ABC$ 的三边上向外作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$，使 $\angle PBC=\angle CAQ=45^\circ$，$\angle BCP=\angle QCA=30^\circ$，$\angle ABR=\angle RAB=15^\circ$. 求证：$\angle PRQ=90^\circ$，$QR=PR$.

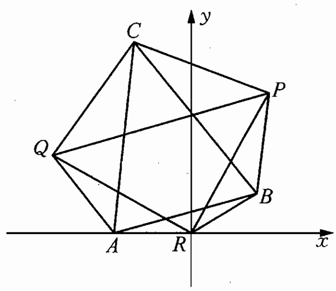


图 11-4

证明 建立如图 11-4 所示复平面，只需证明 $z_Q=i\cdot z_P$.

设 $z_A=-1$，则 $z_B=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$.

因为 $\frac{BP}{BC}=\frac{AQ}{AC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}$，所以 $z_P=z_B+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}(z_C-z_B)\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$，$z_Q=z_A+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}(z_C-z_A)\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$.

$$z_P\cdot i=\left[z_B\left(1-\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{-\frac{\pi}{4}i}\cdot z_C\right]\cdot i$$
$$=e^{\frac{2}{3}\pi i}\left(1-\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot z_C$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i-\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}+i\cdot\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\right)+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot z_C$$
$$=\frac{-3+\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3-1}{2}i+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot z_C;$$

$$z_Q=\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)-1+\frac{\sqrt2}{1+\sqrt3}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot z_C$$

$$= \frac{-3+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \cdot z_C.$$

所以 $z_Q = z_P \cdot \mathrm{i}$.

故 $\angle PRQ = 90°$, $QR = PR$.

例 5 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是圆内接正 n 边形，P 是圆周上的任一点，求证：$PP_1^4 + PP_2^4 + \cdots + PP_n^4$ 是常数.

证明 设圆心在原点，圆的半径为 r.

显然可令 $P_k = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}}(k=1, 2, \cdots, n)$，$P = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，于是

$$\begin{aligned} |PP_k|^4 &= |P-P_k|^4 = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}}|^4 \\ &= r^4[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}})]^2 (\text{这里用到 } |z|^2 = z\cdot\bar{z}) \\ &= r^4[2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}}]^2 \\ &= r^4[6 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{4k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{4k\pi}{n}} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}}]. \end{aligned}$$

但是 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{4k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{n}}(1-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{4n\pi}{n}})}{1-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{n}}} = 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\pm\frac{2k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{n}}(1-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{2n\pi}{n}})}{1-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{n}}} = 0,$$

所以 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} PP_k^4 = 6nr^4$.

它与点 P 无关，即它是一常数.

注 (1) 从证明中易看出，$PP_1^2 + PP_2^2 + \cdots + PP_n^2$ 也是一常数，为 $2nr^2$.

(2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 是复数欧拉公式.

例 6 设 P 是锐角三角形 ABC 内一点，AP、BP、CP 分别交边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，已知 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$. 求证：$P$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

（2007 西部数学奥林匹克）

证明 本题的结论对 $\triangle ABC$ 为一般的三角形都成立. 我们采用复数方法予以证明.

设 P 为复平面上的原点，并直接用 X 表示点 X 对应的复数，则存在正实数 α, β, γ，使得 $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$，且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

由于 D 为 AP 与 BC 的交点，可解得 $D = -\dfrac{\alpha}{1-\alpha}A$，同样地，$E = -\dfrac{\beta}{1-\beta}B$，$F = -\dfrac{\gamma}{1-\gamma}C$. 利用 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$ 可知 $\dfrac{D-E}{A-B} = \dfrac{E-F}{B-C}$，于是

$$\frac{\gamma BC}{1-\gamma}+\frac{\beta AB}{1-\beta}+\frac{\alpha BC}{1-\alpha}-\frac{\alpha AB}{1-\alpha}-\frac{\beta BC}{1-\beta}-\frac{\gamma CA}{1-\gamma}=0.$$

化简得：$(\gamma^2-\beta^2)B(C-A)+(\alpha^2-\gamma^2)A(C-B)=0$. 这时，若 $\gamma^2\neq\beta^2$，则 $\dfrac{B(C-A)}{A(C-B)}\in\mathbf{R}$，因此，$\dfrac{\dfrac{C-A}{C-B}}{\dfrac{P-A}{P-B}}\in\mathbf{R}$，这要求 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆上，与 P 在$\triangle ABC$ 内矛盾，所以 $\gamma^2=\beta^2$，进而 $\alpha^2=\gamma^2$，得 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$. 即 P 为$\triangle ABC$ 的重心. 命题获证.

向量法

例 7 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点为 S，S 在边 AB、CD 上的投影分别为点 E、F. 证明：EF 的中垂线平分线段 BC 和 DA.

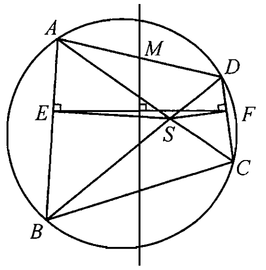


图 11－5

证明 设 AD 的中点为 M，则 $2\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}$.

由于 $\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SE}$，所以，

$$\overrightarrow{SE}\cdot(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SE})=\mathbf{0},$$

即 $\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SE}=\mathbf{0}$. 类似地，可得 $\overrightarrow{SF}\cdot\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SF}\cdot\overrightarrow{SF}=\mathbf{0}$.

由于 $\angle EAS=\angle FDS$，$\angle AES=\angle DFS=90°$，所以 $\triangle ASE\backsim\triangle DSF$.

于是，$|\overrightarrow{SA}|\cdot|\overrightarrow{SF}|=|\overrightarrow{SD}|\cdot|\overrightarrow{SE}|$.

又 $\angle ASF=\angle DSE$，易得 $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SE}$.

故 $(\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SF})^2-(\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SE})^2=2\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{SE}-2\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}\cdot\overrightarrow{SF}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD})\cdot\overrightarrow{SE}-(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD})\cdot\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}\cdot\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SE}-(\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SF}\cdot\overrightarrow{SF})-(\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SE})=0.$

这就表明 DA 的中点在 EF 的中垂线上.

同理，BC 的中点也在 EF 的中垂线上.

故 EF 的中垂线平分线段 BC 和 DA.

例 8 如图 11－5，凸四边形 $ABCD$ 中，AB、DC 的延长线交于 E，AD、BC 的延长线交于 F. P、Q、R 依次为 AC、BD、EF 的中点. 求证：P、Q、R 三点共线.

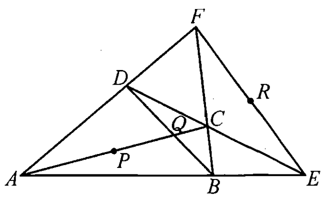


图 11－5

证明 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\vec{a}$，$\overrightarrow{DF}=u\vec{b}$，$\overrightarrow{EC}=m\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{FC}=n\overrightarrow{FB}$.

有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+m(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})=(1+\lambda)(1-m)\vec{a}+m\vec{b}$.

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}+n(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})=(1+u)(1-n)\vec{b}+n\vec{a}$，则有

$$\begin{cases}(1+\lambda)(1-m)=n,\\(1+u)(1-n)=m,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}m=\dfrac{(1+u)\lambda}{\lambda+u+\lambda u},\\[2ex] n=\dfrac{(1+\lambda)u}{\lambda+u+\lambda u}.\end{cases}$$

又因为
$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}[(1+\lambda)\vec{a}+(1+u)\vec{b}],$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\lambda)u}{\lambda+u+\lambda u}\cdot\vec{a}+\frac{(1+u)\lambda}{\lambda+u+\lambda u}\cdot\vec{b}\right].$$

所以
$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\lambda\vec{a}+u\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\lambda)(1+u)}{\lambda+u+\lambda u}\cdot(\lambda\vec{a}+u\vec{b}).$$

故
$$\overrightarrow{PR}=\frac{(1+\lambda)(1+u)}{\lambda+u+\lambda u}\cdot\overrightarrow{QR}.$$

有 $\overrightarrow{PR}\parallel\overrightarrow{QR}$，即 P、Q、R 三点共线.

注 此题我们曾经在完全四边形中用梅氏定理的逆定理证明过.

用向量解决平面几何问题，首先是在图形中选出一对不平行的有向线段，设为$\vec{a}$、$\vec{b}$，则平面内的其他有向线段均可用$\vec{a}$、$\vec{b}$唯一表示，即 $\overrightarrow{AB}=p\vec{a}+q\vec{b}$. 有序实数对$(p,q)$可看成$\overrightarrow{AB}$的"坐标"，这里近似于复数，但它的优点在于直观性，$\vec{a}$、$\vec{b}$可以是不互相垂直，同时起始点可以任意选定，从而对于解决几何问题有着较大的自由度.

解析法

例 9 梯形 $ABCD$ 中，AB 平行于 CD，作点 $F\in AB$，使 $CF=DF$. 设 AC 与 BD 相交于点 E，O_1、O_2 分别为$\triangle ADF$、$\triangle BCF$ 的外心. 求证：$EF\perp O_1O_2$.

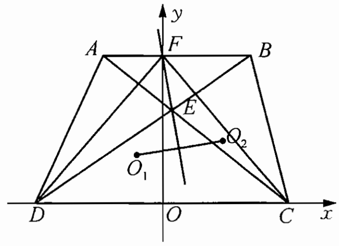


图 11－7

证明　取 DC 中点为 O，由 $CF=DF$，所以 $OF\perp DC$.

以 DC 为 x 轴，OF 为 y 轴建立直角坐标系，不妨设 $D(-1,0)$，$C(1,0)$，$F(0,b)$，$A(d,b)$，$B(c,b)$.

1°若 $c\neq -d$，则直线 AC：

$$y=\frac{b}{d-1}x-\frac{b}{d-1}. \qquad ①$$

直线 BD：

$$y=\frac{b}{c+1}x+\frac{b}{c+1}. \qquad ②$$

联立①、②知 $E\left(\frac{c+d}{c+2-d},\frac{2b}{c+2-d}\right)$，所以

$$k_{EF}=\frac{\frac{2b}{c+2-d}-b}{\frac{c+d}{c+2-d}}=\frac{bd-bc}{c+d}. \qquad ③$$

而直线 AF 中垂线方程为 $x=\frac{d}{2}$.

直线 DF 中垂线方程为

$$y=-\frac{1}{b}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{b}{2}.$$

所以 $O_1\left(\frac{d}{2},-\frac{1}{b}\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{b}{2}\right)$.

同理，$O_2\left(\frac{c}{2},\frac{1}{b}\left(\frac{c}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{b}{2}\right)$.

所以

$$K_{O_1O_2}=\frac{\frac{1}{b}\left(\frac{c}{2}-\frac{1}{2}+\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\frac{c}{2}-\frac{d}{2}}=\frac{\frac{1}{b}\left(\frac{c+d}{2}\right)}{\frac{c-d}{2}}=\frac{c+d}{b(c-d)}. \qquad ④$$

由③④知 $K_{EF}\cdot K_{O_1O_2}=\frac{bd-bc}{c+d}\cdot\frac{c+d}{b(c-d)}=-1$.

所以 $EF\perp O_1O_2$.

2°若 $c=-d$，则由对称性知 $EF\perp O_1O_2$.

综上，$EF \perp O_1O_2$.

例 10 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，有一圆内切于$\triangle ABC$的外接圆，且与AB和AC分别相切于点P和Q.求证：点P和Q连线的中点是$\triangle ABC$的内切圆圆心.

分析 设PQ中点为O，则O在$\angle BAC$的平分线AD上.如图11－8建立直角坐标系，设$OA=1$，$\angle BAO=\alpha$.设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为K内切圆的圆心为M.连结PK.则O到AB与AC的距离等于$\sin\alpha$，故只需证明O到BC的距离也等于$\sin\alpha$，即

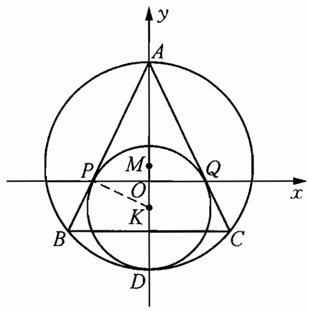


图 11－8

$$y_B=y_C=-\sin\alpha.$$

因为$\triangle ABC$的外接圆直径

$$\begin{aligned}2R&=OA+OK+KD=OA+OK+KP\\&=1+\tan^2\alpha+\tan\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha},\end{aligned}$$

所以，$R=\dfrac{1+\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}$，

$$y_M=1-R=\frac{\cos 2\alpha-\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}.$$

从而，$\odot M$的方程为

$$x^2+\left(y-\frac{\cos 2\alpha-\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)^2=\left(\frac{1+\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)^2.$$

而AB的方程为$y=\cot\alpha\cdot x+1$.

解上述两方程得

$$y_A=1,\ y_B=-\sin\alpha.$$

故命题成立.

注 此题我们在前面几章曾经多次出现过，这里用的是解析法，也是一种不错的方法.

例 11 $\odot O_1$和$\odot O_2$被包含在$\odot O$内，且分别与$\odot O$相切于两个不同的点M和N.$\odot O_1$经过点O_2，经过$\odot O_1$和$\odot O_2$的两个交点的直线与$\odot O$相交于点A和B.直线MA和MB分别与$\odot O_1$相交于C和D.证明：CD与$\odot O_2$

相切.

分析　如图 11-9,所以为坐标原点,MO 为 x 轴正半轴,建立如图所示坐标系.设$\odot O$、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r、r_1、r_2,$\angle O_2MO=\alpha$.连结 MO_2,OO_2,NO_2,则$\odot O_1$ 的方程为

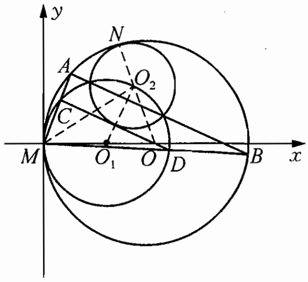


图 11-9

$$(x-r_1)^2+y^2=r_1^2,$$

$\odot O_2$ 方程为

$$(x-r_1-r_1\cos 2\alpha)^2+(y-r_1\sin 2\alpha)^2=r_2^2.$$

所以,AB 的方程为

$$\begin{aligned}&(x-r_1)^2+y^2-r_1^2\\=&(x-r_1-r_1\cos 2\alpha)^2+(y-r_1\sin 2\alpha)^2-r_2^2,\end{aligned}$$

即 $$2r_1[\cos 2\alpha\cdot(x-r_1)+\sin 2\alpha\cdot y]+r_2^2-2r_1^2=0.$$

又$\odot O$ 与$\odot O_1$ 关于原点 M 成位似图形(位似比为$\frac{r}{r_1}$),所以,CD 的方程为

$$2r_1\left[\cos 2\alpha\left(\frac{r}{r_1}x-r_1\right)+\sin 2\alpha\frac{r}{r_1}y\right]+r_2^2-2r_1^2=0,$$

即 $$2r\cos 2\alpha\cdot x+2r\sin 2\alpha\cdot y+r_2^2-2r_1^2(1+\cos\alpha)=0.\qquad ①$$

又 $OO_2^2=(r-r_1-r_1\cos 2\alpha)^2+(r_1\sin 2\alpha)^2=(r-r_2)^2$,所以,

$$r_2^2-2r_1^2(1+\cos 2\alpha)=2rr_2-2rr_1(1+\cos 2\alpha).$$

将上式代入①得 CD 的方程

$$\cos 2\alpha\cdot x+\sin 2\alpha\cdot y+r_2-r_1(1+\cos 2\alpha)=0.$$

从而,O_2 到 CD 的距离为(注意 O_2 的坐标为$(r_1+r_1\cos 2\alpha,\ r_1\sin 2\alpha)$)

$$d=\cos 2\alpha\cdot(r_1+r_1\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha\cdot r_1\sin 2\alpha+r_2-r_1(1+\cos 2\alpha)=r_2.$$

因此,CD 与$\odot O_2$ 相切.

注　此题虽然用的是解析法,但也有三角的思想在里面,解析法对代数的功夫要求很高.

作为本章的结束,我们最后看一道几何杂题:

例 12　求最小常数 $a>1$,使得对正方形 $ABCD$ 内部任一点 P,都存在

$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 中的某两个三角形，使得它们的面积之比属于区间$[a^{-1}, a]$.（2008 第七届女子数学奥林匹克）

解　$a_{\min}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

首先证明 $a_{\min}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，记 $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 如图 11－9，不妨设正方形边长为$\sqrt{2}$. 对正方形 $ABCD$ 内部一点 P，令 S_1，S_2，S_3，S_4 分别表示 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 的面积，不妨设 $S_1\geqslant S_2\geqslant S_4\geqslant S_3$.

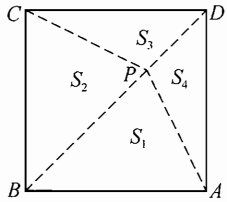


图 11－9

令 $\lambda=\dfrac{S_1}{S_2}$，$\mu=\dfrac{S_2}{S_4}$，如果 λ，$\mu>\varphi$，由

$S_1+S_3=S_2+S_4=1$，得$\dfrac{S_2}{1-S_2}=\mu$，得 $S_2=\dfrac{\mu}{1+\mu}$.

故 $S_1=\lambda S_2=\dfrac{\lambda\mu}{1+\mu}=\dfrac{\lambda}{1+\dfrac{1}{\mu}}>\dfrac{\varphi}{1+\dfrac{1}{\varphi}}=\dfrac{\varphi^2}{1+\varphi}=1$，矛盾. 故 $\min\{\lambda, \mu\}\leqslant\varphi$，这表明 $a_{\min}\leqslant\varphi$.

反过来对于任意 $a\in(1, \varphi)$，取定 $t\in\left(a, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$，使得 $b=\dfrac{t^2}{1+t}>\dfrac{8}{9}$. 我们在正方形 $ABCD$ 内取点 P，使得 $S_1=b$，$S_2=\dfrac{b}{t}$，$S_3=\dfrac{b}{t^2}$，$S_4=1-b$，则我们有

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_2}{S_3}=t\in\left(a, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \frac{S_3}{S_4}=\frac{b}{t^2(1-b)}>\frac{b}{4(1-b)}>2>a,$$

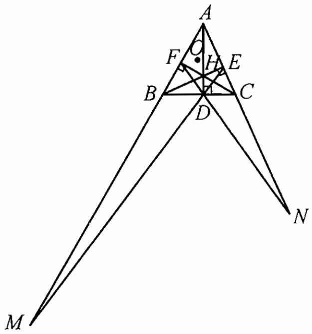
由此我们得到对任意 i，$j\in\{1, 2, 3, 4\}$，有$\dfrac{S_i}{S_j}\notin[a^{-1}, a]$. 这表明 $a_{\min}=\varphi$.

习　题　11

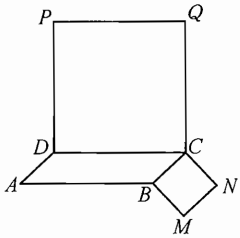
1　设 A、B、C 为单位圆上的三个不同的点，G、H 分别为$\triangle ABC$ 的重心、垂心. 若 F 为线段 GH 的中点，求$|\overrightarrow{AF}|^2+|\overrightarrow{BF}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2$ 的值.

2　如图，在$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高线交于 H，D、E、F 为垂足，直线 ED、AB 交于 M，直线 FD、AC 交于 N. 求证：

(1) $OB \perp DF$，$OC \perp DE$；
(2) $OH \perp MN$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3 如图，在▱$ABCD$ 两边 BC、CD 向外分别作正方形 $BCNM$、$CDPQ$. 求证：$AC \perp QN$.

4 设 AD 是△ABC 的中线，l 是垂直于 AD 的一条直线，M 是 l 上一点，E、F 分别为 MB、MC 的中点，过点 E、F 且垂直于 l 的直线分别与 AB、AC 交于点 P、Q，l'是过点 M 且垂直于 PQ 的直线. 证明：l'总过一定点.（2008 越南数学奥林匹克）

5 设点 A 是圆 O 外一点，过点 A 作圆 O 的切线，切点分别为 B、C. 圆 O 的切线 l 与 AB、AC 分别交于点 P、Q，过点 P 且平行于 AC 的直线与 BC 交于点 R. 求证：无论 l 如何变化，QR 恒过一定点.

6 A、B 为平面上的两个定点，C 为平面上位于直线 AB 同侧的一个动点，以 AC、BC 各为边，在△ABC 外作正方形 $CADl$、$CBEJ$. 证明：无论 C 点取在直线 AB 同侧的任何位置，DE 的中点 M 位置不变.

7 求证：任意凸四边形各边中点连线的中点必重合.

8 在凸四边形 $ABCD$ 的外部分别作正三角形 ABQ，正三角形 BCR，正三角形 CDS，正三角形 DAP，记四边形 $ABCD$ 的对角线之和为 x，四边形 $PQRS$ 的对边中点连线之和为 y，求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值.（2008 第七届女子数学奥林匹克）

9 凸四边形 $ABCD$ 中，点 M，N 在边 AB 上，使 $AM = MN = NB$，点 P、Q 在边 CD 上，使 $CP = PQ = QD$. 求证：$S_{四边形AMCP} = S_{四边形MNPQ} = \dfrac{1}{3}S_{四边形ABCD}$.

10 凸六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的各边之长相等，每个顶点关于两个相邻顶点

的连线的对称点分别为 P'_1、P'_2、P'_3、P'_4、P'_5、P'_6. 证明：$\triangle P'_1P'_3P'_5 \cong \triangle P'_2P'_4P'_6$.

11 已知梯形 $ABCD$，边 $AB /\!/ CD$，对角线 AC、BD 交于点 O，在 AD 上取一点 P，使 $\angle BPA = \angle CPD$，在 BC 上取一点 Q，使 $\angle AQB = \angle DQC$. 求证：O 到 P、Q 的距离相等.

12 已知锐角$\triangle ABC$，其内切圆与边 AB、AC 分别切于点 D、E，X、Y 分别是$\angle ACB$、$\angle ABC$ 的平分线与 DE 的交点，Z 是边 BC 的中点. 求证：当且仅当$\angle A=60°$时，$\triangle XYZ$ 是等边三角形.

13 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 的角平分线分别为 BE、CD，其中点 D、E 分别在边 AB、AC 上，设 DE 的中点 P 在边 BC、AB、AC 上的投影分别为 Q、M、N. 证明：$PQ = PM + PN$.

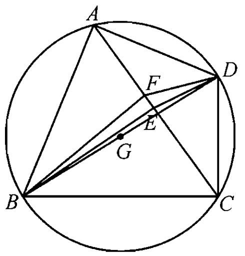
14 已知 P 为正$\triangle ABC$ 内一点，P 在边 AB、BC、CA 上的投影分别为点 A'、B'、C'. 记$\triangle APC'$、$\triangle BPA'$、$\triangle CPB'$、$\triangle APA'$、$\triangle BPB'$、$\triangle CPC'$的内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6. 证明：$r_1+r_2+r_3=r_4+r_5+r_6$.

习题解答

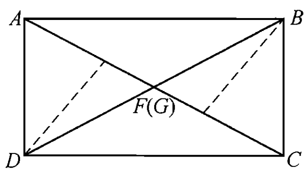
习　题　1

1. 证明：(1) 设 E 为 $\angle B$ 与 $\angle D$ 平分线的交点. 由角分线定理有 $\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DC}\cdots$ ①. 由托勒密定理有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$. 结合式①有 $2BC\cdot AD=AC\cdot BD\cdots$ ②. $2AB\cdot CD=AC\cdot BD\cdots$ ③. 由式②得 $\frac{FA}{AD}=\frac{AC}{2AD}=\frac{BC}{BD}$. 又 $\angle FAD=\angle CAD=\angle CBD$，故 $\triangle FAD\backsim\triangle CBD$. 同理，$\triangle FAB\backsim\triangle CDB$. 因此，$\triangle FAD\backsim\triangle FBA$，有 $\frac{FA}{FD}=\frac{FB}{FA}$. 故 $\frac{1}{4}AC^2=FB\cdot FD\cdots$ ④. 又由式①知 $\frac{DA}{AB}=\frac{DC}{CB}$，这意味着 $\angle A$ 与 $\angle C$ 平分线的交点在 BD 上.

仿上述证法有，$\frac{1}{4}BD^2=AG\cdot CG\cdots$ ⑤. ④×⑤即可得证.



(第 1 题图①)



(第 1 题图②)

(2) (1)的逆命题不一定成立.

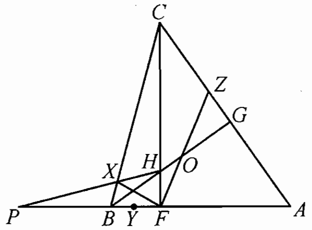
设四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB>BC$. 显然，$AG=BF=CG=DF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$，满足 $\left(\frac{1}{4}AC\cdot BD\right)^2=AG\cdot BF\cdot CG\cdot DF$. 但 $\frac{AB}{BC}>1>\frac{AD}{DC}$，

说明$\angle B$与$\angle D$的平分线不在AC相交. 因此，逆命题为假命题.

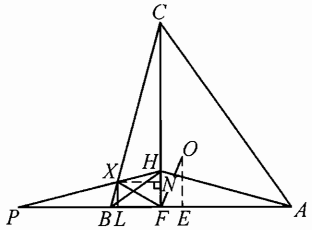
2. 证明：如图①，首先，由G是AC中点，O、H分别为$\triangle ABC$的外心，垂心，及欧拉定理知：G、O、H、B四点共线.

要证Z、G、F、Y四点共圆，由$\angle YGZ=\angle OGZ=90^\circ$，知只需证$\angle OFY=90^\circ$，即$\angle OFX=90^\circ$.

如图②，作$OE\perp AB$. 则$CH=2OE$. 由题设有$PB=PF-BF=AF-BF=2EF$. 另一方面，由$\angle HPB=\angle HAB=\angle HCB$，知$P$、$B$、$H$、$C$四点共圆. 因此，$\triangle PXB\backsim\triangle CXH$. 作$XL\perp AB$于点$L$，$XN\perp CF$于点$N$. 则$\dfrac{XL}{LF}=\dfrac{XL}{XN}=\dfrac{PB}{CH}=\dfrac{2EF}{2OE}=\dfrac{EF}{OE}$. 又$\angle XLF=\angle FEO=90^\circ$. 于是，$\triangle XLF\backsim\triangle FEO$. 从而，$\angle XFL=\angle FOE$. 故$\angle XFO=180^\circ-\angle XFL-\angle OFE=180^\circ-\angle FOE-\angle OFE=90^\circ$.

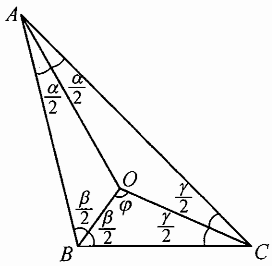


（第 2 题图①）



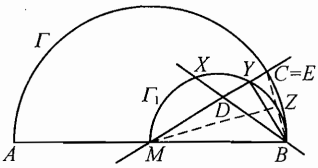
（第 2 题图②）

3. 证明：如图，设$\triangle ABC$的三个内角分别为α、β、γ，O为其内切圆圆心. 点O和$\triangle ABC$的三个顶点的连线是其三个内角的平分线. 因为$\angle OBC=\dfrac{\beta}{2}$，$\angle OCB=\dfrac{\gamma}{2}$，则$\angle COB=180^\circ-\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\gamma}{2}=90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$. 不失一般性，设$\triangle ABC$和$\triangle COB$相似. 于是，$\angle COB$等于$\alpha$，$\beta$，$\gamma$中的一个. 若$\angle COB=\alpha$，则$90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}=\alpha$，即



（第 3 题）

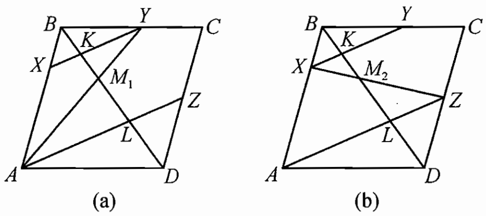
$\alpha=180^\circ$，这是不可能的. 因此，$\angle COB=\beta$或$\angle COB=\gamma$. 不妨设$\angle COB=\beta$，则有$\angle OBC=\alpha$或$\angle OBC=\gamma$. 若是第一种情况，有$\angle BCO=\gamma$，则$\dfrac{\gamma}{2}=\gamma$，不可能. 因此，$\angle OBC=\gamma$，$\angle BCO=\alpha$. 于是，$\gamma=2\alpha$，$\beta=2\gamma=4\alpha$. 因为$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$，即$\alpha+2\alpha+4\alpha=180^\circ$，则$\alpha=\left(\dfrac{180}{7}\right)^\circ$，$\beta=\left(\dfrac{720}{7}\right)^\circ$，$\gamma=\left(\dfrac{360}{7}\right)^\circ$.



(第 4 题)

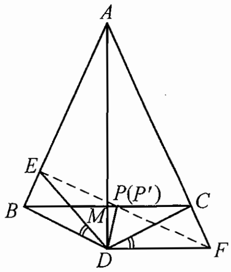
4. 证明：如图，取$\overset{\frown}{BY}$的中点 Z，设 BZ、MY 相交于点 E，在半圆 Γ_1 中，$\angle MZB$ 是直径 MB 所对的圆心角，于是，$MZ \perp BZ$. 因为$\overset{\frown}{BZ}=\overset{\frown}{ZY}$，所以，$\angle YMZ=\angle BMZ$. 在 $\triangle MZB$ 和 $\triangle MZE$ 中，由 $\angle EMZ=\angle BMZ$，$MZ=MZ$，$\angle MZE=\angle MZB=90°$，所以，$\triangle MZB \cong \triangle MZE$. 故 $ME=MB$. 因此，点 E 和 C 重合. 又 $\angle MYB$ 是直径 MB 所对的圆心角，于是，$MY \perp BY$. 因为$\overset{\frown}{ZY}=\overset{\frown}{YX}$，所以，$\angle ZBY=\angle YBX$. 同理，$\triangle BYC \cong \triangle BYD$. 故 $CY=DY$.

5. 证明：如图(a)，注意到 $\angle BYX=\angle ZAD$，$\angle XBY=\angle ZDA$，所以，$\triangle XBY \backsim \triangle ZDA$. 故$\dfrac{BX}{BY}=\dfrac{DZ}{DA}$.



(第 5 题)

设 K、L 分别是对角线 BD 与线段 XY、AZ 的交点. 因为 BD 是$\angle ABC$ 和$\angle ADZ$ 的平分线，则 $\dfrac{BX}{BY}=\dfrac{XK}{KY}$，$\dfrac{DZ}{DA}=\dfrac{ZL}{LA}$. 从而，$\dfrac{XK}{KY}=\dfrac{ZL}{LA}$ 或$\dfrac{XK}{ZL}=\dfrac{KY}{LA}$…①. 设线段 AY 与对角线 BD 交于 M_1，易知 $\triangle KYM_1 \backsim \triangle LAM_1$. 则$\dfrac{KY}{LA}=\dfrac{KM_1}{LM_1}$…②. 如图(b)，设线段 XZ 与对角线 BD 交于 M_2，易知 $\triangle KXM_2 \backsim \triangle LZM_2$，则$\dfrac{XK}{ZL}=\dfrac{KM_2}{LM_2}$…③. 由式①、②、③得 $\dfrac{KM_1}{LM_1}=\dfrac{KM_2}{LM_2}$，即 $M_1=M_2$. 因此，XZ、AY、BD 三线共点.

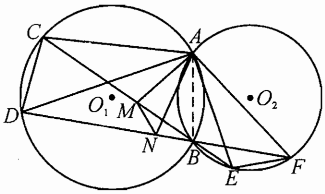


(第 6 题)

6. 证明：如图，连结 EF 交 BC 于 P'. 首先，$\angle EBD=\angle DCF=90°$，$BD=CD$，$\angle BDE=\angle CDF$，故 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$. 进而，$DE=DF$，$\triangle DEF$ 也是等腰三角形. 则 $\angle EDF=\angle EDC+\angle CDF=\angle BDE+\angle EDC=\angle BDC$. 因此，$\triangle EDF \backsim \triangle BDC$，$\angle DEF=\angle DBC$. 于是，$E$、$B$、$D$、$P'$ 四点共圆. 所以，$\angle EP'D=\angle EBD=90°$. 从而，$EP'=P'F$，$DP' \perp EF$. 下面证明

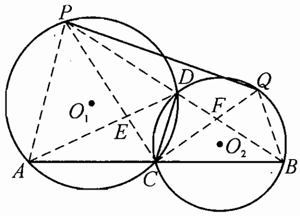
P' 与 P 重合. 由 $\angle BP'D=\angle BED$，$\angle P'MD=\angle EBD=90°$，得 $\triangle MP'D\backsim\triangle BED$，$\angle ADP'=\angle BDE$. 所以，$P'$ 与 P 重合. 因此，所证结论成立.

7. 证明：如图，连结 AB. 显然，四边形 $ACDB$ 和四边形 $ABEF$ 都是圆内接四边形，所以，$\angle CAD=\angle CBD=\angle EBF=\angle EAF$，$\angle ADC=\angle ABC=180°-\angle EBA=\angle AFE$. 因此，$\triangle ACD\backsim\triangle AEF$. 同理，$\triangle ACE\backsim\triangle ADF$，所以，$AC:AM=AD:AN\cdots$①. 且 $\angle CAM=\angle DAN$. 从而，$\angle CAD=\angle MAN\cdots$②. 由①、②知 $\triangle ACD\backsim\triangle AMN$.



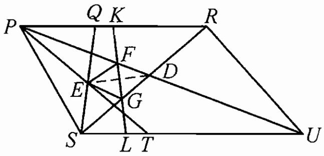
（第 7 题）

8. 证明：如图，设 AD、PC 相交于点 E，BD、QC 相交于点 F. 由 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PD}$，知 $\angle PDE=\angle PCD$. 又 $\angle DPE=\angle CPD$，则 $\triangle PDE\backsim\triangle PCD$. 于是，$\dfrac{PD}{PC}=\dfrac{PE}{PD}$，即 $PD^2=PC\cdot PE$. 同理，$QD^2=QC\cdot QF$，由 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PD}$，知 $\angle ACP=\angle DCE$. 又 $\angle CPA=\angle CDE$，则 $\triangle CPA\backsim\triangle CDE$. 于是，$\dfrac{CA}{CE}=\dfrac{CP}{CD}$，即 $PC\cdot CE=CA\cdot CD$. 同理，$QC\cdot CF=CB\cdot CD$. 而 $PD^2-QD^2=PC\cdot PE-QC\cdot QF=PC(PC-CE)-QC(QC-CF)=PC^2-QC^2+QC\cdot CF-PC\cdot CE=PC^2-QC^2+CB\cdot CD-CA\cdot CD=PC^2-QC^2$. 所以，$PQ\perp CD$.



（第 8 题）

9. 证明：如图，设 PU 与 RS 交于点 D. 由 $\angle PSR=2\angle RSU$，$\angle SPU=2\angle UPR$，有 $\angle PSD+\angle SPD=2(\angle RSU+\angle UPR)=2\angle PDS=180°-\angle PDS$. 故 $\angle PDS=60°$. 易知 DE 平分 $\angle PDS$，故 $\square DFEG$ 为菱形. 又 $\angle PDS=60°$，故 $DF=FE=EG=GD=FG$. 又 $\angle KPF=\dfrac{1}{2}\angle SPU=\angle EPF$，$\angle KFP=\angle DFG=60°=\angle EFP$，故 $\triangle KFP\cong\triangle EFP$. 从而，$KF=EF=FG$. 同理，$GL=GE=FG$. 所以，$KF=FG=GL$.

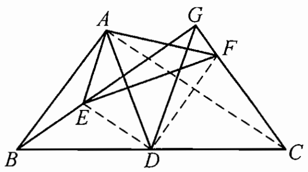


（第 9 题）

10. 解：设 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，h_a、h_b、h_c 分别为顶点 A、B、C 对应的高. 因为 $A_1B_2\parallel AB$，所以，$\triangle A_1CB_2\backsim\triangle ACB$. 从而，$\dfrac{A_1B_2}{AB}=\dfrac{h_c-r}{h_c}$. 同

理，$\frac{B_1C_2}{BC}=\frac{h_a-r}{h_a}$，$\frac{C_1A_2}{CA}=\frac{h_b-r}{h_b}$. 故 $S=\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}=\frac{h_c-r}{h_c}+\frac{h_a-r}{h_a}+\frac{h_b-r}{h_b}=3-r\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)$. 设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积. 则 $2S=ah_a=bh_b=ch_c=r(a+b+c)$. 于是，$S=3-r\left(\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}\right)=2$.

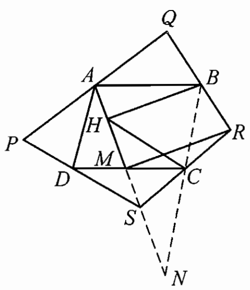
注：事实上，I 为 $\triangle ABC$ 内任意一点时，均有 $S=2$，这是因为 $\frac{B_1C_2}{BC}=\frac{AB_1}{AB}$，$\frac{C_1A_2}{CA}=\frac{A_2B}{AB}$. 故 $S=\frac{A_1B_2+AB_1+A_2B}{AB}=\frac{A_1I+IB_2+AB_1+A_2B}{AB}=\frac{AA_2+B_1B+AB_1+A_2B}{AB}=2$.



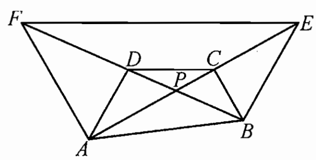
（第 11 题）

11. 解：如图，连结 DE、DF、AC. 因为 $BC=2DG$，所以，$\triangle BGC$ 是直角三角形. 故 $\angle GBC+\angle GCB=90^\circ$. 又 E、F 是外心，则 $\angle GBC=90^\circ-\angle BAD$，$\angle GCB=90^\circ-\angle DAC$. 故 $90^\circ=\angle GBC+\angle GCB=180^\circ-\angle BAD-\angle CAD=180^\circ-\angle BAC\Rightarrow\angle BAC=90^\circ\Rightarrow\triangle BAC$ 是直角三角形. 因此，$DA=\frac{1}{2}BC=1004$. 又 $AE=DE$，$AF=DF$，则 $\triangle AEF\cong\triangle DEF$，且 EF 垂直平分 AD. 故 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{四边形AEDF}=\frac{1}{2}AD\cdot EF=\frac{1}{4}\times1004\times1255=315\,005$.

12. 证明：易知四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 如图，延长 AM、BC 交于点 N. 由 $AD\,/\!/\,CN$，则 $\angle MAD=\angle MNC$. 又 $\angle AMD=\angle NMC$，且 $MD=MC$. 于是，$\triangle AMD\cong\triangle NMC$. 因此，$CN=DA=CB=HC$. 从而，点 H 位于以点 C 为圆心、BN 为直径的圆上. 所以，$\angle BHM=90^\circ$.



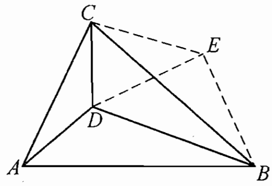
（第 12 题）



（第 13 题）

13. 证明：如图，设 P 是对角线 AC 和 BD 的交点. 为证 $CD\,/\!/\,EF$，只需

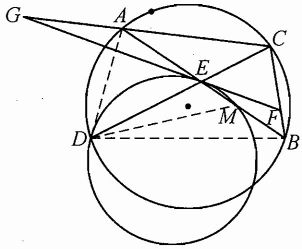
证$\frac{PE}{PF}=\frac{PC}{PD}$. 因为 $BC\parallel AF$，$\triangle PBC\backsim\triangle PFA$，所以，$\frac{PF}{PB}=\frac{PA}{PC}$，即 $PF=\frac{PA\cdot PB}{PC}$. 因为 $AD\parallel BE$，$\triangle PAD\backsim\triangle PEB$，所以，$\frac{PE}{PA}=\frac{PB}{PD}$，即 $PE=\frac{PA\cdot PB}{PD}$. 于是，$\frac{PE}{PF}=\frac{\frac{PA\cdot PB}{PD}}{\frac{PA\cdot PB}{PC}}=\frac{PC}{PD}$. 因此，$CD\parallel EF$.


（第 14 题）

14. 解：如图，分别作 $\angle CBE=\angle CAD$，$\angle ACD=\angle BCE$，边 BE、CE 相交于 E. 于是 $\triangle ACD\backsim\triangle BCE$. 从而

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BE}=\frac{CD}{CE}. \qquad ①$$

所以 $AC\cdot BE=BC\cdot AD=AC\cdot BD$，即 $BE=BD$.
又因为 $\angle ADB=\angle CBD+\angle CAD+\angle ACB=90^\circ+\angle ACB$，所以 $\angle BDE=\angle CBD+\angle CBE=\angle CBD+\angle CAD=90^\circ$. 故连结 DE，$\triangle DBE$ 是等腰直角三角形. 由 ① 知$\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$，且 $\angle ACD=\angle BCE$，于是$\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$，$\angle ACB=\angle DCE$，从而 $\triangle CAB\backsim\triangle CDE$，所以$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{CA}$，$\frac{AB\cdot CD}{BD\cdot CA}=\frac{DE}{BD}=\sqrt{2}$.


（第 15 题）

15. 解：如图，连结 AD，DM，DB. 由题设，有 $\angle CEF=\angle DEG=\angle EMD$，$\angle ECF=\angle MAD$，于是 $\triangle CEF\backsim\triangle AMD$.

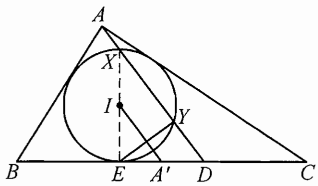
从而 $CE\cdot MD=AM\cdot EF\cdots$ ①.

另一方面，又有 $\angle ECG=\angle MBD$，于是 $\angle CGE=\angle CEF-\angle ECG=\angle EMD-\angle MBD=\angle BDM$，故 $\triangle CGE\backsim\triangle BDM$，

从而 $GE\cdot BM=CE\cdot DM\cdots$ ②.

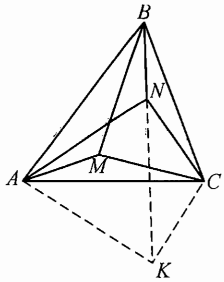
由①，②得 $GE\cdot BM=AM\cdot EF$，故

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{BM}=\frac{t\cdot AB}{(1-t)\cdot AB}=\frac{t}{1-t}.$$


（第 16 题）

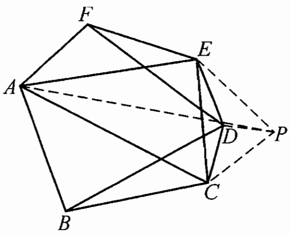
16. 证明：(1) 如图，由条件可知 D 为$\angle A$ 内的旁切圆与边 BC 的切点，且 A 为$\angle A$ 内的旁切圆和内切圆的位似中心，D 和 X 是对应点. 因此，过点 X 的切线与 BC 平行. 从而，XE 为$\odot I$ 的直径，则 $\angle XYE=90^\circ$，即 $EY\perp AD$.

(2) 因为 $BE=DC=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)$，所以，$A'$ 为 ED 的中点. 又 I 为 XE 的中点，故 $XD=2IA'$.



(第 17 题)

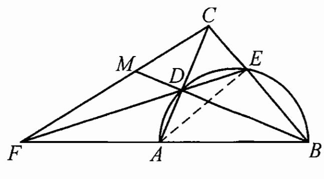
17. 证明：如图，设 K 是射线 BN 上的点，且满足 $\angle BCK=\angle BMA$. 因为 $\angle BMA>\angle ACB$，则 K 在 $\triangle ABC$ 的外部. 又因 $\angle MBA=\angle CBK$，所以 $\triangle ABM\backsim\triangle KBC$. 故 $\frac{AB}{BK}=\frac{BM}{BC}=\frac{AM}{CK}$. 由 $\angle ABK=\angle MBC$，$\frac{AB}{KB}=\frac{BM}{BC}$，可得 $\triangle ABK\backsim\triangle MBC$，于是，$\frac{AB}{BM}=\frac{BK}{BC}=\frac{AK}{CM}$. 因为 $\angle CKN=\angle MAB=\angle NAC$，所以 A、N、C、K 四点共圆. 由托勒密(Ptolemy)定理，有 $AC\cdot NK=AN\cdot CK+CN\cdot AK$，或 $AC(BK-BN)=AN\cdot CK+CN\cdot AK$. 将 $CK=\frac{AM\cdot BC}{BM}$，$AK=\frac{AB\cdot CM}{BM}$，$BK=\frac{AB\cdot BC}{BM}$ 代入，得 $AC\left(\frac{AB\cdot BC}{BM}-BN\right)=\frac{AN\cdot AM\cdot BC}{BM}+\frac{CN\cdot AB\cdot CM}{BM}$，即 $\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$.



(第 18 题)

18. 证明：如图，设点 P 满足 $\angle FEA=\angle DEP$，$\angle EFA=\angle EDP$，则 $\triangle FEA\backsim\triangle DEP$. 于是，$\frac{FA}{EF}=\frac{DP}{DE}$…①，$\frac{EF}{ED}=\frac{EA}{EP}$…②. 由已知条件，有 $\angle ABC=\angle PDC$. 又由 ① 及已知条件得 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE\cdot FA}{CD\cdot EF}=\frac{DP}{CD}$…③. 所以，$\triangle ABC\backsim\triangle PDC$，故 $\angle BCA=\angle DCP$，且 $\frac{CB}{CD}=\frac{CA}{CP}$. 因为 $\angle FED=\angle AEP$，由 ② 知 $\triangle FED\backsim\triangle AEP$，类似地，由 $\angle BCD=\angle ACP$ 及 ③ 得 $\triangle BCD\backsim\triangle ACP$. 于是 $\frac{FD}{EF}=\frac{PA}{AE}$，$\frac{BC}{DB}=\frac{CA}{PA}$. 两式相乘，即得所求.

习 题 2

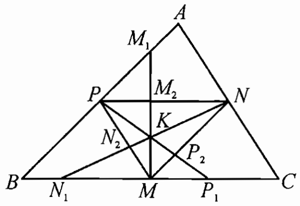


(第 1 题)

1. 证明：如图，因为 A、B、E、D 四点共圆，所以，$\angle CBD=\angle EAD$. 又 AC、BM、FE 交于点 D，由塞瓦定理有 $\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CM}{MF}=1$. 因此，$MF=$

$MC \Leftrightarrow \dfrac{FA}{AB} \cdot \dfrac{BE}{EC} = 1 \Leftrightarrow AE \parallel CF \Leftrightarrow \angle FCA = \angle EAC = \angle MBC \Leftrightarrow \triangle MCD \backsim \triangle MBC \Leftrightarrow MB \cdot MD = MC^2$.

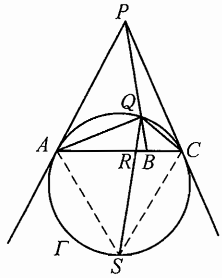
2. 证明：如图，不妨设 $BC = a$，$AB = c$，$AC = b$，且 $a \geqslant c \geqslant b$. 由 M、N、P 为 $\triangle ABC$ 三边中点，有 $\dfrac{PM_2}{PN} = \dfrac{PM_2}{BM} = \dfrac{PM_1}{BM_1} = \dfrac{\frac{b+c}{2} - \frac{c}{2}}{\frac{b+c}{2}} = \dfrac{b}{b+c}$，故 $\dfrac{PM_2}{M_2N} = \dfrac{b}{c}$. 同理，$\dfrac{NP_2}{P_2M} = \dfrac{a}{b}$，$\dfrac{MN_2}{N_2P} = \dfrac{c}{a}$. 所以，$\dfrac{PM_2}{M_2N} \cdot \dfrac{NP_2}{P_2M} \cdot \dfrac{MN_2}{N_2P} = 1$，因此，$MM_1$、$NN_1$、$PP_1$ 交于同一点 K.



（第 2 题）

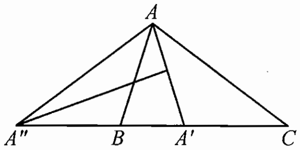
3. 证明：如图，假设 $\angle AQC$ 的平分线交 AC 于点 R，交圆 Γ 于点 S，其中 S 与 Q 是不同的两点.

因为 $\triangle PAC$ 是等腰三角形，所以，$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}$，同理，在 $\triangle ASC$ 中，$\dfrac{AR}{RC} = \dfrac{\sin\angle ASQ}{\sin\angle CSQ}$. 在 $\triangle PAC$ 中，视 Q 为其塞瓦点. 由角元塞瓦定理，有 $\dfrac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB} \cdot \dfrac{\sin\angle QAC}{\sin\angle QAP} \cdot \dfrac{\sin\angle QCP}{\sin\angle QCA} = 1$. 因为 $\angle PAQ = \angle ASQ = \angle QCA$，$\angle PCQ = \angle CSQ = \angle QAC$，则 $\dfrac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB} = \dfrac{\sin\angle PAQ \cdot \sin\angle QCA}{\sin\angle QAC \cdot \sin\angle PCQ} = \dfrac{\sin^2\angle ASQ}{\sin^2\angle CSQ}$. 故 $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AR^2}{RC^2}$. 因此，点 R 不依赖于圆 T 的选取.



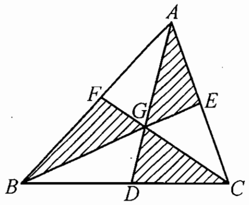
（第 3 题）

4. 证明：如图，注意到 $\angle BAA' = \angle A'AC$，$\angle A''AA' = \angle A''A'A$. 相减得 $\angle A''AB = \angle C$. 于是，AA'' 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线. 从而，$\triangle AA''B \backsim \triangle CA''A$. 故 $\dfrac{BA''}{A''C} = \dfrac{BA''}{AA''} \cdot \dfrac{AA''}{A''C} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$. 同理，$\dfrac{CB''}{B''A} = \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$，$\dfrac{AC''}{C''B} = \left(\dfrac{AC}{CB}\right)^2$. 所以，$\dfrac{BA''}{A''C} \cdot \dfrac{CB''}{B''A} \cdot \dfrac{AC''}{C''B} = \left(\dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{BC}{AB} \cdot \dfrac{AC}{CB}\right)^2 = 1$. 由梅涅劳斯逆定理知 A''、B''、C'' 三点共线.



（第 4 题）

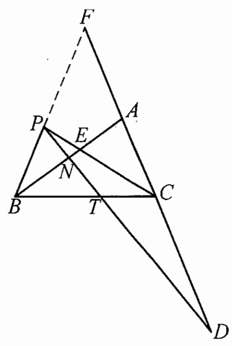
5. 证明：如图，设 $\frac{AF}{FB}=x$，$\frac{BD}{DC}=y$，$\frac{CE}{EA}=z$. 由塞瓦定理得 $xyz=1$. 对于 $\triangle BFC$ 和直线 AGD 应用梅涅劳斯定理有 $\frac{FG}{GC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BA}{AF}=1$. 则 $\frac{FG}{GC}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AF}{BA}=y\cdot\frac{x}{1+x}=\frac{xy}{1+x}$. 所以，$\frac{FG}{FC}=\frac{xy}{1+x+xy}$. 故 $S_{\triangle BFG}=\frac{FG}{FC}S_{\triangle BFC}=\frac{FG}{FC}\cdot\frac{BF}{AB}S_{\triangle ABC}=\frac{xy}{(1+x+xy)(1+x)}S_{\triangle ABC}$.



（第 5 题）

同理，$S_{\triangle CDG}=\frac{yz}{(1+y+yz)(1+y)}S_{\triangle ABC}$. 于是，$\frac{xy}{(1+x+xy)(1+x)}=\frac{yz}{(1+y+yz)(1+y)}$，即 $x(1+y+yz)(1+y)=z(1+x+xy)(1+x)$. 因为 $x(1+y+yz)=x+xy+xyz=x+xy+1$，所以，$1+y=z(1+x)=z+zx$. 同理，$1+z=x+xy$，$1+x=y+yz$. 三式相加得 $3=xy+yz+zx\geqslant 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=3$. 当且仅当 $xy=yz=zx$ 时，上式等号成立. 所以，$xy=yz=zx$. 从而，$x=y=z$. 又 $xyz=1$，则 $x=y=z=1$. 因此，D、E、F 是三边的中点. 故 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

6. 证明：如图，延长 BP 交直线 AC 于 F. 于是，$\triangle ACB\backsim\triangle BCF$. 从而，$AC\cdot CF=BC^2$. 故 $CF=\frac{BC^2}{AC}$. 注意到直线 DTN 截 $\triangle ABC$，应用梅涅劳斯定理得 $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CD}{DA}=1$. 则 $\frac{BT}{TC}=\frac{DA}{CD}\cdot\frac{BN}{AN}=\frac{DA}{CD}=\frac{AC}{BC}+1$. 故 $\frac{BC}{TC}=\frac{BT}{TC}+1=\frac{AC}{BC}+2$. 同理，由直线 DNP 截 $\triangle ABF$，得 $\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{AD}{DF}=1$. 由直线 CEP 截 $\triangle ABF$，得 $\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AC}{CF}=1$. 故 $\frac{EA}{BE}=\frac{FP}{PB}\cdot\frac{AC}{CF}=\frac{AN}{BN}\cdot\frac{FD}{AD}\cdot\frac{AC}{CF}=$



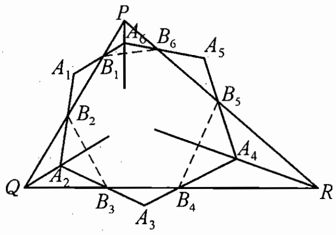
（第 6 题）

$\frac{FD}{AD}\cdot\frac{AC}{CF}=\frac{\frac{BC^2}{AC}+BC}{AC+BC}\cdot\frac{AC}{\frac{BC^2}{AC}}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AC}{BC}$. 因此，$\frac{BC}{TC}-\frac{EA}{BE}=2$.

7. 证明：作 $\triangle ABC$ 的外接圆，交 $\angle BAC$ 的平分线于点 D. 下面证明：D 是不依赖于点 B、C 的定点. 连结 BC、BD、CD. 在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{CD}{\sin\dfrac{A}{2}}$…①. 对圆内接四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理得 $AB\cdot CD+AC\cdot BD=BC\cdot AD$…②. 将式①代入式②得 $AD=(AB+AC)\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin A}=\dfrac{AB+AC}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ 为定值. 故所证结论成立.

8. 证明:记这六个切点分别为 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6,如图. 设 B_1B_2、B_3B_4、B_5B_6 两两交于点 P、Q、R. 连结 B_1B_6、B_4B_5、B_2B_3. 由角元塞瓦定理得 $\dfrac{\sin\angle B_1PA_6}{\sin\angle A_6PB_6}\cdot\dfrac{\sin\angle PB_6A_6}{\sin\angle A_6B_6B_1}\cdot\dfrac{\sin\angle B_6B_1A_6}{\sin\angle A_6B_1P}=1$…①. 又 $A_6B_6=A_6B_1$，则 $\angle A_6B_6B_1=\angle A_6B_1B_6$. 故式①为 $\dfrac{\sin\angle B_1PA_6}{\sin\angle A_6PB_6}\cdot\dfrac{\sin\angle PB_6A_6}{\sin\angle A_6B_1P}=1$. 完全类似地得 $\dfrac{\sin\angle B_5RA_4}{\sin\angle A_4RB_4}\cdot\dfrac{\sin\angle RB_4A_4}{\sin\angle A_4B_5R}=1$，$\dfrac{\sin\angle B_3QA_2}{\sin\angle A_2QB_2}\cdot\dfrac{\sin\angle QB_2A_2}{\sin\angle A_2B_3Q}=1$. 以上三式相乘并由 $\angle PB_6A_6=\angle A_5B_6B_5=\angle A_5B_5B_6=\angle RB_5A_4$，$\angle RB_4A_4=\angle A_3B_4B_3=\angle A_3B_3B_4=\angle QB_3A_2$，$\angle QB_2A_2=\angle A_1B_2B_1=\angle A_1B_1B_2=\angle PB_1A_6$，得 $\dfrac{\sin\angle B_1PA_6}{\sin\angle A_6PB_6}\cdot\dfrac{\sin\angle B_5RA_4}{\sin\angle A_4RB_4}\cdot\dfrac{\sin\angle B_3QA_2}{\sin\angle A_2QB_2}=1$. 由角元塞瓦定理的逆定理知，$PA_6$、$QA_2$、$RA_4$ 三线共点，即 e、f、g 三线共点.

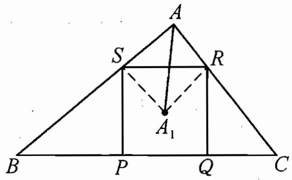


（第 8 题）

9. 证明:如图,连结 SA_1、RA_1. 于是，$SA_1=RA_1$. 由正弦定理有

$\dfrac{\sin\angle SAA_1}{\sin\angle ASA_1}=\dfrac{SA_1}{AA_1}=\dfrac{RA_1}{AA_1}=\dfrac{\sin\angle A_1AR}{\sin\angle ARA_1}$，

则 $\dfrac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}=\dfrac{\sin\angle ASA_1}{\sin\angle ARS_1}$. 因为 A_1 为正方形 $PQRS$ 的中心，所以，$\angle SRA_1=\angle RSA_1=45°$. 又因为 $SR\parallel BC$，所以，$\angle ASR=\angle B$，$\angle ARS=\angle C$. 则 $\angle ASA_1=\angle B+45°$，$\angle ARA_1=\angle C+45°$.



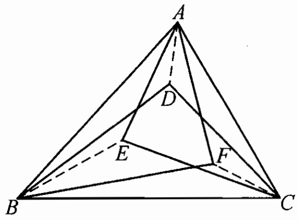
（第 9 题）

从而，$\dfrac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}=\dfrac{\sin(B+45°)}{\sin(C+45°)}$. 同理，$\dfrac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}=\dfrac{\sin(A+45°)}{\sin(B+45°)}$，

$\dfrac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=\dfrac{\sin(C+45^\circ)}{\sin(A+45^\circ)}$. 故 $\dfrac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\dfrac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\dfrac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=1$.

由角元 Ceva 定理的逆定理知结论成立.

10. 证明：如图，记 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle ABD=\angle CBF=\beta$，$\angle ACD=x$，$\angle BCE=y$. 对 $\triangle ABC$ 分别与点 D、E、F 应用角元塞瓦定理有



（第 10 题）

$$1=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}\cdot\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle DBA}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin x}{\sin(C-x)}\cdot\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta},$$

$$1=\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\angle CBF}{\sin\angle FBA}\cdot\frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle FAC}=\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$1=\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle EAC}\cdot\frac{\sin\angle ACE}{\sin\angle ECB}=\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(C-y)}{\sin y}.$$

将三式相乘并整理得

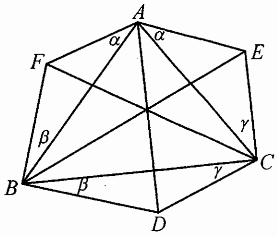
$$1=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}=\frac{\sin(C-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}.$$

即 $\sin C\cdot\cot x-\cos C=\sin C\cdot\cot y-\cos C$，$\cot x=\cot y$，$x=y$.

由角元 Ceva 定理及其逆定理知，AD、BE、CF 共线的充要条件是 $x=y$，即 $\angle ACD=\angle BCE$.

11. 证明：如图，记 $\angle BAF=\angle CAE=\alpha$，$\angle ABF=\angle CBD=\beta$，$\angle BCD=\angle ACE=\gamma$.

关于 $\triangle ABC$ 分别与点 D、E、F 应用角元塞瓦定理有 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}\cdot\dfrac{\sin\angle CBD}{\sin\angle DBA}=1$. 则 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{\sin\gamma\cdot\sin(B+\beta)}{\sin(C+\gamma)\cdot\sin\beta}$.



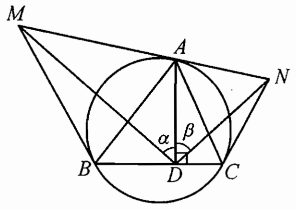
（第 11 题）

同理，$\dfrac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}=\dfrac{\sin\beta\cdot\sin(A+\alpha)}{\sin(B+\beta)\cdot\sin\alpha}$，$\dfrac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin(C+\gamma)}{\sin(A+\alpha)\cdot\sin\gamma}$.

以上三式相乘得 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\dfrac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\dfrac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}=1.$

由角元 Ceva 定理的逆定理知结论成立.

12. 证明:如图,记 $\angle MDA=\alpha$, $\angle NDA=\beta$. 只需证明 $\alpha=\beta$.



(第 12 题)

因为 MN、MB、NC 都是圆 O 的切线,所以,

$$\angle MAB=\angle MBA=\angle ACB,$$
$$\angle NAC=\angle NCA=\angle ABC.$$

对 $\triangle DAB$ 和点 M 应用角元塞瓦定理有

$$\begin{aligned}1&=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle MDB}\cdot\frac{\sin\angle DBM}{\sin\angle MBA}\cdot\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAD}\\&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin(B+C)}{\sin\angle MAD}\\&=\tan\alpha\cdot\frac{\sin(B+C)}{\sin\angle MAD}.\end{aligned}\qquad ①$$

同理,对 $\triangle DAC$ 和点 N 应用角元塞瓦定理又有

$$1=\tan\beta\cdot\frac{\sin(B+C)}{\sin\angle NAD}.\qquad ②$$

比较式①、②即得 $\tan\alpha=\tan\beta$.

因此, $\alpha=\beta$, 即 AD 平分 $\angle MDN$.

13. 证明:考虑直线 GFD 截 $\triangle BCE$,由梅氏定理知 $1=\dfrac{BG}{GC}\cdot\dfrac{CD}{DE}\cdot\dfrac{EF}{FB}=\dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ACG}}\cdot\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADE}}\cdot\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFB}}$. 设 $\angle BAC=\angle DAC=\theta$, $\angle GAC=\alpha$, $\angle EAC=\beta$, 则

$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ACG}}=\frac{AB\cdot\sin(\theta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha},\ \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{AC\cdot\sin\theta}{AE\cdot\sin(\theta-\beta)},\ \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFB}}=\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\theta}.$$

所以, $\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)=\sin\beta\cdot\sin(\theta-\alpha)$, $\sin\alpha\cdot\sin\theta\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cos\theta\cdot\sin\beta=\sin\beta\cdot\sin\theta\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\cos\theta\cdot\sin\alpha$, $\tan\alpha=\tan\beta$,显然 α, $\beta\in(0,\pi)$, $\alpha=\beta$.

14. 证明:如图,由 Stewart 定理知, $BE^2=BA\cdot BC-EA\cdot EC$, $CF^2=CB\cdot CA-FB\cdot FA$.

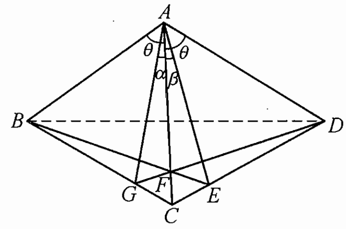
设 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$,则 $EA\cdot EC'=\dfrac{bc}{a+c}\cdot\dfrac{ab}{a+c}$, $FB\cdot FA=$

$\frac{ac}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+b}$,从而,$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}$,化简后有 $c-b=bc\cdot\frac{(b-c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+bc)}{(a+b)^2(a+c)^2}$, * *

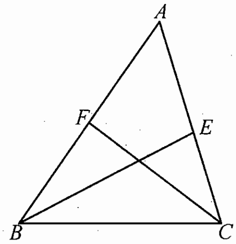
若 $c>b$,则 * 左边 >0,右边 <0;

若 $c<b$,则 * 左边 <0,右边 >0;

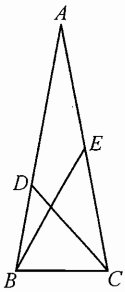
故 $c=b$.



(第 13 题)



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 解:如图,设$\angle BED=x$,于是,$\angle CED=40^\circ+x$. 对$\triangle BCE$和点 D 应用角元塞瓦定理有

$$1=\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle DCE}\cdot\frac{\sin\angle CED}{\sin\angle DEB}\cdot\frac{\sin\angle EBD}{\sin\angle DBC}$$
$$=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot\frac{\sin(x+40^\circ)}{\sin x}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

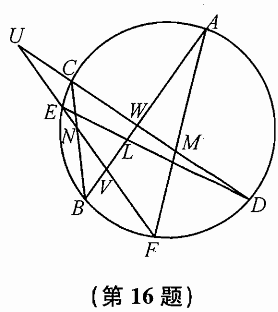
则 $\frac{\sin(x+40^\circ)}{\sin x}=\frac{\sin 80^\circ}{2\cos 40^\circ\cdot\sin 20^\circ}$

$=2\cos 20^\circ=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin(30^\circ+40^\circ)}{\sin 30^\circ}$.

因为 $\frac{\sin(x+40^\circ)}{\sin x}=\cos 40^\circ+\cot x\cdot\sin 40^\circ$,

作为 x 的函数在$(0,\pi)$上严格递减,所以,$\angle BED=x=30^\circ$.

16. 证明:如图,设三直线 AB、CD、EF 两两相交成$\triangle UVW$,对$\triangle UVW$及截线 BCN、DEL、FAM,由梅涅劳斯定理



(第 16 题)

$$\frac{UN}{NV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}=1,$$

$$\frac{UE}{EV}\cdot\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}=1,$$

$$\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}=1.$$

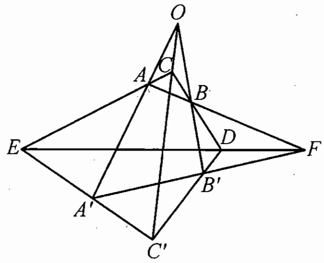
三式相乘.由相交弦定理与割线定理和乘积等式中的

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VA}{AW}$$
$$=\frac{VB\cdot VA}{EV\cdot FV}\cdot\frac{WC\cdot WD}{BW\cdot AW}\cdot\frac{UE\cdot UF}{CU\cdot DU}=1$$

故有 $\frac{UN}{NV}\cdot\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}=1$.

由梅涅劳斯定理逆定理知，L、M、N 共线.

17. 证明：如图，对$\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$ 及相应的截线 $DB'C'$、$EC'A'$、$FA'B'$，由梅涅劳斯定理得



（第 17 题）

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=1,$$
$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=1,$$
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=1.$$

三式相乘化简得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$.

故对$\triangle ABC$ 由梅涅劳斯定理逆定理知，D、E、F 共线.

习 题 3

1. 证明：由已知条件可得，$BF^2-CE^2=(BP^2-PF^2)-(CP^2-PE^2)=(BP^2+PE^2)-(CP^2+PF^2)=0$.从而，$BF=CE$.设 $x=BF=CE$.同理可设 $y=CD=AF$，$z=AE=BD$.若 D、E、F 中有一个点在三边的延长线上，如点 D 在 BC 的延长线上，则有 $AB+BC=(x+y)+(z-y)=x+z=AC$，矛盾.因此，D、E、F 三个点都在$\triangle ABC$ 的三边上.设 $a=BC$，$b=CA$，$c=AB$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$.因为 $BD=p-c$，$CD=p-b$，所以，D 是$\triangle ABC$ 的$\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 的切点.同理，E，F 分别是$\angle ABC$、$\angle ACB$ 内的旁切圆与边 CA、AB 的切点.

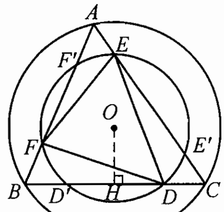
由于 PD 和 I_AD 均垂直于 BC，所以，P、D、I_A 三点共线.同理，P、E、I_B 和 P、F、I_C 均三点共线.因为 I_A、C、I_B 三点共线，且$\angle PI_AC=\angle PI_BC=\frac{\angle ACB}{2}$，

所以，$PI_A=PI_C$. 同理可得，$PI_A=PI_B=PI_C$. 因此，P 是$\triangle I_AI_BI_C$ 的外心.

2. 证明：由于 N 是 AD 的中点，有 $ON\perp AD$，这里 O 是圆心. 由于 KH_1 是一条高线，所以，$KH_1\perp AD$. 因此，$KH_1 /\!/ ON$. 同理可证 $OK /\!/ NH_1$. 这表明四边形 ONH_1K 是平行四边形. 类似地，四边形 ONH_4M 也是平行四边形. 于是，四边形 KH_1H_4M 也是平行四边形. 考察 KM 的另一侧，易看出四边形 MKH_2H_3 也是平行四边形.

利用上述结论，便可断定四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 是平行四边形.

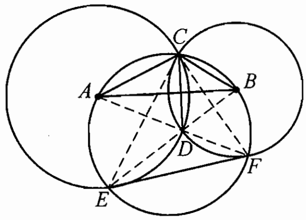
3. 证明：如图，记$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的公共外心为 O，BC、CA、AB 与小圆的另一个交点分别为 D'、E'、F'，作 $OH\perp BC$ 于点 H. 设$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=k$. 因为 $BH=HC$，$DH=HD'$，所以，$BD'=DC=\dfrac{1}{k+1}BC$. 同理，$BF=\dfrac{1}{k+1}BA\Rightarrow BF'=\dfrac{k}{k+1}BA$. 由割线定理得：$BD'\cdot BD=BF\cdot BF'$，即$\dfrac{k}{(k+1)^2}BC^2=\dfrac{k}{(k+1)^2}BA^2\Rightarrow BC=BA$. 同理，$BC=CA$. 故$\triangle ABC$ 为正三角形.



(第 3 题)

4. 证明：如图，因为 $\angle CED=\dfrac{1}{2}\angle CAD=\angle CAB$，$\angle CAB=\angle CEB$，所以，$\angle CED=\angle CEB$，即 E、D、B 三点共线.

因为 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BF}$，所以，$\angle CEB=\angle BEF$，即 D 在$\angle CEF$ 的角平分线上. 同理，D 在$\angle CFE$ 的角平分线上. 因此，D 是$\triangle CEF$ 的内心. 从而，CD 是$\angle ECF$ 的角平分线，即平分$\overset{\frown}{EF}$.

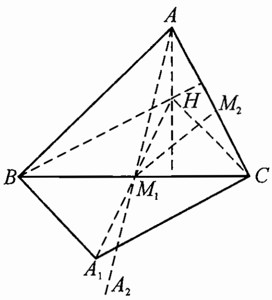


(第 4 题)

5. 证明：如图，因为$\triangle BHC$ 与$\triangle CA_1B$ 关于 M_1 对称，且 A 为$\triangle BHC$ 的垂心，所以，A_2 为 A 关于 M_1 的对称点.

(1) 对任意一点 P 有 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM_1}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA_2}$. 将类似的关系式相加得 $\sum\overrightarrow{PA_2}=\sum\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PG}$. G 为$\triangle ABC$ 重心，由此可推知所证结论成立.

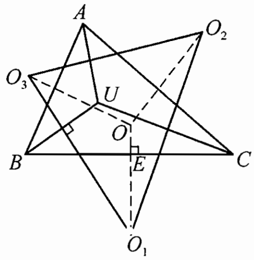
(2) 设 G_A、G_B、G_C 分别为$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的重心. 因此，$\overrightarrow{HG_A}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA_1}+$



(第 5 题)

$\overrightarrow{HA_2}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{HM_1}$，即$\overrightarrow{G_AG_B} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{HM_2} - \overrightarrow{HM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. 由此可知，由$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$的重心所构成的三角形与$\triangle ABC$相似，且相似比为$\frac{2}{3}$.

6. 证明：如图，分别过$\triangle ABC$的顶点A、B、C及其内切圆圆心U的直线分别为角α、β、γ的平分线，其中$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$. 设O为$\triangle ABC$的外接圆圆心.

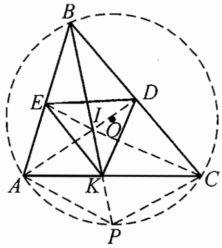


（第6题）

因为三角形外接圆圆心位于每条边的垂直平分线上，点O和O_1位于边BC的垂直平分线上，所以，OO_1为边BC的垂直平分线. 类似地，OO_3、O_1O_3分别为边AB、UB的垂直平分线. 因为$\angle UBC$与$\angle O_3O_1O$的边互相垂直，所以，$\angle UBC=\angle O_3O_1O$，$\angle O_3O_1O=\frac{\beta}{2}$. 同理，$\angle OO_3O_1=\frac{\beta}{2}$. 故$\angle O_3O_1O=\angle OO_3O_1$. 因此，$\triangle O_1OO_3$为等腰三角形，即$OO_1=OO_3$. 同理可得$OO_1=OO_2$. 故$OO_1=OO_2=OO_3$.

所以，O为$\triangle O_1O_2O_3$的外接圆的圆心.

7. 证明：(1) 如图，作出$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$，记BI的延长线与$\odot O$交于点P，连结AP、CP，则$PA=CP=IP$. 对圆内接四边形$ABCP$应用托勒密定理可得：$AC\cdot BP=AB\cdot CP+AP\cdot BC=(AB+BC)\cdot IP$…①. 由题意得$2AC=AB+BC$. 代入式①得$BP=2IP$，即$I$是$BP$的中点. 从而，$OI\perp BI$.



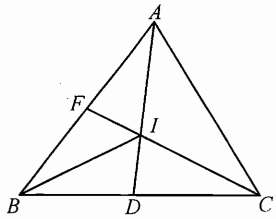
（第7题）

(2) 由三角形角平分线的性质知$\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{BC}$. 结合$AK+KC=AC$，$2AC=AB+BC$，可得$AK=\frac{AB}{2}=AE$，$CK=\frac{BC}{2}=CD$. 从而，$\triangle AIE\cong\triangle AIK$，$\triangle CID\cong\triangle CIK$. 于是，$IE=IK=ID$. 所以，$I$是$\triangle DEK$的外心.

8. 证明：设$\triangle ABC$的内心为I，如图，连结AI交BC于D，连结CI交AB于F.

由角的平分线定理可知

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}.$$



（第 8 题）

由正弦定理可知 $\frac{BD}{BC}=\frac{\sin C}{\sin C+\sin B}$.

同理：$\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}=\frac{\sin B}{\sin C+\sin B}$.

在$\triangle ABD$中由梅涅劳斯定理可得：

$$\begin{aligned}\frac{DI}{IA}&=\frac{FB}{AF}\cdot\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{CD}{BC}\\&=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin B}{\sin C+\sin B}\\&=\frac{\sin A}{\sin C+\sin B}.\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{DI}=\frac{\sin A}{\sin C+\sin B}\overrightarrow{IA}$.

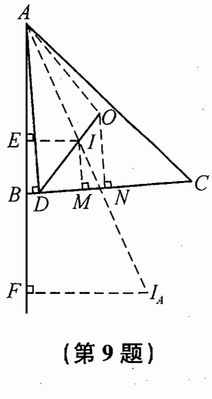
类似有

$$\overrightarrow{ID}=\frac{CD}{BC}\cdot\overrightarrow{IB}+\frac{BD}{BC}\cdot\overrightarrow{IC}$$

所以 $-\frac{\sin A}{\sin C+\sin B}\overrightarrow{IA}=\frac{\sin B}{\sin C+\sin B}\overrightarrow{IB}+\frac{\sin C}{\sin C+\sin B}\overrightarrow{IC}$,

故 $\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

9. 解：如图，设与边 BC 相切的旁切圆圆心为 I_A，显然，A、I、I_A 三点共线.



（第 9 题）

作 $IE\perp AB$ 于点 E，$I_AF\perp AB$ 于点 F. 记 $IE=r$，$I_AF=r_a$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，p 为$\triangle ABC$的半周长. 设 $AD=h$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $OA=R$. 作 $IM\perp BC$ 于点 M，$ON\perp BC$ 于点 N.

利用旁心性质 2 知 $AF=p$，则

$$AE=p-a.$$

由 $\triangle AI_AF\backsim\triangle AIE$，得

$$\frac{r_a}{r}=\frac{AF}{AE}=\frac{p}{p-a}. \tag{①}$$

由三角形外心性质易得$\angle BAD=\angle OAC$. 但 AI 平分$\angle BAC$，知 AI 平分

$\angle DAO$. 所以

$$\frac{R}{h}=\frac{AO}{AD}=\frac{OI}{ID}=\frac{MN}{DM}. \qquad ②$$

注意到

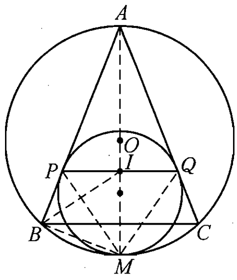
$$\begin{aligned} MN &= BN-BM \\ &= \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(c+a-b)=\frac{1}{2}(b-c), \\ DM &= BM-BD=\frac{1}{2}(c+a-b)-c\cos B \\ &= \frac{1}{2}(c+a-b)-\frac{1}{2a}(c^2+a^2-b^2) \\ &= \frac{1}{2a}(b-c)(b+c-a), \end{aligned}$$

代入式②得 $$\frac{R}{h}=\frac{a}{b+c-a}.$$

故 $$R=\frac{ah}{b+c-a}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{2(p-a)}=\frac{pr}{p-a}.$$

因此，$\frac{R}{r}=\frac{p}{p-a}$. 结合式①得 $r_a=R$.

10. 证明：因为 $AB=AC$ 且都是$\odot O$的两条弦，所以 O 点到 AB、AC 的距离相等，则 O 在$\angle BAC$的平分线上. 又因为小圆与 AB，AC 都相切，所以小圆的圆心也在$\angle BAC$的平分线上，所以小圆的圆心、O 点及 A 点三点共线且该直线经过两圆切点 M，AM 为图形对称轴. 设 AM 交 PQ 于 I，由对称性可知，I 为 PQ 中点. 因为 $AM\perp PQ$，$AM\perp BC$，所以 $PQ\parallel BC$. 设 $\angle APQ=2\beta$，则 $\angle ABC=\angle APQ=2\beta$. 连结 MP、MQ、MB、BI，则 $\angle PMQ=\angle APQ=2\beta$，由轴对称性知，$\angle PMI=\frac{1}{2}\angle PMQ=\beta$. 因为 AM 为$\odot O$直径，所以 $\angle PBM=90^\circ$，所以 P、B、M、I 四点共圆. 所以 $\angle PBI=\angle PMI=\beta$，所以 BI 平分$\angle ABC$. 又因为 AI 平分$\angle BAC$，所以 I 为$\triangle ABC$内心，所以线段 PQ 的中点是$\triangle ABC$内切圆的圆心.



(第 10 题)

11. 证明：设 O_1、O_2、O_3 是$\triangle APS$、$\triangle BQP$、$\triangle CSQ$的外心，作出六边形 $O_1PO_2QO_3S$ 后再由外心性质可知 $\angle PO_1S=2\angle A$，$\angle QO_2P=2\angle B$，

$\angle SO_3Q=2\angle C$.

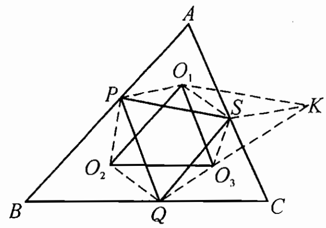
所以 $\angle PO_1S+\angle QO_2P+\angle SO_3Q=360°$.

从而又知

$\angle O_1PO_2+\angle O_2QO_3+\angle O_3SO_1=360°$.

将$\triangle O_2QO_3$ 绕着 O_3 点旋转到$\triangle KSO_3$，

易判断 $\triangle KSO_1\cong\triangle O_2PO_1$，同时可得 $\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle O_1KO_3$.



（第 11 题）

所以 $\angle O_2O_1O_3=\angle KO_1O_3=\frac{1}{2}\angle O_2O_1K=\frac{1}{2}(\angle O_2O_1S+\angle SO_1K)=\frac{1}{2}(\angle O_2O_1S+\angle PO_1O_2)=\frac{1}{2}\angle PO_1S=\angle A$. 同理有 $\angle O_1O_2O_3=\angle B$. 故 $\triangle O_1O_2O_3\backsim\triangle ABC$.

12. 证明：设 AM 为高亦为中线，取 AC 中点 F，E 必在 DF 上且 $DE:EF=2:1$. 设 CD 交 AM 于 G，G 必为 $\triangle ABC$ 重心.

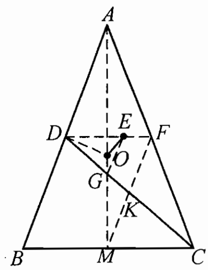
连结 GE，MF，MF 交 DC 于 K.

易证：$DG:GK=\frac{1}{3}DC:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)DC=2:1$.

所以 $DG:GK=DE:EF\Rightarrow GE\parallel MF$.

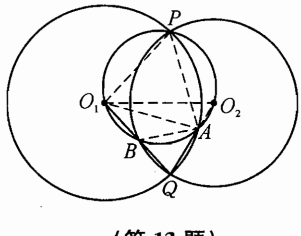
因为 $OD\perp AB$，$MF\parallel AB$，则 $OD\perp MF\Rightarrow OD\perp GE$.

但 $OG\perp DE\Rightarrow G$ 又是 $\triangle ODE$ 之垂心. 从而 $OE\perp CD$.

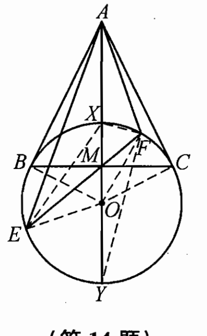


（第 12 题）

13. 如图，连结 AQ、AO_2，由于 $\pi-\angle PAQ=\frac{1}{2}\angle PO_1Q=\angle PO_1O_2=\angle PAO_2$，于是 A、O_2、Q 三点共线，同理，B、O_1、Q 三点共线. 连 O_1Q，$\angle QAB=\angle QO_1O_2=\frac{1}{2}\angle QO_1P=\frac{1}{2}\angle BO_1P=\frac{1}{2}\cdot(\pi-\angle BAP)$. 所以 AQ 外角平分 $\angle PAB$，同理可证，BQ 外角平分 $\angle PBA$，于是 Q 为$\triangle PBA$ 在$\angle P$ 内的旁心.



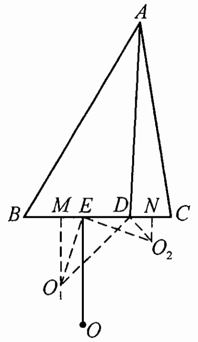
（第 13 题）



（第 14 题）

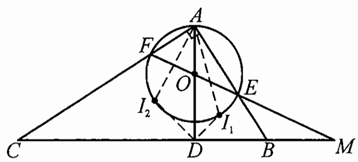
14. 证明：连结 OB、OC、OE、OF、AE、AF，则 $\angle OBA+\angle OCA=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，故 A、B、O、C 共圆. $MB\cdot MC=MO\cdot MA$，结合 $MB\cdot MC=ME\cdot MF$ 知 $ME\cdot MF=MO\cdot MA$，于是 A，E，O，F 共圆. 令 AO 直线与 $\odot O$ 相交于 X，Y，且 X 在 $\triangle ABC$ 内部，那么 $\angle XFM=\angle XFE=\frac{1}{2}\angle XOE=\frac{1}{2}\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AFE=\frac{1}{2}\angle AFM$，于是 XF 平分 $\angle AFM$，同理可证，XE 平分 $\angle AEM$，故 X 为 $\triangle AEF$ 内心. 又 $\angle XFY=90^\circ$，A、X、Y 共线，所以 Y 为 $\triangle AEF$ 的旁心. 由 E 点的任意性，将 E 移至 B，F 移至 C 有相同结论. Y 为 $\triangle ABC$ 的旁心. 所以 $\triangle ABC$，$\triangle AEF$ 有一个公共的 $\angle A$ 内的旁心.

15. 证明：设 O_1、O_2 在边 BC 上的垂足分别为 M、N，则 $ME=BE-BM=\frac{BC+CA-AB}{2}-\frac{BD+DA-AB}{2}=\frac{DC+CA-DA}{2}=DN$ 所以 $MD=EN$，连结 O_1D，O_2D，O_1E，O_2E，$\angle O_1DM=\frac{1}{2}\angle ADC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ADB=90^\circ-\angle O_2DN=\angle DO_2N$，所以 $\triangle MDO_1\backsim\triangle NO_2D$，即 $MD\cdot ND=MO_1\cdot NO_2$，于是 $ME\cdot EN=MD\cdot ND=MO_1\cdot NO_2$. 即 $\frac{ME}{MO_1}=\frac{NO_2}{NE}$，所以 $\triangle MO_1D\backsim\triangle NDO_2$，从而有 $\angle O_1EO_2=180^\circ-\angle MEO_1-\angle NEO_2=180^\circ-\angle MEO_1-\angle MO_1E=90^\circ$. 即 $EO_1\perp EO_2$.



(第 15 题)

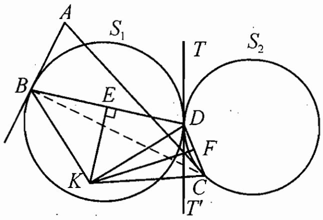
16. 证明：因为 $\angle BAC=90^\circ$，又 O 为 $\triangle AEF$ 外心，所以 $O\in EF$. 又 $OI_1=OI_2$，$2\angle I_1AI_2=\angle I_1OI_2=90^\circ$. 由此可得 $\angle OI_2I_1=\angle OI_1I_2=\angle I_1DO=\angle I_2DO=45^\circ$. 所以，$O\in AD$，所以 $\angle AI_1O=\angle I_1AO=\angle I_1AE$，$\angle I_1OD=\angle I_1OM=\angle EAD$. 故 $\angle MOD$ 平分线为 OI_1，又 I_1D 平分 $\angle ADB$，即 I_1 为 $\triangle ODM$ 内心. 又 $\angle I_1OI_2=90^\circ$，OI_1 平分 $\angle MOD$，所以 OI_2 平分 $\angle FOD$，而 I_2D 为 $\angle ADC$ 平分线. 所以 I_2 为 $\triangle ODM$ 旁心.



(第 16 题)

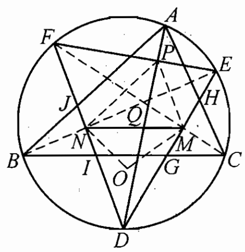
习 题 4

1. 证明：设 E、F 分别是 BD、CD 的中点，K 是 $\triangle BCD$ 的外心，TDT' 是圆 S_1 与圆 S_2 的内公切线，则 EK 是 BD 的中垂线.



（第 1 题）

因 $\angle TDB=\angle ABD$，$\angle T'DC=\angle DCA$，则 $\angle BDC=180^\circ-\angle TDB+\angle T'DC=180^\circ-\angle ABD+\angle DCA=180^\circ-(\angle ABC-\angle DBC)+(\angle DCB-\angle ACB)=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB+\angle DBC+\angle DCB=\angle BAC+180^\circ-\angle BDC$. 于是，$2\angle BDC=180^\circ+\angle BAC$. 故 $\angle BKC=\angle BKD+\angle DKC=2(\angle EKD+\angle DKF)=2\angle EKF=2(180^\circ-\angle BDC)=180^\circ-\angle BAC$. 因此，$K$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

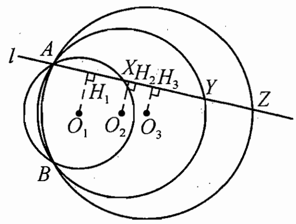


（第 2 题）

2. (1) 证明：如图，图为 $\angle BJI=\frac{\overset{\frown}{AF}^\circ}{2}+\frac{\overset{\frown}{BD}^\circ}{2}=\frac{\overset{\frown}{BF}^\circ}{2}+\frac{\overset{\frown}{CD}^\circ}{2}=\angle BIJ$，所以 $BI=BJ$. 从而 BN 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 B、N、E 三点共线，$BN\perp IJ$. 同理，$CM\perp GH$. 因此，D、N、Q、M 四点共圆（显然 CM、BN 交于 $\triangle ABC$ 的内心 Q）. 进而，有 $\angle DNM=\angle DQM=\frac{\overset{\frown}{AF}^\circ+\overset{\frown}{CD}^\circ}{2}=\frac{\angle A+\angle C}{2}$，$\angle DMN=\frac{\angle A+\angle B}{2}$，$\angle MDN=\frac{\angle B+\angle C}{2}$.

(2) 显然，直线 AD 过 Q 点，且 $\angle NPF=\frac{\angle B+\angle C}{2}$，$\angle EPM=\frac{\angle B+\angle C}{2}$. 从而，$\angle NOM=2\angle MDN=\angle B+\angle C$，$\angle NPM=\pi-\angle NPF-\angle EPM=\pi-\angle B-\angle C$.

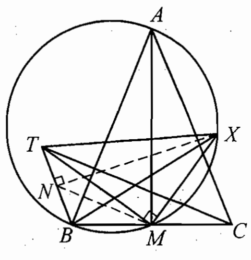
所以，N、O、M、P 四点共圆.



（第 3 题）

3. 证明：如图，因为 3 个圆有公共弦 AB，故圆心 O_1、O_2、O_3 共线. 过 O_1、O_2、O_3 分别作 l 的垂线交 l 于点 H_1、H_2、H_3. 易知 $AX=2AH_1$，$AY=2AH_2$，$AZ=2AH_3$.

故 $\frac{XY}{YZ}=\frac{H_1H_2}{H_2H_3}=\frac{O_1O_2}{O_2O_3}$ 为定值.

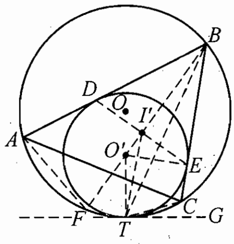


（第 4 题）

4. 证明：如图，设 N 是线段 BT 的中点. 则直线 XN 是等腰 $\triangle BXT$ 的对称轴. 于是，$\angle TNX=90^\circ$，$\angle BXN=\angle NXT$. 又因为 MN 是 $\triangle BCT$ 中平行于 CT 的中位线，所以 $\angle CTM=\angle NMT$. 由于 $\angle TNX=\angle TMX=90^\circ$，则点 M、N 在以 XT 为直径的圆上. 从而

$\angle MTB=\angle MTN=\angle MXN$，$\angle CTM=\angle NMT=\angle NXT=\angle BXN$. 故 $\angle MTB-\angle CTM=\angle MXN-\angle BXN=\angle MXB=\angle MAB$. 不依赖于点 X.

5. 证明：如图，设小圆圆心为 O'，半径为 r，大圆圆心为 O，半径为 R，且 $\odot O'$ 与 AB、BC 分别切于 D、E 两点. 连结 DE、BO' 交于点 I'.



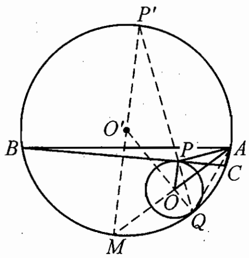
(第 5 题)

下面证明 $I'=I$. 延长 BO' 交 $\odot O$ 于点 F，易知 BF 平分 $\angle ABC$ 及 $\overparen{AC}$. 则 O' 关于 $\odot O$ 的幂为 $r(2R-r)=2Rr-r^2=BO'\cdot O'F=O'F\cdot\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$. 故 $O'F=(2R-r)\sin\dfrac{B}{2}$. 于是，有 $FI'=FO'+O'I'=(2R-r)\sin\dfrac{B}{2}+r\sin\dfrac{B}{2}=2R\sin\dfrac{B}{2}=AF$. 从而 $I'=I$.

连结 BT、$O'T$ 有，$O'I'\cdot O'B=O'E^2=r^2=O'T^2$. 从而，$\triangle O'I'T\backsim\triangle O'TB$. 故 $\angle O'TI'=\angle O'BT$. 过点 T 作两圆的公切线 TG，于是有，$\angle CTI+\angle O'BC=\angle CTI+\angle O'BT+\angle TBC=\angle CTI+\angle O'TI+\angle TBC=\angle CTO'+\angle TBC=\angle CTO'+\angle CTG=\angle O'TG=90°$. 则 $\angle CTI=90°-\angle O'BC=90°-\dfrac{1}{2}B$. 同理，$\angle ATI=90°-\dfrac{1}{2}B=\angle CTI$.

故命题得证.

6. 证明：若 $AB=AC$，则点 P、Q 均在 $\angle BAC$ 的角平分线上，$\angle PAO=\angle QAO=O$. 若 $AB\neq AC$，如图，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O'，BC 的中垂线与 $\odot O'$ 交于点 P'、M，其中，P'，A 在 BC 的同侧. 则 O'、O、Q 三点共线. 由 $\angle BAO=\angle CAO$，则 A、O、M 三点共线.

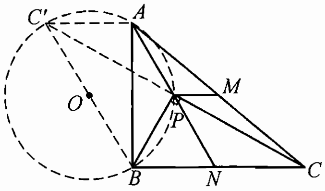


(第 6 题)

设 $P'Q$ 与 $\odot O$ 交于点 R. 由 $\angle MP'R=\angle O'P'Q=\angle O'QR=\angle ORQ$，得 $OR\,/\!/\,MP'$. 因为 $MP'\perp BC$，所以，$OR\perp BC$. 从而，R 为 $\odot O$ 与 BC 的切点，即 $R=P$. 这也就意味着 P'、P、Q 三点共线，且有 $\angle QP'M=\angle PQO=\angle QPO$. 又 $\angle QAO=\angle QAM=\angle QP'M$，则 $\angle QAO=\angle QPO$. 从而，A、P、O、Q 四点共圆. 故 $\angle PAO=\angle PQO=\angle QPO=\angle QAO$.

7. 证明：如图，作 $\triangle PAB$ 的外接圆 $\odot O$，延长 CP 交 $\odot O$ 于点 C'，连结

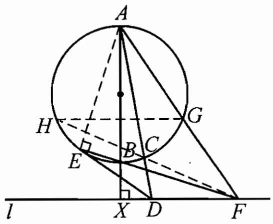
BC'、AC'. 因为 $\angle BC'P=\angle BAP=\angle BCP$，$\angle BPC=90^\circ$，所以，$PC'=PC$，$BC'=BC$. 又 M、P 分别为 AC、CC' 的中点，则 $AC'\parallel PM\Rightarrow AC'=2PM=PB$. 由 A、C'、B、P 四点共圆，故 $AP\parallel BC'$. 因为 P 为 CC' 的中点，所以，$PN\parallel BC'$. 故 A、P、N 三点共线.



(第 7 题)

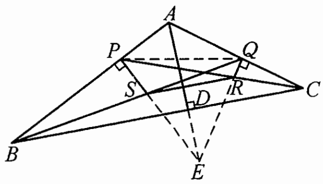
8. 证明：如图，设 CF 交圆 Γ 于点 H. 因为直径 $AB\perp l$，所以，问题等价于证明 $GH\parallel l$.

设 $AB\perp l$，垂足为点 X，则 $\angle AXF=\angle AEF=90^\circ$. 所以，$A$、$F$、$X$、$E$ 四点共圆. 于是，$\angle EFD=\angle EAB=\angle FED$. 从而，$DF=DE$. 又因为 $DF^2=DE^2=DC\cdot DA$，所以，$\triangle DCF\backsim\triangle DFA$. 于是，$\angle AFD=\angle FCD=\angle ACH=\angle AGH$. 故 $GH\parallel l$.



(第 8 题)

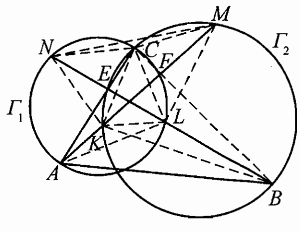
9. 证明：如图，设 QR、AD 的延长线交于 E. 下面证明直线 PE 和 PS 重合. 注意到 $\angle ABQ=135^\circ-\angle BAC=\angle ACP$，则 B、P、Q、C 四点共圆. 于是，$\angle APQ=\angle ACB$. 又 $\angle AEQ=90^\circ-\angle EAC=\angle ACB$，从而，$A$、$P$、$E$、$Q$ 四点共圆. 于是，$\angle APE=180^\circ-\angle AQE=90^\circ$. 所以，$PE\perp AB$. 因此，$PE$、$PS$ 重合且 PS、AD、QR 三线共点. 由 $\angle BQE=90^\circ-45^\circ=\angle CPE$，知 P、Q、R、S 四点共圆. 从而 $\angle QPR=\angle QSR$. 因为 B、P、Q、C 四点共圆，所以，$\angle QPR=\angle QBC$.



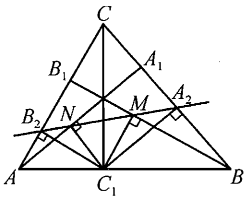
(第 9 题)

因此，$\angle QBC=\angle QSR$，即 $SR\parallel BC$.

10. 证明：如图，在圆 Γ_2 中，BC 是直径，点 E 是 AC 和圆 Γ_2 的交点，则 $\angle BEC=90^\circ$. 同理，由 F 是 BC 和圆 Γ_1 的交点，得 $\angle AFC=90^\circ$. 因为 $\angle AEB=\angle AFB=90^\circ$，则点 E、F 在以 AB 为直径的圆上，有 $CE\cdot CA=CF\cdot CB$. 易知 $\triangle ACL$ 是直角三角形，LE 是它的高线. 故 $CE\cdot CA=CL^2$. 同理，在 $\triangle BCK$ 中，有 $CF\cdot CB=CK^2$. 由 $CE\cdot CA=CF\cdot CB$，有 $CL^2=CK^2$，即 $CL=CK$. 又 LN 垂直于圆 Γ_1 的直径 AC，则 $CL=CN$. 同理，在圆 Γ_2 中，有 $CK=CM$. 综上，线段 CK、CL、CM 和 CN 都相等. 则点 K、L、M、N 在以点 C 为圆心的圆上. 故四边形 $KLMN$ 是一个圆内接四边形.

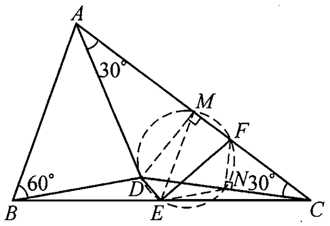


(第 10 题)



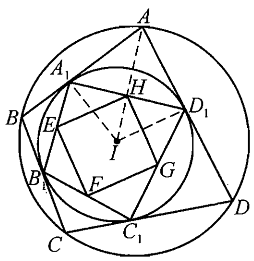
（第 11 题）

11. 证明：如图，设 B_2、A_2、M、N 分别是点 C_1 到线段 AC、BC、BB_1、AA_1 的垂足. 令 $\angle ABC=\beta$. 因为 C_1、B_2、C、A_2 四点共圆，则 $\angle CB_2A_2=\angle CC_1A_2=90^\circ-\angle C_1CA_2=\angle ABC=\beta$. 又 B_2、A、C_1、N 四点共圆，则 $\angle AB_2N=90^\circ+\angle C_1B_2N=90^\circ+\angle C_1AA_1=90^\circ+90^\circ-\angle ABC=180^\circ-\beta$. 所以，$\angle AB_2N+\angle CB_2A_2=180^\circ$…①. 同理，$\angle BA_2M+\angle CA_2B_2=180^\circ$…②. 由式①②知，点 B_2、N、M、A_2 在同一直线上.



（第 12 题）

12. 证明：如图，作 $DM\perp AC$ 于点 M，$FN\perp CD$ 于点 N，连结 EM、EN. 设 $CF=a$，$AF=2a$，则 $CN=CF\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{1}{2}CD$，即 N 是 CD 的中点. 又因为 M 是边 AC 上的中点，E 是边 BC 上的中点，所以，$EM\parallel AB$，$EN\parallel BD$，得 $\angle MEN=\angle ABD=60^\circ=\angle MDC$. 故 M、D、E、N 四点共圆. 又因 D、M、F、N 四点共圆，所以，D、E、F、M、N 五点共圆. 从而，$\angle DEF=90^\circ$.



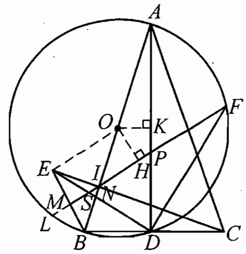
（第 13 题）

13. 证明：如图，设 I 为四边形 $ABCD$ 的内切圆圆心. 由于 H 为 D_1A_1 的中点. 而 AA_1 与 AD_1 为过点 A 所作的⊙I 的切线. 故 H 在 AI 上，且 $AI\perp A_1D_1$. 又 $ID_1\perp AD_1$. 故由射影定理可知 $IH\cdot IA=ID_1^2=r^2$. 其中 r 为内切圆半径. 同理可知. E 在 BI 上，且 $IE\cdot IB=r^2$. 于是，$IE\cdot IB=IH\cdot IA$. 故 A、H、E、B 四点共圆.

所以，$\angle EHI=\angle ABE$. 类似地，可证 $\angle IHG=\angle ADG$；$\angle IFE=\angle CBE$，$\angle IFG=\angle CDG$. 将这四个式子相加得 $\angle EHG+\angle EFG=\angle ABC+\angle ADC$. 所以，$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的充要条件是 E、F、G、H 四点共圆. 而熟知一个四边形的各边中点围成的四边形是平行四边形. 平行四边形为矩形的充要条件是该四边形的四个顶点共圆. 因此，$EFGH$ 为矩形的充要条件是 A、B、C、D 四点共圆.

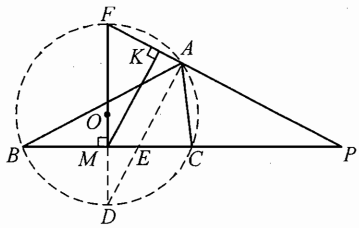
14. 证明：如图，易知 $AD\perp BC$. 由此可知 $\triangle ABD$ 的外接圆的圆心为线段 AB 的中点 O. 延长 FM 交⊙O 于点 L，连结 OE，过点 O 作 $OH\perp FL$，$OK\perp AD$，分别交 FL、AD 于点 H、K. 设直线 FM 分别与直线 ED、AB、AD 交于点 S、I、P，直线 CE 与 AB 交于点 N. 由条件知 $CN\perp AB$. 所以，A、N、D、C 四点

共圆.故 $BD \cdot BC = BN \cdot AB$.因为 $BC = 2BE$，$AB = 2BO$，所以，$BE^2 = BN \cdot BO$.由射影定理得 $OE \perp BE$.从而，四边形 $OEMH$ 是矩形.则 $OH = EM = \frac{1}{2}BE$.因为 O 是 AB 的中点，且 $OK \parallel BD$，所以，$OK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BE = OH$. 于是，$FL = AD$. 从而，$\overset{\frown}{LD} = \overset{\frown}{AF} \Rightarrow \angle PFD = \angle PDF$. 因为 $MF \perp BE$，所以，$\angle BED + \angle MSE = 90°$. 而 $\angle PDS + \angle BDE = 90°$，且 $\angle BED = \angle BDE$，于是，$\angle PDS = \angle MSE = \angle DSP$.因此，$\angle FDS = 90°$，即 $ED \perp FD$.



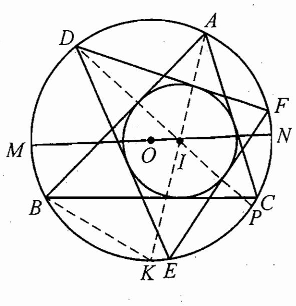
（第 14 题）

15. 证明：如图，设 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 交直线 FM 于点 D，AD 交 BC 于点 E.易知 AD 平分 $\angle BAC$.所以，$AD \perp AP$，$AD \parallel MK$.故 $\frac{MD}{FM} = \frac{AK}{FK}$.因为 $\angle FMC = \angle FAD = 90°$，所以，$F$、$M$、$E$、$A$ 四点共圆，有 $\angle AFD = \angle AEC = \angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$. 又 $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = \angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle AFD$，则 A、F、B、D 四点共圆.故 A、F、B、D、C 五点共圆.根据圆幂定理得 $PA \cdot PF = PC \cdot PB = (PM - MC)(PM + BM) = PM^2 - BM^2 \cdots$①.对 $\mathrm{Rt}\triangle FMP$ 利用射影定理得 $PM^2 = PK \cdot PF \cdots$②. ② − ① 得 $BM^2 = PK \cdot PF - PA \cdot PF = PF(PK - PA) = PF \cdot AK$.因为 $BM^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4}$，所以，结论成立.



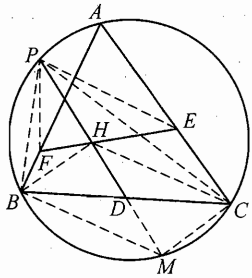
（第 15 题）

16. 证明：如图，设 $OI = d$，R，r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆半径，延长 AI 交圆 O 于 K，则 $KI = KB = 2R\sin\frac{A}{2}$，$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$，延长 OI 交 $\odot O$ 于 M、N；则 $(R+d)(R-d) = IM \times IN = AI \times KI = 2Rr$，即 $R^2 - d^2 = 2Rr$.（注：这实际上是所谓欧拉公式）过 D 分别作 $\odot I$ 的切线 DE，DF，E，F 在 $\odot O$ 上，连结 EF，则 DI 平分 $\angle EDF$，只要证 EF 也



（第 16 题）

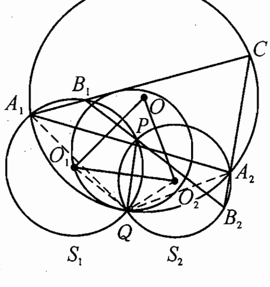
与 $\odot I$ 相切. 设 $DI \cap \odot O = P$，则 P 是 $\overset{\frown}{EF}$ 的中点，连 PE，则 $PE = 2R\sin\frac{D}{2}$，$DI = \dfrac{r}{\sin\frac{D}{2}}$，$ID \cdot IP = IM \cdot IN = (R+d)(R-d) = R^2-d^2$，所以 $PI = \dfrac{R^2-d^2}{DI} = \dfrac{R^2-d^2}{r}\cdot\sin\frac{D}{2} = 2R\sin\frac{D}{2} = PE$，由于 I 在角 D 的平分线上，因此点 I 是 $\triangle DEF$ 的内心，(这是由于，$\angle PEI = \angle PIE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle P) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle F) = \frac{D+E}{2}$，而 $\angle PEF = \frac{D}{2}$，所以 $\angle FEI = \frac{E}{2}$，点 I 是 $\triangle DEF$ 的内心). 即弦 EF 与 $\odot I$ 相切.



(第 17 题)

17. 证明：如图，延长 HD 至点 M，使 $HD = DM$，连结 BM、CM、BH、CH. 因为 D 为边 BC 的中点，所以，四边形 $BHCM$ 为平行四边形. 于是，$\angle BMC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$(这里用到垂心、四点共圆)，即 $\angle BMC + \angle BAC = 180^\circ$. 因此，点 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 连结 PB、PC、PE、PF. 因 $AE = AF$，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，所以，$\angle BFH = \angle CEH$…①，$\angle HBF = 90^\circ - \angle BAC = \angle HCE$…②.

综合式①、②知 $\triangle BFH \backsim \triangle CEH \Rightarrow \dfrac{BF}{BH} = \dfrac{CE}{CH}$. 由四边形 $BHCM$ 是平行四边形知 $BH = CM$，$CH = BM$. 于是，$\dfrac{BF}{CM} = \dfrac{CE}{BM}$…③. 又 D 为边 BC 的中点，则 $S_{\triangle PBM} = S_{\triangle PCM}$. 故 $\frac{1}{2}BP \cdot BM\sin\angle MBP = \frac{1}{2}CP \cdot CM\sin\angle MCP$. 由 $\angle MBP + \angle MCP = 180^\circ$，得 $BP \cdot BM = CP \cdot CM$…④. 结合③、④知 $\dfrac{BF}{BP} = \dfrac{CE}{CP}$. 因为 $\angle PBF = \angle PCE$，所以，$\triangle PBF \backsim \triangle PCE \Rightarrow \angle PFB = \angle PEC$. 于是，$\angle PFA = \angle PEA$. 从而，$P$、$A$、$E$、$F$ 四点共圆.

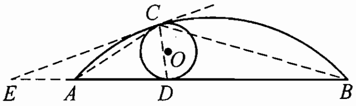


(第 18 题)

18. 证明：因为 $\angle A_1CA_2 + \angle A_1QA_2 = \angle A_1CA_2 + \angle A_1QP + \angle PQA_2 = \angle B_1CB_2 + \angle CB_1B_2 + \angle CB_2B_1 = 180^\circ$，则 A_1、C、A_2、Q 四点共圆. 设 O 是 $\triangle A_1A_2C$ 的外心，O_1、O_2 分别为圆 S_1 和圆 S_2 的圆心，则 $\angle OO_1Q = \frac{1}{2}\angle A_1O_1Q = 180^\circ - \angle A_1PQ$. 同理，$\angle OO_2Q = 180^\circ - \angle A_2PQ$. 所以，$\angle OO_1Q + \angle OO_2Q =$

$180°$. 因此，$\triangle A_1A_2C$ 的外心总在一个过 O_1、O_2 和 Q 的定圆上.

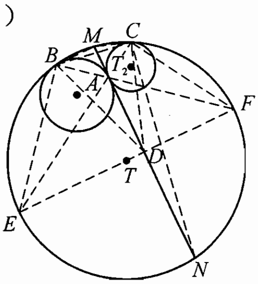
19. 证明：先证明一个引理：如图，$\odot O$ 与弓形相切于点 C、D. 则 CD 平分 $\angle ACB$.



（第 19 题图①）

引理的证明：过 C 作 $\odot O$ 切线与 BA 交于 E. 则由 EC，ED 均为 $\odot O$ 的切线知 $\angle ECD=\angle EDC$，且 $\angle ECA=\angle CBD$. 注意到 $\angle ECD=\angle ECA+\angle ACD$，$\angle EDC=\angle CBD+\angle BCD$. 引理得证.

回到原题(这里的字母与上述引理字母表示不相同.)



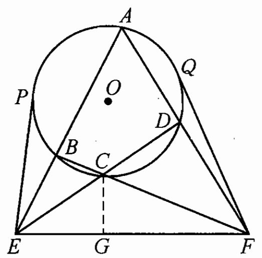
（第 19 题图②）

设 CA、BA 与 $\odot T$ 分别相交于点 E，F. 连结 BC，BE，CF，BD，EF，MB，MC，CN. 由于 $\odot T_2$ 与弓形 MFN 相切，由上述引理知 CA 平分 $\angle MCN$. 从而 E 是优弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的中点. 同理 F 是劣弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的中点. 而 D 是 MN 的中点. 故 E，T，D，F 四点共线，$\angle EBF=\angle ECF=90°$；$\angle MDE=\angle MDF=90°$. 从而 A、B、E、D 及 A、D、F、C 分别四点共圆. 再注意到 C、B、E、F 也四点共圆. 因此，$\angle CBF=\angle CEF=\angle DBA$. 即 $\angle CBA=\angle DBA$. 同理 $\angle BCA=\angle DCA$. 所以 A 是 $\triangle BCD$ 的内心.

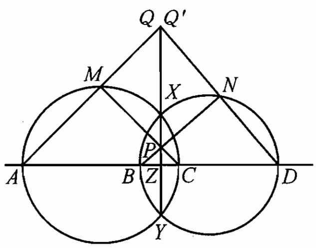
习 题 5

1. 证明：因为 KM，AB 为 $\odot O_1$ 的两条相交弦，所以 $PK\cdot PM=PA\cdot PB$. 同理，$PL\cdot PN=PA\cdot PB$，所以 $PK\cdot PM=PL\cdot PN$. 由相交弦定理的逆定理得到 K、L、M、N 四点共圆.

2. 证明：作 $\triangle BCE$ 的外接圆交 EF 于 G，连结 CG. 又因为 $\angle FDC=\angle ABC=\angle EGC$，故 C、D、F、G 四点共圆. 由切割线定理，有 $EP^2=EC\cdot ED=EG\cdot EF$，$FQ^2=FC\cdot FB=FG\cdot FE$，所以 $EP^2+FQ^2=EG\cdot EF+FG\cdot FE=EF(EG+FG)=EF^2$.



（第 2 题）

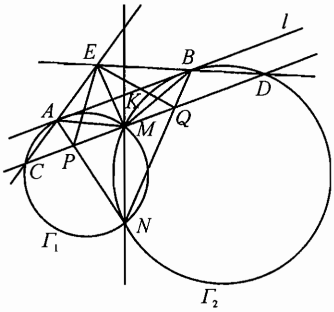


（第 3 题）

3. 证明：设 AM 交直线 XY 于点 Q，而 DN 交直线 XY 于点 Q'（如图，注意：这里只画出了点 P 在线段 XY 上的情形，其他情况可类似证明）. 需证：Q 与 Q' 重合.

由于 XY 为两圆的根轴，故 $XY \perp AD$，而 AC 为直径，所以 $\angle QMC = \angle PZC = 90°$. 进而，$Q$、$M$、$Z$、$C$ 四点共圆. 同理 Q'、N、Z、B 四点共圆. 这样，利用圆幂定理，可知 $QP \cdot PZ = MP \cdot PC = XP \cdot PY$，$Q'P \cdot PZ = NP \cdot PB = XP \cdot PY$. 所以，$QP = Q'P$. 而 Q 与 Q' 都在直线 XY 上且在直线 AD 同侧，从而，Q 与 Q' 重合. 命题获证.

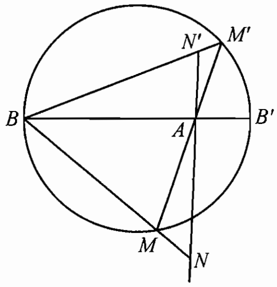
4. 证明：如图，令 K 为 MN 和 AB 的交点. 根据圆幂定理：$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$. 换言之，$K$ 是 AB 的中点，因为 $PQ \parallel AB$，所以 M 是 PQ 的中点，故只需证明 $EM \perp PQ$.



（第 4 题）

因为 $CD \parallel AB$，所以点 A 是圆 Γ_1 的弧 CM 的中点，点 B 是圆 Γ_2 的弧 DM 的中点. 于是，$\triangle ACM$ 与 $\triangle BDM$ 都是等腰三角形. 从而 $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$，$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$. 故 $EM \perp AB$. 再由 $PQ \parallel AB$，即得 $EM \perp PQ$.

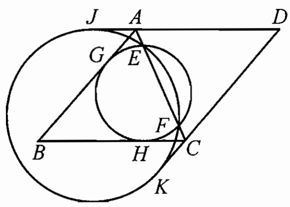
5. 证明：$\angle BNA = 90° - \angle MBA = \angle BB'M = \angle BM'M$. 从而有 M、N、M'、N' 共圆，记此圆为 Γ. 注意到 $\odot O$ 与 Γ 的交点为 M、M'，所以 MM' 是 $\odot O$ 和 Γ 的根轴，又 A 在 MM' 上，所以 A 关于两圆等幂，即 $AB \cdot AB' = AN \cdot AN'$.



（第 5 题）

6. 证明：如图，所求的充分必要条件是 $AB + AD = CB + CD$.

1° 必要性的证明. 设过 E、F 两点的另一圆分别与 DA 的延长线和 DC 延长线相切于 J 和 K 两点，由于 AJ，AG 分别是大圆，小圆的切线，所以由圆幂定理知 $AG^2 = AE \cdot AF$（对小圆），$AJ^2 = AE \cdot AF$（对大圆），故 $AG = AJ$. 同理，$CH = CK$. 则有 $AB + AD = BG + GA + AD = BG + JD = BH + KC + CD = BH + HC + CD = CB + CD$.



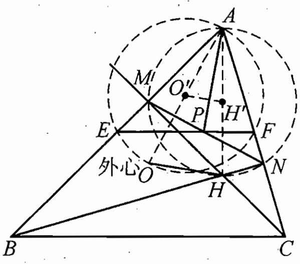
（第 6 题）

2° 充分性的证明. 设凸四边形 $ABCD$ 满足条件 $AB + AD = CB + CD$. 在 DA 延长线和 DC 延长线上分别取 J 点和 K 点，使 $AJ = AG$，$CK = CH$，于是

$DJ=JA+AD=AG+AD=AB+AD-BG=CB+CD-BH=CH+CD=DK$. 过 J 点和 K 点分别作 DJ 和 DK 的垂线，以两垂线交点为圆心作通过 J 点和 K 点的圆. 因为 $AJ=AG$，$CK=CH$，所以 A 点和 C 点关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂. 又因为直线 AC 与原有的圆相交于 E 和 F 两点，所以 EF 是两圆的公共弦(直线 AC 是两圆的根轴).

至此，我们证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E、F 两点.

7. 证明：由 $\angle BMC=\angle BNC=90^\circ$ 知 B、C、N、M 四点共圆. 所以 $AM\cdot AB=AN\cdot AC$. 又 $AE=\dfrac{1}{2}AB$，$AF=\dfrac{1}{2}AC$，则 $AM\cdot AE=AN\cdot AF$，即 E、F、N、M 共圆. 注意到由 $\angle AMH=\angle ANH=\angle AEO=\angle AFO=90^\circ$ 知 AH、AO 分别为 $\triangle AMN$、$\triangle AEF$ 外接圆的直径. 过 AH 中点 H' 与 AO 中点 O' 分别为 $\triangle AMN$ 与 $\triangle AEF$ 的外心，且易知 $O'H'\parallel OH$. 故只需证 $AP\perp O'H'$，只需证 A、P 为 $\triangle AMN$、$\triangle AEF$ 外接圆的等幂点即可. 注意到 A 为两圆公共点，而由 E、F、N、M 共圆知 $PM\cdot PN=PE\cdot PF$. 故 P 也为等幂点. 综上所述，原命题成立.

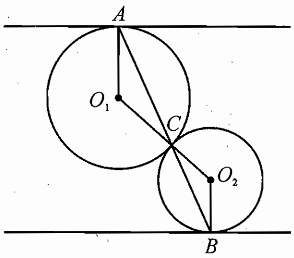


(第 7 题)

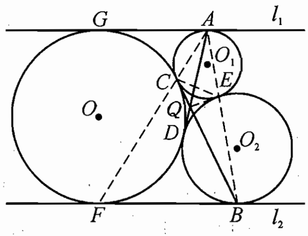
8. 引理(字母与原题无关). 如图，设 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于点 C，直线 $l_1\parallel l_2$，且 l_1 切 $\odot O_1$ 于点 A，l_2 切 $\odot O_2$ 于点 B，那么 A、C、B 三点共线.

引理的证明：$l_1\parallel l_2\Rightarrow O_1A\parallel O_2B\Rightarrow\angle AO_1C=\angle BO_2C\Rightarrow\angle ACO_1=90^\circ-\dfrac{\angle AO_1C}{2}=90^\circ-\dfrac{\angle BO_2C}{2}=\angle O_2CB\Rightarrow A$、$C$、$B$ 共线.

回到原题，令 $\odot O$ 与 l_1 切于 G，与 l_2 切于 F，由引理知 A，C，F 共线，A、E、B 共线，而 $\angle AEC=\angle GAC=\angle CFB$. 故 C、E、B、F 四点共圆，由割线定理，$AC\cdot AF=AE\cdot AB$，从而 A 关于 $\odot O$、$\odot O_2$ 等幂，所以 A 在两圆的根



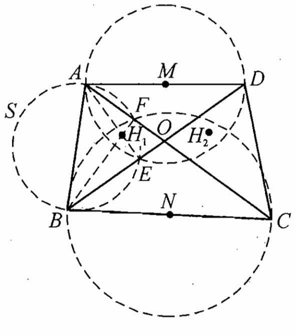
(第 8 题图(1))



(第 8 题图(2))

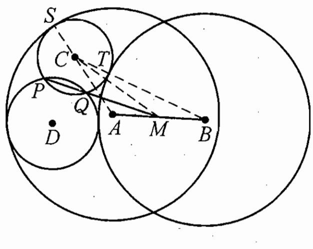
轴上，所以直线 AD 为 $\odot O$，$\odot O_2$ 的根轴，又 $\odot O$ 与 $\odot O_2$ 切于点 D，则 AD 为切线，即 QD 为两圆公切线，同理 QC 为 $\odot O$ 与 $\odot O_2$ 公切线，从而 Q 同时位于两个根轴上，所以 Q 为三圆根心. 从而 QE 为 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的公切线. $QC=QD=QE$，Q 为 $\triangle CDE$ 外接圆圆心.

9. 证明：以 AB 为直径作圆 S 交 AC 于 F，交 BD 于 E，那么 $AE\perp BO$，$BF\perp AO$，从而有 H_1 为 AE、BF 交点，显然，F 在以 N 为圆心、NB 为半径（即以 BC 为直径）的 ON 上，E 在以 AO 为直径的 $\odot M$ 上，因而，直线 BF 是 $\odot S$、$\odot N$ 的根轴，直线 AE 是 $\odot S$、$\odot M$ 的根轴. 从而 $H_1=BF\cap AE$ 是 $\odot S$、$\odot M$、$\odot N$ 的根心 $\Rightarrow H_1$ 在 $\odot M$、$\odot N$ 根轴上，同理可证，H_2 在 $\odot M$、$\odot N$ 根轴上，故 $H_1H_2\perp MN$（根轴 $\perp$ 连心线）.



（第 9 题）

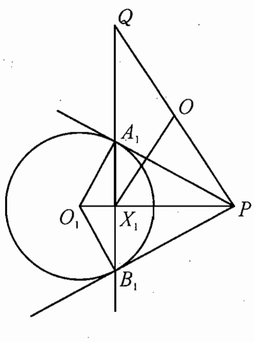
10. 证明：令 AB 的中点为 M，记圆 C 与圆 A 内切于 S，与圆 B 外切于 T，设圆 A 与圆 B 的半径为 R，圆 C 的半径为 r，则 $CA=SA-SC=R-r$，$CB=CT+TB=R+r$. 从而，M 关于 $\odot C$ 的幂 $=MC^2-r^2=\frac{1}{2}\cdot(AC^2+BC^2)-MA^2-r^2$（中线长公式）$=\frac{1}{2}((R+r)^2+(R-r)^2)-MC^2-r^2=R^2-MA^2$ 为与 $\odot C$ 无关的定值. 同理 M 关于 $\odot D$ 的幂 $=R^2-MA^2$. 所以 M 在 $\odot C$ 与 $\odot D$ 的根轴，即直线 PQ 上. 即 PQ 过 AB 中点 M.



（第 10 题）

11. 证明：记圆 $\Gamma_i(i=1,2,3)$ 的圆心、半径分别为 O_i、r_i. 设 P 为一个独特的点，且与其相应的三条直线 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 交于点 Q. 以线段 PQ 为直径作圆并记为圆 Γ，其圆心、半径分别为 O、r.

接下来证明：所有独特的点都在圆 Γ 上. 如图，记 PO_1 交 A_1B_1 于点 X_1. 由 $PO_1\perp A_1B_1$ 知，点 X_1 在圆 Γ 上. 由 PA_1 与圆 Γ_1 相切及射影定理知 $O_1X_1\cdot O_1P=O_1A_1^2=r_1^2$. 另一方面，$O_1X_1\cdot O_1P$ 也是点 O_1 对圆 Γ 的幂，则 $r_1^2=O_1X_1\cdot O_1P=O_1O^2-r^2\Rightarrow r^2=OO_1^2-r_1^2$. 因此，$r^2$ 是点 O 对圆 Γ_1 的幂. 同理，r^2 也是点 O 对圆 Γ_2、Γ_3 的幂.

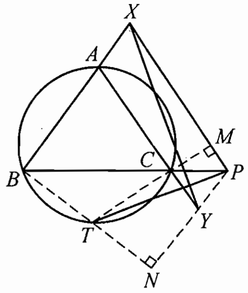


（第 11 题）

综上，O 是所给定的三个圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3 的根心. 因为点 O 对这三个圆的幂的平方根 r 与点 P 的选取无关，所以，所有独特的点都在圆 Γ 上.

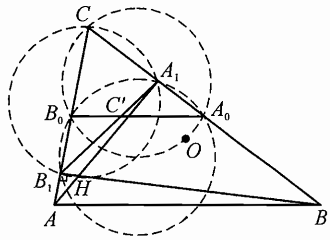
注：若三个圆的根心位于无穷远点（相应的三条根轴两两平行），则在平面上不存在独特的点，这与题目中的论述是相容的.

12. 证明：如图，设 M 和 N 分别是 T 在 PX 和 PY 上的正交投影，可以得到 $\dfrac{PY}{AB}=\dfrac{PC}{BC}$，$PN=PB\sin\dfrac{A}{2}$. 所以，$PN\cdot PY=PB\cdot PC\cdot\dfrac{AB}{BC}\sin\dfrac{A}{2}$. 同理可得 $PM\cdot PX=PB\cdot PC\cdot\dfrac{AC}{BC}\sin\dfrac{A}{2}$. 由于 $AB=AC$，所以，$PX\cdot PM=PN\cdot PY$. 因为 M 和 N 分别在以 TX 和 TY 为直径的圆上，故点 P 在分别以 TX 和 TY 为直径的两圆的根轴上. 设 K 是分别以 TX 和 TY 为直径的两圆的另外一个交点，于是，T、K 和 P 三点共线. 又 $\widehat{YKT}=\widehat{XKT}=\dfrac{\pi}{2}$，所以，$PT\perp XY$. 这样就证明了结论.



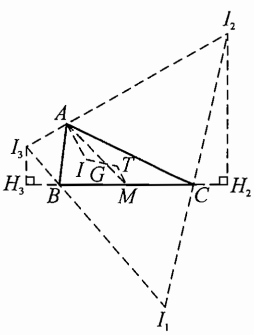
（第 12 题）

13. 证明：如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别将边 BC、CA 的中点记作 A_0、B_0，将三角形的垂心记作 H，外心记作 O. 因为点 A、B、A_1、B_1 位于同一圆周上（AB 为其直径），所以，$\angle CB_1A_1=\angle CBA=\angle CA_0B_0$. 故点 A_0、B_0、A_1、B_1 位于同一圆周 W_1 上. 将以 CH 为直径的圆周记作 W_2，将以 CO 为直径的圆周记作 W_3. 易知，点 A_1、B_1 位于圆周 W_2 上，而点 A_0、B_0 位于圆周 W_3 上. 因此，点 C' 关于圆 W_1 和圆 W_2 有相同的幂，关于圆 W_1 和圆 W_3 也有相同的幂. 从而，点 C' 关于圆 W_2 和圆 W_3 有相同的幂，即位于它们的根轴之上. 所以，直线 CC' 就是圆 W_2 和圆 W_3 的根轴. 故 CC' 垂直于这两个圆的圆心连线. 又圆 W_2 和圆 W_3 的圆心分别为线段 CH 和 CO 的中点，它们的连线平行于直线 OH，则 $OH\perp CC'$.



（第 13 题）

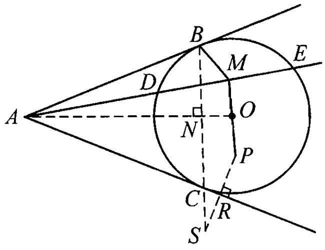
14. 证明：作 $I_2H_2\perp BC$，$I_3H_3\perp BC$，垂足分别为 H_2、H_3. 熟知 $BH_2=CH_3=\dfrac{AB+BC+CA}{2}$，取 BC 中点，则 $MH_2=MH_3$. 所以 M 在 $\odot I_2$、$\odot I_3$ 根轴上. 熟知 A、G、M 共线且 $AG=2GM$. 延长 IG 至 T 使 $IG=2GT$，则 $\triangle AGI\backsim\triangle MGT$. 从而 $\angle GMT=\angle GAI$，则 $MT\parallel AI$. 又 $AI\perp I_2I_3$，所以 $MT\perp I_2I_3$，故 MT 为 $\odot I_2$、$\odot I_3$ 的根轴，T 在根轴上. 同理 T 在 $\odot I_1$ 与 $\odot O_2$、$\odot I_1$ 与 $\odot O_3$ 的根轴上. 故 T 为三圆的根



（第 14 题）

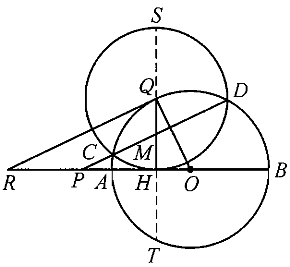
心，且 T 在 IG 上，得证.

15. 证明：作 $PR\perp AC$，其延长线交 BC 延长线于 S，再过 A 作 $AN\perp BC$，则 N 为 BC 的中点，且 $\triangle ACN\backsim\triangle SCR\Rightarrow CB\cdot CS=2CA\cdot CR$. 因为 $\angle OMA=\angle OBA=\angle OCA=90^\circ$. 所以 A、C、O、M、B 五点共圆. 则 $\angle BMP=\angle BMA+90^\circ=\angle BCA+90^\circ=180^\circ-\angle RSC$. 故 B、M、P、S 四点共圆. C 点对 $\triangle BMP$ 外接圆的幂为：$-CB\cdot CS=-2CA\cdot CR$. 又因为 $PA^2-AO^2=(AM^2+MP^2)-(AM^2+MO^2)=MP^2-MO^2$. $PD^2-OD^2=(DM^2+MP^2)-(DM^2+MO^2)=MP^2-MO^2$. 所以 $PA^2-AO^2=PD^2-DO^2\Rightarrow PA^2-PD^2=AO^2-DO^2\cdots$①. 而 A 对 $\odot O$ 的幂有：$AO^2-DO^2=AD\cdot AE$. 从而 C 对 $\odot P$ 的幂为：$CP^2-PD^2\xlongequal{\text{由①}}CP^2-[AP^2-(AO^2-DO^2)]=CP^2-AP^2+AD\cdot AE=CP^2-AP^2+AC^2=(CR^2+RP^2)-(AR^2+RP^2)+AC^2=CR^2-(AC+CR)^2+AC^2=-2CA\cdot CR$. 所以点 C 对 $\odot P$ 的幂等于 C 到 $\triangle BMP$ 外接圆的幂. 故由根轴定理知，C 点在上述两圆根轴上.



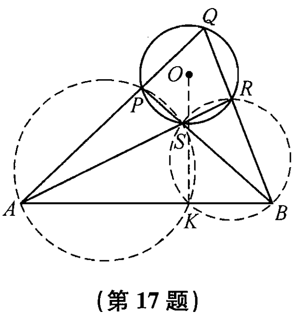
(第 15 题)

16. 证明：设直线 QH 与 $\odot Q$ 交于点 S，与 $\odot O$ 交于点 T，设 CD 与 QH 交于点 M，则 M 在两圆根轴 CD 上，故 M 关于 $\odot Q$，$\odot O$ 等幂，即 $MH\cdot MS=MC\cdot MD=MQ\cdot MT$，又由垂径定理知 $QH=HT$，$QH=QS$，代入上式知 $MH\cdot(MQ+QH)=MQ\cdot(MH+QH)\Rightarrow MH=MQ$，所以 M 平分 QH，即 CD 平分线段 QH.



(第 16 题)

17. 如图，设圆 Γ 的圆心为 O，半径为 r. 由密克定理知，$\triangle APS$ 和 $\triangle BRS$ 的外接圆交于点 K，且 K 在边 AB 上. 由圆幂定理得：$AO^2-r^2=AS\cdot AR=AK\cdot AB=AK^2+AK\cdot KB$，$BO^2-r^2=BS\cdot BP=BK\cdot BA=BK^2+BK\cdot KA$. 于是 $AO^2-AK^2=BO^2-BK^2$，即 OK 为 AB 的垂线，且 $AK\cdot KB=OK^2-r^2$.

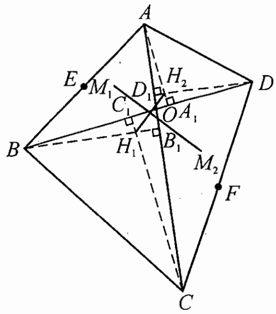


(第 17 题)

对任何一对满足条件的点 $\{A,B\}$，因为 O、K、r 是固定的，所以，以 AB 为直径的圆一定过直线 OK 上的两点，其到直线 l 距离为 $\sqrt{OK^2-r^2}$.

18. 如图，作 $\triangle AOD$ 的两条高 AA_1 和 DD_1，作 $\triangle BOC$ 的两条高 BB_1 和

CC_1. 因为$\angle AA_1B=90^\circ=\angle BB_1A$，所以，$A$、$B$、$B_1$、$A_1$ 四点共圆且圆心为 AB 的中点 E. 同理，C_1、C、D、D_1 四点共圆且圆心为 CD 的中点 F. 因此，EF 为$\odot E$和$\odot F$ 的连心线. 又 A、D_1、A_1、D 四点共圆，则有 $H_2A\cdot H_2A_1=H_2D_1\cdot H_2D$. 由于 $H_2A\cdot H_2A_1$ 和 $H_2D_1\cdot H_2D$ 恰分别为点 H_2 关于$\odot E$ 和$\odot F$ 的幂，所以，点 H_2 在$\odot E$ 和$\odot F$ 的根轴上. 同理，点 H_1 也在这条根轴上. 故直线 H_1H_2 就是$\odot E$ 和$\odot F$ 的根轴. 从而 $H_1H_2\perp EF$. 又 $M_1M_2 /\!/ EF$，所以，$M_1M_2\perp H_1H_2$.

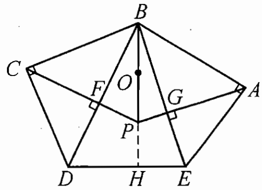


（第 18 题）

19. 证法 1：如图，过点 P 作 $PH\perp DE$ 于点 H. 因为

$$\angle PFD=\angle PGE=90^\circ=\angle PHD=\angle PHE,$$

所以，F、D、H、P 和 P、H、E、G 分别四点共圆，记两圆为$\odot M_1$ 和$\odot M_2$.



（第 19 题）

又 $BF\cdot BD=BC^2=BA^2=BG\cdot BE$，所以，$F$、$D$、$E$、$G$ 四点共圆，记此圆为 $\odot M_3$.

易见，$\odot M_1$、$\odot M_2$、$\odot M_3$ 两两之间的公共弦恰为 PH、EG、FD. 由根心定理知，这三条根轴交于一点.

又已知直线 DF 和 EG 交于点 B，因此，直线 PH 过点 B.

由 $PH\perp DE$，知 $BP\perp DE$.

证法 2：记 BP 的中点为 O.

因为$\angle BFP=90^\circ=\angle BGP$，所以，$B$、$F$、$P$、$G$ 四点共圆且圆心为点 O.

又因为 $BA=BC$，$\angle BCD=90^\circ=\angle BAE$，故以点 B 为圆心、BC 为半径的 $\odot B$ 过点 A，且直线 DC 和 EA 都是 $\odot B$ 的切线，切点分别为 C 和 A.

所以，$DC^2=DF\cdot DB$.

故点 D 在$\odot O$ 与$\odot B$ 的根轴上.

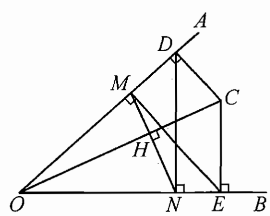
同理，点 E 在$\odot O$ 与$\odot B$ 的根轴上.

因此，直线 DE 为$\odot O$ 与$\odot B$ 的根轴.

则 $BO\perp DE$，即 $BP\perp DE$.

20. 证明：如图，过点 C 作 $CH\perp MN$ 于点 H. 因为

$$\angle CDM=\angle CEN=90^\circ,$$



（第 20 题）

所以，C、D、M、H 和 C、H、N、E 分别四点共圆，记两圆为 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$. 由

$$\angle DME = 90^\circ = \angle DNE,$$

知 D、M、N、E 四点共圆，记之为 $\odot O_3$.

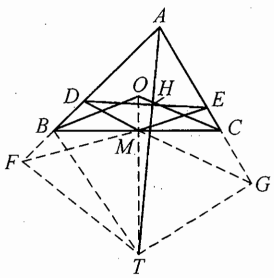
易见，直线 CH、EN、DM 恰为 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 两两之间的三条根轴. 又因前两条直线交于点 O，故由根心定理知直线 CH 过点 O，即 C、H、O 三点共线.

又 $CH \perp MN$，所以，$OC \perp MN$.

21. 证明：如图，由 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，T 是 $\triangle BOC$ 的外心知，O、M、T 三点共线，且 $OT \perp BC$.

延长 DM、AC 交于点 G，延长 EM、AB 交于点 F，连结 FT、BT、GT. 于是，有

$$\begin{aligned}\angle BTO &= 2\angle BCO = 180^\circ - \angle BOC \\ &= 180^\circ - 2\angle BAC = \angle AFE.\end{aligned}$$



（第 21 题）

故 B、F、T、M 四点共圆.

则 $\angle BFT = 180^\circ - \angle BMT = 90^\circ$.

同理，$\angle CGT = 90^\circ$.

过点 T 作 $TH \perp DE$ 于点 H，于是，D、F、T、H 和 H、T、G、E 分别四点共圆，记两圆为 $\odot S_1$ 和 $\odot S_2$.

$$\text{又}\quad \angle FDG = 180^\circ - \angle ADG = 180^\circ - \angle AEF = \angle FEG,$$

所以，D、F、G、E 四点共圆，记之为 $\odot S_3$.

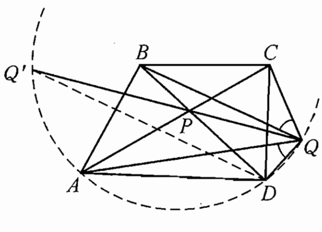
由于直线 TH、GE、DF 恰为 $\odot S_1$、$\odot S_2$、$\odot S_3$ 两两之间的三条根轴，且 GE 与 DF 交于点 A，故由根心定理知 TH 过点 A.

因为 $TH \perp DE$，所以，$AT \perp DE$.

习 题 6

1. 证明：设 $t = \dfrac{AD}{BC}$，以 P 为位似中心，$-t$ 为位似比的位似变换 h 将 $\triangle PBC$ 变换到 $\triangle PDA$.

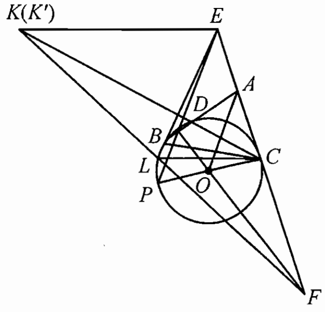
如图，设 $Q' = h(Q)$，则 Q、P、Q' 三点共线. 由于点 P、Q 在边 AD 的同侧，也在边 BC 的同侧，于是，点 Q'、P 也在边 $h(BC) = DA$ 的同侧. 从而，点 Q、Q' 也在边 AD 的同侧. 此外，点 Q、C



（第 1 题）

在 BD 的同侧，点 Q'、A 在 BD 的另一侧. 由位似变换 h 知，$\angle AQ'D=\angle CQB=\angle AQD$. 于是，$A$、$Q'$、$Q$、$D$ 四点共圆. 从而，$\angle DAQ=\angle DQ'Q=\angle DQ'P=\angle BQP$.

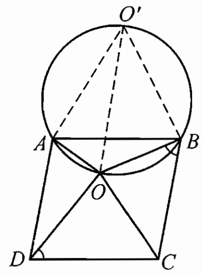
2. 证明：如图，设过点 E 平行于 CL 的直线与 CD 交于点 K'.



（第 2 题）

由 $\angle EBD=\angle DCL=\angle EK'D$，知 B、D、E、K' 四点共圆. 设该圆为 $\odot O_1$. 注意到 AO 是 $\triangle CEP$ 的中位线，且 CE 是切线，则 $AE^2=AC^2=AD\cdot AB$，有 AE 切 $\odot O_1$ 于点 E. 考虑从 $\odot O_1$ 到 $\odot O$ 的位似变换，位似中心为 F，点 E、O_1 分别对应点 C、O，K' 对应点 L. 因此，F、K'、L 三点共线，故 $K=K'$.

3. 证明：考虑将点 D 映射到点 A 的平移. 此平移也将点 O 映射到 O'，且 $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{DA}$. 由于 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$，故也将点 C 映射到点 B.



（第 3 题）

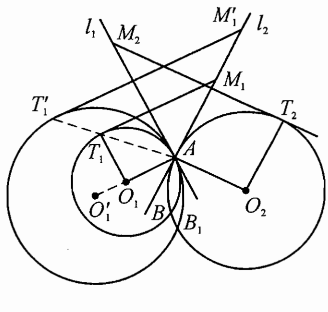
平移保持角度不变，所以 $\angle AO'B=\angle DOC=180^\circ-\angle AOB$.

因此，$AOBO'$ 是一个圆内接四边形，进而有

$$\angle ODC=\angle O'AB=\angle O'OB.$$

又因 $O'O$ 平行于 BC，所以 $\angle O'OB=\angle OBC$，故有 $\angle ODC=\angle OBC$.

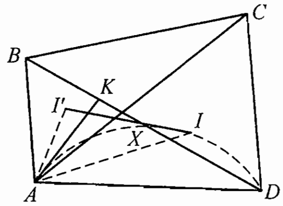
4. 证明：以 A 为中心，作系数为 $k(k>0)$ 的同位相似，将圆 W_1 变为与圆 W_2 相等的圆 W'_1. 用带撇的同一字母（连同原来的下标）表示各个点和各条直线在该变换之下的像，如图.



（第 4 题）

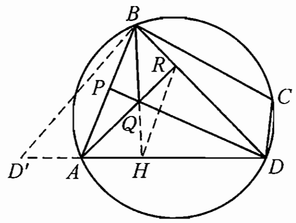
设 B_1 是圆 W_2 与圆 W'_1 的（不同于 A）第二个交点. 圆 W'_1 与圆 W_2 关于直线 AB_1 相互对称. 在此对称之下，T'_1 变为 T_2，l'_1 变为 l_2，M'_1 变为 M_2. 从而，$AM_2=AM'_1=kAM_1$（k 不依赖于点 T_1 和 T_2 的位置）. 于是，不论点 T_1、T_2 的位置如何变化，所得到的 $\triangle AM_1M_2$ 都彼此为同位相似（因为 M_2，M_1 分别位于直线 l_1、l_2 上，它们都经过点 A，且位于直线 AB_1 的不同侧，而比值 $AM_2:AM_1$ 为常数）. 由此即知，线段 M_1M_2 的中点位于一条固定的经过点 A 的直线上.

5. 证明：如图，由$\angle AKB=\angle ADC$，$\angle ABK=\angle ACD$，知$\triangle AKB\backsim\triangle ADC$. $\triangle AKB$绕点A旋转$\angle BAC$再放缩变为$\triangle ADC$，因此，$\angle IAI'=\angle BAC$，$\dfrac{AI}{AI'}=\dfrac{AC}{AB}$. 故$\triangle AII'\backsim\triangle ACB$. 于是，$\angle AIX=\angle ACB=\angle ADX$. 从而，$A$、$X$、$I$、$D$四点共圆.



（第 5 题）

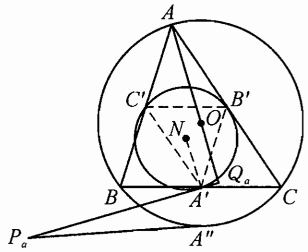
6. 解：如图，以B为旋转中心旋转$\triangle BCD$，使BC与BA重合，点D转到D'.



（第 6 题）

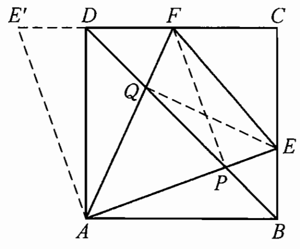
因为四边形$ABCD$为圆内接四边形，所以，$\angle BAD'+\angle DAB=\angle BCD+\angle DAB=180°$. 从而，$D'$、$A$、$D$三点共线. 设$H$为$BQ$与$AD$的交点. 由$\angle D'BA=\angle DBC$，有$\angle D'BQ=\angle D'BA+\angle ABQ=\angle DBC+\angle ABQ=\angle QBD$. 故$\triangle D'BH\cong\triangle DBH\Rightarrow D'H=HD$. 因为$AD=3DC=3D'A$，所以，$D'H=\dfrac{1}{2}D'D=2D'A$. 于是，$\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{1}{3}$. 视直线$RA$为$\triangle BHD$的截线，由梅涅劳斯定理有$\dfrac{DR}{RB}\cdot\dfrac{BQ}{QH}\cdot\dfrac{HA}{AD}=1$. 因此，$\dfrac{BQ}{QH}=\dfrac{3}{2}$. 又$\angle ADQ=\angle BDQ$，则$\dfrac{BD}{DH}=\dfrac{BQ}{QH}=\dfrac{3}{2}$. 因此，$BD=\dfrac{3}{2}DH=3AH=DA$. 于是，$DP\perp AB\Rightarrow\angle APD=90°$.

7. 证明：可以证明它们都在$\odot O$与九点圆的根轴上. 如图，把$\triangle ABC$位似变换到$\triangle A'B'C'$. $\triangle ABC$的重心为位似中心，位似比为$-\dfrac{1}{2}$. 在这种变换下，AO变成了$A'N$，其中N是九点圆的圆心. 所以，$A'N/\!/AO$，$A'P_a\perp A'N$. 故$A'P_a$是九点圆的切线. 易知$\angle OAB+\angle C=90°$，则$\angle BAA'+\angle A'AO+\angle C=90°$（不妨设$AB\leqslant AC$）. 又$\angle P_aA''A'=\angle BAA'+\angle C$，$\angle P_aA'A''=90°-\angle A'AO$，所以，$\angle P_aA''A'=\angle P_aA'A''$. 故$A'P_a=A''P_a$. 所以，$P_a$在$\odot O$与九点圆的根轴上. 同理，$P_b$、$P_c$也在$\odot O$与九点圆的根轴上.



（第 7 题）

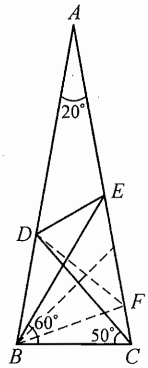
8. 证明：如图，以A为旋转中心逆时针旋转$90°$，则$B\to D$，设$E\to E'$，则AE'垂直且等于AE，DE'垂直且等于BE，因而E'在CD的延长线上，所



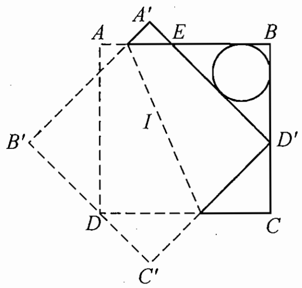
（第 8 题）

以 $BE+FD=DE'+FD=E'F$，于是，$BE+DF=EF \Leftrightarrow E'F=EF \Leftrightarrow \triangle AE'F \cong \triangle AEF \Leftrightarrow \angle E'AF=\angle EAF \Leftrightarrow \angle EAF=\frac{1}{2}\angle EAE' \Leftrightarrow \angle EAF=45°$. 注意到“任意一条直线与其像直线的交角等于旋转角”AF 是 AE 在旋转下的像. 故 $\angle AEQ=45°$，所以 $EQ \perp QF$；同理 $EP \perp PF$. 即 P、E、C，F 和 E、C、F、Q 分别四点共圆，从而五边形 $PECFQ$ 内接于圆.

9. 解：如图，注意到条件 $\angle DCB=50°$ 和 $\angle A=20°$，得 $BD=BC$，即 $\triangle BCD$ 也为等腰三角形，于是以 $\triangle BCD$ 的对称轴为反射轴作轴反射变换，则 $D \to C$；设直线 BE 的像直线交 AC 于 F，则 $\angle FBC=\angle EBD=20°$，$\angle BFC=80°=\angle FCB$，所以 $BF=BC=BD$. 又 $\angle FBD=80°-20°=60°$，因此 $\triangle DBF$ 是一个正三角形，所以 $FD=FB$，又易知 $\angle FBE=\angle BEF(=40°)$，从而 $FE=FB$，于是 F 为 $\triangle BED$ 的外心，故 $\angle DEB=\frac{1}{2}\angle DFB=30°$.



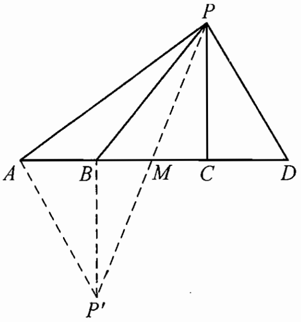
(第 9 题)



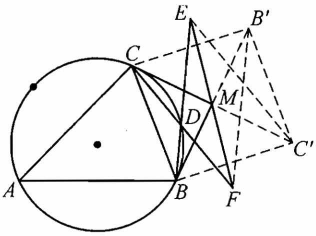
(第 10 题)

10. 证明：如图，设折痕所在直线为 l，轴反射变换，则 $A \to A'$，$D \to D'$；再设 $B \to B'$，$C \to C'$，因 $D' \to D$，而 D' 在 BC 上，所以 D 在 $B'C'$ 上，又 D 到 AB、BC、$A'D'$ 的距离都等于正方形的边长，所以 D 为 $\triangle BED'$ 的旁心. 因 $\triangle BED'$ 为直角三角形，于是，$r=\frac{1}{2}(BE+BD'-ED')=\frac{1}{2}(BE+BD'+ED'-2ED')=\frac{1}{2}(AB+BC-2ED')=AB-ED'=A'D'-ED'=A'E$.

11. 证明：如图，设线段 AD 的中点为 M，以 M 为旋转中心作中心反射，则 $D \to A$，$C \to B$，设 $P \to P'$，则 $P'A=PD$，$P'B=PC$. 因 B 是 $\triangle AP'P$ 内部的一点，所以 $PA+P'A \geqslant PB+P'B$，故 $PA+PD \geqslant PB+PC$.



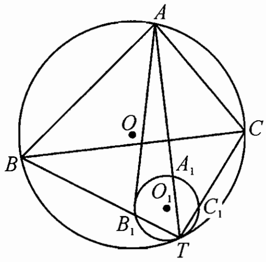
（第 11 题）



（第 12 题）

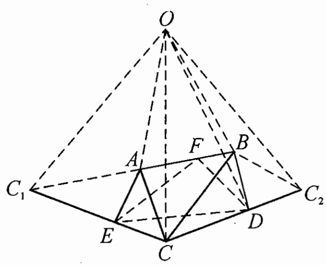
12. 证明：如图，M 为旋转中心作中心反射，则 $E\to F$，$F\to E$；设 $B\to B'$，$C\to C'$，则 $B'C'=BC$，则 $EC'=CF=AB$，又 $EC'\parallel CF$，所以 $\angle BEC'=\angle BDF=\angle BAC$，因为 $EB=AC$，则 $\triangle EC'B\cong\triangle ABC$，所以 $BC'=BC$；同理，$B'C=BC$. 因此，$BC'B'C$ 是一个菱形，从而 $BB'\perp CC'$，故 $BM\perp MC$ 成立.

13. 证明：如图，设两圆相切于点 T，AT，BT，CT 分别交小圆于 A_1，B_1，C_1. 则小圆与大圆关于点 T 位似. 设小圆、大圆半径之比是 k，那么 k 就是位似比. 由圆幂定理：$\alpha^2=AA_1\cdot AT$，AT 与 A_1T 是位似变换 F 的对应线段，故 $A_1T=k\cdot AT$. 所以 $AA_1=(1-k)AT$，即 $AT=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-k}}$. 同理 $BT=\dfrac{\beta}{\sqrt{1-k}}$，$CT=\dfrac{\gamma}{\sqrt{1-k}}$. 由托勒密定理得 $a\cdot AT=b\cdot BT+c\cdot CT$. 将三式代入得：$a\alpha=b\beta+c\gamma$.



（第 13 题）

14. 证明：如图，作 $\triangle AEC_1\cong\triangle BDC$，$\triangle BDC_2\cong\triangle AEC$，因为 $AE=BD$，$\angle BDC+\angle AEC=180°$，所以 C，E，C_1 及 C，D，C_2 均三点共线. 这样 $\triangle ACC_1$ 与 $\triangle BCC_2$ 三边对应相等. 则 $\triangle ACC_1\cong\triangle BCC_2$.



（第 14 题）

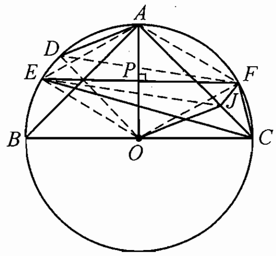
设 CC_1，AB 的中垂线交于点 O. 可以证明：O 即是将$\triangle AC_1C$ 旋转至$\triangle BCC_2$ 的旋转中心. 因为 $OC_1=OC$，$OA=OB$，$AC_1=BC$，所以 $\triangle OAC_1\cong\triangle OBC$. 所以$\angle C_1OA=\angle COB$，$\angle C_1OC=\angle AOB$. 而 $\angle OAC_1=\angle OBC$，$\angle C_1AC=\angle CBC_2$，所以 $\angle OAC=\angle OBC_2$. 又因为 $OA=OB$，$AC=BC_2$，$\triangle OAC\cong\triangle OBC_2$. 所以

$OC=OC_2$，$\angle AOC=\angle BOC_2$. 这表明 C_1、A、C 绕 O 旋转 $\angle AOB$ 后所得的像点依次是 C、B、C_2. 所以 $\triangle BCC_2$ 是 $\triangle AC_1C$ 的像.

因为 $\triangle OC_1C$，$\triangle OAB$，$\triangle OCC_2$ 是顶角相同的等腰三角形，故它们相似（其中 $\triangle OC_1C$ 与 $\triangle OCC_2$ 全等）. 因为 $\dfrac{C_1E}{EC}=\dfrac{CD}{DC_2}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{DC}{CE}$，由此知 D 是 E 旋转后的像. 所以 $\triangle OEC\backsim\triangle OFB$. 所以 $\angle EOC=\angle FOB$，$\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{OC}{OB}$. 又得 $\angle FOE=\angle BOC$，$\triangle FOE\backsim\triangle BOC$. 所以 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{OE}{OC}$. 同理可证得：$\dfrac{FD}{AC}=\dfrac{OD}{OC}$.

因为 D 是 E 旋转后的像，所以 $OE=OD$，且有 $\triangle OED\backsim\triangle OCC_1$. 所以 $\dfrac{DE}{CC_1}=\dfrac{OE}{OC_1}=\dfrac{OE}{OC}$，$CC_1=C_1E+CE=CD+CE$. 即 $\dfrac{DE}{CD+CE}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{AC}=\dfrac{OE}{OC}$.

15. 证明：如图，连结 OD、DF、EJ、OE、EA. 我们首先证明 J 位于 $\angle FEC$ 的内角平分线上. 事实上，因为 E 和 F 是关于 P 的一对反射点，D、J 是关于 P 的另一对反射点（四边形 $ADOJ$ 是平行四边形），所以 $\angle FEJ=\angle DFE$.

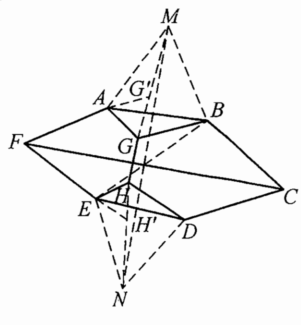


（第 15 题）

因此我们只需证明 $\angle DFE=\dfrac{1}{2}\angle FEC$. 这等价于证明 $\angle DOE=\dfrac{1}{2}\angle FOC$. …①. 由已知条件易知 $\triangle AOE$ 是等边三角形，由于 $\angle DOE=\angle AOE-\angle AOD=60°-\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}(180°-(\angle AOB+60°))=\dfrac{1}{2}(180°-(\angle AOB+\angle FOA))=\dfrac{1}{2}\angle FOC$. ① 式得证，从而证得 J 位于 $\angle FEC$ 的内角平分线上.

又易见 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}$，故 J 位于 $\angle FCE$ 的平分线上. 故 J 是 $\triangle CEF$ 的内心.

16. 证明：用旋转法来证明本题. 如图，分别以 AB、DE 为边向六边形外作正 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DEN$. 将 $\triangle AGB$ 绕 A 逆时针旋转 $60°$ 到 $\triangle AG'M$，则 $\triangle AGG'$ 为正三角形，故 $AG=GG'$，$GB=G'M$. 同样，将 $\triangle EHD$ 顺时针旋转 $60°$ 到 $\triangle EH'N$，



（第 16 题）

则 $\triangle EHH'$ 为正三角形. 于是，$EH=HH'$，$HD=H'N$. 连 MN，则多边形 $AMBCDNEF$ 关于轴 BE 对称，$MN=CF$. 另一方面，由“两点间线段最短”有 $AG+GB+GH+DH+HE=MG'+G'G+GH+HH'+H'N\geqslant MN$. 从而 $AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$.

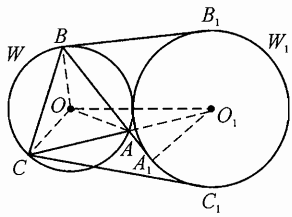
习 题 7

1. 证明：设 O_a、O_b、O_c 为圆 C_a、圆 C_b、圆 C_c 的圆心. 记 M、N 为点 O_a 在 AB、AC 上的投影，则 $\triangle ABC$ 的内心 I 为 MN 的中点.

设 X、Y 为 I 在 AB、AC 上的投影，有 $\dfrac{r_a}{r}=\dfrac{O_aM}{IX}=\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{\dfrac{AI}{\cos\dfrac{A}{2}}}{AI\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}}$. 同理，$\dfrac{r_b}{r}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{B}{2}}$，$\dfrac{r_C}{r}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{C}{2}}$. 令 $\alpha=\dfrac{A}{2}$，$\beta=\dfrac{B}{2}$，$\gamma=\dfrac{C}{2}$. 只需证当 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}\geqslant 4$，即 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 1$.

由 Cauchy - Schwartz（柯西-许瓦尔兹）不等式，有 $3(\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma)\geqslant(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^2$. 故只需证 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant\sqrt{3}$. 因为 $\tan x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数，故由 Jensen 不等式得：$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\tan\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$. 因此，$r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$.

2. 证明：如图，设 r、r_1 分别是圆 W、圆 W_1 的半径. 不失一般性，设圆 W 和圆 W_1 的切点位于 AB 间靠近 A 的一边. 记 O、O_1 分别是圆 W、圆 W_1 的圆心. 设 $\angle O_1OA=\alpha$，则 $\angle O_1OB=120^\circ-\alpha$，$\angle O_1OC=120^\circ+\alpha$. 由余弦定理得 $AA_1^2=AO_1^2-r_1^2=r^2+(r+r_1)^2-2r(r+r_1)\cos\alpha-r_1^2=2r(r+r_1)(1-\cos\alpha)=4\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot r(r+r_1)$. 注意到 $0<\alpha<120^\circ$，所以，$AA_1=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$. 同理，$BB_1=2\sin\left(60^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$，$CC_1=2\sin\left(60^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$. 因此，$AA_1+BB_1=2\sqrt{r(r+r_1)}\left[\sin\dfrac{\alpha}{2}+\right.$

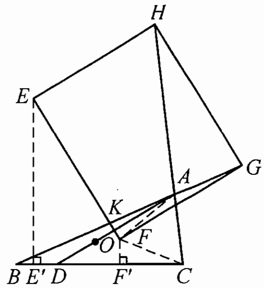


（第 2 题）

$\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\Big]=2\sqrt{r(r+r_1)}\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=CC_1$.

3. 证明：如图，设 EF 交 AB 于点 K，点 E、F 在 BC 上的射影分别为 E'，F'. 显然，$\triangle AGH\cong\triangle ACB$，

$EF=\dfrac{E'F'}{\sin\angle E'EF}=\dfrac{BC}{2\sin\angle ADC}=\dfrac{BC}{2\sin(B+90^\circ-C)}=\dfrac{BC}{2\cos(C-B)}$.

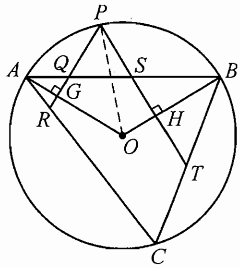


(第 3 题)

必要性. 由 $EF=GH=BC$，得 $\cos(C-B)=\frac{1}{2}$，故 $\angle ACB-\angle ABC=60^\circ$.

充分性. 由 $\angle ACB-\angle ABC=60^\circ$，得 $EF=BC=GH$. 由 $EF\perp AD$，则 $\angle FKA=90^\circ-\angle OAB=\angle ACB=\angle AGH$. 故 $EF\parallel GH$. 因此，四边形 $EFGH$ 为平行四边形. 因 $\angle ADC=\angle ABC+90^\circ-\angle ACB=30^\circ$，则 $\angle AFC=60^\circ$. 故 $\triangle AFC$ 为正三角形，有 $AF=AC=AG$. 又 $AK=\dfrac{AD}{2\sin\angle AKF}=\dfrac{AD}{2\sin C}=AF$，故 $\angle KFG=90^\circ$. 从而，四边形 $EFGH$ 为矩形.

4. 证明：(1) 如图，由 $PR\perp OA$，$PT\perp OB$，有 $\angle PQS=\angle AQR=90^\circ-\angle OAB=90^\circ-\angle OBA=\angle BST=\angle PSQ$. 故 $PQ=PS$.



(第 4 题)

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 r，$PR\cap OA=G$，$PT\cap OB=H$. 设 $\angle POA=\alpha-\beta$，$\angle POB=\alpha+\beta$，$\angle AOB=2\alpha$. 则 $\angle QPS=180^\circ-2\alpha$，$\angle PQS=\angle PSQ=\alpha=\angle C$. 故 $\triangle AQR\backsim\triangle ACB\backsim\triangle TSB$. 所以，$\dfrac{AQ}{TS}=\dfrac{QR}{SB}$，即 $QR\cdot ST=AQ\cdot SB$. 又 $OG=OP\cos\angle POG=r\cos(\alpha-\beta)$，$PG=r\sin(\alpha-\beta)$，则 $AG=r[1-\cos(\alpha-\beta)]$，$AQ=\dfrac{AG}{\sin\angle AQG}=\dfrac{r[1-\cos(\alpha-\beta)]}{\sin\alpha}$，$QG=AQ\cos\angle AQG=\dfrac{r[1-\cos(\alpha-\beta)]\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 故

$PQ=PG-QG=r\left\{\sin(\alpha-\beta)-\dfrac{\cos\alpha[1-\cos(\alpha-\beta)]}{\sin\alpha}\right\}=\dfrac{r(\cos\beta-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

同理，$SB=\dfrac{r[1-\cos(\alpha+\beta)]}{\sin\alpha}$.

注意到 $PQ^2=QR\cdot ST\Leftrightarrow PQ^2=AQ\cdot SB\Leftrightarrow(\cos\beta-\cos\alpha)^2=[1-$

$\cos(\alpha-\beta)][1-\cos(\alpha+\beta)] \Leftrightarrow (\cos\beta-\cos\alpha)^2=2\sin^2\dfrac{(\alpha-\beta)}{2}\cdot 2\sin^2\dfrac{(\alpha+\beta)}{2} \Leftrightarrow \cos\beta-\cos\alpha=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，而最后一式显然成立，故 $PQ^2=QR\cdot ST$.

5. 证明：记 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle ABC=2\alpha$，$\angle ACB=4\alpha$，利用正弦定理可知，$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cos 2\alpha$，从而，要证的式子等价于 $\sin 3\alpha=\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha$，最后一式是显然的.

6. 证明：因为 $\angle C=\angle C'$，$R=\dfrac{c}{2\sin C}$，$R'=\dfrac{c'}{2\sin C'}$，所以 $cr'=c'r$，有 $\dfrac{c}{r}=\dfrac{c'}{r'}$，即 $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}=\cot\dfrac{A'}{2}+\cot\dfrac{B'}{2}$.

设 $\dfrac{\angle A}{2}=\angle 1$，$\dfrac{\angle B}{2}=\angle 2$，$\dfrac{\angle A'}{2}=\angle 3$，$\dfrac{\angle B'}{2}=\angle 4$，则 $\dfrac{\cos\angle 1}{\sin\angle 1}+\dfrac{\cos\angle 2}{\sin\angle 2}=\dfrac{\cos\angle 3}{\sin\angle 3}+\dfrac{\cos\angle 4}{\sin\angle 4}$，$\dfrac{\sin(\angle 1+\angle 2)}{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2}=\dfrac{\sin(\angle 3+\angle 4)}{\sin\angle 3\cdot\sin\angle 4}$，因为 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$，所以 $\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2=\sin\angle 3\cdot\sin\angle 4$，即 $\cos(\angle 1+\angle 2)-\cos(\angle 1-\angle 2)=\cos(\angle 3+\angle 4)-\cos(\angle 3-\angle 4)$，得 $\cos(\angle 1-\angle 2)=\cos(\angle 3-\angle 4)$，有 $\angle 1-\angle 2=\angle 3-\angle 4$，或 $\angle 1-\angle 2=\angle 4-\angle 3$. 又 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$，于是 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A=\angle B'$.

故 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

7. 解：由已知条件及 Euler 公式得 $\left(\dfrac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2=OI^2=R^2-2Rr\cdots$①. 再由熟知的几何关系得 $r=\dfrac{c+a-b}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{c+a-b}{2}\tan\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b)\cdots$②.

由①和②及正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 得，$1-2(\sin C-\sin B)^2=2(\sin A+\sin C-\sin B)(\sqrt{2}-1)$. 因为 $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin C=\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\angle A\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin A+\cos A)$. 所以，$2\sin A\cos A-(2-\sqrt{2})\sin A-\sqrt{2}\cos A+\sqrt{2}-1=0$，$(\sqrt{2}\sin A-1)(\sqrt{2}\cos A-\sqrt{2}+1)=0$. 于是，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（这时 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=$

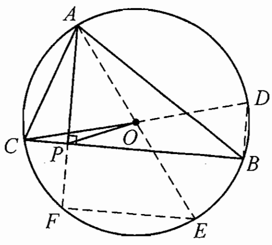
$\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

总之，或 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

8. 解：用 A、B、C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角. 熟知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$r=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$. 于是，$f=2R\left(\sin A+\sin B-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2R\left[2\sin\frac{B+A}{2}\cdot\cos\frac{B-A}{2}-1+2\left(\cos\frac{B+A}{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\right]=4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{B+A}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R+4R\cos\frac{\pi-C}{2}\sin\frac{C}{2}=4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{\pi-C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R+4R\sin^2\frac{C}{2}=4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=2R\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$.

令 $A\leqslant B\leqslant C$，所以 $0\leqslant B-A<B\leqslant C$. 又 $O\leqslant B-A<B+A$，因此，$\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}$. $\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{B+A}{2}=\cos\frac{\pi-C}{2}=\sin\frac{C}{2}$. 所以 $2\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}$. 则 $f>0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}>\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow C<\frac{\pi}{2}$；$f=0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$；$f<0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}<\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow C>\frac{\pi}{2}$.

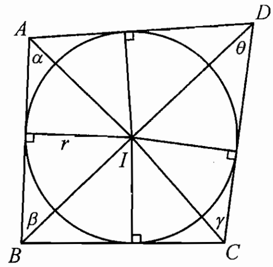
9. 证明：如图，延长 CO、AO、AP 分别交 $\odot O$ 于 D、E、F，连结 EF、BD. 则 $\angle E=\angle CAP+\angle ABC=90^\circ-\angle ACB+\angle ABP$. 故 $\angle OAP=90^\circ-\angle E=\angle ACB-\angle ABP$. 设 $\odot O$ 的半径为 R. 因为 $CP=2R\sin B\cdot\cos C$，$AP=2R\sin B\cdot\sin C$，所以 $OP^2=AP^2+OA^2-2OA\cdot AP\cdot\cos\angle OAP=4R^2\sin^2B\cdot\sin^2C+R^2-4R^2$. $\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(C-B)=4R^2\left[\sin^2B\cdot\sin^2C+\frac{1}{4}-\sin^2B\cdot\sin^2C-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C\right]=4R^2\left(\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C\right)$. 所以 $OP^2-CP^2=4R^2\left[\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos C\cdot\sin(B+C)\right]=4R^2\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2A+\right.$



（第 9 题）

$\frac{1}{2}\sin A\cdot\sin(C-B)\Big]$. 因为$\angle C-\angle B\geqslant 30°$，且$\angle C$、$\angle B$都为锐角，所以上式$\geqslant 4R^2\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{4}\sin A\right]=R^2(2\sin A+1)(1-\sin A)>0$. 所以$OP^2>CP^2$，$OP>CP$. 有$\angle COP<\angle OCP$. 故$\angle COP+\angle CAB<\angle OCP+\angle D=90°$.

10. 证明：如图，设角，由已知$\left(\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{r}{\sin\beta}+\frac{r}{\sin\gamma}\right)^2=\left(r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+r\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+r\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}+r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$，所以$\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2-\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)^2-\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2=2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$，化简得$2+\frac{1-\cos\theta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\theta}+\frac{1-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\sin(\alpha+\theta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\theta}$，$[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)][1+\cos(\beta+\gamma)]+[\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta)]\cdot[1+\cos(\alpha+\theta)]=2\sin(\alpha+\theta)\sin(\beta+\gamma)\cdots$①. 因为$\sin(\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\theta)$，$\cos(\beta+\gamma)=-\cos(\theta+\alpha)$，所以①式可化简为$\cos(\alpha-\theta)\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos(\beta-\gamma)\cdot\cos^2\frac{\alpha+\theta}{2}=1$. 所以$\cos(\alpha-\theta)=\cos(\beta-\gamma)=1$. 所以$\alpha=\theta$，$\beta=\gamma$. $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$.

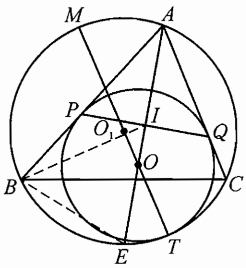


（第10题）

故$ABCD$为等腰梯形.

11. 证明：$\odot O$可与$\odot O_1$外切（旁心）或内切（内心）. 两者证明类似. 只证前者.

因为AP、AQ切$\odot O$于P、Q. 所以$AO\perp PQ$，AO平分PQ，所以A、I、O共线. 从而AI平分$\angle BAC$. 延长AO交$\odot O_1$于E，延长TO_1交$\odot O_1$于M. 由相交弦定理，$AO\cdot OE=OT\cdot OM\cdots$①. 设$\odot O$半径为$r$，$\odot O_1$半径为$R$. 则$AO=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$，$OI=r\sin\frac{A}{2}$，$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}-r\sin\frac{A}{2}$，



（第11题）

$AE=2R\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)$. 从而由①知$\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\left[2R\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)-\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\right]=$

$r(2R-r)$. 所以，$2R\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=(2R-r)\sin\frac{A}{2}+\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$，$2R\left(\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\right)=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)$，$4R\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$，$r=4R\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$，所以，$\frac{AI}{AE}=\frac{\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)}{2R\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=$

$$\frac{\frac{4R}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\cos^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{2R\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

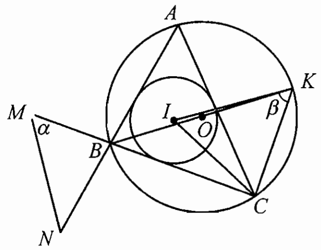
$$\frac{AI}{IE}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.\quad ②$$

连结 BI，设 $\angle ABI=\theta$，则 $\frac{AI}{IE}=\frac{2R\sin C\cdot\sin\theta}{2R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\left(B+\frac{A}{2}-\theta\right)}$ 故 $\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\theta}{\sin\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}-\theta\right)}$ 由②$=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$，$\sin\frac{A+B}{2}\sin\theta=\sin\frac{B}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}-\theta\right)$，$\cos\left(\frac{A+B}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}+\theta\right)=\cos\left(\frac{A+B}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{3}{2}B+\frac{A}{2}-\theta\right)$（注意 $0<\theta<B$），$\frac{A+B}{2}+\theta=\frac{3}{2}B+\frac{A}{2}-\theta$，所以 $\theta=\frac{B}{2}$. 从而 BI 平分 $\angle ABC$.

故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

12. 证明：连结 BD，则 $\triangle ABD\backsim\triangle AFC$，所以 $AF\cdot AD=AB\cdot AC$. 设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle EAF=\beta$，则 $S_{四边形AMDN}=\frac{1}{2}AM\cdot AD\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot AN\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AD[AF\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha+AF\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin(2\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=S_{\triangle ABC}$.

13. 证明：设 $\angle BMN=\alpha$，$\angle IKC=\beta$，r，R 分别为 $\triangle ABC$ 的内切圆，外接圆半径，则 $\angle KCI=90^\circ-\frac{C}{2}$.



（第 13 题）

由正弦定理，$\frac{KC}{IC}=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}+\beta\right)}{\sin\beta}=\frac{\cos\left(\frac{C}{2}-\beta\right)}{\sin\beta}=\cos\frac{C}{2}\cdot\cot\beta+\sin\frac{C}{2}$. 又 $KC=2R\cdot\cos\angle BKC=2R\cdot\cos A$，$IC=\frac{r}{\sin\angle ICB}=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\left(r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$，故 $\cos\frac{C}{2}\cdot\cot\beta+\sin\frac{C}{2}=\frac{KC}{IC}=\frac{\cos A}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}$. 即

$$\cot\beta=\frac{\cos A}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}-\tan\frac{C}{2}.\ ①$$

又 $BN=S-c=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}\cdot 2R(\sin A+\sin B-\sin C)=R\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)=2R\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. 同理，$BM=4R\cdot\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$，于是 $\frac{BM}{BN}=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}$，另一方面，$\frac{BM}{BN}=\frac{\sin(\alpha+B)}{\sin\alpha}$，结合以上两式，得 $\cos B+\cot\alpha\cdot\sin B=\tan\frac{C}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}$，$\cot\alpha=\frac{\tan\frac{C}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}}{\sin B}-\cot B$. ②

下证 $\cot\alpha=\cot\beta$.

由 ①，②$\Leftrightarrow\frac{\cos A}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}-\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\tan\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}}{\sin B}-\frac{\cos B}{\sin B}\Leftrightarrow$

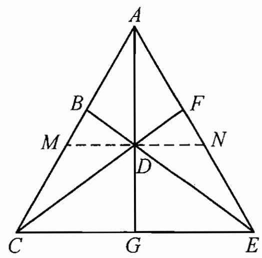
$\frac{\cos A-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\tan\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}-\cos B}{\sin B}\Leftrightarrow\left(\cos A-2\sin\frac{A}{2}\right.$

$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\cos B\right)\Leftrightarrow\cos A$ $\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}-\cos B\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow\cos A\cos\frac{B}{2}=$ $\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)\Leftrightarrow\cos A\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot$ $\cos\left[B+\frac{\pi-A-B}{2}\right]$ ＊＊

$$
\begin{aligned}
＊＊\text{右边}&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)+\cos\frac{B}{2}\right]+\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\frac{B}{2}-\cos\left(A-\frac{B}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)+\cos\left(A-\frac{B}{2}\right)\right]\\
&=\cos A\cos\frac{B}{2}=\text{左边}.
\end{aligned}
$$

从而MN与BC的夹角等于IK与CK夹角，又$BC\perp CK$，所以$MN\perp IK$.

习　题　8



（第1题）

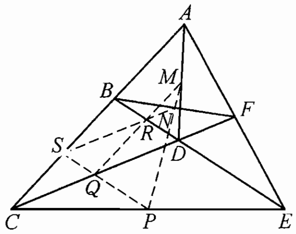
1. 证明：首先证明式①，如图，过点D作$MN\parallel CE$交BC于点M，交FE于点N，则$\frac{CE}{DN}=\frac{CF}{DF}=\frac{CD+DF}{DF}=p_2+1$，$\frac{GE}{DN}=\frac{AG}{AD}=\frac{AD+DG}{AD}=1+\frac{1}{p_1}$. 以上两式相除得，$\frac{CE}{GE}=\frac{p_1(1+p_2)}{1+p_1}$，则$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{CE-GE}{GE}=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}$. 又$\frac{CE}{MD}=\frac{BE}{BD}=\frac{BD+DE}{BD}=1+p_3$，$\frac{CG}{MD}=\frac{AG}{AD}=\frac{GE}{DN}=\frac{1+p_1}{p_1}$，则有$\frac{CE}{CG}=\frac{p_1(1+p_3)}{1+p_1}$，从而，$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}$. 对$\triangle CED$及点$A$应用塞瓦定理有$\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}=1$. 从而，$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{CF}{DF}\cdot\frac{BD}{BE}=\frac{1+p_2}{1+p_3}$. 故$\lambda_1=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}=\frac{1+p_2}{1+p_3}$.

同理可证式②和式③.

2. 证明：如图，分别取CD、BD、BC的中点Q、R、S.

于是，在$\triangle ACD$中，M、R、Q三点共线；在$\triangle BCF$中，S、R、N三点共线；在$\triangle BCE$中，S、Q、P三点共线. 由平行线性质有$\frac{MQ}{MR}=\frac{AC}{AB}$，$\frac{NR}{NS}=\frac{FD}{FC}$，

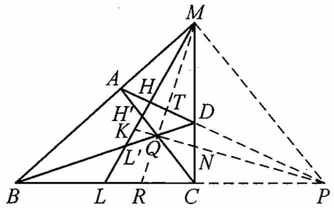
$\frac{PS}{PQ}=\frac{EB}{ED}$. 由于直线 AFE 与 $\triangle BCD$ 的边所在直线相截，所以，由梅涅劳斯定理知 $\frac{AC}{AB}\cdot\frac{FD}{FC}\cdot\frac{EB}{ED}=1$. 从而，$\frac{MQ}{MR}\cdot\frac{NR}{NS}\cdot\frac{PS}{PQ}=1$.



（第 2 题）

再对 $\triangle QRS$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 N、M、P 三点共线.

3. 证明：延长 BC、AD 交于 P，设 BD、AC 交于 Q，连结 MP，PQ 分别与 MC，ML 交于 N、K，连结 MQ 交 BC 于 R. 交 AD 于 T.



（第 3 题）

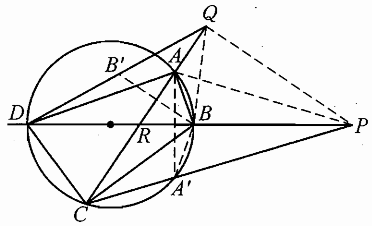
由完全四边形的性质知，M、Q、T、R 成调和点列，考虑过 P 点的四条直线 PM、PA、PK、PB 构成的直线束. 由上述引理知 M、K、H、L 成调和点列. 所以

$$\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML}=\frac{2}{MK}\text{（调和点列的性质）}\cdots①.$$

同理，B、C、R、P 为调和点列，考虑过 Q 的四条直线 QB、QC、QR、QP 构成的直线束. 现 ML 去截直线束，由上述引理知，L'、H'、M、K 也成调和点列，即 M、K、L'、H' 也成调和点列. 所以 $\frac{1}{ML'}+\frac{1}{MH'}=\frac{2}{MK}\cdots②$.

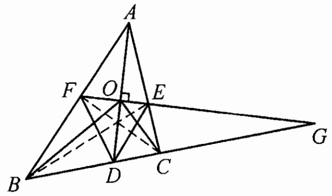
由①、②知：$\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}$.

4. 证明：如图，设 AC 与 BD 交于点 R. 因为四边形 $ABA'C$ 为圆内接四边形，所以，$\angle BAR=\angle BAC=\angle BA'P=\angle BAP$，即 AB 为 $\angle CAP$ 的角平分线. 又 BD 为直径，则 $\angle DAB=90°$. 故 DA 为 $\angle RAP$ 的外角平分线. 因此，P、R、B、D 为调和点列. 进而，QP、QR、QB、QD 为调和线束. 因为 $\angle BQR=\angle B'QR=\angle DQR$，所以，$\angle RQP=90°$，故 $PQ\perp AC$.

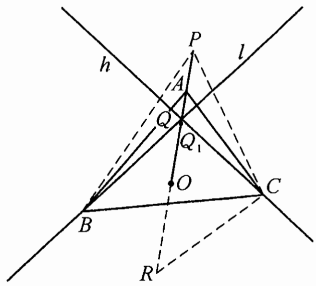


（第 4 题）

5. 证明：设直线 EF 与 BC 交于点 G（可以是无穷远点，以下同），由角平分线定理有 $\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}=1$. 由 Ceva 定理知 BE、AD、CF 三线共点，由性质 2 知 B、C、D、G 成调和点列，即 OB、OC、OD、OG 成调和线束，结合 $OD\perp OG$ 知 OD 平分 $\angle BOC$.



（第 5 题）

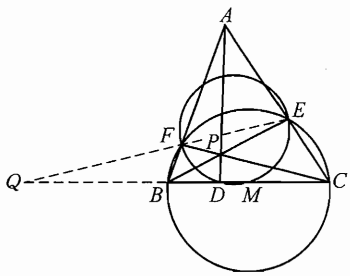


（第 6 题）

6. 证明：延长 AO 至 R，使得 $OR=OA$，连结 RC，PC，设 h 与 AO 交于点 Q_1，注意到 $AC\perp CR$ 以及 h、CP 关于 AC 边对称，于是 CR、CA、h、CP 成调和线束，于是 R、A、Q_1、P 成调和点列，因此 h 过 AO 上满足 P、Q_0、A、R 成调和点列的点 Q_0，同理，l 也过该点，即 $Q=Q_0$ 为 AO 上满足 P、Q_0、A、R 成调和点列的点，故 Q 的轨迹为线段 AO 内部.

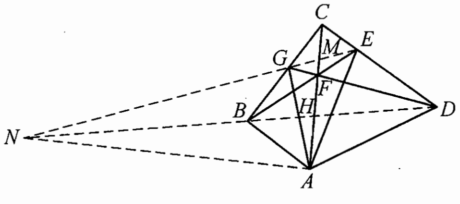
（注：在学了下一章反演的知识后，读者就会发现，Q 与 P 关于 $\triangle ABC$ 外接圆互为反演点.）

7. 证明：设直线 BC 与 EF 交于点 Q，由性质 2 知，Q、D、B、C 成调和点列，又 M 为 BC 中点，于是，不难证明 $QD\cdot QM=QB\cdot QC$，因此，$QE\cdot QF=QB\cdot QC=QD\cdot QM$，即 E、M、D、F 四点共圆.

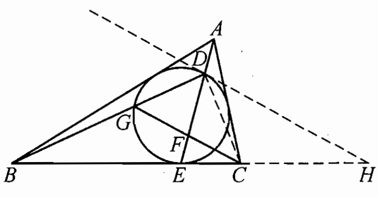


（第 7 题）

8. 证明：设 AC 交 BD、GE 于点 H、M，延长 GE 与 BD 交于点 N，则 D、B、H、N 成调和点列. 由 AC 平分 $\angle BAD$ 知 $AH\perp AN$，又由定理 1，以 C 为中心，知 E、G、M、N 成调和点列，且 $AM\perp AN$，所以，AC 平分 $\angle GAE$. 故 $\angle GAC=\angle EAC$.



（第 8 题）

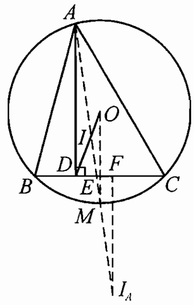


（第 9 题）

9. 证明：如图，过 D 作内切圆切线 DH 交直线 BC 于 H，由 $CF=CE$，$HD=HE$ 知 $\triangle CEF\backsim\triangle HED$，于是 $DH\parallel GC$，由例 2 证明过程知，B、C、

E、H 成调和点列，于是 DB、DC、DE、DH 成调和线束，所以 F 平分 CG.

10. 证明：设 I_A 为旁心，AI_A 交 BC 于点 E，交$\odot O$ 于点 M，则 M 为$\overset{\frown}{BC}$的中点. 连结 OM，则 $OM \perp BC$. 作 $I_AF \perp BC$ 于 F，则由平行线性质，有

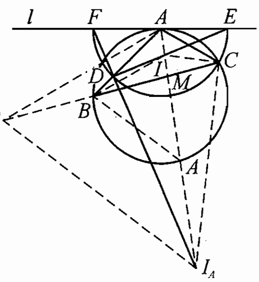


(第 10 题)

$$\frac{AD}{AI}=\frac{OM}{MI}(*),\ \frac{AD}{I_AF}=\frac{AE}{I_AE}.$$

由性质 7 的推论 2，有 $\dfrac{AI}{IE}=\dfrac{I_AM}{ME}$，即有$\dfrac{AI}{I_AM}=\dfrac{IE}{ME}=\dfrac{AI+IE}{I_AM+ME}=\dfrac{AE}{I_AE}$. 从而$\dfrac{AD}{I_AF}=\dfrac{AI}{I_AM}$，亦即$\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{I_AF}{I_AM}$. 注意到$(*)$式及 $MI=I_AM$. 故 $OM=I_AF$. 即$\triangle ABC$ 的外接圆半径 OM 等于边 BC 上的旁切圆半径 I_AF.

11. 证明：作$\angle BAC$ 的平分线，交 DE 于 I，易知$\triangle ADI\cong\triangle ACI$. 所以 $\angle ACI=\dfrac{1}{2}(180°-\angle BAC-\angle ABC)=\dfrac{1}{2}\angle ACB$. 从而 I 为$\triangle ABC$ 的内心.



(第 11 题)

设射线 AI 交 BC 于 M，交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1，交直线 FD 于 I_A. 连 CI_A，则知 $\angle DI_AA=\angle AI_AC$.

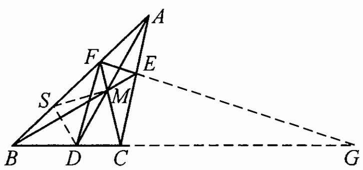
延长 CB 到 P，使 $PB=BA$，则 $\angle APC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle B$.

注意到 $\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°=\angle FDA+\angle ADE=\left(\dfrac{1}{2}\angle A+\angle DI_AA\right)+\angle ICA=\left(\dfrac{1}{2}\angle A+\angle AI_AC\right)+\dfrac{1}{2}\angle C$,

从而 $\angle AI_AC=\dfrac{1}{2}\angle B=\angle APC$，于是，$A$、$P$、$I_A$、$C$ 四点共圆，有 $\angle AI_AP=\angle ACP=\angle AA_1B$，即有 $BA_1 \parallel PI_A$，亦即有$\dfrac{I_AA_1}{A_1M}=\dfrac{PB}{BM}=\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{AI}{IM}$.

由性质 7 的推论 2，知 I_A 是边 BC 外的旁心.

12. 证明：在 AB 上取 $AS=AC$，连结 SM，DS，则由 AD 平分 $\angle BAC$ 知，$\triangle ASD$ 与$\triangle ACD$ 关于 AD 对称，即有 $\angle MDS=\angle MDC=\angle ADC=60°$，亦即 $\angle BDS=60°$. 又由 $DM=DB$，知 $\angle DSB=\angle DSM=$



(第 12 题)

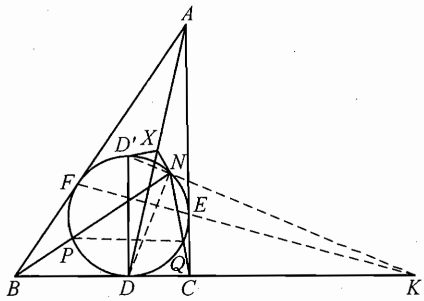
$\angle DCM$. 于是 $\angle FCB+\angle ACB=\angle DCM+\angle ACB=\angle DSB+\angle ASD=180°$，从而 $\sin\angle FCB=\sin\angle ACB$.

由 $\frac{FB}{FC}=\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle FBC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，知 FD 平分$\angle BFC$.

设直线 FE 与直线 BC 相交于点 G（因角平分线 AD 交 BC 成 $60°$ 角，必相交)，则由完全四边形对角线调和分割的性质，知 D、G 调和分割 BC，即 B、C、D、G 为调和点列，亦即 FB、FC、FD、FG 为调和线束. 而 FD 平分$\angle BFC$，则由性质 5 知 $DF\perp EF$.

习 题 9

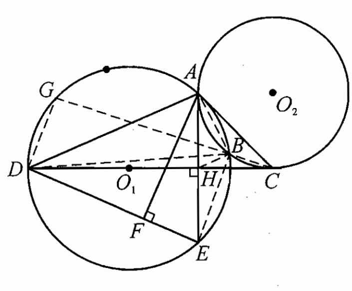
1. 证明：显然，$AB\neq AC$. 下设 $AB>AC$. 如图，设圆 Γ 与 AC、AB 分别切于点 E、F，且设 FE 与 BC 交于点 K. 则 K 是点 A 关于圆 Γ 的极线 FE 上的点.



（第 1 题）

由配极原则知，A 也是点 K 关于圆 Γ 的极线上的点. 因为点 D 在点 K 关于圆 Γ 的极线上，所以，K 关于圆 Γ 的极线为 AD. 同理，设 $D'N$ 与 BC 交于点 K'，则 K' 关于圆 Γ 的极线为 DX. 由于 AD 与 DX 为同一条直线，因此，$K'=K$. 因为 B，C；D，K 是调和点列，且$\angle D'ND=90°$，所以，ND 是$\angle BNC$ 的角平分线. 设 NB、NC 分别与圆 Γ 交于点 P、Q. 则 D 为弧$\overset{\frown}{PQ}$的中点. 于是，$PQ/\!/BC$. 由$\angle XNP=\angle PQN=\angle BCN$，知 XN 与$\triangle BCN$ 的外接圆切于点 N. 从而，$\triangle BCN$ 的外接圆与圆 Γ 切于点 N.

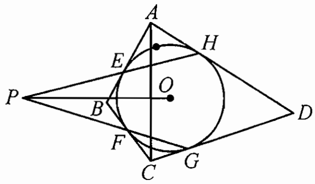
2. 证明：如图，延长 CB 交$\odot O_1$于 G，对于$\odot O_1$，由 CA 是切线，$CO_1\perp AE$ 知，直线 AE 是 C 的极线，故 EC 是过 E 点的$\odot O_1$的切线. 由配极定理 3 知四边形 $ABEG$ 为调和四边形. 由配极定理 2，DG、DB、DA、DE 成调和线束.



（第 2 题）

设 AE 与 CD 交点为 H，连 AB、BE、GD，又 $\angle BCD=\angle BAC=\angle BEA$，所以 H、E、C、B 四点共圆. 于是 $\angle EBC=\angle EHC=90°$，故 $\angle GDE=\angle EBC=90°$，即 $DG/\!/AF$，结合 DG、DB、DA、DE 成调和线束知 DB 平分 AF.

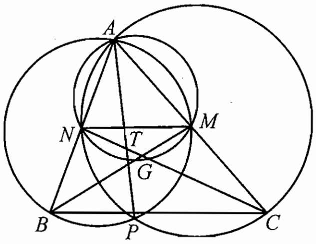
3. 证明：如图，以$\odot O$为基圆，易知HE是A的极线，FG是C的极线. 而HE与FG交于P，因此P点既在A点极线上，也在C点极线上由配极性质1知，故A、C都在P点极线上，从而AC即为P点的极线. 因此$OP\perp AC$. 原命题得证.



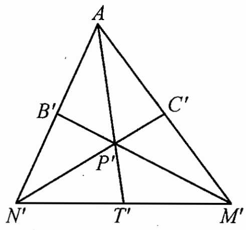
（第3题）

4. 解：以A为反演中心，单位长度为反演幂，并记K点的反象为K'. 则由A、M、P、B四点共圆及定理5知M'、P'、B'三点共线. 同理N'、P'、C'也共线. 又$\dfrac{AN'}{AB'}=\dfrac{\frac{1}{AN}}{\frac{1}{AB}}=\dfrac{AB}{AN}=2$. 所以$B'$为$AN'$的中点，同理$C'$为$AM'$中点，于是$P'$为$\triangle AN'B'$的重心.

反演后的图形成为图②，于是$\dfrac{AT}{AP}=\dfrac{\frac{1}{AT'}}{\frac{1}{AP'}}=\dfrac{AP'}{AT'}=\dfrac{2}{3}$.

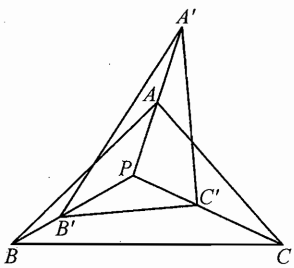


（第4题图①）



（第4题图②）

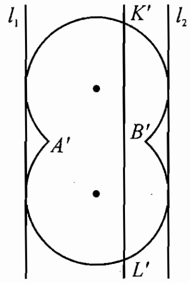
5. 证明：如图，以P为反演中心，单位长度为反演幂，设A、B、C的反点分别为A'、B'、C'，因点P在$\triangle ABC$内，所以，点P也在$\triangle A'B'C'$内，由定理1，$\angle B'A'P=\angle PBA$，$\angle PA'C'=\angle ACP$，所以$\angle B'A'C'=\angle PBA+\angle ACP=\angle BPC-\angle A=\alpha$；同理$\angle C'B'A'=\beta$，$\angle A'C'B'=\gamma$. 又由定理2，有$B'C'=\dfrac{BC}{PB\cdot PC}$，$C'A'=\dfrac{CA}{PC\cdot PA}$，$B'A'=\dfrac{AB}{PA\cdot PB}$，对$\triangle A'B'C'$用正弦定理并将上面三式代入即得



（第5题）

$$\frac{PA\cdot BC}{\sin\alpha}=\frac{PB\cdot CA}{\sin\beta}=\frac{PC\cdot AB}{\sin\gamma}$$，即等价于所证.

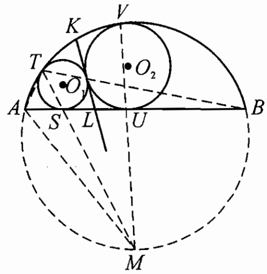
6. 证明：法一：设 P 是两圆$\odot O_1$、$\odot O_2$的切点. 作以 P 为反演中心的反演变换，于是，在点 P 处相切的两圆反形为一对平行直线 $l_1 /\!/ l_2$，而和它们相切的弦和弧，变为$\overset{\frown}{A'L'B'}$和$\overset{\frown}{A'K'B'}$，且$\overset{\frown}{A'L'B'}=\overset{\frown}{A'K'B'}$，公切线 KL 变为$K'L'$，且与 l_1、l_2 平行.



(第 6 题图①)

所以，直线 $A'B'$垂直平分 $K'L'$. 换言之，过点 A、P、B 的弧平分弓形角 A、B 且垂直直线 KL. 然而，恰存在一个过点 A、B 的圆，平分$\angle A$、$\angle B$(它的中心 O 是从点 A、B 分别向$\angle A$、$\angle B$ 的平分线引的垂线的交点)，直线 KL 垂直这个圆，因此，通过它的中心.

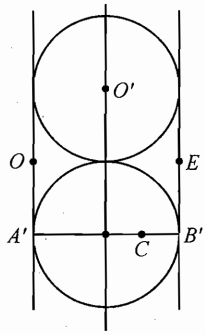
于是，条件中所有直线都通过点 O.



(第 6 题图②)

法二：如图，连结两个切点 T、S 及 V、U. 设它们相交于 M. 则由“圆的初步”习题 19 的引理知 M 为优弧 AB 的中点(M 为定点). 且由 $\angle BAM=\angle BTM=\angle ATM$ 有$\triangle ASM\backsim\triangle TAM$，从而$MA^2=MS\cdot MT$. 同理 $MB^2=MU\cdot MV$. 故 $MS\cdot MT=MU\cdot MV$，M 在$\odot O_1$与$\odot O_2$的根轴上. 而 KL 是两圆的公切线，也是两圆的根轴. 故 M 在 KL 上，即所有切线都过定点 M.

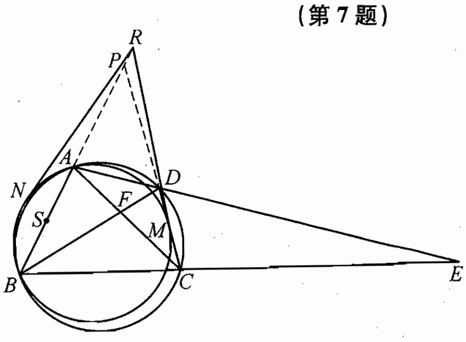
7. 证明：以点 C 为反演中心作反演变换. 以 AC、BC、AB 为直径的圆分别反演成直线 $A'D$、$B'E$、以 $A'B'$为直径的圆，且直线 $A'D$、$B'E$ 与 $A'B'$垂直，$\odot O$ 反演成$\odot O'$，且与直线 $A'D$、$B'E$ 及以 $A'B'$为直径的圆都相切. 由于$\odot O$、$\odot O'$关于点 C 位似，所以，$\odot O$ 的直径与圆心到 AB 的距离的比等于$\odot O'$的直径与圆心到 $A'B'$的距离的比. 易知后者的比值为 1.



(第 7 题)

8. 证明：延长 CD、BA 交于点 P，则直线 EF 即为点 P 关于$\odot O$ 的极线.(定理 1)欲证 N 在直线 EF 上，只需证 N 对$\odot O$ 的极线过 P 点.

设$\triangle AMB$ 外接圆为$\odot O'$，因为 A、M、B、N 均在$\odot O'$上，且 $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NB}$. $AM\cdot NB=AN\cdot MB$，故 $AMBN$ 为调和四边形. 所以点 M、N



(第 8 题)

处的两条切线交于直线 AB 上，设为 R，取 AB 中点 S.

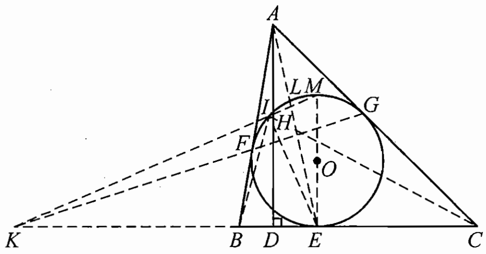
由第四章习题第 15 题结论知，点 N 对⊙O 的幂等于点 N 对△OSM 外接圆的幂.

过 P 作 $PW\perp ON$ 于 W，则 O、M、P、W、S 共圆.

则 N 为⊙O 的幂等于 N 对△OWP 外接圆的幂.

从而 P 点在 N 关于⊙O 的极线上，故结论成立，得证.

9. 证明：如图，设直线 GF 与直线 BC 交于点 K，延长 KI 交圆 O 于 M，并设 AE 与 IM 交于点 L，连结 ME. 由上章例 2 的证明过程知 C、B、E、K 成调和点列，又注意到 A 的极线 FG 过 K，E 的极线 BC 过 K，所以 K 的极线过 A、E，即 K 的极线为直线 AE，于是，K、L 共轭，故 K、L、I、M 成调和点列，于是从 E 点出发的线束 EK、EL、EI、EM 或 ED、EA、EH、EM 成调和线束，结合 $DH=HA$，于是 D、A、H、∞成调和点列，仍由 E 点出发知，ED、EA、EH、$E\infty$（即过 E 平行于直线 DA 的直线）成调和线束，那么 $E\infty$与 EM 重合，即 $EM/\!/DA$，或 $EM\perp BC$，注意到 BC 是 E 点处切线即 $OE\perp BC$，故 M、O、E 三点共线，于是 ME 是圆 O 的直径，$KI\perp IE$，结合 K、E、B、C 成调和点列，于是 IE 平分$\angle BIC$.

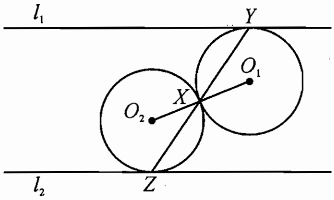


（第 9 题）

10. 证明：设这四个圆为圆 A、圆 B、圆 C、圆 D，

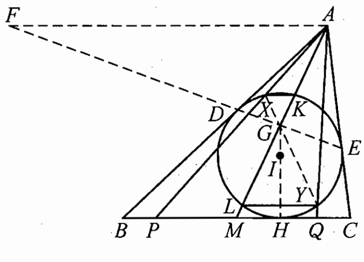
取 A、B 的公切点 E，以 E 为反演中心，单位长度为反演半径作反演变换得到以下命题：

已知直线 l_1，l_2 平行，有圆 O_1和圆 O_2相切于点 X，且 O_1与 l_1 切于 Y，O_2与 l_2 切于 Z，则 X、Y、Z 三点共线，该结论由三角形的相似得证.（可参看第 5 章圆幂与极轴习题 8 引理的证明）



（第 10 题）

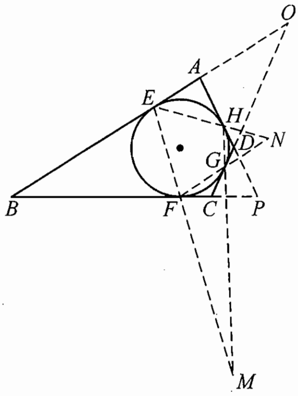
11. 证明：设内切圆圆心为 I，⊙I 在 BC 上切点为 H. 过 A 作平行于 BC 的直线 l，设内切圆在边 AB、AC 上的切点分别为 D、E，设直线 DE 与 l 交于点 F，又设 DE 交 AM 于 G，由于 M 平分线段 AB，故 AC、AB、AM、l 成调和线束，或 AE、AD、AG、AF 成调和线



（第 11 题）

束，于是 E、D、G、F 成调和点列，结合配极性质 3 知 F 的极线过 G，又 A 的极线 DE 过 F，于是 F 的极线也过 A，那么 F 的极线是直线 AG，又 G 的极线过 A，所以 G 的极线为 AF，又 $AF\parallel BC$，所以 G 的极线 $\parallel H$ 的切线 BC，于是 GH 的极点为无穷远点(无穷远点的极线过圆心)，因此 GH 过内心 I. 也就是说 $GI\perp BC$，以及 $BC\parallel LY\parallel XK$，$X$、$K$；$L$、$Y$ 分别关于直线 IG 对称，故 X、G、Y 共线，$MP=XK\cdot\dfrac{AK}{AM}=LY\cdot\dfrac{KG}{GM}\cdot\dfrac{AK}{AM}=LY\cdot\dfrac{AL}{AM}$(这步用到 A、G、K、L 成调和点列) $=MQ$. 于是 $BP=CQ$.

12. 证明：如图，设 AB 和 CD 交于点 O，AD 和 BC 交于点 P. 则对于 $\odot I$，O 的极线为 EG，P 的极线为 FH，于是 EG 和 FH 交于点 X，X 为 OP 的极点.



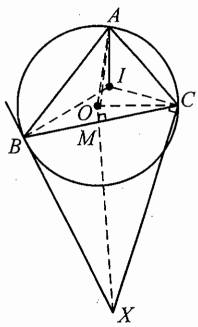
(第 12 题)

令 EH 交 FG 于点 N，EF 交 GH 于点 M，则 M 为 D 的极线与 B 的极线的交点，因此 M 的极线过 B、D，即 M 的极线为直线 BD. 同理，N 的极线为直线 AC，设 AC 交 BD 于 Y，又由配极定理 1 知，M 的极线过 N，N 的极线过 M. 我们发现 Y 的极线过 M、N. 故 Y 的极线为直线 MN. 对六边形 $EEHGGF$(退化六边形)使用帕斯卡定理 O、M、N 共线，同理 M、N、P 共线. 于是 X 的极线 $=Y$ 的极线，所以 $X=Y$. 即 AC、BD、EG、FH 四线共点.

注：此题虽然可以由三角方法解决(见本章例 13 引理)，但这里我们用配极方法给出另一种解答，供读者欣赏.

习 题 10

1. 证明：设 O 与 I 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心与内心，则 O、M、X 三点共线，且 $\triangle OXC\backsim\triangle OCM$. 因此，$\dfrac{OC}{OX}=\dfrac{OM}{OC}$. 由于 $OC=R=OA$，可得 $\dfrac{OA}{OM}=\dfrac{OX}{OA}$. 于是，$\triangle OAM\backsim\triangle OXA$. 从而，$\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{OM}{R}$.



(第 1 题)

下面只需再证明 $OM\leqslant r$. 比较 $\angle OBM$ 与 $\angle IBM$，由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，O 与 I 位于 $\triangle ABC$ 内部，于是，有 $\angle OBM=\dfrac{\pi}{2}-\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)-\angle A=$

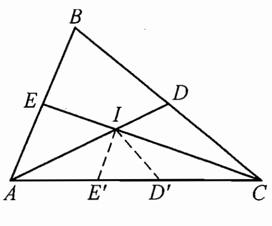
$\frac{1}{2}(\angle B+\angle C-\angle A)\leqslant\frac{\angle B}{2}=\angle IBM$. 类似可得$\angle OCM\leqslant\angle ICM$. 于是，点$O$位于$\triangle IBC$内部或边界上. 因此，$OM\leqslant r$.

2. 证明：要证$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$，只要证$\frac{1}{4R^2\sin A\cdot\sin B}+\frac{1}{4R^2\sin B\cdot\sin C}+\frac{1}{4R^2\sin C\cdot\sin A}\geqslant\frac{1}{R^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4\sin A\cdot\sin B}+\frac{1}{4\sin B\cdot\sin C}+\frac{1}{4\sin C\cdot\sin A}\geqslant 1\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\geqslant 4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}\geqslant 4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}\cdot\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\geqslant 2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\geqslant 2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}\cdots$①.

下面证明①成立. $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right]^3\leqslant\sin^3\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}$(由琴生不等式)$=\frac{1}{8}$. 则式①成立. 因此，所证不等式成立.

3. 证明：设$\triangle ABC$的面积为S，则$S=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}(pa+qb+rc)$. 由均值不等式有$\sqrt[3]{pqr}=\frac{\sqrt[3]{pa\cdot qb\cdot rc}}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{pa+qb+rc}{3\sqrt[3]{abc}}=\frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}}\cdots$①. 故只需证$R\leqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)\sqrt[3]{abc}}{12S}$. 又因为$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdots$②. 所以，只需证$R\leqslant\frac{abc}{4S}\cdots$③. 而$4SR=2Rab\sin C=abc$，所以，式③成立. 因此，原不等式成立.

式①的等号成立的条件是$pa=qb=rc$，式②的等号成立的条件是$a=b=c$，所以，原不等式等号成立的条件是$a=b=c$且$p=q=r$，即$\triangle ABC$是正三角形且P是$\triangle ABC$的中心.



(第4题)

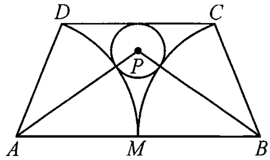
4. 证明：如图，作$\angle E'IA=\angle EIA$交AC于点E'，作$\angle D'IC=\angle DIC$交AC于点D'. 因为DA为$\angle BAC$的平分线，故$\angle IAE=\angle IAE'$. 又$\angle EIA=$

$\angle E'IA$，所以，$\triangle AIE \cong \triangle AIE'$. 于是，$AE = AE'$. 同理，$CD = CD'$. 故 $\angle AIE' + \angle CID' = 2\angle AIE = \angle BAC + \angle ACB$，$\angle AIC = \angle B + \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB)$. 因此，$\angle AIC > \angle AIE' + \angle CID'$（这里用到 $\angle B > 60°$）. 从而，$AC = AE' + E'D' + D'C > AE' + D'C = AE + DC$.

5. 证明：$x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B=(x^2-2xy\cos C-2zx\cos B)+y^2+z^2-2yz\cos A=(x-y\cos C-z\cos B)^2+y^2\sin^2 C+z^2\sin^2 B-2yz\cdot\cos A-2yz\cos B\cos C\cdots$①.

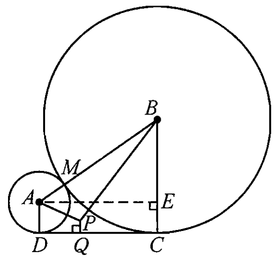
由于 $\cos A=\cos(\pi-B-C)=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$. 所以①式 $=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0$.

6. 证明：设 M 是线段 AB 内的点，且满足 $AM=AD=r$，$BM=BC=R$. 因此条件也就等价于：$\odot P$ 半径为 h，并且与边 CD 和圆 $\odot A$，$\odot B$ 都相切，其中 $\odot A$，$\odot B$ 分别是以 A，B 为圆心，r，R 为半径的圆，且 $\odot A$，$\odot B$ 相切于 M（如图①）.



（第 6 题图①）

我们需要证明 $\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$. 当 h 取最大值时，$\frac{1}{\sqrt{h}}$ 取最小值，并且当 DC 是 $\odot A$，$\odot B$ 的公切线时，它取最小值. 此时，我们令 h_0 是 $\odot P$ 的半径. 那么我们就需证明 $\frac{1}{\sqrt{h_0}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$.

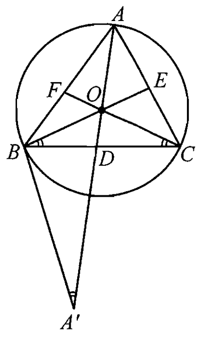


（第 6 题图②）

新的简化图②刻画了这时的情形. 设 E 是 A 在 BC 上的投影，Q 是 P 在 CD 上的投影. 我们有 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.

另一方面，$AE=CD=DQ+QC=\sqrt{(r+h_0)^2-(r-h_0)^2}+\sqrt{(R+h_0)^2-(R-h_0)^2}=2\sqrt{rh_0}+2\sqrt{Rh_0}$. 等式 $\sqrt{Rr}=\sqrt{rh_0}+\sqrt{Rh_0}$ 等价于所要证明的等式.

7. 证明：如图，设 AO 与 BC，BO 与 CA，CO 与 AB 的交点依次为 D、E、F，$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COA$ 的面积依次为 S_1、S_2、S_3. 由 B、O、C、A' 四点共圆知 $\angle OBC=\angle OCB=\angle BA'O$，从而有 $\triangle OBD\backsim\triangle OA'B$，得 $OA'=\frac{OB^2}{OD}=\frac{R^2}{OD}$. 同理，$OB'=\frac{R^2}{OE}$，$OC'=\frac{R^2}{OF}$. 所以，$\frac{OA'\cdot OB'\cdot OC'}{R^3}=\frac{R^3}{OD\cdot OE\cdot OF}=\frac{OA}{OD}\cdot\frac{OB}{OE}\cdot\frac{OC}{OF}=$

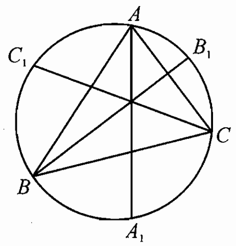


（第 7 题）

$\frac{S_1+S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1+S_2}{S_3}\cdot\frac{S_2+S_3}{S_1}=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_3}{S_2}\right)\left(\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}\right)=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+2\geqslant 8$，等号当且仅当 $S_1=S_2=S_3$ 时成立，此时 $\triangle ABC$ 为正三角形. 故 $OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

8. 证明：记 $AC=a$，$CE=b$，$AE=c$，对四边形 $ACEF$ 运用 Ptolemy 不等式得 $AC\cdot EF+CE\cdot AF\geqslant AE\cdot CF$. 因为 $EF=AF$，所以 $\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{c}{a+b}$. 同理 $\frac{DE}{DA}\geqslant\frac{b}{c+a}$，$\frac{BC}{BE}\geqslant\frac{a}{b+c}$. 故 $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$，令 $b+c=x$，$c+a=y$，$a+b=z$，则 $G=\frac{y+z-x}{2}$，$b=\frac{z+x-y}{2}$，$c=\frac{x+y-z}{2}$，$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-3\right)\geqslant\frac{3}{2}$. 等号成立的条件为 $ABCDEF$ 是圆内接六边形且 $a=b=c$.

9. 证明：对四边形 ACA_1B 应用 Ptolemy 定理，可得 $AA_1\cdot BC=AB\cdot A_1C+AC\cdot A_1B$. 令 $A_1B=A_1C=x$，注意到 $2x=A_1B+A_1C>BC$，有 $2AA_1=2\cdot\frac{ABx+ACx}{BC}=(AB+AC)\cdot\frac{2x}{BC}>AB+AC$，即 $AA_1>\frac{1}{2}(AB+AC)$. 同理可得 $BB_1>\frac{1}{2}(BA+BC)$，$CC_1>\frac{1}{2}(CA+CB)$，三式相加即得所证结果.



（第 9 题）

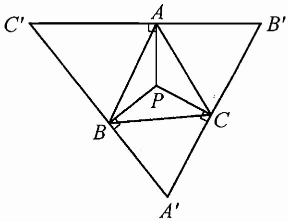
10. 证明：在边长给定的四边形中，以内接于圆时其面积为最大. 因此，只需证两个凸四边形为圆内接四边形的情况. 这时 $s=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，$s'$ 与之类似，其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=a+c=b+d$，$s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c'+d')=a'+c'=b'+d'$. 利用算术几何平均值不等式有 $aa'+bb'+cc'+dd'=(s-a)(s'-a')+(s-b)(s'-b')+(s-c)(s'-c')+(s-d)(s'-d')\geqslant 4[(s-a)(s'-a')(s-b)\cdot(s'-b')(s-c)(s'-c')(s-d)(s'-d')]^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{ss'}$.

11. 证明：因为 BI 平分 $\angle ABC$，CI 平分 $\angle ACB$，所以，$\frac{AI}{AA'}=\frac{AB}{AB+BA'}=\frac{AC}{AC+CA'}=\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}$.

记 $AB=c$，$AC=b$，$CB=a$，$s=a+b+c$，则 $\dfrac{AI}{AA'}=\dfrac{c+b}{a+b+c}=\dfrac{s-a}{s}$. 同理 $\dfrac{BI}{BB'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}=\dfrac{s-b}{s}$，$\dfrac{CI}{CC'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{s-c}{s}$. 所以，$\dfrac{AI\cdot BI}{AA'\cdot BB'}+\dfrac{BI\cdot CI}{BB'\cdot CC'}+\dfrac{CI\cdot AI}{CC'\cdot AA'}=\dfrac{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}{s^2}=\dfrac{3s^2-2(a+b+c)s+ab+bc+ca}{s^2}=1+\dfrac{ab+bc+ca}{s^2}$. 欲证不等式等价于 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{ab+bc+ca}{s^2}\leqslant\dfrac{1}{3}$…①. 因为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，所以，$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$. 所以 $\dfrac{ab+bc+ca}{s^2}\leqslant\dfrac{1}{3}$，此为①右端.

另一方面，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}>0$. 又 $(\sqrt{a})^2=a<b+c<b+2\sqrt{bc}+c=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，所以 $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}<0$. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})<0$. 因而 $[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c][(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c]<0$，推出 $(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})<0$，$(a+b-c)^2-4ab<0$，$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$，$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$，故 $\dfrac{ab+bc+ca}{s^2}>\dfrac{1}{4}$. 此为①左端.

12. 证明：如图，分别过 A、B、C 作 PA、PB、PC 的垂线，三垂线两两相交于 A'、B'、C'，于是 $\angle BPC=\pi-A'$，$\angle APB=\pi-C'$，$\angle APC=\pi-B'$. 由余弦定理可得



（第 12 题）

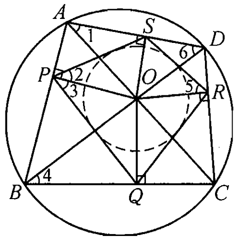
$$a^2=y^2+z^2+2yz\cos A',$$
$$b^2=x^2+z^2+2xz\cos B',$$
$$c^2=x^2+y^2+2xy\cos C',$$

相加并应用第 5 题嵌入不等式便得 $a^2+b^2+c^2=2(x^2+y^2+z^2)+2xy\cos C'+2xz\cos B'+2yz\cos A'\leqslant 2(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2)=3(x^2+y^2+z^2)$. 得证.

13. 证明：如图，O 是圆内接凸四边形 $ABCD$ 对角线交点，它到四边的垂足分别是 P、Q、R、S，则 $\angle 2=\angle 1=\angle 4=\angle 3$，所以 OP 平分 $\angle SPQ$.

同理可证：OQ，OR，OS 分别平分 $\angle PQR$，$\angle QRS$，$\angle RSP$. 所以四边形 $PQRS$ 内心为 O. 由圆外切四边形面积公式（见例 10 的解答过程）得

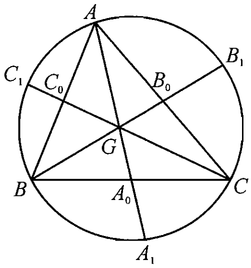
$S^2_{四边形PQRS}=PQ\cdot OR\cdot RS\cdot SP\cdot\sin^2\dfrac{\angle SPQ+\angle SRQ}{2}=PQ\cdot QR\cdot RS\cdot SP\cdot\sin^2\angle AOP$.（$\dfrac{\angle SPQ+\angle SRQ}{2}=\angle2+\angle5=\angle1+\angle6=180^\circ-\angle AOD$.）又因为 $S_{四边形PQRS}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOD=\dfrac{1}{2}(AO+OC)(BO+OD)\cdot\sin\angle AOD=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SP}{\sin A}+\dfrac{QR}{\sin A}\right)\cdot\left(\dfrac{PQ}{\sin B}+\dfrac{RS}{\sin B}\right)\cdot\sin\angle AOD\geqslant\dfrac{4\sqrt{PQ\cdot QR\cdot RS\cdot SP}\sin\angle AOD}{2\sin A\sin B}=\dfrac{2S_{四边形PQRS}}{\sin A\sin B}\geqslant 2S_{四边形PQRS}$.



（第 13 题）

所以 $S_{四边形PQRS}\leqslant\dfrac{m}{2}$，当且仅当 $ABCD$ 是矩形时等号成立.

14. 设 m_a 为边 a 上中线长，m_b 为边 b 上中线长，m_c 为边 c 中线长. 记 $M_a=AA_1$，$M_b=BB_1$，$M_c=CC_1$. 设 A_0，B_0，C_0 分别平分边 BC、CA、AB. 由相交弦定理得 $\dfrac{a^2}{4}=A_0B\cdot A_0C=A_0A_1\cdot A_0A=(M_a-m_a)\cdot m_a$，又由中线长公式，$m_a^2=AA_0^2=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\dfrac{1}{4}a^2$. 即 $4m_a^2=2(b^2+c^2+a^2)-3a^2=8k^2-3a^2$，其中 $k=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，且 $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.



（第 14 题）

于是 $8k^2-4m_a^2=3a^2=12\cdot\dfrac{a^2}{4}=12\cdot(M_a-m_a)\cdot m_a$，即 $M_a=m_a+\dfrac{8k^2-4m_a^2}{12m_a}=\dfrac{8\cdot(k^2+m_a^2)}{12m_a}=\dfrac{2k}{3}\cdot\left(\dfrac{k}{m_a}+\dfrac{m_a}{k}\right)\geqslant\dfrac{4k}{3}$.

同理，$M_b\geqslant\dfrac{4k}{3}$，$M_c\geqslant\dfrac{4k}{3}$.

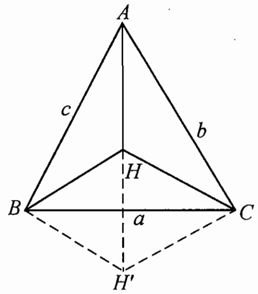
于是 $M_a+M_b+M_c\geqslant 4k=2\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{3\cdot(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}$（由柯西不等式）$\geqslant\dfrac{4}{3}\cdot(m_a+m_b+m_c)$. 得证.

15. 证明：设 $AF=x$，$BF=y$，$CF=z$. 由 $S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CDF}$，得 $DF=\dfrac{xz}{x+z}$. 同理，$EF=\dfrac{xy}{x+y}$. 于是，只要证明 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+$

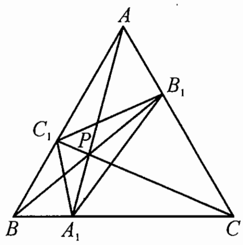
$\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant 4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2+\left(\frac{xz}{x+z}\right)^2+\left(\frac{xy}{x+y}\right)\left(\frac{xz}{x+z}\right)}$. 因为 $x+y\geqslant\frac{4xy}{x+y}$，$x+z\geqslant\frac{4xz}{x+z}$，所以，只要证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(x+y)(x+z)}$.

平方化简后得 $2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\geqslant x^2+2(y+z)x+yz$，再平方化简后得 $3(x^2-yz)^2\geqslant 0$，即原不等式成立.

16. 证明：不妨设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，且不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$. 如图，作 H 关于 BC 的对称点 H'，连结 $H'H$、$H'B$、$H'C$. 因 $\angle BCH'=\angle BCH$，$\angle BCH=\angle BAH$，所以，A、B、H'、C 四点共圆. 则由托勒密定理知 $AH'\cdot BC=CH'\cdot AB+BH'\cdot AC\Leftrightarrow(2h_a-AH)BC=CH\cdot AB+BH\cdot AC\geqslant CH\cdot BC+BH\cdot BC$. 故 $2h_a-AH\geqslant BH+CH$，因此 $AH+BH+CH\leqslant 2h_a$. 因为 h_a 是三条高线中最长的，所以，$AH+BH+CH\leqslant 2h_{\max}$.



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图，由余弦定理 $A_1B_1^2=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C\geqslant 2A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C=A_1C\cdot B_1C$. 同理，$B_1C_1^2\geqslant B_1A\cdot C_1A$，$C_1A_1^2\geqslant C_1B\cdot A_1B$. 由塞瓦定理得 $\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=1$.

所以，$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant\sqrt{A_1C\cdot B_1C\cdot B_1A\cdot C_1A\cdot C_1B\cdot A_1B}=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\cdot\sqrt{\frac{A_1C\cdot B_1A\cdot C_1B}{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}}=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$.

习 题 11

1. 解：

显然 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

则 $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}}{2}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

故 $|\overrightarrow{AF}|^2+|\overrightarrow{BF}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OF})=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OF}+3\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OF}=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-[2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-3\overrightarrow{OF}]\cdot\overrightarrow{OF}=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=3$.

2. 证明：(1) 设△ABC 外接圆半径为 R，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DF}&=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF})\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BF}\\&=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BF}\\&=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\angle DBO-|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cdot\cos\angle FBO\\&=R\cdot|\overrightarrow{BD}|\sin\angle BAC-R\cdot|\overrightarrow{BF}|\sin\angle ACB\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BA}|.\end{aligned}$$

因为四边形 $AFDC$ 为圆内接四边形，所以 $|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|$.

则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DF}=0$.

故 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{DF}$，即 $OB\perp DF$.

同理，$OC\perp DE$.

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})\\&=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AN}\\&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AN}\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AN}[\text{因为}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{AN}]\\&=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FA})\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FA}\\&=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FA}(\text{因为}\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{FN},\text{由(1)})\\&=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{FA}=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{FA}|\cdot\cos\angle OBA\\&=R\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC\cdot\sin\angle ACB\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle BAC=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

同理，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

则 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. 有 $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{MN}$. 即 $OH\perp MN$.

3. 证明：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CN})\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CN}\end{aligned}$$

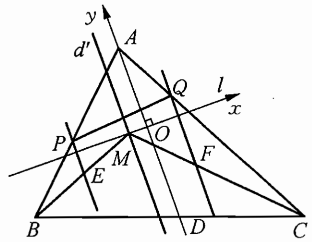
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}$（因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QC}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CN}$）

$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CN}$

$=|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|\cdot\cos\angle BCQ-|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{CN}|\cdot\cos\angle DCN.$

因为$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CN}|$，$|\overrightarrow{CQ}|=|\overrightarrow{CD}|$，$\angle BCQ=\angle DCN$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}=0\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{QN}$，即$AC\perp QN$.

4. 证明：如图，以AD所在直线为y轴、直线l为x轴建立直角坐标系. 设点$A(0,a)$、$D(0,-d)$、$M(m,0)$、$B(-b,-d+c)$、$C(b,-d-c)$.



（第4题）

故$l_{AB}: y=\dfrac{a+d-c}{b}x+a.$

又$x_E=\dfrac{m-b}{2}$，而$PE\perp x$轴，则

$$P\left(\frac{m-b}{2},\ \frac{m-b}{2}\cdot\frac{a+d-c}{b}+a\right).$$

同理，$Q\left(\dfrac{m+b}{2},\ \dfrac{m+b}{2}\cdot\dfrac{-(a+d+c)}{b}+a\right).$

故直线d'的斜率为

$$k=\frac{-1}{k_{pq}}$$

$$=\frac{\dfrac{m+b}{2}-\dfrac{m-b}{2}}{\dfrac{m-b}{2}\cdot\dfrac{a+d-c}{b}+a+\dfrac{a+d+c}{b}\cdot\dfrac{m+b}{2}-a}$$

$$=\frac{b^2}{ma+md+bc}.$$

又直线l'过点M，则l'的方程为

$$y=\frac{b^2}{ma+md+bc}(x-m),\qquad ①$$

其中，m为变量，a、d、b、c均为常量.

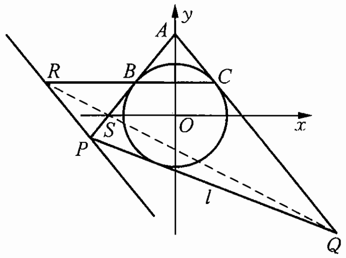
由式①得

$$m[y(a+d)+b^2]=b(bx-cy).$$

因此，令$y_0=\dfrac{-b^2}{a+d}$. 则$x_0=\dfrac{-bc}{a+d}$.

所以，直线 l' 恒过定点 $\left(\dfrac{-bc}{a+d},\ \dfrac{-b^2}{a+d}\right)$.

5. 证明：以 O 为原点，OA 所在直线为 y 轴建立右手直角坐标系，且不妨设⊙O 半径为 1. $B(-x_0,\ y_0)$，$C(x_0,\ y_0)$ $(x_0^2+y_0^2=1)$.



（第 5 题）

取 AB 与 x 轴交点 S，则 $A\left(0,\ \dfrac{1}{y_0}\right)$，$S\left(-\dfrac{1}{x_0},\ 0\right)$. 设直线 PQ: $x_1x+y_1y=1$，$x_1^2+y_1^2=1$. 所以 $\left.\begin{array}{l} l_{AB}: y=\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{1}{y_0} \\ l_{PQ}: x_1x+y_1y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\dfrac{y_0-y_1}{x_1y_0+y_1x_0},\ \dfrac{x_1+x_0}{x_1y_0+y_1x_0}\right)$. 同理，$Q\left(\dfrac{y_0-y_1}{x_1y_0-y_1x_0},\ \dfrac{x_1-x_0}{x_1y_0-y_1x_0}\right)$ 则

$$l_{PR}: y=-\frac{x_0}{y_0}\left(x-\frac{y_0-y_1}{x_1y_0+y_1x_0}\right)+\frac{x_1+x_0}{x_1y_0+y_1x_0} \cdots ①.$$

在①中令 $y=y_0$，所以

$$R\left(\frac{2x_0y_0-x_0y_1+x_1y_0-x_1y_0^3-y_1x_0y_0^2}{x_0(x_1y_0+y_1x_0)},\ y_0\right).$$

下证：Q、R、S 三点共线. （＊）

（＊）$\Leftrightarrow K_{RS}=K_{QS} \Leftrightarrow \dfrac{y_0x_0(x_1y_0+y_1x_0)}{2x_0y_0-x_0y_1+x_1y_0-x_1y_0^3-y_1x_0y_0^2+x_1y_0+y_1x_0}=\dfrac{x_0x_1-x_0^2}{x_0y_0+x_1y_0-2x_0y_1} \Leftrightarrow 2x_0x_1y_0-x_0x_1y_1+x_1^2y_0-x_1^2y_0^3-x_0x_1y_0^2y_1+x_1^2y_0+x_0x_1y_1-2x_0^2y_0+x_0^2y_1-x_0x_1y_0+x_0x_1y_0^3+x_0^2y_1y_0^2-x_0x_1y_0-x_0^2y_1=x_0x_1y_0^3+x_1^2y_0^3-2x_0x_1y_1y_0^2+x_0^2y_0^2y_1+x_0x_1y_0^2y_1-2x_0^2y_0y_1^2 \Leftrightarrow 2x_1^2y_0-2x_1^2y_0^3-2x_0^2y_0=-2x_0^2y_0y_1^2$

由于 $y_0^2=1-x_0^2$，$y_1^2=1-x_1^2$. ＊式显然成立成立.

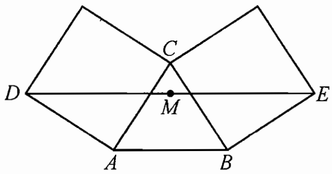
所以（＊）得证. 又 A 为定点，所以 B、C 均为定点. 所以 S 为定点. 因此 QR 恒过定点 $\left(-\dfrac{1}{x_0},\ 0\right)$，得证.

6. 设图中各字母表示相应点的复数，由题设，应有

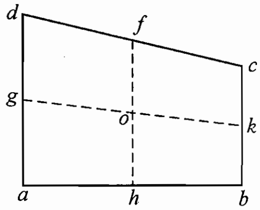
$$D=A+(C-A)\mathrm{i},$$
$$E=B+(B-C)\mathrm{i},$$

从而 $M=\dfrac{(D+E)}{2}=\dfrac{A(1-\mathrm{i})+B(1+\mathrm{i})}{2}$ 与 C 无关.（事实上，△AMB 为等

腰直角三角形).



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 证明:如图 $abcd$ 是任意四边形,h, k, f, g 是各边的中点.

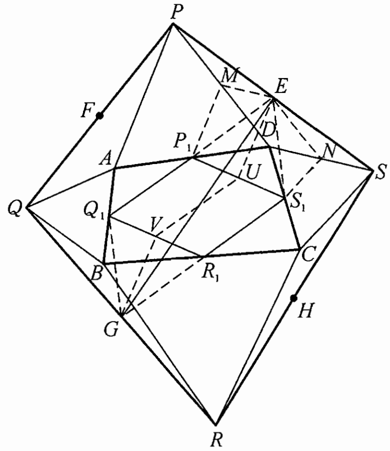
因为 $h=\dfrac{a+b}{2}$, $k=\dfrac{b+c}{2}$, $f=\dfrac{c+d}{2}$, $g=\dfrac{d+a}{2}$

故$\overrightarrow{hf}$ 的中点为$O_1=\dfrac{1}{2}(h+f)=\dfrac{1}{4}(a+b+c+d)$

$\overrightarrow{kg}$ 的中点为$O_2=\dfrac{1}{2}(k+g)=\dfrac{1}{4}(a+b+c+d)$

由此知$O_1=O_2$. 这就是要证得结果.

8. 解:若四边形 $ABCD$ 是正方形时,可得 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.



(第 8 题)

下面证明:$\dfrac{y}{x}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

设 P_1、Q_1、R_1、S_1 分别是边 DA、AB、BC、CD 的中点,SP、PQ、QR、RS 的中点分别为 E、F、G、H. 则 $P_1Q_1R_1S_1$ 是平行四边形.

连结 P_1E, S_1E,设点 M, N 分别是 DP, DS 的中点,则

$$DS_1=S_1N=DN=EM,$$
$$DP_1=P_1M=MD=EN,$$

又
$$\begin{aligned}\angle P_1DS_1&=360°-60°-60°-\angle PDS\\&=240°-(180°-\angle END)\\&=60°+\angle END=\angle ENS_1=\angle EMP_1,\end{aligned}$$

所以
$$\triangle DP_1S_1\cong\triangle MP_1E\cong\triangle NES_1,$$

从而,$\triangle EP_1S_1$ 是正三角形.

同理可得，$\triangle GQ_1R_1$ 也是正三角形. 设 U、V 分别是 P_1S_1、Q_1R_1 的中点，于是有

$$EG \leqslant EU+UV+VG=\frac{\sqrt{3}}{2}P_1S_1+P_1Q_1+\frac{\sqrt{3}}{2}Q_1R_1$$

$$=P_1Q_1+\sqrt{3}P_1S_1=\frac{1}{2}BD+\frac{\sqrt{3}}{2}AC,$$

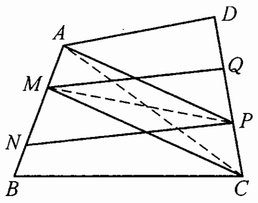
同理可得 $$FH \leqslant \frac{1}{2}AC+\frac{\sqrt{3}}{2}BD,$$

把上面两式相加，得

$$y \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}x,$$

即 $$\frac{y}{x} \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

9. 证明：如图，连结 AC、MP. 因 $S_{\triangle ACP}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}$，$S_{\triangle ACM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACB}$，则 $S_{\triangle ACP}+S_{\triangle ACM}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACB})$，即 $S_{\text{四边形}AMCP}=\frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}$. 又 $S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle MPC}$，$S_{\triangle MPN}=S_{\triangle MPA}$，则 $S_{\triangle MPQ}+S_{\triangle MPN}=S_{\triangle MPC}+S_{\triangle MPA}$，即 $S_{\text{四边形}MNPQ}=S_{\text{四边形}AMCP}$. 综上，$S_{\text{四边形}AMCP}=S_{\text{四边形}MNPQ}=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{四边形}ABCD}$.

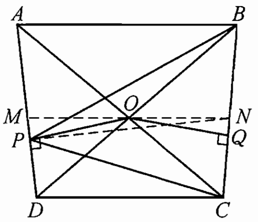


（第 9 题）

10. 证明：将平面上的点视为复数，由于四边形 $P_1P_2P'_1P_6$ 为菱形，则 $P'_1=P_2+P_6-P_1$. 同理，$P'_3=P_4+P_2-P_3$，$P'_5=P_6+P_4-P_5$. 故 $P'_1P'_3=P'_3-P'_1=(P_1+P_4)-(P_3+P_6)$，$P'_3P'_5=(P_3+P_6)-(P_2+P_5)$，$P'_5P'_1=(P_2+P_5)-(P_1+P_4)$. 因此，$\triangle P'_1P'_3P'_5$ 全等于 P_1+P_4、P_2+P_5、P_3+P_6 三点所成的三角形. 同样，由 $P'_2=P_3+P_1-P_2$，$P'_4=P_5+P_3-P_4$，$P'_6=P_1+P_5-P_6$，得到 $\triangle P'_2P'_4P'_6$ 也全等于 P_1+P_4、P_2+P_5、P_3+P_6 三点所成的三角形.

因此，$\triangle P'_1P'_3P'_5 \cong \triangle P'_2P'_4P'_6$.

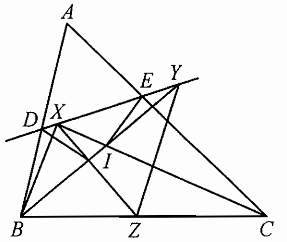
11. 证明：如图，连结 PN，过 O 作 $MN \parallel AB$，交 AD 于 M，BC 于 N，则 $\frac{BP}{AB}=\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle BPA}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle BPA}=\frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle BPA}=\frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle DPC}=\frac{PC}{DC}$.



（第 11 题）

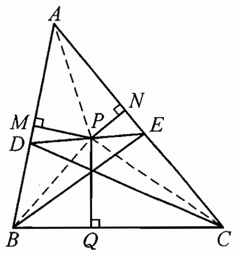
于是 $\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BN}{NC}$. 故 PN 平分 $\angle BPC$，结合 $\angle BPA=\angle CPD$ 知 $NP\perp AD$，又 $OM=AB\cdot\dfrac{DO}{DB}=AB\cdot\dfrac{CO}{CA}=ON$，所以 OP 为 $\mathrm{Rt}\triangle MNP$ 斜边 MN 的中线，故 $OP=\dfrac{1}{2}\cdot MN$，同理 $OQ=\dfrac{1}{2}MN$. 故 $OP=OQ$.

12. 证明：如图，设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 首先证明：D、B、I、X 和 E、I、C、Y 分别四点共圆. 注意到 $\angle XIB=180^\circ-\angle BIC=\dfrac{1}{2}\angle B+\dfrac{1}{2}\angle C=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$. 由 $\triangle ADE$ 为等腰三角形可得 $\angle ADE=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$. 所以，$\angle XIB=\angle ADE$. 因此，$D$、$B$、$I$、$X$ 四点共圆. 同理，E、I、C、Y 四点共圆. 由此可知 $XZ=YZ$，且它们分别是 $\mathrm{Rt}\triangle XBC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle YBC$ 的中线. 所以，$\triangle XYZ$ 是等边三角形的充要条件是 $\angle YXZ=60^\circ$. 易知 $\angle YXZ=60^\circ\Leftrightarrow\angle YXZ=\angle YXC+\angle CXZ=\angle ABY+\dfrac{1}{2}\angle C=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=60^\circ\Leftrightarrow\angle A=60^\circ$. 因此，所证命题成立.



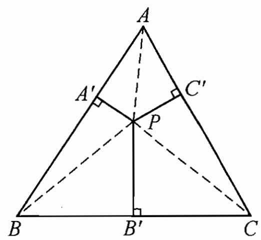
（第 12 题）

13. 证明：设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，连结 PA、PB、PC. 由 $S_{\triangle PAC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{a+b}S_{\triangle ABC}$，知 $PN=\dfrac{2S_{\triangle PAC}}{b}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{a+b}$. 由 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c}{a+c}S_{\triangle ABC}$，知 $PM=\dfrac{2S_{\triangle PAB}}{c}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{a+c}$. 又 $S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BCE})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)S_{\triangle ABC}=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)S_{\triangle ABC}$，则 $PQ=\dfrac{2S_{\triangle PBC}}{a}=\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)S_{\triangle ABC}=PM+PN$.



（第 13 题）

14. 证明：连结 AP、BP、CP，$\triangle ABP$ 中，$AP^2-AA'^2=BP^2-BA'^2(=PA'^2)$，同理 $BP^2-BB'^2=CP^2-CB'^2$，$CP^2-CC'^2=AP^2-AC'^2$，以上三式相加，得 $AA'^2+BB'^2+CC'^2=BA'^2+CB'^2+AC'^2$，即 $(AA'^2-BA'^2)+(BB'^2-CB'^2)+(CC'^2-AC'^2)=0$，$(AA'+BA')(AA'-BA')+(BB'+CB')(BB'-$



（第 14 题）

$CB')+(CC'+AC')(CC'-AC')=0$.注意到 $AA'+BA'=BB'+CB'=CC'+AC'$,所以 $AA'-BA'+BB'-CB'+CC'-AC'=0$.

即 $AA'+BB'+CC'=BA'+CB'+AC'$.　*

显然,$r_1=\dfrac{AC'+C'P-AP}{2}$，$r_2=\dfrac{BA'+A'P-BP}{2}$，$r_3=\dfrac{CB'+PB'-PC}{2}$，$r_4=\dfrac{AA'+A'P-AP}{2}$，$r_5=\dfrac{BB'+B'P-PB}{2}$，$r_6=\dfrac{CC'+C'P-CP}{2}$.

由 * 即有:$r_1+r_2+r_3=r_4+r_5+r_6$.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 平面几何/范端喜，邓博文编著. —上海：华东师范大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5617-9169-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①范…②邓… Ⅲ.①几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 261956 号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷
平面几何

编　　著　范端喜　邓博文
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　刘　艺
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海商务联西印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　12
字　　数　218 千字
版　　次　2012 年 7 月第一版
印　　次　2013 年 1 月第二次
印　　数　11001—16100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9169-1/G·5473
定　　价　24.00 元

出 版 人　朱杰人